

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540099

研究課題名（和文）境界CR構造によるトーリック特異点のモジュライ空間の研究

研究課題名（英文）Research on CR-approach to the moduli space of toric singularities

研究代表者

宮嶋 公夫（Miyajima, Kimio）

鹿児島大学・理工学研究科・教授

研究者番号：40107850

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,700,000 円、（間接経費） 810,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究は、境界CR構造の変形を通じて正規孤立特異点の変形へアプローチするという従来とは異なる視点に基づく研究の一環として行われ、特異点の個別性に基づいた詳細なモジュライ空間の構造の把握を目的とした。特に、トーリック特異点の代表例である2次元巡回商特異点の変形を中心として研究を行い、典型的なArtin変形族のCR表示とそれに基づく特異点の変形の記述を行った。また、非特異部分のモジュライに関連して、複素構造の変形の2次障害の新しい消滅方向が見出された。

研究成果の概要（英文）：This research is an application of the deformation theory of strongly pseudo-convex CR structures to the moduli space of normal isolated singularities of complex analytic spaces, that is a new approach rather than a standard algebro-geometric approach to deformation of isolated singularities. The main purpose of this research is to describe a detailed structure of the moduli space of normal isolated singularity germs in terms of deformation of boundary CR structures. In this research, CR description of the Artin deformation of typical cyclic quotient surface singularities are obtained and some related deformation phenomena of isolated singularities are also described from the CR viewpoint. Concerning the moduli of the regular part, a new condition for the vanishing of the second obstruction of deformation of complex structure is found.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：CR構造 特異点 複素解析幾何

## 1. 研究開始当初の背景

空間の特異点は通常の数学手法が破綻するところとして現れる。また、そこは空間全体のゆがみが集中する場所でもある。複素解析空間の孤立特異点は代数的であることが知られており、これまではその定義方程式を通じた代数幾何的アプローチによって詳細な研究がなされてきた。しかし、その空間から離れられない我々にとって、定義方程式の情報に頼ることなく空間の内在的性質から特異点を論じることがより自然な視点であると思われる。その視点の下での特異点の研究が合理的であることは、次に挙げる Harvey-Lawson の定理 ([1]) によって保証されている：孤立特異点はその強擬凸境界上の CR 構造によって一意に決定される、また、高次元複素ユークリッド空間内に存在しているコンパクト強擬凸 CR 多様体は必ず特異点の境界となる。

孤立特異点とコンパクト強擬凸 CR 多様体の間のこの基本対応にもとづいて孤立特異点の変形を研究するという方針は倉西正武 ([2]) によって提唱され、従来は代数幾何学によって構成されていた完備変形族を再現する強擬凸 CR 構造の変形族が研究代表者 ([3]) によって構成されていた。一般論としての完備変形族の構成はここに完成したわけであるが、次の段階では、特異点のモジュライ空間の詳細な構造を CR 構造の変形によって記述し、新しい視点からのアプローチを確立することが求められる。研究代表者および研究分担者による先行研究では、 $C^*$ -作用を持つ孤立特異点に対して、その境界上に引き起こされる  $S^1$ -作用との一般的対比に基づくモジュライ空間の構造解析を行っており、さらに詳しい構造解析が待たれている状況であった。また、赤堀隆夫 (分担者) による  $E_j$ -部分複体に基づく CR 構造の変形理論 (倉西完備の意味での) 基本的同値関係が Hamilton 流によってもたらされることを明らかにするなど、新しい進展を見せていた。

## 文献表

- [1] L. Harvey and F. Lawson : On the boundaries of complex analytic varieties, I, Ann. of Math. **102** (1975), 223-290; II, ibid. **106** (1977), 213-238.
- [2] M. Kuranishi : Application of  $\bar{\partial}_b$  to deformations of isolated singularities, Proc. Sympos. Pure Math. **30** (1977), 97-106.
- [3] K. Miyajima : CR construction of the flat deformations of normal isolated singularities, J. Alg. Geom. **8** (1999), 403-470.

## 2. 研究の目的

上記のように、孤立特異点の変形と境界 CR 構造の変形は表裏一体の関係にあるという視点の下に、本研究では境界 CR 構造の変形を通じた特異点のモジュライの記述を深化させることを目的とした。一

般的に、モジュライを複素構造や CR 構造などの幾何構造を使って具体的に記述することは非常に難しく、個々の場合の特殊性に頼らざるを得ない。本研究では巡回商曲面特異点を典型例とするトーリック特異点に関して、そのモジュライ空間の詳細な構造を CR 構造によって記述する事を目標にした。具体的には、次のように当面の目標を設定し、CR アプローチが従来の代数的アプローチに匹敵する深化を持ち得ることを示す事を目的にした。

- (1) 有理曲面特異点は商特異点の構造を持ち、その境界 CR 構造は実 3 次元球面上の不変 CR 構造と捉えられる。この視点の下に、実 3 次元球面上の不変 CR 構造の完備族と有理曲面特異点の完備族の代数的構成との関係を明らかにする。
- (2) 有理曲面特異点の完備変形族には同時特異点解消を伴う所謂 Artin 変形に対応する部分の存在が知られている。しかし、特異点解消は境界 CR 構造には影響を及ぼさないで、実 3 次元球面上の不変 CR 構造の完備族には同時特異点解消の現象は反映され難いと思われる。この難点を克服して、同時特異点解消が実 3 次元球面上の不変 CR 構造の変形に反映されるメカニズムを明らかにする。
- (3) 巡回商曲面特異点の代数幾何的 Artin 変形族の構成に関しては、Hamm-Riemenschneider によって発見されたトーリック構造に依拠した双対性がある。実 3 次元球面上の不変 CR 構造の変形の視点からその双対性を考察する。
- (4) 孤立特異点の非特異部分の変形に対応する CR 構造の変形に関して、赤堀隆夫教授による  $E_j$ -複体に基づく変形理論を実接触構造を固定した CR 構造の変形理論として深化させる。

## 3. 研究の方法

### (1) 特異点を主題とする研究会での研究交流

特異点を主題とする研究会で、新しい知見や最新の研究情報を得て本研究の視点からの検討を加えた。(日豪特異点シンポジウム, 研究集会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」, Franco-Japanese Symposium on Singularities, IPMU 研究会「Primitive forms and related subjects」, など)

### (2) 複素解析学や幾何学に関する研究集会での研究交流

CR 構造の変形と特異点の変形およびモジュライ空間に関する研究の基礎となる手法の改良のために、複素解析学や幾何学に関する最新の研究手法や研究動向を学んだ。(複素解析学葉山シンポジウム, 多変数関数論冬セミナー, 幾何学シンポジウム, MSJ-SI「モジュライ理論の発展」, East Asian Symplectic Conference, Pacific Rime Complex Geometry, 葉層構造研究会, など)

(3) 研究組織内での討論とコンピュータによる実例計算

研究組織内での討論とコンピュータによる実例計算によって考察を強化しながら研究を進めた。

(4) 研究会での発表や専門家によるレビュー

研究会での発表や専門家によるレビューを通じて本研究への批判を受け、随時、研究の見直しを行った。(第4回・第5回日豪特異点シンポジウム, 研究集会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」(2011年度, 2012年度, 2013年度), 多変数関数論冬セミナー(2012年度, 2013年度), Complex Analysis in Several Variables XIV, East Asia Mini-Workshop on CR-Geometry, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis, 第9回代数・解析・幾何学セミナー, などでの研究発表, Prof. O. Riemenschneider (Univ. of Hamburg, Germany) の招聘)

#### 4. 研究成果

(1) 2次元有理特異点のモジュライ空間には、同時特異点解消を伴う部分(いわゆる Artin 変形の部分)の存在が知られており、特に錐特異点の場合には Artin 変形族の定義方程式が G. N. Tjurina によって得られている。先行研究で求められていた2次元巡回商特異点の1次変形空間のCR表示を拡張して Artin 変形族に対応するCR構造の変形族の高次項の構成を行い、錐特異点と超曲面特異点の場合には簡便な構成アルゴリズムが成り立つこと、さらに錐特異点の場合には2次変形の障害が消滅することを示した。

(2) 2次変形の障害の消滅は、変形パラメータの非特異性を意味するだけでなく、変形族が1次変形で与えられることを意味し、非常に特殊な場合となる。2次変形の障害の消滅に関連して、Prof. A. Harris (New England Univ., Australia) との共同研究で、非特異部分の複素構造の変形空間において2次変形の障害が消滅する方向をもたらす一つの十分条件が得られた。

(3) 錐特異点の場合に、(1)で構成した Artin 変形族に対応する部分のCR構造の変形族は特異点解消空間の複素構造の変形族へと拡張可能であることを示し、同時特異点解消をCR構造の変形の視点から再現した。

(4) 超曲面特異点の場合には、CR変形族は無限項を持ち(3)の場合のような簡便な取り扱いはできない。しかし、錐構造と超曲面構造を兼ね備えている有理2重点に関しては、それぞれの構造に基づいての同時特異点解消のCR表示が得られ、それぞれが同時特異点解消への微分幾何的アプローチと代数幾何的アプローチに対応していることを示した。

(5) 赤堀隆夫教授(分担者)は、固定された実接触形式の下で与えられたCR-スカラー曲率を持つCR構造の存在を問うという形のCR-山辺タイプ問題の解決へ向けてのモデルケース(Heisenberg群)では、CR-スカラー曲率のCRハミルトン流に沿った変分の主要部が準楕円のであることを示した。

(6) また、赤堀隆夫教授によって、 $T'$ -係数接コーシー・リーマン複体の部分複体  $E_j$  (いわゆる赤堀複体)を考察する事により、Q-曲率の研究において最近注目されている部分的可積分概CR構造は可積分CR構造によって(倉西完備の意味で)近似されることが示された。

これらの成果については、論文および専門分野での学会発表として発表された。

#### 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計12件)

- ① A. Harris, K. Miyajima: Involutive deformations of the regular part of a nomad surface, in “Topics on real and complex singularities (ed. S. Koike et al.)”, 査読有, 2014, 51–59
- ② T. Akahori: On the CR Hamiltonian flows and CR Yamabe problem, in “Topics on real and complex singularities (ed. S. Koike et al.)”, 査読有, 2014, 1–12

〔学会発表〕(計26件)

- ① 赤堀 隆夫: On partially integrable almost CR structures, 多変数関数論冬セミナー, 2013.12.22, コラッセ福島, 福島市
- ② K. Miyajima: Introduction to s.p.c CR structures and its deformations, Seminar on Functional Analysis and Global Analysis 2013, 2013.11.20, 東京理科大学理工学部, 野田市
- ③ K. Miyajima: CR approach to deformation of normal isolated singularities, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities, 2013.09.09, The University of Sydney, Australia
- ④ T. Akahori: On the versal family of CR structures, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities, 2013.09.09, The University of Sydney, Australia
- ⑤ 宮嶋 公夫: 強擬凸CR構造とその変形入門 (1), (2), 研究集会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」, 2012.01.20-21, 鹿児島大学理学部, 鹿児島市
- ⑥ T. Akahori: On the complex analytic CR-Hamilton flows, The 4th Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, 2011.11.22, 兵庫教育大学神戸サテライト教室,

神戸市

〔図書〕 (計 2 件)

- ① Ed. H. Hironaka, T. Akahori, G. Komatsu, K. Miyajima, M. Namba, D. H. Phong, K. Yamaguchi: Selected Papers of Masatake Kuranishi, World Scientific (2013), 633 ページ
- ② 宮嶋 公夫: CR 多様体, 藤木明編「倉西数学への誘い」岩波書店 (2013), 189 ページ, 133-145

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA, Kimio)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科  
・教授  
研究者番号: 4 0 1 0 7 8 5 0

### (2) 研究分担者

與倉 昭治 (YOKURA, Shoji)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科  
・教授  
研究者番号: 6 0 1 8 2 6 8 0

愛甲 正 (AIKOU, Tadashi)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科  
・教授  
研究者番号: 0 0 1 9 2 8 3 1

小櫃 邦夫 (OBITSU, Kunio)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科  
・准教授  
研究者番号: 0 0 3 2 5 7 6 3

赤堀 隆夫 (AKAHORI, Takao)  
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科  
・教授  
研究者番号: 4 0 1 1 7 5 6 0