

優良解探索遺伝的アルゴリズムによる非一様有理 B スプラインを用いた  
自由曲面シェル構造の形態創生

Structural Morphogenesis for Free-Form Surface Shell Using Non-Uniform Rational B-Spline  
by Genetic Algorithms with Manipulation of Decent Solution Search

2021 年 3 月

鹿児島大学大学院 理工学研究科 総合理工学専攻  
博士(工学)

沖田 裕介  
(OKITA Yusuke)





## 目次

<b>第 1 章 序論</b>	<b>1</b>
1.1 研究の背景 .....	3
1.2 研究の目的と方法 .....	6
1.3 研究の位置付け .....	6
1.4 論文の構成 .....	7
<b>第 2 章 自由曲面シェル構造の形態創生問題定式化</b>	<b>9</b>
2.1 構造形態創生問題の定式化.....	11
2.2 自由曲面形態とパラメトリック曲面.....	14
2.3 構造解析 .....	14
2.3.1 有限要素法定式化.....	14
2.3.2 梁要素の離散化定式化.....	16
2.3.3 シェル要素の離散化定式化 .....	21
2.3.4 グリッドシェルの許容応力度計算 .....	29
2.3.5 RC シェルの許容応力度計算.....	31
2.4 解析パラメータ .....	32
<b>第 3 章 パラメトリック曲面</b>	<b>33</b>
3.1 代表的なパラメトリック曲面.....	35
3.1.1 基底関数 .....	36
3.1.2 ベジエ .....	38
3.1.3 B スプライン .....	40
3.2 NURBS .....	42
3.3 微分連続性 .....	45
3.4 NURBS パラメータ .....	46
3.4.1 ノットベクトル .....	46
3.4.2 階数 .....	52
3.4.3 重み係数 .....	55
3.5 NURBS 利用による形態表現 .....	61
3.6 曲面に対する形状特徴指標.....	64
3.6.1 パラメトリック曲面における曲率の算定 .....	64
3.6.2 NURBS の偏微分 .....	68

---

3.6.3 形状特徴指標.....	69
3.7 制御点配置.....	72
3.8 曲面補間手法.....	73
3.8.1 全点列座標指定.....	73
3.8.2 任意点座標指定.....	77
 第4章 優良解探索解法.....	81
4.1 解探索手法の分類.....	83
4.2 優良解の定義.....	84
4.3 ISGA .....	86
4.3.1 計算アルゴリズム .....	86
4.3.2 クラスタリング .....	89
4.3.3 端切り法 .....	90
4.3.4 優良解選択率.....	91
4.4 多様度指数.....	92
4.5 ISGA の探索概念 .....	94
4.6 形態創生アルゴリズム.....	96
 第5章 グリッドシェル構造の形態創生.....	97
5.1 1m 間隔配置モデルのひずみエネルギー最小化(Model-A).....	99
5.1.1 解析モデル .....	99
5.1.2 SGA による数値結果.....	100
5.1.3 ISGA による数値結果 .....	104
5.1.4 考察.....	116
5.2 2m 間隔配置モデルのひずみエネルギー最小化(Model-B).....	117
5.2.1 解析モデル .....	117
5.2.2 SGA による数値結果.....	118
5.2.3 ISGA による数値結果 .....	122
5.2.4 考察.....	134
5.3 対角状配置モデルのひずみエネルギー最小化(Model-C) .....	135
5.3.1 解析モデル .....	135
5.3.2 SGA による数値結果.....	136
5.3.3 ISGA による数値結果 .....	140
5.3.4 考察.....	152

---

5.4	1m 間隔配置モデルのひずみエネルギーと部材体積の同時最小化(Model-D).....	153
5.4.1	解析モデル.....	153
5.4.2	SPEA2 による数値結果.....	154
5.4.3	ISGA による数値結果.....	159
5.4.4	考察.....	172
5.5	凸形状を有する非対称モデルのひずみエネルギー最小化(Model-E).....	173
5.5.1	解析モデル.....	173
5.5.2	SGA による数値結果.....	174
5.5.3	ISGA による数値結果.....	178
5.5.4	考察.....	190
5.6	まとめ.....	191
 <b>第 6 章 RC シェル構造の形態創生</b>		<b>193</b>
6.1	解析モデル.....	195
6.2	鉄筋の許容応力度を考慮したひずみエネルギー最小化 (Model-F).....	196
6.2.1	SGA による数値結果.....	197
6.2.2	ISGA による数値結果.....	201
6.2.3	考察.....	214
6.3	ひび割れ曲げモーメントを考慮したひずみエネルギー最小化 (Model-G).....	215
6.3.1	板厚の設定について.....	216
6.3.2	SGA による数値結果.....	217
6.3.3	ISGA による数値結果.....	221
6.3.4	考察.....	234
6.4	ひび割れ曲げモーメントを考慮したひずみエネルギーと部材総重量の同時最小化 (Model-H).....	235
6.4.1	SPEA2 による数値結果.....	236
6.4.2	ISGA による数値結果.....	241
6.4.3	考察.....	254
6.5	まとめ.....	255
 <b>第 7 章 考察</b>		<b>257</b>
7.1	大域的最適解の形態比較.....	258
7.2	優良解形態の考察.....	260
7.3	まとめ.....	261

第 8 章 結論	263
付録	267
付録 A NURBS のノットベクトルの検討	268
A.1 内部ノット対称	269
A.2 内部ノット非対称	274
A.3 内部ノット多重	285
A.4 ノットベクトルに関する考察	299
付録 B 遺伝的アルゴリズム系解法の基幹部	301
B.1 遺伝的アルゴリズム系解法の概要	301
B.2 単純遺伝的アルゴリズムの計算手順	302
B.3 初期個体群の生成	303
B.4 コーデイング	303
B.5 選択方式	305
B.6 交叉方式	306
B.7 突然変異	308
B.8 平均情報エントロピー	309
付録 C SPEA2 (strength Pareto evolutionary algorithm 2)	311
C.1 SPEA2 の計算手順	311
C.2 端切り法	312
付録 D 2 変数関数を用いた数値計算例	313
D.1 2 変数関数の解空間	313
D.2 単一目的最適化問題(SOP)	315
D.3 多目的最適化問題(MOP)	324
D.4 考察	334
参考文献	335
本研究に関連した論文・賞歴	343
謝辞	347

## 記号

$f$	: 総ひずみエネルギー(単一目的最適化問題における目的関数)
$f_t$	: 総ひずみエネルギー(多目的最適化問題における目的関数)
$f_v$	: 部材総重量(多目的最適化問題における目的関数)
$\mathbf{A}$	: 部材特性ベクトル( $j = 1, 2, \dots$ , 要素数)
$\mathbf{R}$	: 節点情報ベクトル( $i = 1, 2, \dots$ , 節点数)
$\mathbf{d}$	: 節点変位ベクトル
$\mathbf{K}$	: 全体剛性マトリクス
$\mathbf{w}$	: 面外節点変位ベクトル
$\mathbf{S}$	: 表面積ベクトル
$\sigma_j$	: $j$ 要素の圧縮応力度
$\sigma_L$	: 長期許容圧縮応力度
$M_j$	: $j$ 要素の曲げモーメント
$M_{c,j}$	: $j$ 要素の許容ひび割れ曲げモーメント
$\mathbf{A}^L$	: 部材特性ベクトルの側面制約下限値
$\mathbf{A}^U$	: 部材特性ベクトルの側面制約上限値
$\mathbf{R}^L$	: 節点情報ベクトルの側面制約下限値
$\mathbf{R}^U$	: 節点情報ベクトルの側面制約上限値
$E_b$	: 曲げひずみエネルギー
$t_{\max}$	: 最大板厚
$t_{\min}$	: 最小板厚
$M_{\max}$	: 最大曲げモーメント
$\sigma_{\max}$	: 最大主応力
$\sigma_{\min}$	: 最小主応力
$E$	: ヤング係数
$F$	: 設計基準強度
$\mathbf{k}_e$	: 要素剛性マトリクス
$\mathbf{f}_e$	: 外力ベクトル
$\mathbf{u}_e$	: 変位ベクトル
$N_{i,m}$	: $m$ 階 B スプライン基底関数
$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$	: $u \cdot v$ 方向のノットベクトル
$w_{ij}$	: 重み係数

$m_{uv}$	: $u \cdot v$ 方向の階数
$n_{uv}$	: $u \cdot v$ 方向の制御点数
$\kappa_1$	: 最大主曲率
$\kappa_2$	: 最小主曲率
$w_1$	: 最大主曲率方向
$w_2$	: 最小主曲率方向
$C$	: 主曲率の絶対値の平均曲率
$\tilde{C}$	: 形状特徴指標

## 第1章 序論

---

### *Chapter 1: Introduction*





## 第 1 章 序論

### 1.1 研究の背景

#### 構造形態創生の意義

空間構造の形態は意匠性と力学的合理性に強く影響する。部材強度が寸法の 2 乗に比例するのに対し、重量が寸法の 3 乗に比例する 2 乗-3 乗則(square-cube law)が要因の一つに挙げられる[1]。自重が支配的となり、これを含む外力に対して形態によって抵抗することが合理的である。したがって、空間構造は設計の初期段階で力学的に優れた形態が提示されることが望まれる。F. Otto は、現存する生物が自然淘汰の成果であるという考えから、一種の最適化された自然界の物体から多くの着想を得ている。膜構造やケーブルネット構造に対して、石鹸膜などによる模型実験から形状を決定し、主に仮設物として採用されていたこれらの軽量構造物を恒久建築として確立させた[2]。H. Isler に代表される懸垂模型は、重力を利用したシステムにより、引張力が生じない圧縮抵抗型の形態決定に有効である。

一方、近年の計算技術のめざましい発展は、どのような構造の力学挙動も十分な精度で予測可能となった。材料の高強度化と生産技術の向上と相まって、それまで実現することができなかった形態の実現が可能となり、求められる建築形態は多様・複雑化している[3], [4]。しかし、中には意匠性を重視した形態を実現しようと過剰な断面を採用するなど、力技的な例は少なくない。これに対し、コンピュータアルゴリズムを用いた最適化の考えに基づく構造形態創生(structural morphogenesis)は、空間構造に対する有効な設計手法の一つとして注目され、種々の研究がなされている[5] - [9]。これらの手順は、アルゴリズムによる構造最適化であり、設計趣旨に基づく目標から構造形態を創生する。

#### 多様な形態の創生

構造形態創生は、種々の要求に対して力学的に優れた空間構造を実現できる可能性があるが、提示する形態が一つあるいは数が少ない場合、それが各設計者にとって採用できる形態であるとは限らない。一方、構造形態創生において必ずしも大域的最適解を採用する必要はなく、比較的評価の高い許容解であれば設計者の評価尺度や感性から決定されることも考えられる。設計変数が多様な形態を意匠・構造設計者に提示することができれば、従来の方法では成し得なかった形態が実現できる可能性を有する。

設計変数の多様性を有する複数の解を得る手法として、種々の優良解探索解法が提案されている[10]。これらは、許容解の内、大域的最適解と局所最適解を含む比較的評価の高い解を優良解(decent solutions)と定義し、設計変数の多様性を有する複数の解形態の獲得に優良解を積極的に活用する。優良解の探索は、設計者に対して力学的合理性と意匠的要求を同時に満たす構造形態の発想支援に繋がる。

優良解探索解法のうち、本研究では遺伝的アルゴリズム(genetic algorithms: GA) [11]系解法 ISGA (GA with immune system) [12]-[21]を採用する。優良解探索解法には GA 系解法の他に、群知能(swarm intelligence: SI) [22]系解法がある。SI には、鳥や魚の集団での行動を模倣した粒子群最適化(particle swarm optimization: PSO) [23]や、

蜂の採餌行動を模倣した人工蜂コロニー最適化(artificial bee colony: ABC) [24]などがある。SI 系解法における優良解探索解法には、PSO と ABC に ISGA の優良解探索スキームを導入した ISPSO (PSO with immune system), ISABC (ABC with immune system) [25], [26]が提案されている。

## 既往の最適化手法

最適化は、与えた制約条件下で評価指標を最良にすることであり、工学・産業・経済など、多岐にわたる分野で注目されている。採用する解法によっては、制約条件や評価指標を自由に複数設定することが可能であり、コスト削減や効率の改善など、最適化を用いることでのメリットは非常に大きく、最適化問題に対する解法が数多く研究されている。中でも GA 系解法は強力な解法として注目され、発見的手法(heuristic procedure)に分類される。単一目的最適化問題(single objective optimization problem: SOP)に対する解法である単純遺伝的アルゴリズム(standard GA: SGA)が GA 系解法の基幹である。SOP に対する GA 系解法に IA (immune algorithm) [27]がある。IA は GA と比べると複雑なアルゴリズムを有し、種々のパラメータ設定が必要である。また、これらは相反関係(trade off)にある複数の目的関数を設定した多目的最適化問題(multi-objective optimization problem: MOP)への適用を想定したものではない。MOP は、複数の目的関数を同時に最小化あるいは最大化する最適化であり、一般に各目的関数は相反関係にあり、複数の最適解(パレート最適解)が存在する。

多点探索である GA 系解法は一度の試行で複数の解を捉えることができる。MOP に対して GA 系解法は、各々の目的関数について独立に選択演算を行う非パレートのアプローチと、解の優越関係に基づいて選択演算を行うパレートのアプローチに分類される。非パレートのアプローチは、ベクトル評価を用いた VEGA (vector evaluated genetic algorithms) [28]、各目的関数に重みづけし、重みを変化させて解を探索する重み係数法(WBGA: weight-based GA) [29]、一つの目的関数以外を制約条件として設定することで SOP を解く制約法、目的関数に優先順位を設定して解探索を行う辞書式配列法などがあり、1990 年代前半までに提案された解法に多く見られる。ただし、これらの解法は得られる解が局所的であり、目的関数空間全体で解が捉えられない可能性を有する。これに対し、パレートのアプローチは目的関数空間上の優越関係に基づいて解を評価する解法である。また、解の多様性に関するニッチ操作(niche: 生態的地位)の導入により、目的関数空間の広い範囲で解探索が行える。近年提案された解法の多くはこのパレートのアプローチに分類され、1990 年代前半(I 期)に MOGA (multi-objective GA) [30], NSGA (non-dominated sorting GA) [31], NPGA (niched Pareto GA) [32]等が、2000 年前後(II 期)には SPEA (strength Pareto evolutionary algorithm) [33], NSGA-II[34], SPEA2 [35], NCGA (neighborhood cultivation GA) [36]等が提案されている。特に SPEA2 は多目的最適化のエリート戦略的なアプローチである非劣解集合(アーカイブ個体群)の保存と、端切法と呼ばれるニッチ操作により、目的関数空間における解の多様性を保持する優れた解法である。ただし、これらの既往解法のほとんどは目的関数空間上の解の多様性を重視した解法であり、異なる設計変数を持つ複数解の存在が無視される。

近年では、目的関数空間と設計変数空間上での解の多様性を同時に維持する解法が注目されている。本研究で用いる GA 系解法 ISGA はそのひとつであり、他にも文献[37]-[40]がある。文献[37]は多目的最適化の GA 系解法に

DA スキーム(dual-archive scheme)を導入することで、設計変数空間と目的関数空間の多様性を維持したパレート最適解を得ている。文献[38]では GA 系解法とニューラルネットワーク技術を応用することで、パレート最適解の両空間での多様性を考慮している。ただし、これらの解法はパレート最適解の多様性しか想定されていない。文献[39], [40]は PSO の解法である。文献[39]は単一目的最適化問題に対し、最適解のみならずロバスト性の高い局所的に優れた解の探索を想定している。ただし、同じ目的関数値に対する複数の設計変数の解探索はアルゴリズム上考えられていない。文献[40]は多目的最適化問題において、設計変数空間上で劣解と非劣解の距離を調節することにより両空間上で解の多様性維持を図っている。さらにパレート最適解のみではなく比較的評価の高い解探索を行っているが、目的関数空間の端点における解探索には不十分な点がある。

以上より、本研究では設計変数空間と目的関数空間の多様性を同時に考慮した種々の優良解探索が可能な ISGA を採用する。

### 自由曲面空間構造の形態創生

空間構造に代表されるグリッドシェルおよび RC シェルの空間構造が普及し始めた 19 世紀後半、その多くは単純な幾何形状であり、自由曲面形態は部材・接合・型枠の問題により実現が困難であった。しかし、20 世紀後半からの計算技術の進歩や CAD (Computer Aided Design), CAM (Computer Aided Manufacturing), CAE (Computer Aided Engineering) による生産技術の発展・高度化により、自由曲面のシェル構造が構築可能となっている[41], [42] (図 1.1)。

自由曲面構造を対象とする構造最適化では、有限要素解析における節点座標を設計変数に設定すると、滑らかな解形状が得られる保証がなく、扱うモデルの規模が大きくなれば設計変数の数が膨大となるため収束性に問題が生じる。これらの問題を避けるため、節点数よりも少ない制御点を操作することで滑らかな曲面を得るパラメトリック曲面 (parametric surface) や、あらかじめ複数準備した基本形状の線形結合和で形状を表現するベースベクトル (basis vector method: BV) 法等の手法がある。代表的なパラメトリック曲にはベジエ(Bézier), B スプライン(basis spline), 非一様有理 B スプライン(non-uniform rational basis spline: NURBS)などの種類がある[43], [44]。中でも NURBS は、プログラムが比較的複雑であり、より多くのパラメータを設定する必要があるが、ベジエや B スプラインを含む一般化形式であり、形状表現の自由度が特に高い。現在では NURBS は CAD 等に標準的に搭載されている。BV 法に用いる基



a. アイランドシティ中央公園  
中核施設ぐりんぐりん



b. 北方町生涯学習センター  
さかり



c. 瞑想の森 市営斎場

図 1.1 自由曲面シェルの実設計例(著者撮影)

本形状は任意であるためパラメトリック曲面を使用することも可能であるが、使用しない方法として、固有振動モードを用いる手法や、初期形状に単位荷重を作用させた変形形状を用いる手法(natural approach) [45], [46]が提案されている。BV 法は単純な基準形状を使用すれば比較的簡単に曲面形状を作成可能である反面、形状表現の自由度が基準形状に依存する。

自由曲面の構造形態創生において、得られる解形状は採用する構造形式、パラメトリック曲面やそのパラメータに依存する可能性がある。特に、多様な形態の獲得を目指す優良解探索において、それらと優良解の関係を明確にすることは重要である。パラメトリック曲面を用いた自由曲面を有する構造形態創生の研究はいくつかある[47] - [56]。しかし、パラメトリック曲面のパラメータと得られる解形状の関係、および構造形式の違いによる解形態への影響は示されていない。

## 1.2 研究の目的と方法

本研究では、パラメトリック曲面の NURBS で表現する自由曲面の離散系鉄骨グリッドシェルおよび連続体 RC シェルの構造形態創生に ISGA を適用し、得られる解形態の特性を明らかにする。NURBS パラメータの一つである階数の設定値、およびグリッドシェルと RC シェルの構造形式の差異が優良解形態に与える影響を明確にする。

単純な矩形平板を基準形状とし、力学目標として総ひずみエネルギーを目的関数とした単一目的最適化に ISGA を適用する。その結果を基に、総ひずみエネルギーと部材体積の同時最小化の多目的最適化に適用し、力学目標と経済目標を同時に考慮した場合の解形態を確認する。グリッドシェルモデルは 3 種類の異なる部材配置を扱い、RC シェルモデルの結果を含めた形状比較より、各々の最適解形状が異なることを示す。構造形式および NURBS のパラメータ設定を変更した数値計算例より、力学的な特徴やパラメトリック曲面の特性が異なるモデルを採用する際の優良解形態を明確にし、自由度の高い発想・設計支援ツールの可能性を示す。

## 1.3 研究の位置付け

構造最適化に関する研究は「ある力学制約下で目標形状を探索する手順」と「設計上の意匠的側面を制約条件として形態を探索する手順」に大別される。前者は、膜構造の力学的条件下で目標形状を得る裁断図解析や、釣り合い形状を求める初期形状解析に代表される。膜構造は張力導入によって剛性が与えられるため、設計原型曲面を決定する形状決定問題に対する形状解析(shape finding analysis)が重要な意味を持つ[57]。後者は、設計趣旨に基づくイメージに沿って設定した目的から構造形態を創生する手順である。これを本研究では意匠性の視点より以下の二つに分類する。

- A. 基準となる形状を指定し、その近傍で形態を探索
- B. 与えられた設計領域内で大域的に形態を探索

A は現在、実設計で一般的に採用される方法であり、多くの場合、基本計画の後に行われる[58]。これは、設計者がイメージする形態の近傍で形状や開口部等の意匠性を考慮した修正を行う[59] - [61]。また、意匠的条件として A の立場から曲面の凹凸制御に代数不変量を用いた研究[62]や、施工性を考慮した研究[63] - [65]もある。これに対し B は、基本計画段階で設計者への発想支援あるいは選択肢を与える手順である。本研究は B に属しており、ここで設計条件を満たす多種多様な形態を提示することができれば、設計の幅が広がると考える。

形態とは、意匠性などにかかわる幾何学的な形状と、その応力などの状態を結びつけた用語である。したがって本研究における多様な形態の獲得は、意匠面だけでなく構造システムの発想支援にも対応する。つまり、ここで対象とする設計者とは、意匠設計者だけでなく構造設計者も含んでいる。

## 1.4 論文の構成

本論文は以下に示す全 8 章で構成する。

### 第 1 章 序論

研究背景・目的・方法について述べる。既往の研究と本研究で用いる解法の探索概念を説明し、構造形態創生における多様な形態の獲得の意義を述べる。

### 第 2 章 自由曲面シェル構造の形態創生問題定式化

数値解析に用いるグリッドシェル構造および RC シェル構造の離散化や応力制約条件についてなど、構造形態創生に必要な定式化を行う。

### 第 3 章 パラメトリック曲面

本論文で採用する NURBS の説明に加え、他のパラメトリック曲面の特性と関係について述べる。また、パラメトリック曲面の特性を調べる際に重要となる形状の特徴を表す指標を定義する。

### 第 4 章 優良解探索解法

構造形態創生の解探索法の分類と、本研究で用いる ISGA の詳細を述べる。

### 第 5 章 グリッドシェル構造の形態創生

自由曲面グリッドシェルの構造形態創生に ISGA を適用する。グリッドシェルモデルは部材配置・密度の異なる 3 種類を対象とする。単一・多目的最適化問題における優良解と NURBS の関係について検討する。

## 第 6 章 RC シェル構造の形態創生

自由曲面 RC シェルの構造形態創生に ISGA を適用する。RC シェルの応力制約条件が異なる 2 種類のモデルに対し、単一・多目的最適化問題における優良解と NURBS の関係について検討する。

## 第 7 章 考察

第 5 章と第 6 章で得られた大域的最適解および優良解形態について特性を考察する。

## 第 8 章 結論

得られた結果をまとめる。

## 第2章 自由曲面シェル構造の形態創生問題定式化

---

### *Chapter 2: Formulation of Structural Morphogenesis for Free-Form Grid Shell*





## 第2章 自由曲面シェル構造の形態創生問題定式化

### 2.1 構造形態創生問題の定式化

構造設計における最適化問題は最適設計問題(optimum design problem)あるいは構造最適化問題(structural optimization problem)と呼ばれる。構造最適化問題において、その評価尺度を目的関数(objective function)、許容応力度や変位制限等の設計条件を制約条件(constraint)、形状や板厚等の求めようとする直接的な情報を設計変数(design variable)と呼ぶ。構造形態創生は、一般に構造最適化問題として次式のように定式化される[66]。

$$\text{設計変数(design variable): } \mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ \cdots \ A_r]^T, \mathbf{R} = [R_1 \ R_2 \ R_3 \ \cdots \ R_s]^T \quad (2-1)$$

$$\text{目的関数(objective function): } \Phi(\mathbf{A}, \mathbf{R}) \rightarrow \text{minimize or maximize} \quad (\text{評価尺度}) \quad (2-2)$$

$$\text{制約条件(constraints): } g_i(\mathbf{A}, \mathbf{R}) \leq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (\text{不等式制約条件}) \quad (2-3)$$

$$h_k(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, l) \quad (\text{等式制約条件}) \quad (2-4)$$

$$\mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U, \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (\text{側面制約条件}) \quad (2-5)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル,  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトルであり、共に未知量ベクトルある。制約条件を満足する許容解(feasible solution)のうち、与えられた  $n$  個の目的関数を同時に最小化または最大化することを最適化という。目的関数の数  $n = 1$  のとき SOP、 $n \geq 2$  のとき MOP である。

#### 単一目的最適化

一般に SOP において、目的関数が最小化または最大化された解は唯一であり、これを大域的最適解(global optimal solution)と呼ぶ。局所的に優れた解は局所最適解(local optimal solution)と呼び、大域的最適解は局所最適解の一つに含まれる。図 2.1 に、横軸を設計変数  $x$ 、縦軸を目的関数  $f(x)$  とした、単一目的最適化における最適解の概念図を示す。

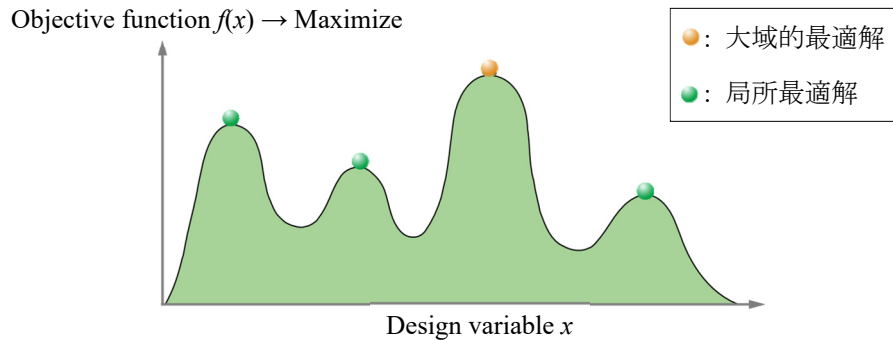


図 2.1 単一目的最適化における最適解

## 多目的最適化

MOP の場合、 $n$  個の目的関数が相反(trade-off)することが多く、唯一の大域的最適解は存在しない。そのため、許容解と非許容解の境界線上にある妥協解を得ることを目標にする。この妥協解をパレート最適解(Pareto-optimal solution)または非劣解と呼び、パレート最適解の集合によって形成される超曲面をパレート最適フロント(Pareto-optimal front)、または非劣解集合と定義する。局所パレートフロント(local Pareto-optimal solution)は、 $n$  次元の解空間を把握しない限りその存在判断は難しい。しかし、パレート最適フロント以外の超曲面が構成されることがあり、これを局所パレートフロント(local Pareto front)と定義する。

多目的最適化を解く多くの有効な解法において、パレート最適フロントは解の優越関係を用いて探索され、これをパレートのアプローチと呼ぶ。優越関係は、 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  ( $\mathbf{x}_i = [\mathbf{A}_i, \mathbf{R}_i]^T$ )において次のように定義される。なお、説明では目的関数の最小化を対象とする。

- 優越関係
- a)  $f_k(\mathbf{x}_1) \leq f_k(\mathbf{x}_2)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) のとき、 $\mathbf{x}_1$  は  $\mathbf{x}_2$  に対して優越
  - b)  $f_k(\mathbf{x}_1) < f_k(\mathbf{x}_2)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) のとき、 $\mathbf{x}_1$  は  $\mathbf{x}_2$  に対して強い意味で優越

この優越関係に基づくパレート最適解は次のように定義される。

- パレート最適解
- a)  $\mathbf{x}_1$  に強い意味で優越する  $\mathbf{x}_i$  が存在しないとき、  
 $\mathbf{x}_1$  は弱パレート最適解(weak Pareto-optimal solution)
  - b)  $\mathbf{x}_1$  に優越する  $\mathbf{x}_i$  が存在しないとき、 $\mathbf{x}_1$  はパレート最適解

図 2.2 に、二つの目的関数最小化の多目的最適化における最適解の概念図を示す。

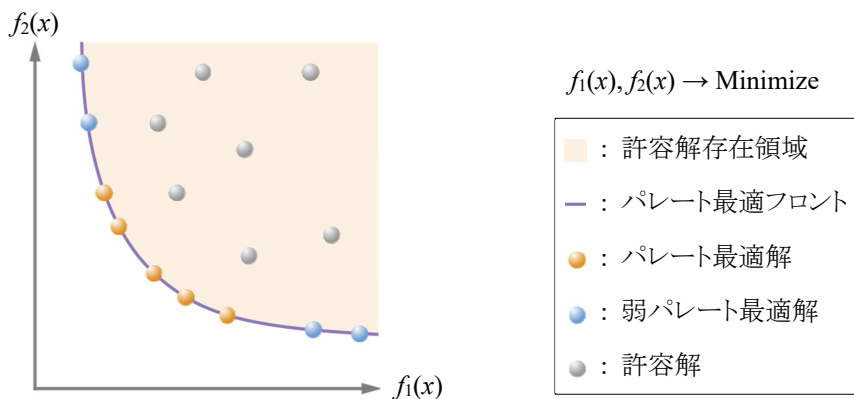


図 2.2 許容解とパレート最適解(多目的最適化)

### 構造形態創生の分類

構造形態創生は一般に、部材断面積等の部材特性を含む部材配置関係の最適化の位相最適化(topology optimization)と、部材特性を含む節点位置の最適化を形状最適化(geometry optimization)に分類される。図 2.3 に、離散系構造の位相最適化と形状最適化に関する形態創生概念図を示す。離散系構造の位相最適化は、初期設定の部材配置に対して、不必要の部材を除去する手順である。図 2.3b のモデルは存在部材を実線、非存在部材を破線で示す。形状最適化は、要素の有無ではなく節点を移動させる手順である(図 2.3c)。これらの形態創生は通常、以下の最適化問題の形式をとることが多い。

**剛性最大化:** 力学目標として、ひずみエネルギーや最大節点変位等の剛性に関する力学的な特性量を最大化あるいは最小化する。

**重量最小化:** 応力や変位等の力学的な特性量に関する制約の下、経済目標として部材総重量を最小化する。

本研究では、自由曲面シェルに対して、部材と形状に関する形状最適化を扱う。まず、剛性最大化を目的とした単一目的最適化問題を扱い、次に剛性最大化と重量最小化を目的とした多目的最適化問題を扱う。その際、自由曲面の記述にパラメトリック曲面の NURBS を採用し、得られる解形状の特性を示す。

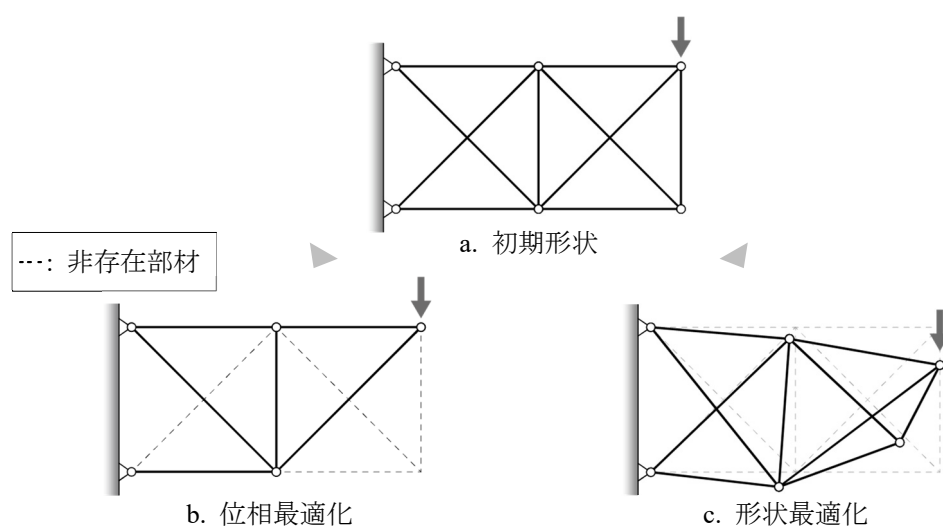


図 2.3 離散系構造の位相最適化と形状最適化

## 2.2 自由曲面形態とパラメトリック曲面

自由曲面形態を対象とした構造最適化において、離散化された有限要素の節点座標を設計変数として扱う場合、数が膨大となり、滑らかな曲面形状の解に収束しにくい。そのため、パラメトリック曲面による形状表現を用いることが多い。パラメトリック曲面は、曲面を定義する既定関数と複数の制御点を用いて形状を表現することができるため、滑らかな形状を表現することができるだけでなく、設計変数の大幅な削減が可能となる。本研究で用いるパラメトリック曲面手法の詳細は第3章に示す。

## 2.3 構造解析

### 2.3.1 有限要素法定式化

工学問題を解く際、その境界値問題の微分方程式が必要である。非常に単純な問題以外、これを厳密に解くことはできない。不整形領域を解析対象とすることの多い構造工学において、微分方程式の近似解法である有限要素法 (finite element method: FEM) が一般に用いられる。有限要素法は、微分方程式を弱形式に変換し、無限の自由度を持つ連続体を有限個の未知量を含む部分領域、あるいは要素の集合体を用いて解く手法である。汎用性に優れ、微分方程式の境界値問題を解く有力な解法とされる。

ここでは、仮想仕事の原理から以下の条件式に基づく有限要素法の定式化を示す[67]。

初期形状での釣合い式	: 仮想仕事式
変位-ひずみ関係	: グリーンひずみ
応力-ひずみ関係	: 線形

一般に仮想仕事の原理は次式で与えられる。

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} \quad (2-6)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ : ひずみベクトル、 $\boldsymbol{\sigma}$ : 応力ベクトル (初期応力含む)、 $\mathbf{u}$ : 変位ベクトル、 $\mathbf{f}$ : 荷重ベクトル、 $V$ : 対象領域、 $\delta \mathbf{u}$ : 仮想変位、 $( )^T$ :  $( )$  の転置 である。

ひずみ変位関係行列  $\mathbf{B}$  は一般に変位  $\mathbf{u}$  の関数となり、ひずみと変位の関係は次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (2-7)$$

したがって、次式のように定義されるひずみ増分と変位増分行列  $\mathbf{B}^*(\mathbf{u})$  が導かれる。

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{B}(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{B}^*(\mathbf{u}) \delta \mathbf{u} \quad (2-8)$$

式(2-6)にひずみ変位関係式(2-8)を導入すると次式が得られる。

$$\delta \mathbf{u}^T \cdot \left( \int_V \mathbf{B}^*(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV - \mathbf{f} \right) = 0 \quad (2-9)$$

ここで $\delta \mathbf{u}$ の任意性により、次式を導くことができる。

$$\int_V \mathbf{B}^*(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2-10)$$

上式が有限要素法による離散化のための基礎式である。この釣合い式は変位 $\mathbf{u}$ に関して非線形項を持つため、通常は反復計算解法を通して近似解を決定する必要がある。非線形方程式(2-10)を近似的に解くため、初期値 $\mathbf{u}$ に対して $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$ も満足させる状態を考える。 $\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$ を式(2-10)に代入し、 $\mathbf{u}$ の周りにテーラー展開する。ここで、 $\Delta \mathbf{u}$ の二次以上の高次項を無視することで線形化を実施する。これより $\Delta \mathbf{u}$ に関する一次方程式が次式で得られる。

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} - \int_V \mathbf{B}^*(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV \quad (2-11)$$

上式の右辺は節点の不釣り合い力ベクトルである。右辺第一項は外力、第二項は各要素の節点に生じる部材端力である。反復計算解法は式(2-11)より $\Delta \mathbf{u}$ を求め、次式のように初期値 $\mathbf{u}$ を順次更新しながら、結果的にこの不釣り合い量が十分小さくなるまで操作を繰り返す。

$$\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \quad (2-12)$$

なお、式(2-11)における $\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$ (接線剛性マトリクス)は次のように分解することができる。

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_G(\mathbf{u}) + \mathbf{K}_S(\mathbf{u}) \quad (2-13)$$

ここで、 $\mathbf{K}_G(\mathbf{u})$ は幾何剛性マトリクス、 $\mathbf{K}_S(\mathbf{u})$ は通常の微小変形に対する剛性(線形剛性)と大変形によるマトリクス(初期変位マトリクス、大変位マトリクス等を含む)から成る剛性マトリクスである。

$\mathbf{K}_G(\mathbf{u})$ 、 $\mathbf{K}_S(\mathbf{u})$ は各々以下のように定義される。

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{u}) = \int_V \frac{\partial \mathbf{B}^{*T}}{\partial \mathbf{u}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV \quad (2-14)$$

$$\mathbf{K}_S(\mathbf{u}) = \int_V \partial \mathbf{B}^{*T} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} dV \quad (2-15)$$

本研究で扱う構造解析は線形の範囲で計算する。線形解析は、変位ベクトルが構造物の力学特性を変化させない程度に小さいと仮定した解析手法である。式(2-15)において、 $\mathbf{B}^*(\mathbf{u})$ の定数項にかかわる部分が線形剛性(弾性剛性) $\mathbf{K}_L$ となる。無変形状態で初期応力ベクトルが零のとき、式(2-10)は線形解析において次式で表される。

$$\mathbf{K}_L \mathbf{u} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2-16)$$

### 2.3.2 梁要素の離散化定式化

梁要素の離散化定式化を示す。なお、梁要素の変位・回転角に関する記号は図 2.4 に従う。梁の基礎式、ひずみ、構成関係式は次式で表される。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p = 0 \quad , \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - q = 0 \quad (2-17a,b)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad (\varepsilon_x)^2 = (\varepsilon_{x0})^2 - 2z \varepsilon_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \quad (2-18a,b)$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2-19)$$

ここで、 $\varepsilon_x$ : 梁のひずみ,  $\varepsilon_{x0}$ : 軸ひずみ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ : 曲げひずみ,  $z$ : 中立軸からの距離 である。

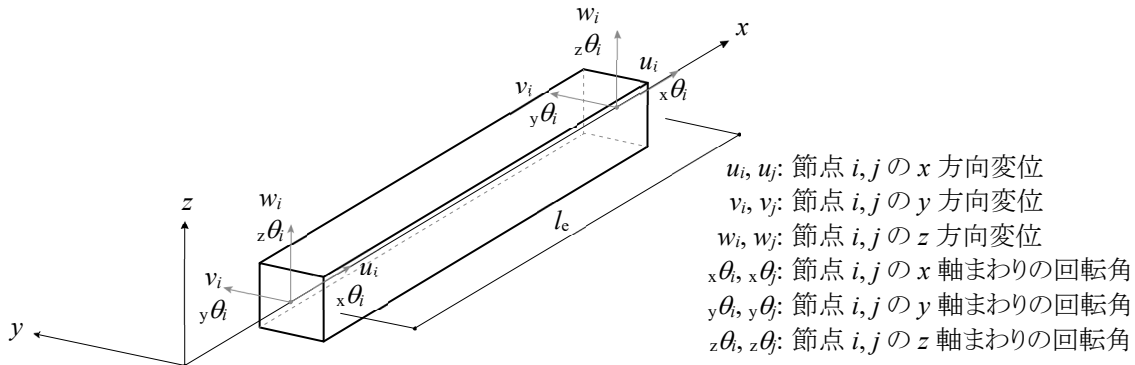


図 2.4 梁要素の局所座標系

#### 軸方向変形に対する要素剛性マトリクス

部材内変位  $u$  を次式の一次関数で仮定する。

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

ここで、 $u$ : 軸方向変位,  $\alpha_i$ : 未定定数 ( $i=1, 2$ ) である。未定定数について解くと次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} l_e & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} l_e & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{u}_e \quad (2-23)$$

$$\varepsilon_{x0} = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} l_e & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \mathbf{BAu}_e \quad (2-24)$$

平衡方程式(2-6)は次式となる。

$$\begin{aligned} \int_V \delta \varepsilon(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV &= \iiint E \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{BAu}_e dx dy dz \\ &= \delta \mathbf{u}_e^T \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{f}_e^x \end{aligned} \quad (2-25)$$

ここで、 $A$ : 断面積 である。式(2-16)より材軸方向に関する剛性方程式が次式のように得られる。

$$\mathbf{f}_e^x = \mathbf{k}_e^x \mathbf{u}_e \quad (2-26)$$

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} = \frac{EA}{l_e^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

ここで、 $\mathbf{f}_e^x$ : 軸力、 $\mathbf{k}_e^x$ : 材軸方向に関する要素剛性マトリクス である。

#### $y$ 方向のせん断力と $z$ 軸まわり曲げモーメントに関する要素剛性マトリクス

$y$  方向変位に関する変位関数は、梁の基礎式より次式の 3 次関数で与えられる。

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 \quad (2-28)$$

$$\theta_z = \frac{dv}{dx} = \beta_2 + 2\beta_3 x + 3\beta_4 x^2 \quad (2-29)$$

ここで、 $v$ :  $y$  方向変位、 $\theta_z$ :  $z$  軸まわり回転角、 $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ): 未定定数 である。材長  $l_e$  の梁について、材端位置  $i$  および  $j$  節点を参照し  $x_i = 0, x_j = l_e$  とおくと次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{z,i} \\ v_j \\ \theta_{z,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_e & l_e^2 & l_e^3 \\ 0 & 1 & 2l_e & 3l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_e^4} \begin{bmatrix} l_e^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_e^4 & 0 & 0 \\ -3l_e^2 & -2l_e^3 & 3l_e^2 & -l_e^3 \\ 2l_e & l_e^2 & -2l_e & l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{z,i} \\ v_j \\ \theta_{z,j} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{v}_e \quad (2-31)$$

曲げひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_x^b$  は、式(2-18)より次式で得られる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^b = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y(2\beta_3 + 6\beta_4 x) = -y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{v}_e \quad (2-32)$$

平衡方程式(2-6)は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV &= \iiint y^2 \delta \mathbf{v}_e^T \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{B}}^T E \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{v}_e dx dy dz \\
 &= \delta \mathbf{v}_e^T EI_z \bar{\mathbf{A}}^T \int_0^{l_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} dx \mathbf{A} \mathbf{v}_e \\
 &= \delta \mathbf{v}_e^T \frac{2EI_z}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix} \mathbf{v}_e = \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{f}_e^y
 \end{aligned} \tag{2-33}$$

ここで、 $I_z$ :  $z$  軸まわりの断面二次モーメント である。上式より  $y$  軸方向に関する剛性方程式が次式で得られる。

$$\mathbf{f}_e^y = \mathbf{k}_e^y \mathbf{v}_e \tag{2-34}$$

$$\begin{bmatrix} {}_yV_i \\ {}_zM_i \\ {}_yV_j \\ {}_zM_j \end{bmatrix} = \frac{2EI_z}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \tag{2-35}$$

ここで、 $\mathbf{f}_e^y$ :  $y$  軸方向に関する力,  $\mathbf{k}_e^y$ :  $y$  軸方向に関する要素剛性マトリクス である。

#### $z$ 方向せん断力と $y$ 軸まわり曲げモーメントに関する要素剛性マトリクス

$z$  方向の変位に関する変位関数は、梁の基礎式より次式の 3 次関数で与えられる。

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3 \tag{2-36}$$

$$\theta_y = \frac{dw}{dx} = \gamma_2 + 2\gamma_3 x + 3\gamma_4 x^2 \tag{2-37}$$

ここで、 $w$ :  $z$  方向変位,  ${}_y\theta$ :  $y$  軸まわり回転角,  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ): 未定定数 である。 $\mathbf{k}_e^y$ と同様の手順で次式の  $z$  方向に関する剛性方程式が得られる。

$$\mathbf{f}_e^z = \mathbf{k}_e^z \mathbf{w}_e \tag{2-38}$$

$$\begin{bmatrix} {}_zV_i \\ {}_yM_i \\ {}_zV_j \\ {}_yM_j \end{bmatrix} = \frac{2EI_y}{l_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l_e & -6 & 3l_e \\ 3l_e & 2l_e^2 & -3l_e & l_e^2 \\ -6 & -3l_e & 6 & -3l_e \\ 3l_e & l_e^2 & -3l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_i \\ w_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \tag{2-39}$$

ここで、 $\mathbf{f}_e^z$ :  $z$  軸方向に関する力,  $\mathbf{k}_e^z$ :  $z$  軸方向に関する要素剛性マトリクス,  $I_y$ :  $y$  軸まわりの断面二次モーメント である。



$x$  軸まわりのねじりモーメントに関する要素剛性マトリクス

ねじり角  $\theta_x$  を一次式で次のように仮定する。

$$\theta_x = [1 \quad x] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

$$\begin{bmatrix} {}_x\theta_i \\ {}_x\theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2-41)$$

$$\frac{d\theta_x}{dx} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

ねじれによるせん断ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_x^T$  は次式で得られる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x^T = r \frac{d\theta_x}{dx} = r [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l_c} & \frac{1}{l_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_x\theta_i \\ {}_x\theta_j \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

ここで、 $r$ : 回転中心からの距離 である。せん断応力は円周方向に作用するので、ねじりモーメント  $M_x$  は次式で表される。

$$M_x = \iint r G \boldsymbol{\varepsilon}_x^T dy dz = G \frac{d\theta_x}{dx} \iint r^2 dy dz = G I_p \frac{d\theta_x}{dx} \quad (2-44)$$

ここで、 $G$ : せん断弾性係数,  $I_p$ : 断面極二次モーメント である。任意形断面に対しては一般にねじり定数  $J$  を用いて次のように表される。

$$M_x = GJ \frac{d\theta_x}{dx} \quad (2-45)$$

平衡方程式(2-6)は次式となる。

$$\begin{aligned} \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) dV &= \iiint \delta \boldsymbol{\varepsilon}_x^T G \boldsymbol{\varepsilon}_x^T dx dy dz \\ &= \iiint \delta \boldsymbol{\theta}_e^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{l_c} \\ 0 & \frac{1}{l_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} G r^2 [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l_c} & \frac{1}{l_c} \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_e dx dy dz \\ &= \delta \boldsymbol{\theta}_e^T \frac{GJ}{l_c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_e = \delta \boldsymbol{\theta}_e^T \mathbf{f}_e^t \end{aligned} \quad (2-46)$$

上式より、ねじりモーメントに関する剛性方程式が次式で得られる。

$$\mathbf{f}_e^t = \mathbf{k}_e^t \boldsymbol{\theta}_e \quad (2-47)$$

$$\begin{bmatrix} {}_xM_i \\ {}_xM_j \end{bmatrix} = \frac{GJ}{l_c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_x\theta_i \\ {}_x\theta_j \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

ここで、 $\mathbf{f}_e^t$ : ねじれに関する力,  $\mathbf{k}_e^t$ : ねじれに関する要素剛性マトリクス である。

## 要素剛性マトリクス

式(2-27), (2-35), (2-39), (2-48)より、次式の局所座標系における要素剛性方程式および要素剛性マトリクス  $\mathbf{k}_e$  が得られる。

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (2-49)$$

$$\begin{bmatrix} N_i \\ V_i \\ V_i \\ V_i \\ M_i \\ M_i \\ M_i \\ N_i \\ V_i \\ V_i \\ V_i \\ M_i \\ M_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l_c^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l_c^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l_c^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l_c^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l_c^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l_c^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l_c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l_c} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l_c^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l_c} & 0 & -\frac{6EI_z}{l_c^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{l_c^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l_c^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l_c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \theta_i \\ \theta_i \\ \theta_i \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \theta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

## 座標変換

局所座標系から全体座標系への座標変換には、次式の  $k$  節点法による座標変換マトリクスを用いる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_z \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

$$\mathbf{t}_x = \frac{\bar{j}\bar{j}}{|\bar{j}\bar{j}|}, \quad \mathbf{t}_y = \frac{\bar{j}\bar{j} \times \bar{i}\bar{k}}{|\bar{j}\bar{j} \times \bar{i}\bar{k}|}, \quad \mathbf{t}_z = \mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y \quad (2-52)$$

ここで、 $i, j$ : 梁要素の材端節点  $k$ : 全体座標系の任意点  $(\bar{j} / |\bar{j}| \neq \bar{i}\bar{k} / |\bar{i}\bar{k}|)$  である。以上より、 $i-j$  方向に局所座標系における  $x$  軸、 $i, j, k$  を通る平面上の  $i-j$  軸に直交かつ  $k$  節点がある方向に局所座標系における  $y$  軸を持つ、右手系直交座標系が構成される。任意の要素について、局所座標系の剛性マトリクス  $\mathbf{k}_e$ 、外力  $\mathbf{f}_e$  および変位  $\mathbf{u}_e$  は、全体座標系の剛性マトリクス  $\mathbf{K}_e$ 、外力  $\mathbf{F}_e$  および変位  $\mathbf{U}_e$  と次式のような関係にある。

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{T} \mathbf{K}_e, \quad \mathbf{f}_e = \mathbf{T} \mathbf{F}_e, \quad \mathbf{u}_e = \mathbf{T} \mathbf{U}_e \quad (2-53)$$

式(2-16)より、 $\mathbf{T}_e$  が直交行列であることから全体座標系における剛性行列および剛性方程式が次式のように表される。

$$\mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{f}_e \quad (2-54)$$

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} \quad (2-55)$$

### 2.3.3 シェル要素の離散化定式化

シェル要素の離散化定式化を示す。本研究では、アイソパラメトリック四角形要素のうち、Mindlin 理論に基づく MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Component)要素を採用する。アイソパラメトリック四角形要素は、空間座標系における任意形状の四角形要素を、正規化座標系において正方形として扱い、2つの座標系を補間する補間関数を用いて要素内部の空間座標成分が定義される(図 2.5)。

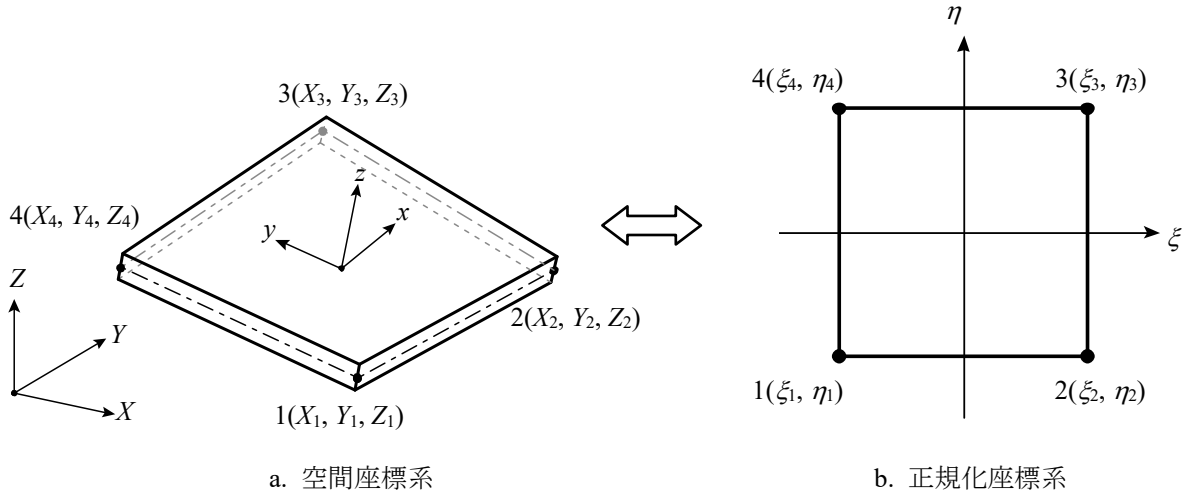


図 2.5 シェル要素の座標系

基本的な平板理論である Kirchhoff 理論の仮定から、法線の直交保持( $\gamma_{zx}=0, \gamma_{yz}=0$ )の仮定を除去した Mindlin 理論の仮定は次のとおりである。

(i) 微小変形

$$w \ll h, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \ll 1, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \ll 1 \quad (2-56 \text{ a-c})$$

(ii) 基準面の不伸長変形

$$\varepsilon_x|_{z=0} = 0, \quad \varepsilon_y|_{z=0} = 0, \quad \gamma_{xy}|_{z=0} = 0 \quad (2-57 \text{ a-c})$$

(iii) 法線の直線性保持(直交性非保持)

$$U(x, y, z) = z\beta_y, \quad V(x, y, z) = -z\beta_x \quad (2-58 \text{ a,b})$$

(iv) 法線の長さが一定

$$\varepsilon_z = 0 \quad (2-59)$$

(v) 法線方向の応力は省略

$$\sigma_z \doteq 0 \quad (2-60)$$

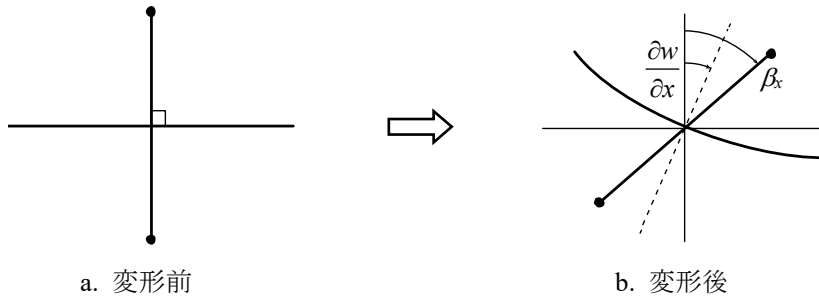


図 2.6 法線の直線性保持(直交性非保持)

### 面内変形に対する要素剛性マトリクス

空間座標系の変位  $u, v$  に対する正規化座標系座標の写像関係式を次式とする。

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi \eta, \quad v = \beta_1 + \beta_2 \xi + \beta_3 \eta + \beta_4 \xi \eta \quad (2-61 \text{ a,b})$$

ここで、 $\alpha_i, \beta_i$  は未定定数である。上式に正規化座標系での節点座標を代入し次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2-62 \text{ a,b})$$

式(2-62)を解いて式(2-61)に代入すると、要素内の任意点における節点変位( $\mathbf{u}_e, \mathbf{v}_e$ )の写像関係式が次式で得られる。

$$u(x) = \mathbf{N} \mathbf{u}_e, \quad v(x) = \mathbf{N} \mathbf{v}_e \quad (2-63 \text{ a,b})$$

$$\mathbf{u}_e = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4], \quad \mathbf{v}_e = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4] \quad (2-64 \text{ a, b})$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (2-65)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (2-66 \text{ a-d})$$

$\mathbf{N}$  は正規化座標系における形状関数である。任意点における節点座標は同様に次式で得られる。

$$x = \mathbf{N} \mathbf{x}_e, \quad y = \mathbf{N} \mathbf{y}_e, \quad (2-67 \text{ a-d})$$

$$\mathbf{x}_e = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4], \quad \mathbf{y}_e = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]$$

ここで、微分関数に対する空間座標系から正規化座標系への変換を行うため、次式の関係式を与える。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-68)$$

ここで、 $\mathbf{J}$ : Jacobi マトリクス である。式(2-68)に式(2-67)を代入し次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y}_e & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y}_e \\ -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x}_e & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2-69)$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y}_e - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x}_e \quad (2-70)$$

弾性論より次式の線形ひずみを与える。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2-71 \text{ a-c})$$

式(2-71)に式(2-69)を代入し、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{v}_e \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{U}_e \quad (2-72)$$

応力-ひずみ関係を次式で与える。

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (2-73)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}_e$ : 要素応力ベクトル,  $\mathbf{D}$ : 構成関係マトリクス である。 $\mathbf{D}_e$ は等方弾性体として次式で与える。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2-74)$$

ここで、 $E$ : ヤング係数,  $\nu$ : ポアソン比 である。線形平衡方程式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} = 0 \quad (2-75)$$

式(2-75)に式(2-72) - (2-74)を代入すると次式が得られる。

$$\left( \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e d\Omega \right) \mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_{ep} \mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = 0 \quad (2-76)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\text{ep}} &= \int_{\Omega} \begin{bmatrix} k_{p11} & k_{p12} \\ k_{p21} & k_{p22} \end{bmatrix} d\Omega \\
 k_{p11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right\} \\
 k_{p12} &= k_{p21} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \nu + \frac{1-\nu}{2} \right\} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\
 k_{p22} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right\}
 \end{aligned} \tag{2-77 a-d}$$

ここで、 $\mathbf{K}_{\text{ep}}$ : 面内剛性マトリクス,  $\mathbf{f}_e$ : 節点力ベクトル である。

なお、式(2-77)の被積分関数は $\xi, \eta$ に関する 2 次関数であるためガウスの 2 点積分による数値積分を行う。

$$\mathbf{K}_{\text{ep}} = t_e \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \tilde{\mathbf{K}}_{\text{ep}}(\xi_k, \eta_l) |\mathbf{J}| w_k w_l \tag{2-78}$$

ここで、 $t_e$ : 板厚,  $\tilde{\mathbf{K}}_{\text{ep}}$ : 被積分項,  $\xi_k, \eta_l$ : ガウス積分の積分点座標,  $w_k, w_l$ : ガウス積分の重み である。せん断ひずみに関する項の積分は、シアローッキングを回避するため 1 点積分とし、それ以外を 2 点積分とする。 $\xi_k, \eta_l, w_k, w_l$  は次式を用いる。

$$1 \text{ 点積分: } \xi_1 = \eta_1 = 0.0, \quad w_1 = 2.0 \tag{2-79 a,b}$$

$$2 \text{ 点積分: } \xi_1 = \eta_1 = 0.57735026918963, \quad \xi_2 = \eta_2 = -0.57735026918963, \quad w_1 = w_2 = 1.0 \tag{2-80 a-c}$$

### 面外変形に対する要素剛性マトリクス

たわみ  $w_0$  と、中央面に対して垂直な軸に対する回転角  $\theta_x, \theta_y$  を独立な変数と考え、変位場を次式で定義する。

$$u(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \quad v(x, y, z) = -z\theta_x(x, y), \quad w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{2-81 a-c}$$

正規化座標系におけるたわみと回転角は形状関数  $\mathbf{N}$  を用いて次式で表す。

$$w_0 = \mathbf{N}\mathbf{w}, \quad \theta_x = \mathbf{N}\theta_x, \quad \theta_y = \mathbf{N}\theta_y \tag{2-82 a-c}$$

$$\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4]^T, \quad \theta_x = [\theta_{x1} \quad \theta_{x2} \quad \theta_{x3} \quad \theta_{x4}]^T, \quad \theta_y = [\theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3} \quad \theta_{y4}]^T \tag{2-83 a-c}$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \tag{2-84}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{2-85 a-d}$$

任意点における節点座標は同様に次式で得られる。

$$\begin{aligned}
 x &= \mathbf{N}\mathbf{x}_e, \quad y = \mathbf{N}\mathbf{y}_e, \\
 \mathbf{x}_e &= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4], \quad \mathbf{y}_e = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]
 \end{aligned} \tag{2-86 a-d}$$

ここで、微分関数に対する空間座標系から正規化座標系への変換を行うため、次式の関係式を与える。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2-87)$$

ここで、 $\mathbf{J}$ : Jacobi マトリクス である。式(2-87)に式(2-86)を代入し次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y}_e & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y}_e \\ -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x}_e & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2-88)$$

$$|\mathbf{J}| = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{x}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{y}_e - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \mathbf{y}_e \cdot \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \mathbf{x}_e \quad (2-89)$$

弾性論より次式の線形ひずみを与える。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \theta_x, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \theta_y \end{aligned} \quad (2-90 \text{ a-e})$$

式(2-90)に式(2-88)を代入し、次式が得られる。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \mathbf{B}^b \mathbf{d}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & -\mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \mathbf{B}^s \mathbf{d}_e \quad (2-91 \text{ a, b})$$

面外変形に対する応力-ひずみ関係式( $\sigma_z=0$ )は次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma}^b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b, \quad \boldsymbol{\sigma}^s = \begin{bmatrix} \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix} = \mathbf{D}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s \quad (2-92 \text{ a, b})$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}^b$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^s$ : 要素応力ベクトル,  $\mathbf{D}^b$ ,  $\mathbf{D}^s$ : 構成関係マトリクス である。構成関係マトリクスは等方弾性体として次式で与える。

$$\mathbf{D}^b = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^s = \frac{\kappa E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-93 \text{ a, b})$$

ここで、 $E$ : ヤング係数,  $\nu$ : ポアソン比,  $\kappa$ : 面外せん断補正係数( $=5/6$ ) である。

線形平衡方程式は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{bT} \boldsymbol{\sigma}^b d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{sT} \boldsymbol{\sigma}^s d\Omega - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} = 0 \quad (2-94)$$

$$\mathbf{K}_{eb}^b \mathbf{d}_e + \mathbf{K}_{eb}^s \mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = \mathbf{K}_{eb} \mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = 0 \quad (2-95)$$

$$\mathbf{K}_{eb}^b = \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^{bT} \mathbf{D}^b \mathbf{B}_e^b d\Omega, \quad \mathbf{K}_{eb}^s = \int_{\Omega} \mathbf{B}_e^{sT} \mathbf{D}^s \mathbf{B}_e^s d\Omega \quad (2-96 \text{ a, b})$$

ここで、 $\mathbf{K}_{eb}$ : 面外剛性マトリクス,  $\mathbf{K}_{eb}^b, \mathbf{K}_{eb}^s$ : 面内・面外剛性ひずみに対する剛性マトリクス,  $\mathbf{f}_e$ : 節点力ベクトル である。

### せん断ロッキングを回避するひずみ仮定

たわみと回転角を同じ形状関数を用いて近似することにより、板厚が小さいときに過剰なせん断ひずみエネルギーが評価される現象であるせん断ロッキングが生じることが知られている。本研究では、せん断ロッキングを回避するため、ひずみ仮定法に基づく Mindlin 要素の一つである MITC 要素を採用する。

MITC 要素は、ロッキングを回避するように選ばれた標本点のひずみを補完することで仮定ひずみ場を構成するとともに、正規化座標系におけるゆがみを考慮した共変成分を用いる。図 2.7 に示す標本点 A～D に対し、正規化座標系における共変成分として表された次式の面外せん断ひずみを定義する。

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\eta}{2} \gamma_{yz}^A + \frac{1+\eta}{2} \gamma_{yz}^C \\ \frac{1+\xi}{2} \gamma_{xz}^B + \frac{1-\xi}{2} \gamma_{xz}^D \end{bmatrix} \quad (2-97)$$

回転角  $\beta_x, \beta_y$  の正規化座標系成分  $\beta'_x, \beta'_y$  への変換は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} \beta'_{yz} \\ \beta'_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} \quad (2-98)$$

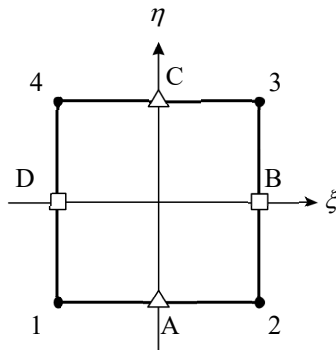


図 2.7 MITC 要素における面外せん断ひずみの標本点

したがって、節点座標  $x_k, y_k$  を用いて次式が定義される。



$$\begin{aligned}
\gamma_{yz}^A &= \frac{1}{2}(w_2 - w_1) + \frac{1}{4}(y_2 - y_1)(\beta_{2x} + \beta_{1x}) + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(\beta_{2y} + \beta_{1y}) \\
\gamma_{yz}^C &= \frac{1}{2}(w_3 - w_4) + \frac{1}{4}(y_3 - y_4)(\beta_{3x} + \beta_{4x}) + \frac{1}{4}(x_3 - x_4)(\beta_{3y} + \beta_{4y}) \\
\gamma_{xz}^B &= \frac{1}{2}(w_3 - w_2) + \frac{1}{4}(y_3 - y_2)(\beta_{3x} + \beta_{2x}) + \frac{1}{4}(x_3 - x_2)(\beta_{3y} + \beta_{2y}) \\
\gamma_{xz}^D &= \frac{1}{2}(w_4 - w_1) + \frac{1}{4}(y_4 - y_1)(\beta_{4x} + \beta_{1x}) + \frac{1}{4}(x_4 - x_1)(\beta_{4y} + \beta_{1y})
\end{aligned} \tag{2-99}$$

式(2-97)のひずみを与える変位-ひずみ変換マトリクス $\bar{\mathbf{B}}_e^s$ が次式のように定義される。

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}}_e^s \mathbf{d}_e \tag{2-100}$$

式(2-96 b)の $\mathbf{B}_e^s$ を式(2-100)の $\bar{\mathbf{B}}_e^s$ に置き換えることでせん断ロックンを回避する MICT 要素剛性マトリクスが得られる。数値積分には 2 点積分を用いる。

### ねじり変形に対する要素剛性マトリクス

ねじり変形に対する剛性は次式とする。

$$\begin{bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \\ M_{z4} \end{bmatrix} = \alpha E t_e S_e \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \\ \theta_{z4} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{et} \boldsymbol{\theta}_z \tag{2-101}$$

ここで、 $\mathbf{K}_{et}$ : ねじり変形に対する剛性マトリクス,  $\alpha$ : 仮想弾性パラメータ(=0.03),  $S_e$ : 要素面積 である。

### 要素剛性マトリクス

以上の各剛性マトリクスの重ね合わせより、シェル要素の剛性マトリクスは次式で得られる。

$$\mathbf{K}_{es}^L = \mathbf{K}_{ep} + \mathbf{K}_{eb} + \mathbf{K}_{et} \tag{2-102}$$

### 座標変換

局所座標系から全体座標系への座標変換には、次式の座標変換マトリクスを用いる。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_x = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_y = \begin{bmatrix} l_y & m_y & n_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_z = \begin{bmatrix} l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} \tag{2-103 a-d}$$

ここで、 $\mathbf{T}$ : 座標変換マトリクス,  $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y, \mathbf{t}_z$ : 全体座標軸に対する方向余弦ベクトル である。全体座標系を  $O-XYZ$ 、局所座標系を  $o-xyz$  とする。要素の各辺の中点を結ぶ 2 本の線の交点を局所座標系の原点  $o$  とし、辺 4-1 の中点から辺

2-3 の中点に向かう方向を  $x$  軸とする。要素面内における  $x$  軸と垂直の方向を  $y$  軸とし、右手直交座標の要素各辺の中点座標は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ Z_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_1 + X_2}{2} \\ \frac{Y_1 + Y_2}{2} \\ \frac{Z_1 + Z_2}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_{23} \\ Y_{23} \\ Z_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_2 + X_3}{2} \\ \frac{Y_2 + Y_3}{2} \\ \frac{Z_2 + Z_3}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_{34} \\ Y_{34} \\ Z_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_3 + X_4}{2} \\ \frac{Y_3 + Y_4}{2} \\ \frac{Z_3 + Z_4}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_{41} \\ Y_{41} \\ Z_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_4 + X_1}{2} \\ \frac{Y_4 + Y_1}{2} \\ \frac{Z_4 + Z_1}{2} \end{bmatrix} \quad (2-104 \text{ a-d})$$

$x$  軸の方向余弦ベクトルは次式で与える。

$$\mathbf{t}_x = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}, \quad \mathbf{A} = [(X_{23} - X_{41}) \quad (Y_{23} - Y_{41}) \quad (Z_{23} - Z_{41})], \quad |\mathbf{A}| = \sqrt{(X_{23} - X_{41})^2 + (Y_{23} - Y_{41})^2 + (Z_{23} - Z_{41})^2} \quad (2-105 \text{ a-c})$$

$z$  軸の方向余弦ベクトルは次式で与える。

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_z &= \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{2S} = \frac{1}{2S} [(A_2 \cdot B_3 - B_2 \cdot A_3) \quad (A_3 \cdot B_1 - B_3 \cdot A_1) \quad (A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2)], \\ \mathbf{B} &= [(X_{34} - X_{12}) \quad (Y_{34} - Y_{12}) \quad (Z_{34} - Z_{12})], \\ 2S &= \sqrt{(A_2 \cdot B_3 - B_2 \cdot A_3)^2 + (A_3 \cdot B_1 - B_3 \cdot A_1)^2 + (A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2)^2} \end{aligned} \quad (2-106 \text{ a-c})$$

(2-105 a), (2-106 a)より、 $y$  軸の方向余弦ベクトルは次式で得られる。

$$\mathbf{t}_y = \mathbf{t}_z \times \mathbf{t}_x = [(m_z \cdot n_x - n_z \cdot m_x) \quad (n_z \cdot l_x - l_z \cdot n_x) \quad (l_z \cdot m_x - m_z \cdot l_x)] \quad (2-107)$$

以上の座標変換マトリクスを用いて、局所座標系剛性マトリクスの全体座標系剛性マトリクスへの座標変換は次式で与える。

$$\mathbf{K}_{\text{es}}^G = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{\text{es}}^L \mathbf{T} \quad (2-108)$$

ここで、 $\mathbf{K}_{\text{es}}^G$ : 全体座標系要素剛性マトリクス、 $\mathbf{K}_{\text{es}}^L$ : 局所座標系要素剛性マトリクス である。また、局所座標系における要素の節点座標は次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} (X_1 - X_0) & (X_2 - X_0) & (X_3 - X_0) & (X_4 - X_0) \\ (Y_1 - Y_0) & (Y_2 - Y_0) & (Y_3 - Y_0) & (Y_4 - Y_0) \\ (Z_1 - Z_0) & (Z_2 - Z_0) & (Z_3 - Z_0) & (Z_4 - Z_0) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} \\ \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}{4} \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{4} \end{bmatrix} \quad (2-109 \text{ a, b})$$

### 2.3.4 グリッドシェルの許容応力度計算

グリッドシェルの応力制約として、各部材の応力度が許容応力度以内であることを確認する。許容応力度計算は次の通りである[68]。

#### 圧縮力と曲げモーメントの組み合わせ応力を受ける部材

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{c\sigma_{bx}}{f_{bx}} + \frac{c\sigma_{by}}{f_{by}} \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{t\sigma_{bx} + t\sigma_{by} - \sigma_c}{f_t} \leq 1 \quad (2-110)$$

#### 引張力と曲げモーメントの組み合わせ応力を受ける部材

$$\frac{t\sigma_{bx} + t\sigma_{by} + \sigma_t}{f_t} \leq 1 \quad \text{かつ} \quad \frac{c\sigma_{bx}}{f_{bx}} + \frac{c\sigma_{by}}{f_{by}} - \frac{\sigma_t}{f_t} + 1 \leq 1 \quad (2-111)$$

ここで、 $\sigma_c$ : 平均圧縮応力度,  $\sigma_t$ : 平均引張応力度,  $c\sigma_{bx}$ : 圧縮側の  $x$  軸まわりの曲げ応力度,  $c\sigma_{by}$ : 圧縮側の  $y$  軸まわりの曲げ応力度,  $t\sigma_{bx}$ : 引張側の  $x$  軸まわりの曲げ応力度,  $t\sigma_{by}$ : 引張側の  $y$  軸まわりの曲げ応力度,  $f_{bx}$ :  $x$  軸まわりの許容曲げ応力度,  $f_{by}$ :  $y$  軸まわりの許容曲げ応力度,  $f_c$ : 許容圧縮応力度,  $f_t$ : 許容引張応力度 である。ただし、 $\sigma_c$ ,  $c\sigma_b$ ,  $t\sigma_b$  の値は絶対値とする。

#### 許容圧縮応力度 $f_c$

$\lambda \leq A$  のとき

$$f_c = \frac{\left\{ 1 - 0.4 \left( \frac{\lambda}{A} \right) \right\}}{\nu} \quad (2-112)$$

$$\nu = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \left( \frac{\lambda}{A} \right)^2 \quad (2-113)$$

$\lambda > A$  のとき

$$f_c = \frac{0.277F}{\left( \frac{\lambda}{A} \right)^2} \quad (2-114)$$

$$A = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{0.6F}} \quad (2-115)$$

ここで、 $\lambda$ : 圧縮材の細長比 ( $\lambda = l_k/i$ ),  $l_k$ : 圧縮材の座屈長さ,  $i$ : 断面二次半径,  $A$ : 限界細長比,  $E$ : ヤング係数 である。

許容曲げ応力度  $f_{bx}$  および  $f_{by}$

$\lambda_b \leq_p \lambda_b$  のとき

$$f_b = \frac{F}{\nu} \quad (2-116)$$

$_p \lambda_b < \lambda_b \leq_e \lambda_b$  のとき

$$f_b = \frac{\left(1 - 0.4 \frac{\lambda_b - _p \lambda_b}{_e \lambda_b - _p \lambda_b}\right) F}{\nu} \quad (2-117)$$

$\lambda_b >_p \lambda_b$  のとき

$$f_b = \frac{1}{\lambda_b^2} \frac{F}{2.17} \quad (2-118)$$

各記号は次式で与えられる。

$$\nu = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \left( \frac{\lambda_b}{_e \lambda_b} \right)^2 \quad (2-119)$$

$$\lambda_b = \sqrt{\frac{M_y}{M_e}} \quad (2-120)$$

$$_e \lambda_b = \frac{1}{\sqrt{0.6}} \quad (2-121)$$

$$_p \lambda_b = 0.6 + 0.3 \left( \frac{M_2}{M_1} \right) \quad (2-122)$$

$$C = 1.75 + 1.05 \left( \frac{M_2}{M_1} \right) + 0.3 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \leq 2.3 \quad (2-123)$$

$$M_e = C \sqrt{\frac{\pi^4 E I_y \cdot E I_w}{l_b^4} + \frac{\pi^2 E I_y G J}{l_b^2}} \quad (2-124)$$

ここで、 $\lambda_b$ : 曲げ材の細長比,  $l_b$ : 支点間距離,  $_e \lambda_b$ : 弾性限界細長比,  $_p \lambda_b$ : 塑性限界細長比  $C$ : 許容曲げ応力度の補正係数,  $M_e$ : 弾性横座屈モーメント,  $Z$ : 断面係数,  $I_y$ : 弱軸まわりの断面二次モーメント,  $I_w$ : 曲げねじり定数,  $G$ : セン断弾性係数,  $J$ : サンプナンのねじり定数,  $M_y$ : 降伏モーメント( $M_y = F \cdot Z$ ),  $M_1, M_2$ : それぞれ座屈区間端部における大きい方, 小さい方の, 強軸まわりの曲げモーメント である。 $M_2/M_1$ は複曲率の場合正, 単曲率の場合負とする。

### 2.3.5 RC シェルの許容応力度計算

RC シェルの応力制約として、各部材の応力が許容応力度以下であることを確認する。長期荷重条件における RC シェルの大域的最適解形態は圧縮力が支配的となることが知られているが、本論文では優良解の獲得を目指すため、許容圧縮応力度だけでなく、構成部材の引張を想定した曲げモーメントを考慮する必要がある。許容曲げモーメントについては、鉄筋の許容引張応力度を考慮した曲げモーメントと、曲げひび割れモーメントの 2 ケースを扱い、各々、軸力を受ける曲げ材の許容応力度式を準用する[69]。

#### 圧縮応力

圧縮応力は、面内力と曲げモーメントの合成に対する縁応力を次式で算定し、コンクリートの長期許容圧縮応力度以下であることを確認する。

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_{bc} \quad (2-125)$$

ここで、 $\sigma_c$ : 面内方向力,  $\sigma_{bc}$ : 曲げモーメントによる縁応力 である。

#### 鉄筋の許容応力度を考慮した曲げモーメント

鉄筋の許容引張応力度を考慮した次式の許容曲げモーメントを算定する。

$$\begin{aligned} M_y &= \{g_1 q + 0.5\eta_0(1-\eta_0)\} \sigma_B b D^2 \\ g_1 &= j_t / D \\ q &= p_t \sigma_y / \sigma_B \\ p_t &= a_t / (bD) \\ \eta_0 &= N / (bD\sigma_B) \end{aligned} \quad (2-126)$$

ここで、 $M_y$ : 鉄筋の許容応力度を考慮した曲げモーメント,  $b$ : 幅,  $D$ : せい(板厚),  $a_t$ : 引張鉄筋断面積,  $\sigma_y$ : 鉄筋の許容引張応力度,  $\sigma_B$ : コンクリートの許容応力度,  $N$ : 軸力,  $j_t$ : 引張圧縮鉄筋重心間距離 である。

#### ひび割れ曲げモーメント

コンクリートのひび割れを考慮した次式の曲げモーメントを算定する。

$$M_{cr} = 0.56\sqrt{\sigma_B} Z_e + \frac{ND}{6} \quad (2-127)$$

ここで、 $M_{cr}$ : ひび割れ曲げモーメント,  $Z_e$ : 鉄筋考慮の断面係数 である。

## 2.4 解析パラメータ

構造形態創生に用いる解法には ISGA と、単一目的最適化には SGA を、多目的最適化には SPEA2 を用いる。各々の解析パラメータを表 2.1 に示す。各解法の共通するパラメータは、解析結果の比較を行うため同一とする。世代数については、グリッドシェルモデル(1m 間隔配置モデル)の 5000 世代までの解析結果より、3000 世代で十分収束することが確認されたため、3000 世代までを標準とする。ISGA 特有のパラメータである記憶細胞数は  $M = 100$ 、クラスタ数  $r = 10$  とし、上位個体選択率  $H$  に関しては試行毎に設定値を変化させ、種々の優良解探索を行う。ここでは、 $r = 10$ ,  $H = 0.01, 0.1$  とした数値結果を示す。

表 2.1 GA パラメータ (ISGA, SGA, SPEA2)

世代数	3000 (5000)
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$ (Model-E のみ $0.7 \times 10^{-3}$ )
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
遺伝子長	16 bit × 設計変数の数
コーディング	Gray code

### 第3章 パラメトリック曲面

---

### *Chapter 3: Parametric Surface*





## 第3章 パラメトリック曲面

### 3.1 代表的なパラメトリック曲面

有限要素法を利用した形状最適化において自由曲面構造モデルを扱うとき、各節点座標値を設計変数に設定すると、解形状の曲面が滑らかとなる保証がない。また、モデルの規模が大きければ膨大な数の設計変数を扱うことになり、解の収束性に問題が生じる。パラメトリック曲面(parametric surface)を利用することでこれらの問題が解消できることから、自由曲面構造モデルを扱う際の一般的な形状表現手法となっている。

パラメトリック曲線/曲面とは、位置情報パラメータを指定したとき、3次元空間での曲線/曲面座標値が決まる手法である。曲線の場合一種類、曲面の場合二種類の位置情報パラメータを用いる。必要な入力情報は基底関数(basis function)と制御点(control point)であり、通常これらの情報量は、有限要素の節点数よりもはるかに少ない。自由曲面/曲線の基礎的な理論は、船や飛行機などの設計において複雑な形状をモデル化するために進歩してきた。現在では、パラメトリック曲面はCAD, CAM, CAEシステムの自由曲面/曲線の表現手法として一般に搭載されている。ファーガソン曲線(Ferguson curve), クーンズ曲面(Coons surface), ベジエ(Bézier), B スプライン(basis spline), NURBS (non-uniform rational basis spline)などがあり、中でもベジエ, B スプライン, NURBS が代表的である。この3種類の曲面は、 $u$ - $v$  方向のパラメトリック曲線の積として定義するテンソル積曲面(tensor product surface)と呼ばれる曲面である。したがって、以下ではまず各種基底関数について説明し、パラメトリック曲線を用いて特性を示す。テンソル積曲面のうち、NURBS については次節で詳細を述べることにし、ここではベジエとB スプラインについて説明する。

#### パラメトリック曲線

パラメトリック曲線の節点座標ベクトル  $\mathbf{r}(t)$  は、位置情報パラメータ  $t \in [0.0, 1.0]$  を用いて次式のようにパラメータ表示される。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \\ r_z(t) \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

曲線記述の際、制御点を順序立てて  $n_i$  点配置した制御点座標ベクトル  $\mathbf{P}_i$  を次式で定める。

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} x p_i \\ y p_i \\ z p_i \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, n_i) \quad (3-2)$$

### パラメトリック曲面

パラメトリック曲面の節点座標ベクトル  $\mathbf{r}(u,v)$  は、位置情報パラメータ  $u, v \in [0.0, 1.0]$  を用いて次式のようにパラメータ表示される。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} r_x(u, v) \\ r_y(u, v) \\ r_z(u, v) \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

曲面記述の際、制御点を網目状に順序立てて  $n_u \times n_v$  配置した制御点座標ベクトル  $\mathbf{P}_{ij}$  を次式で定める。

$$\mathbf{P}_{ij} = \begin{bmatrix} x \ p_{ij} \\ y \ p_{ij} \\ y \ p_{ij} \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, n_u \quad j = 0, 1, \dots, n_v) \quad (3-4)$$

#### 3.1.1 基底関数

パラメトリック曲面/曲線の記述において、基底関数が最も重要な要素である。基底関数と制御点、場合によっては重み係数から記述される。ベジエと B スプラインは用いる基底関数が異なる。ベジエはバーンスタイン基底関数 (Bernstein basis polynomials)、B スプラインは B スプライン基底関数 (B-spline basis functions) を使い、各々次式で与えられる。なお、ベジエおよび B スプラインにおいて、各制御点に重み係数  $w_{ij}$  を導入して有理化した形式が、有理ベジエ (rational Bézier)、有理 B スプライン (rational basis spline) である。

##### $m$ 階のバーンスタイン基底関数

$$B_{i,m_i}(t) = \binom{m_i-1}{i} t^i (1-t)^{m_i-i-1} \quad (3-5)$$

##### $m$ 階の B スプライン基底関数

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1.0 & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0.0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-6)$$

$$N_{i,m_i}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m_i-1}-t_i} N_{i,m_i-1}(t) + \frac{t_{i+m_i}-t}{t_{i+m_i}-t_{i+1}} N_{i+1,m_i-1}(t) \quad (3-7)$$

$$\mathbf{T} = [t_0 \dots t_r \dots t_{m_i+n_i-1}] \quad (t_r \leq t_{r+1})$$

ここで、 $t$ : 位置情報パラメータ ( $t \in [0.0, 1.0]$ ),  $m_i$ : 階数,  $n_i$ : 制御点数,  $\mathbf{T}$ : ノットベクトル である。ノットベクトルの設定範囲は、条件を満たしていれば自由に設定可能であるが、本論文では  $t_r \in [0.0, 1.0]$  に統一する。

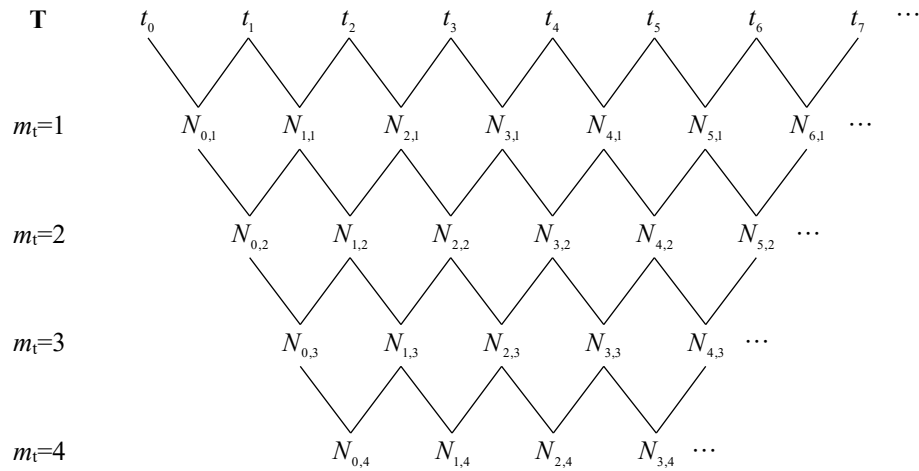


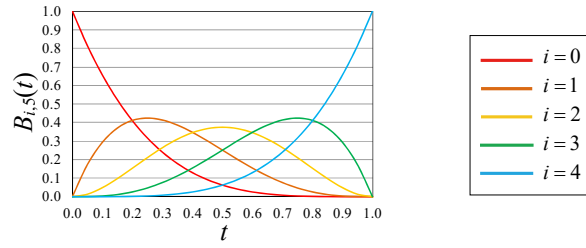
図 3.1 B スプライン基底関数の計算

式(3-6)の B スプライン基底関数は、計算機上での安定的な実装に適した方法として知られる、コックスとドブールの漸化式(Cox de Boor recursion)を示している。その計算手順は、あるノット区間にパラメータ  $t$  があるときのみ 1 をとるステップ関数として階数 1 の基底関数が得られ、階数 2 以上の基底関数は、一つ低い階数の基底関数を用いて順次計算する(図 3.1)。この式は、計算の途中で  $0/0$  が現れることがあるが、その場合は  $0/0 = 0$  として計算を進める。

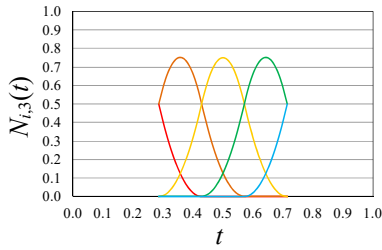
ベジエの階数は制御点数に依存し、B スプラインの階数はパラメータとして設定可能である。図 3.3 に 5 階ベジエおよび 3 から 5 階の B スプラインの基底関数を示す。B スプライン基底関数に関するパラメータには階数の他にノットベクトルがあるが、ここでは B スプライン曲線/曲面に用いられる一様ノットの基底関数を示している。位置情報パラメータ  $t$  の位置において、 $i$  番目の制御点がどの程度影響力を持つかを示すものであり、唯一の極大値を持つ山を構成する。裾野が狭く高い山であれば狭い範囲で強く影響し、裾野が広く低い山であれば広い範囲で弱く影響する。また、基底関数は任意の  $t$  において次式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{n_t} B_{i,m_t} = 1.0 \qquad \sum_{i=0}^{n_t} N_{i,m_t} = 1.0 \qquad (3-8)$$

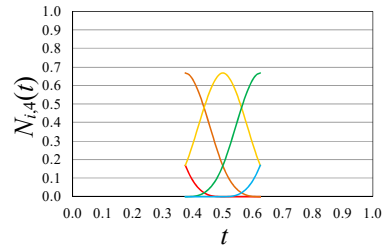
つまり基底関数は、任意の  $t$  における各制御点の影響の比率である。図 3.2 より、ベジエは  $t=0.0$  および  $t=1.0$  の位置において、一つの制御点の影響のみを受けることが示されている。一方 B スプラインは、各基底関数が相似形であるが、記述範囲がベジエと異なり階数によって変化する。なお、文献によっては階数ではなく次数(degree)を用いることがあるが、次数は階数-1 の数値である。



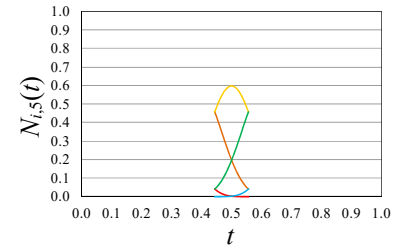
a. 5 階バーンスタイン基底関数



b. 3 階 B スプライン基底関数



c. 4 階 B スプライン基底関数



d. 5 階 B スプライン基底関数

図 3.2 バーンスタイン基底関数と B スプライン基底関数(一様ノット)

### 3.1.2 ベジエ

ベジエはバーンスタイン基底関数を採用した次式で表される。

#### ベジエ曲線

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n_t-1} B_{i,n_t}(t) \mathbf{P}_i \quad (3-9)$$

ここで、 $n_t$ : 制御点数 である。

#### ベジエ曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} B_{i,n_u}(u) B_{j,n_v}(v) \mathbf{P}_{ij} \quad (3-10)$$

ここで、 $n_u, n_v$ :  $u, v$  方向の制御点数 である。

図 3.3 に制御点を 5 点設定した 5 階ベジエ曲線を例示する。5 階ベジエ曲線の基底関数は図 3.2a に対応する。ベジエは、以下に示す性質を持つ。

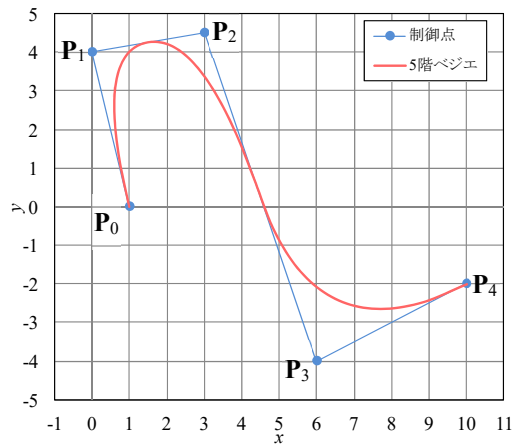


図 3.3 ベジエ曲線(5 階)

ベジエの性質

- 端点一致 ..... 記述される曲線/曲面座標は、端部の制御点  $P_0, P_{n-1}$  と一致し、それ以外の制御点とは一致しない。
- 階数依存性 ..... 階数は制御点の数に依存する。 [階数] = [制御点数]
- 大域的制御性 ..... 図 3.2a より、 $B_{i,n_i}$  は唯一の極大値を持ち、そこから離れるに従って減少するが、必ず  $0 < t < 1.0$  の範囲で  $0$  ではない。つまり、一つの制御点操作が曲面全体に影響する。したがって、制御点列に極端な突出があったとしてもベジエ曲線/曲面は滑らかになり、局所的な変形には不向きである。
- 凸閉包性 ..... 制御点の凸包から座標値がはみ出ない。つまり、制御多角形のすべての制御点を含む最小の凸多角形領域(図 3.3 の例では、5 角形  $P_0$ - $P_1$ - $P_2$ - $P_4$ - $P_3$ ) に必ず内包される。
- アフィン不変性 ..... 図形処理の基本的な処理である移動や拡大・縮小をしたとき、形状の相関性が必ず保持される。
- 変動減少性 ..... 制御点の変動に対して、それに伴う曲線/曲面の変動の方が小さい。

### 3.1.3 B スプライン

B スプラインは B スプライン基底関数を採用した次式で表される。

#### B スプライン曲線

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n_t-1} N_{i,m_t}(t) \mathbf{P}_i \quad (3-11)$$

$$\mathbf{T} = [t_0 \dots t_{i'} \dots t_{m_t+n_t-1}] \quad t_{i'} = \frac{i'}{m_t + n_t} \quad (i' = 0, \dots, m_t + n_t) \quad (3-12)$$

ここで、 $n_t$ : 制御点数,  $m_t$ : 階数,  $\mathbf{T}$ : ノットベクトル(一様) である。

#### B スプライン曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} N_{i,m_u}(u) N_{j,m_v}(v) \mathbf{P}_{ij} \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [u_0, u_1, \dots, u_{i'} \dots, u_{m_u+n_u}] & u_{i'} &= \frac{i'}{m_u + n_u} \quad (i' = 0, \dots, m_u + n_u) \\ \mathbf{V} &= [v_0, v_1, \dots, v_{j'} \dots, v_{m_v+n_v}] & v_{j'} &= \frac{j'}{m_v + n_v} \quad (j' = 0, \dots, m_v + n_v) \end{aligned} \quad (3-14)$$

ここで、 $n_u, n_v$ :  $u, v$  方向の制御点数,  $m_u, m_v$ :  $u, v$  方向の階数  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ :  $u, v$  方向のノットベクトル(一様) である。

図 3.4 に 3, 4, 5 階の B スプライン曲線を例示する。基底関数は各々図 3.2b-d に対応する。B スプラインはベジエと異なり、端点の制御点と一致せず、階数によって定義域が変化する。ノットベクトルが  $\mathbf{T} = [t_0 \dots t_{m_t+n_t-1}]$  で与えられた場合、定義域の範囲は  $t_{m_t-1} \leq t \leq t_{n_t}$  である。B スプラインは以下に示す性質を持つ。

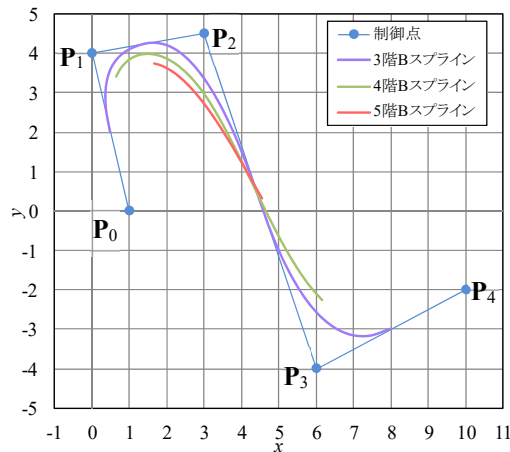


図 3.4 B スプライン曲線(3-5 階)

---

**B スプラインの性質**

- 局所的制御性 …… 図 3.2b-d より、 $N_{i,m_i}$  は唯一の極大値を持ち、そこから離れるに従って減少する。任意の位置情報パラメータにおいて 0 ではない基底関数が階数個ある。したがって、任意位置において階数個の制御点のみから影響を受け、局所的な変形が可能である。
- 凸閉包性 …… 制御点の凸包から座標値がはみ出ない。つまり、制御多角形のすべての制御点を含む最小の凸多角形領域(図 3.4 の例では、5 角形  $P_0$ - $P_1$ - $P_2$ - $P_4$ - $P_3$ ) に必ず内包される。
- アフィン不変性 …… 図形処理の基本的な処理である移動や拡大・縮小をしたとき、形状の相関性が必ず保持される。
- 変動減少性 …… 制御点の変動に対して、それに伴う曲線/曲面の変動の方が小さい。

## 3.2 NURBS

NURBS (非一様有理 B スプライン) は、Non-Uniform Rational Basis Spline の略であり、意味は次の通りである。

**Non-Uniform** : 非一様のノットベクトル

**Rational** : 重み係数を考慮した有理式

**Basis Spline** : B スプライン基底関数を採用

B スプライン基底関数を用いるため、B スプラインに共通する特性を持つが、ノットベクトルの設定によってベジエの表現も可能であり、形状表現の自由度が特に高い手法である。NURBS は B スプライン基底関数を採用した次式で表される。

### NURBS 曲線

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n_t-1} w_i N_{i, m_t}(t) \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^{n_t-1} w_i N_{i, m_t}(t)} \quad (3-15)$$

$$t_{m_t-1} \leq t \leq t_{n_t}$$

$$\mathbf{T} = [t_0, t_1, \dots, t_r, \dots, t_{m_t+n_t}] \quad (t_r \leq t_{r+1}) \quad (3-16)$$

ここで、 $w_i$ : 重み係数、 $n_t$ : 制御点数、 $m_t$ : 階数 である。B スプライン基底関数  $N_{i, m_t}$  は式(3-6)を用いる。ノットベクトルは式(3-16)に示すように、重複を許容する減少しない  $m_t + n_t$  個のノットで構成する数列である。

### NURBS 曲面

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i, m_u}(u) N_{j, m_v}(v) \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i, m_u}(u) N_{j, m_v}(v)} \quad (3-17)$$

$$u_{m_u-1} \leq u \leq u_{n_u} \quad v_{m_v-1} \leq v \leq v_{n_v}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [u_0, u_1, \dots, u_r, \dots, u_{m_u+n_u}] & (u_r \leq u_{r+1}) \\ \mathbf{V} &= [v_0, v_1, \dots, v_{r'}, \dots, v_{m_v+n_v}] & (v_{r'} \leq v_{r'+1}) \end{aligned} \quad (3-18)$$

ここで、 $w_{ij}$ : 重み係数、 $n_u \cdot n_v$ :  $u \cdot v$  方向の制御点数、 $m_u \cdot m_v$ :  $u \cdot v$  方向の階数 である。B スプライン基底関数  $N_{i, m_t}$  は式(3-6)を用いる。ノットベクトルは式(3-18)に示すように、重複を許容する減少しない[階数+制御点数]個のノットで構成する数列である。重複するノットを多重ノット(multiple knot)といい、重複する数を多重度(multiplicity)という。NURBS はノット間で  $(m_u-1) \times (m_v-1)$  次の多項式曲面であり、ノットを多重化することによって複数の曲面を接続したような曲面や折



れ曲がった曲面も一組の制御点列で表せる。

有限要素の各節点座標値は曲面を  $u, v$  方向に  $(n_{pu}+1) \times (n_{pv}+1)$  分割すると、 $u_k, v_l$  を用いて NURBS と有限要素節点座標を対応させた式(3-18)の表現は次式となる( $k = 0, 1, 2, \dots, n_{pu}, l = 0, 1, 2, \dots, n_{pv}$ )。

$$\mathbf{r}(u_k, v_l) = \frac{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i, m_u}(u_k) N_{j, m_v}(v_l) \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i, m_u}(u_k) N_{j, m_v}(v_l)} \quad (3-19)$$

$$u_{m_u-1} \leq u_k \leq u_{n_u} \quad v_{m_v-1} \leq v_l \leq v_{n_v}$$

なお、本論文では  $u, v$  方向の設定を同一とする。したがって、階数:  $m_u = m_v \equiv m_{uv}$ , 制御点数:  $n_u = n_v \equiv n_{uv}$ , ノットベクトル:  $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ , 曲面分割数:  $n_{pu} = n_{pv} \equiv n_p$  とする。また、曲面分割数を特に断らない限り  $n_p = 20$  とする。NURBS は以下に示す性質を持つ。

### NURBS の性質

- 局所的制御性 …………… 図 3.2b-d より、 $N_{i, m_i}$  は唯一の極大値を持ち、そこから離れるに従って減少する。任意の位置情報パラメータにおいて 0 ではない基底関数が階数個ある。したがって、任意位置において階数個の制御点のみから影響を受け、局所的な変形が可能である。
- 凸閉包性 ( $w_{ij} \geq 0$ ) … 制御点の凸包から座標値がはみ出ない。制御多角形のすべての制御点を含む最小の凸多角形領域(図 3.4 の例では、5 角形  $P_0-P_1-P_2-P_4-P_3$ ) に必ず内包される。ただし、重み係数  $w_{ij}$  が 0 以上の場合に限る。
- アフィン不変性 …………… 図形処理の基本的な処理である移動や拡大・縮小をしたとき、形状の相関性が必ず保持される。
- 変動減少性 …………… 制御点の変動に対して、それに伴う曲線/曲面の変動の方が小さい。
- 二次曲面再現性 …………… 直線/平面だけでなく、円、楕円、双曲線、球、楕円体、トーラスといった 2 次曲線/曲面を正確に表現できる。

## NURBS の包含範囲

NURBS は前述のベジエや B スプラインを含む一般化形式となっている。パラメトリック曲面の包含関係を図 3.5 に示す。

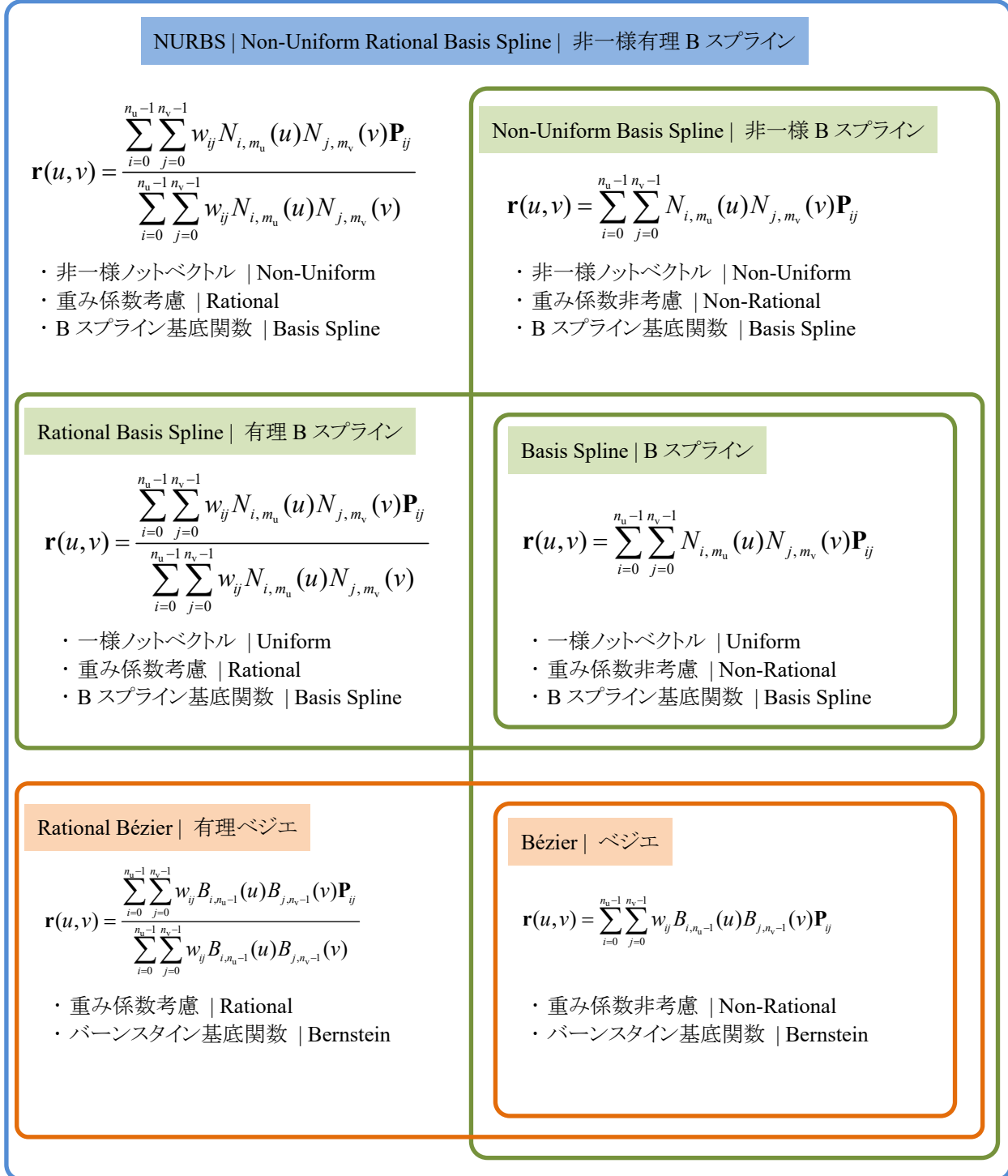


図 3.5 パラメトリック曲面の包含関係

### 3.3 微分連続性

階数  $m_{uv}$  の NURBS は  $u, v$  方向について  $C^{m_{uv}-2}$  級連続、つまり  $m_{uv}-2$  階まで微分係数の連続性が保証される。ただし、ノットベクトルに多重ノットが存在する場合はその限りではない。ノットの多重度が 1 増す毎に、該当するノット位置で連続性のレベルが 1 ずつ低下する。多重度  $s$  の連続性のレベルは  $C^{m_{uv}-s-1}$  である。特に、 $C^2$  級連続性を曲率連続性(curvature continuity)、 $C^1$  級連続性を接線連続性(tangential continuity)、 $C^0$  級連続性を位置連続性(positional continuity)と呼ぶ。図 3.6 に  $C^1$  級連続の例を示す。これは、半径の異なる半円を二つ接続した曲線で、その曲率を円弧の外側に示した。黄色の丸で示す点において、接線は連続であるが曲率は連続していない。また、片方の円弧を、黄色の丸で示す点を中心に回転すると接線が不連続の  $C^0$  級連続となる。つまり接線が連続しないが曲線・曲面が接続されている状態である。

多重度  $s$  を階数  $m_{uv}$  以上に設定すると  $C^0$  級連続すら保証されなくなり一つの曲線・曲面として扱うことが難しくなる。通常、ノットの多重度を最大で  $m_{uv}-1$  までとする。ただし、端末の場合は[階数]までである。

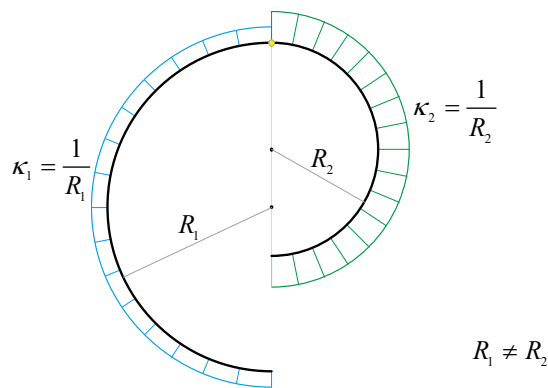


図 3.6  $C^1$  級連続の例

### 3.4 NURBS パラメータ

NURBS はそのパラメータ設定によって曲面を詳細に操作できるため、形状表現の自由度が高い。パラメータには、ノットベクトル(knot vector)、重み係数(weight)、階数(order) がある。NURBS を定義する式(3-18)において、これらは基底関数を変化させる。しかし構造モデルを表現する上で、その自由度の高さゆえに、パラメータによっては操作することで特殊な形状が表現される可能性がある。以下に、各パラメータが曲面形状に与える影響を説明する。なお、本論文の計算例では制御点数  $n_{uv} = 7$  とする。

#### 3.4.1 ノットベクトル

ノットベクトルは前述したように、その多重度が微分連続性を変化させる。また、重複がなくとも配置間隔によって記述される曲面が異なる。以下には、最も基本的な一様(uniform)ノットの検討を示し、本論で採用する開一様(open uniform)について説明する。

##### 一様ノット

ノットベクトルを一様配置とした NURBS の形状を比較する。一様ノットを設定したとき、 $m_{uv}$  の設定上限値は  $n_{uv}+1$  であり、ここでは、 $m_{uv}$  を 1 から 8 まで変化させた計算例を示す。解析モデルの制御点配置を図 3.7 に示す。一様ノットの条件を次式で与える。

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = [u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{m_{uv}+n_{uv}}] \quad (u_i \leq u_{i+1}) \quad u_i = \frac{i'}{m_{uv} + n_{uv}} \quad (i' = 0, \dots, m_{uv} + n_{uv}) \quad (3-20)$$

なお、ノットが一様配置かつ重み係数がすべて同値のこの設定は、B スプラインと同一表現である。

数値結果の基底関数および制御点と曲面を図 3.8-3.15 に示す。

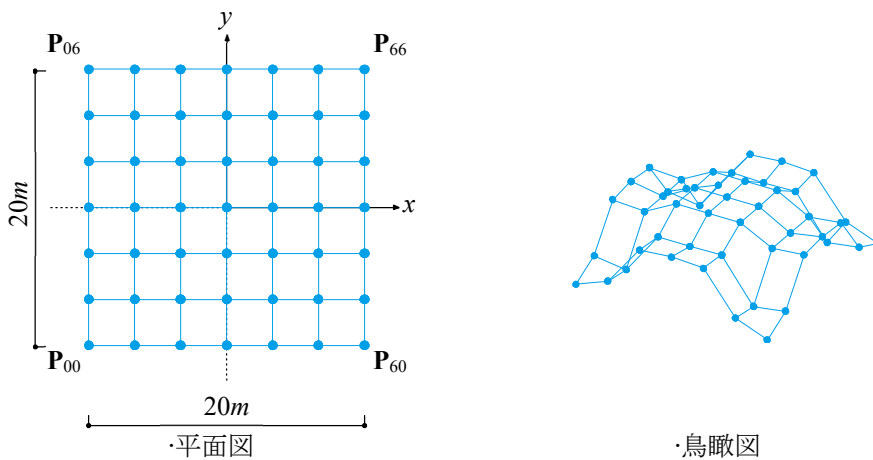
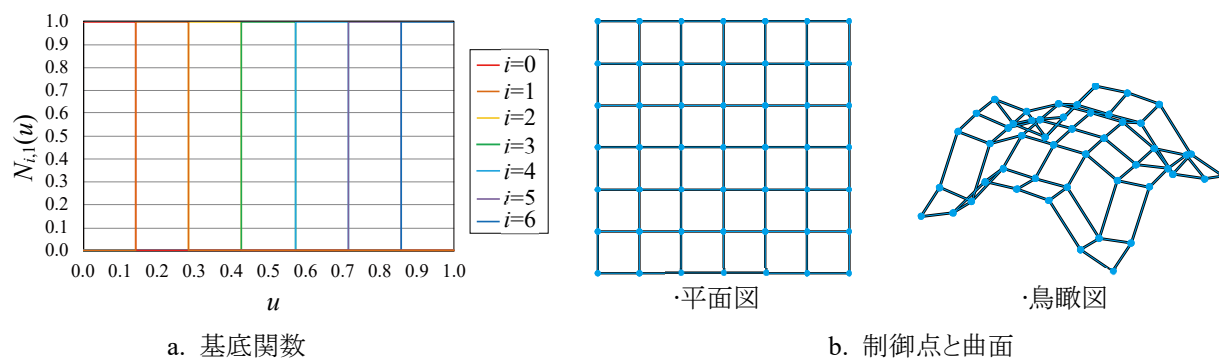
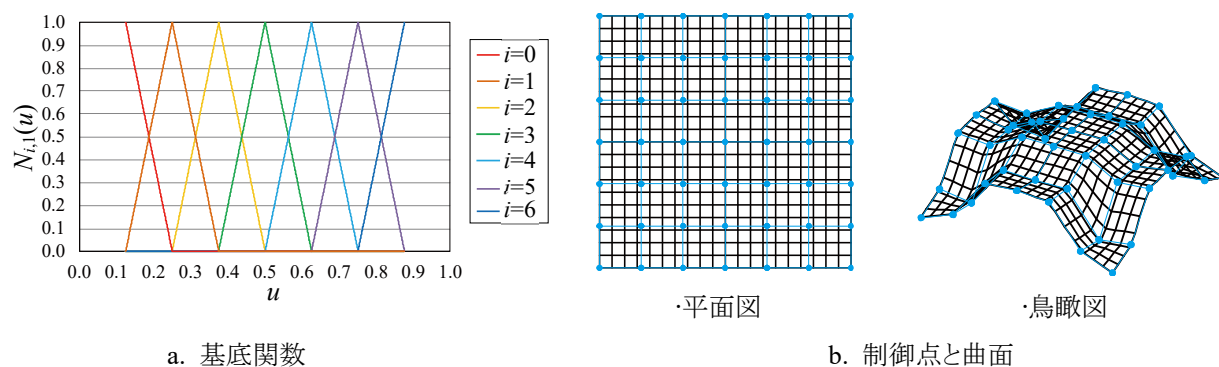
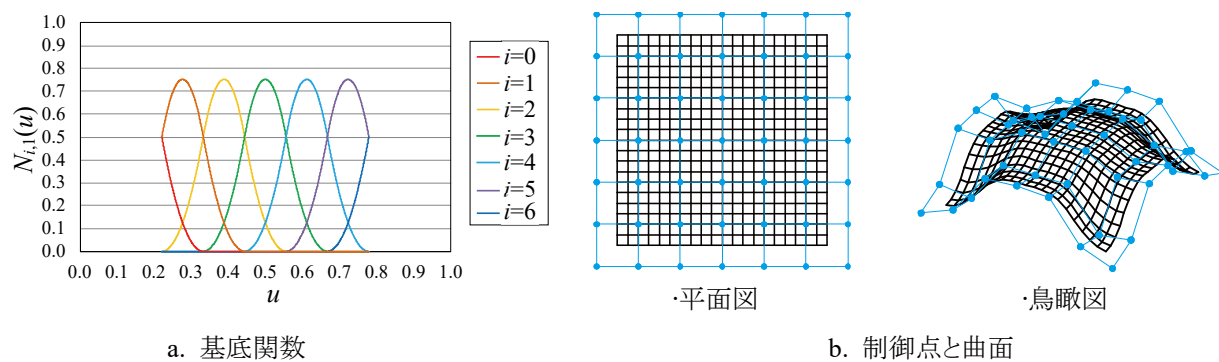
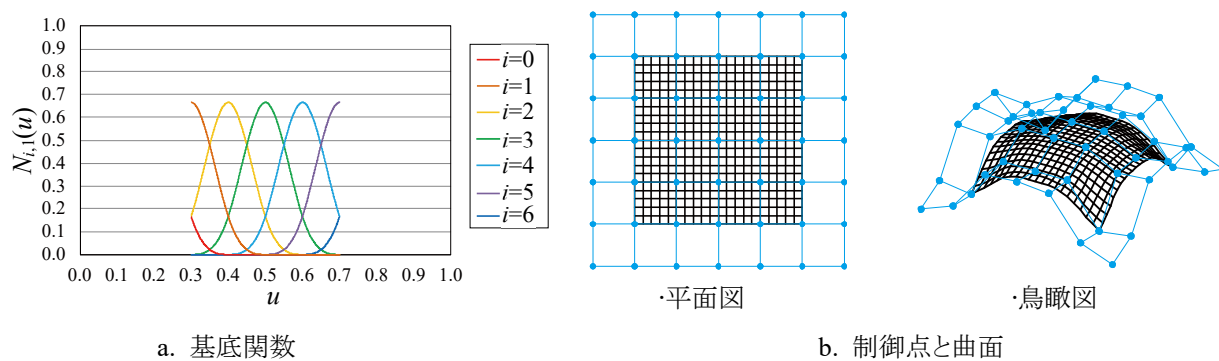


図 3.7 制御点配置(一様ノットの検討)

図 3.8 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 1$ )図 3.9 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 2$ )図 3.10 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 3$ )図 3.11 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 4$ )

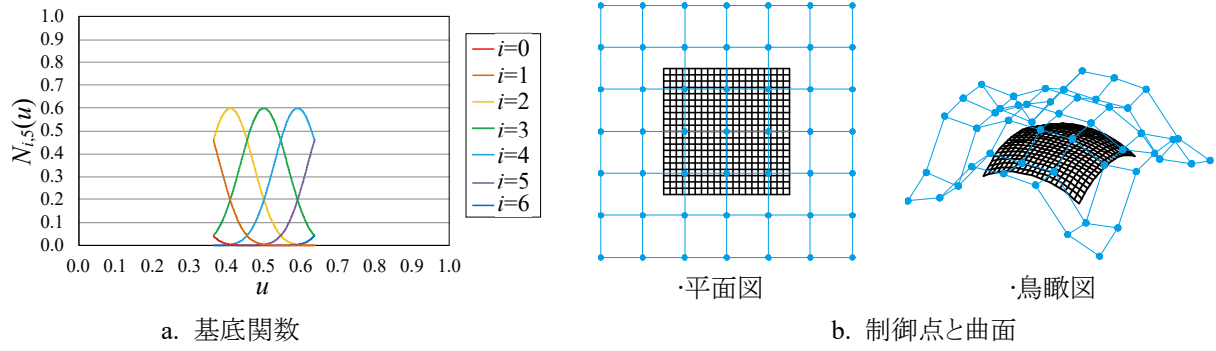


図 3.12 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 5$ )

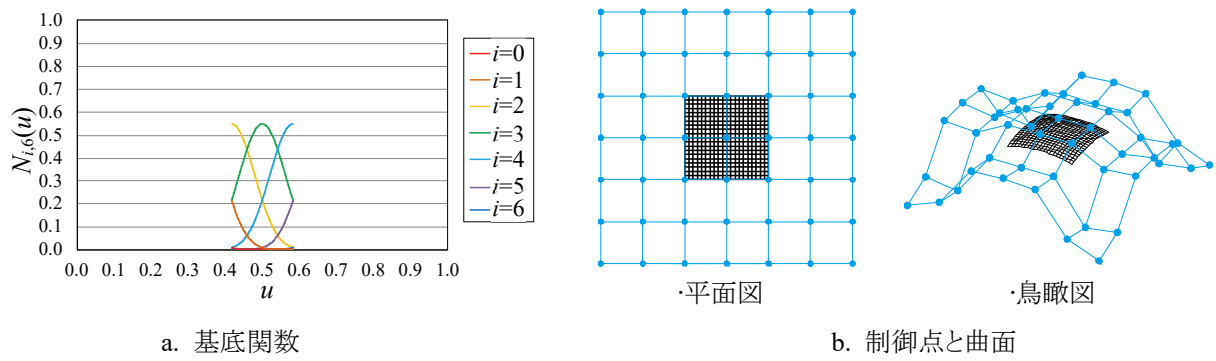


図 3.13 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 6$ )

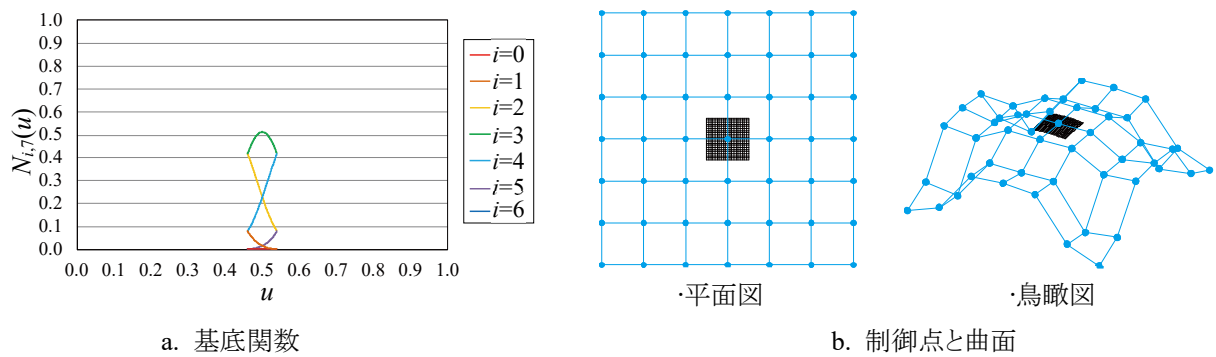


図 3.14 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 7$ )

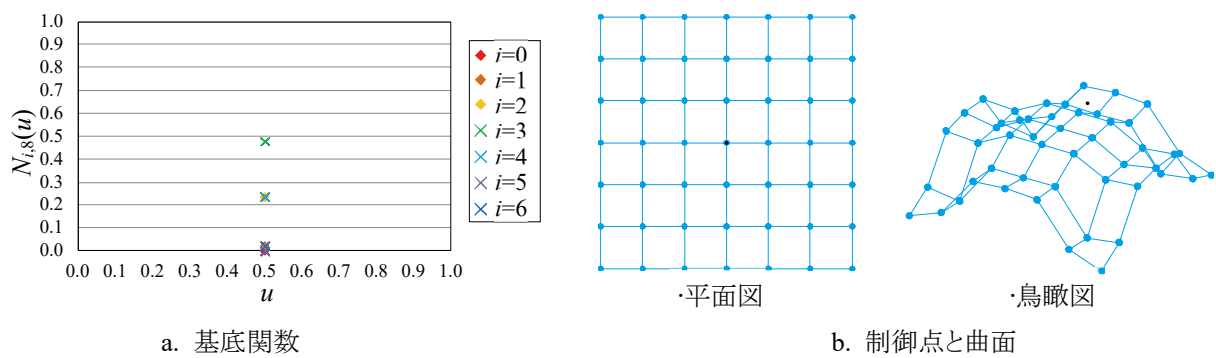


図 3.15 一様ノットベクトルの NURBS ( $m_{uv} = 8$ )

### 考察

$m_{uv} = 1$  は面を構成せず、すべての点がいずれかの制御点と一致し、 $m_{uv} = 2$  は滑らかな曲面を構成しない。 $m_{uv} = 2$  は、接線が連続しない  $C^0$  級連続となり、 $m_{uv} = 1$  は形状の連続性すらも保証されない。そのため NURBS は普通、階数を 3 以上に設定する。 $m_{uv} = 3 \sim 8$  に設定値を大きくするにつれて、制御点の配置領域に対して記述される曲面の領域が縮小する。特に  $m_{uv} = 8$  は面を構成せず、すべての点が 1 点に収束する。なお、一様ノットの場合、制御点列を等間隔に配置すると、記述される曲面の節点はどの階数設定においても等間隔である。

### 端部多重度 $m_{uv}$ ノットベクトル

一様ノットは  $m_{uv}$  によって曲面記述範囲が変化する。 $m_{uv} \geq 3$  では端点の制御点と曲面が一致せず、扱いが難しい。ノットベクトルの端部で多重度を  $m_{uv}$  とすることで、端点の制御点と曲面が一致し、曲面記述範囲が定まるため、曲面制御が容易になる。ノットベクトルを端部多重度  $m_{uv}$  としたとき、端部  $m_{uv}$  個以外のノットを内部ノットと呼ぶ ( $m_{uv} \leq i' \leq n_{uv} - 1$ )。また、次式のような、端部多重度  $m_{uv}$  かつ内部ノットを一様に配置する設定は開一様と呼ばれる。

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = [u_0, u_1, \dots, u_{i'}, \dots, u_{m_{uv}+n_{uv}}] \quad (u_{i'} \leq u_{i'+1}) \quad u_i = \begin{cases} 0.0 & (i' = 0, \dots, m_{uv} - 1) \\ \frac{i' - m_{uv} + 1}{m_{uv} - n_{uv} + 1} & (i' = m_{uv}, \dots, n_{uv} - 1) \\ 1.0 & (i' = n_{uv}, \dots, m_{uv} + n_{uv}) \end{cases} \quad (3-21)$$

図 3.7 の制御点列に対してノットベクトルを開一様に設定した数値結果を図 3.16-3.22 に示す。開一様に設定したとき  $m_{uv}$  の設定上限値は  $n_{uv}$  であり、ここでは  $m_{uv}$  を 1 から 7 まで変化させた計算例を示す。なお、端部多重度  $m_{uv}$  の設定において、すべての内部ノット多重度  $m_{uv}-1$  のとき、あるいは  $m_{uv} = n_{uv}$  のとき(内部ノット無し)、複数の制御点列を連ねたベジエと同一表現となる。したがって、ここで示す設定の  $m_{uv} = 7$  はベジエ( $n_{uv} = 7$ )と同一であり、本論文ではこの設定をベジエ表現と呼ぶ。

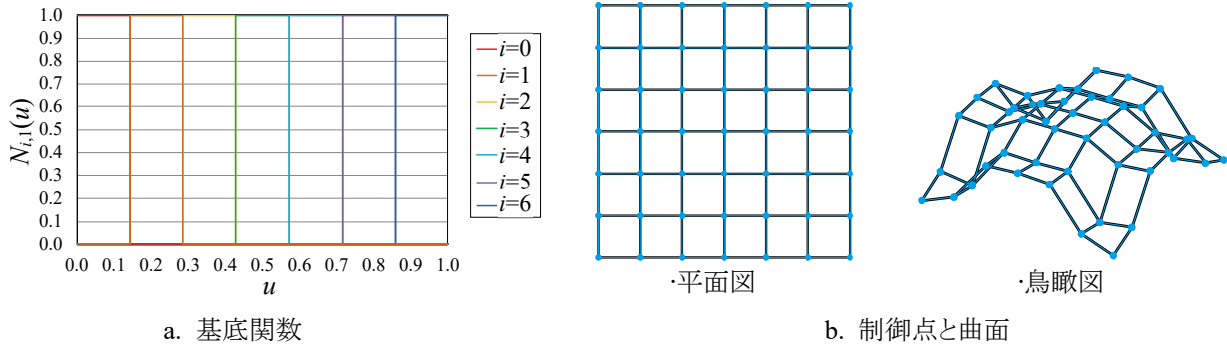


図 3.16 開一様ノットベクトルの計算例 ( $m_{uv} = 1$ )

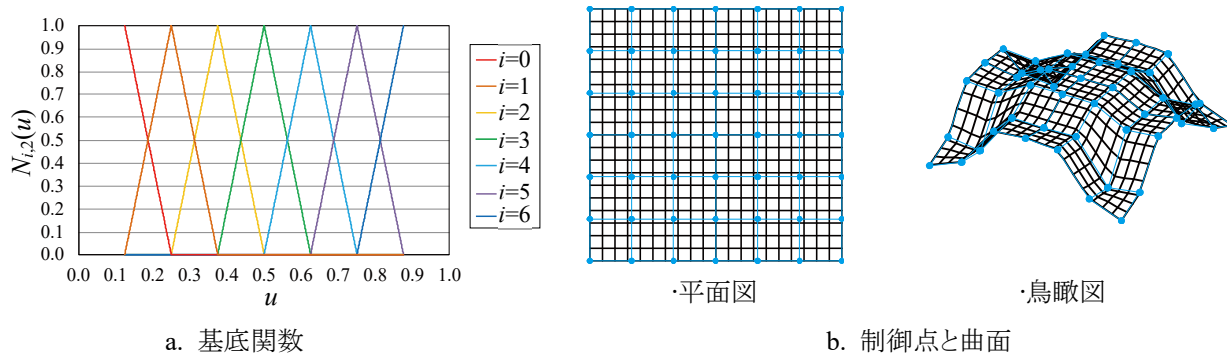


図 3.17 開一様ノットベクトルの計算例 ( $m_{uv} = 2$ )

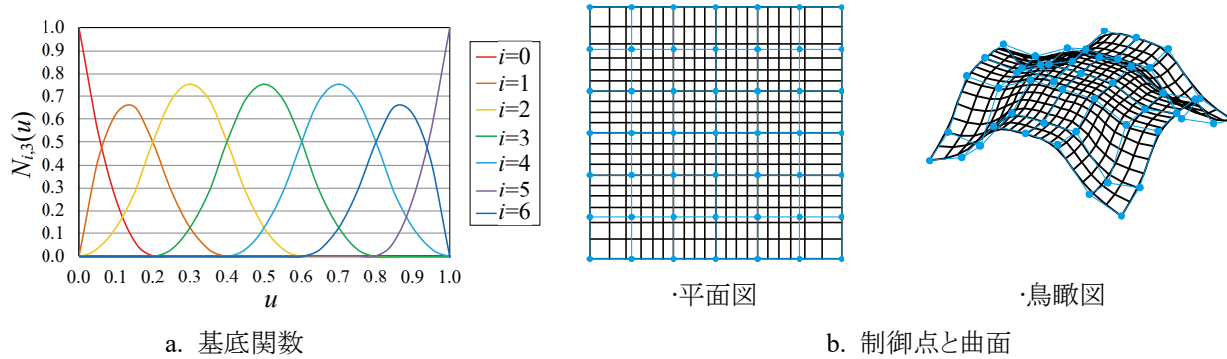


図 3.18 開一様ノットベクトルの計算例 ( $m_{uv} = 3$ )

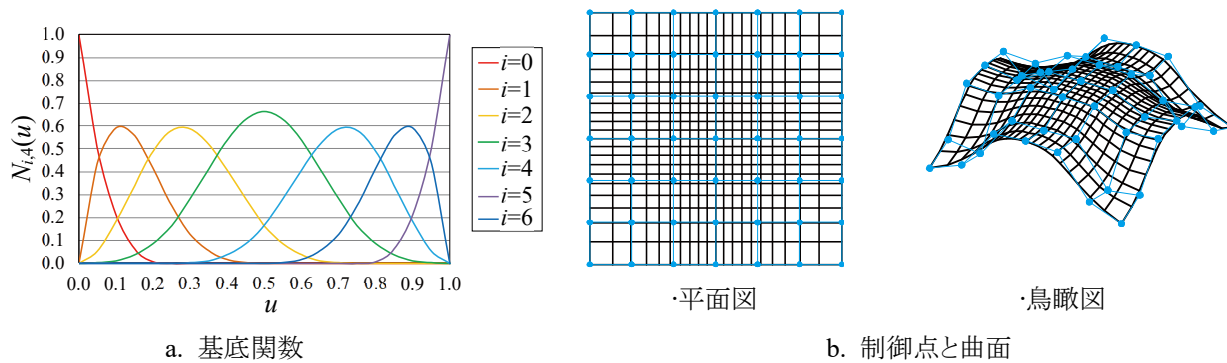
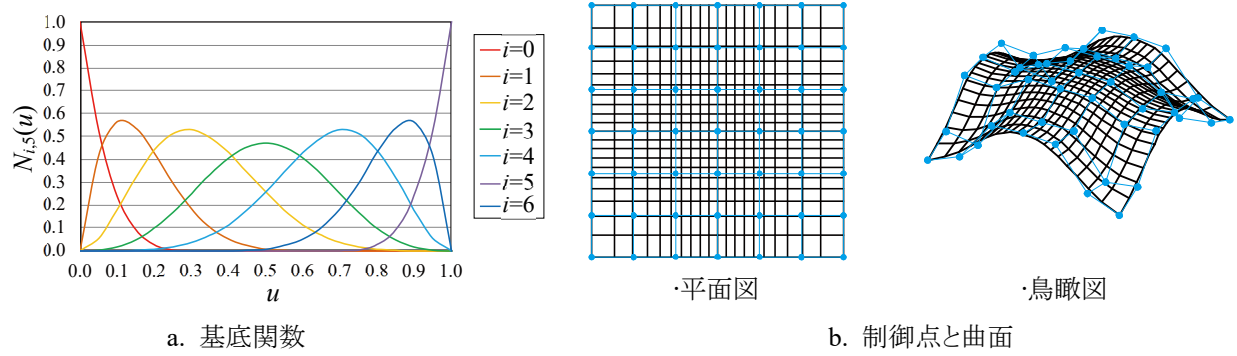
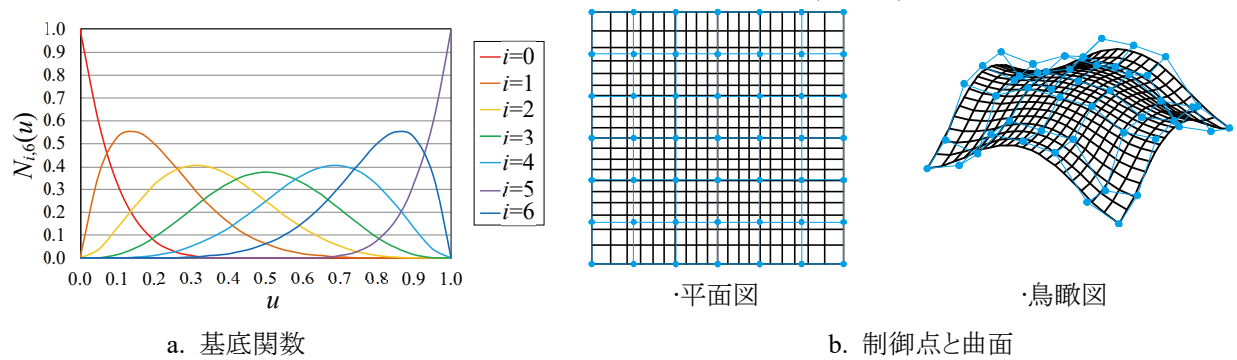
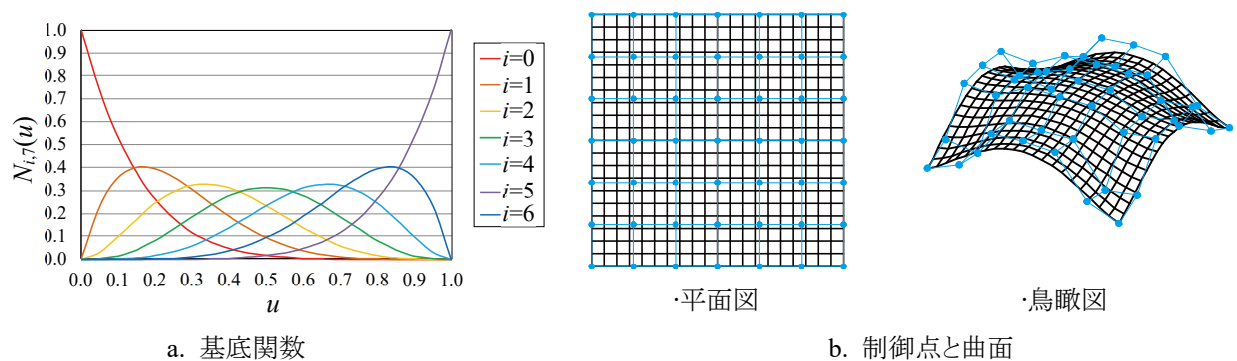


図 3.19 開一様ノットベクトルの計算例 ( $m_{uv} = 4$ )



図 3.20 開一様ノットベクトルの計算例 ( $m_{uv} = 5$ )図 3.21 開一様ノットベクトルの計算例 ( $m_{uv} = 6$ )図 3.22 開一様ノットベクトルの計算例 ( $m_{uv} = 7$ : ベジエ表現)

### 考察

$m_{uv} = 1, 2$  の結果は一様ノットベクトルと同一の結果である。 $m_{uv}=7$  は節点配置間隔が等間隔であるが、 $m_{uv}=3, 4, 5, 6$  は不等間隔である。端部多重度  $m_{uv}$  のノットベクトルに設定することで端点の制御点を通る曲面が記述され、与えた制御点列からスパンが決定できるため構造モデルを扱う上で都合が良い。

端部多重度  $m_{uv}$  とした内部ノット(非一様)に関するパラメトリックスタディを「付録 A NURBS のノットベクトルの検討」に示す。これらの結果より、本論文では開一様の NURBS を採用する。

### 3.4.2 階数

階数は、任意の位置情報パラメータにおいて影響する制御点の数を決めるパラメータである。NURBS は一般に  $C^2$  級連続、つまり曲率連続性が保証される  $m_{uv} = 4$  が採用される。また、開一様ノットベクトルを採用した場合、 $m_{uv}$  設定上限値は  $n_{uv}$  である。したがって、本論文で示す形態創生において、階数の設定範囲は  $m_{uv} = 4, 5, 6, 7$  を採用する。以下に、同じ制御点配置に対して階数設定値を 4 から 7 に変化させたときの曲面形状を示す。制御点は  $x$ - $y$  平面において等間隔配置とする(図 3.23)。

数値結果を図 3.24-3.26 に示す。制御点と解形状に関して、鳥瞰図と立面図を示し、立面図右上に中央節点  $z$  軸座標値を示す。

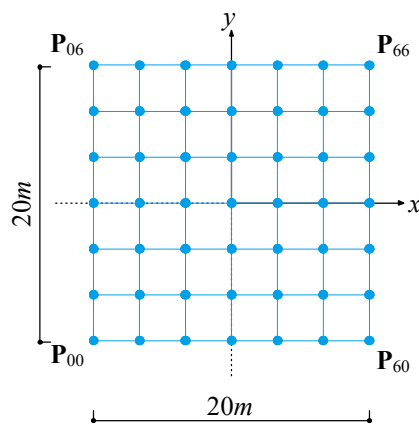


図 3.23 制御点配置 (階数の検討)

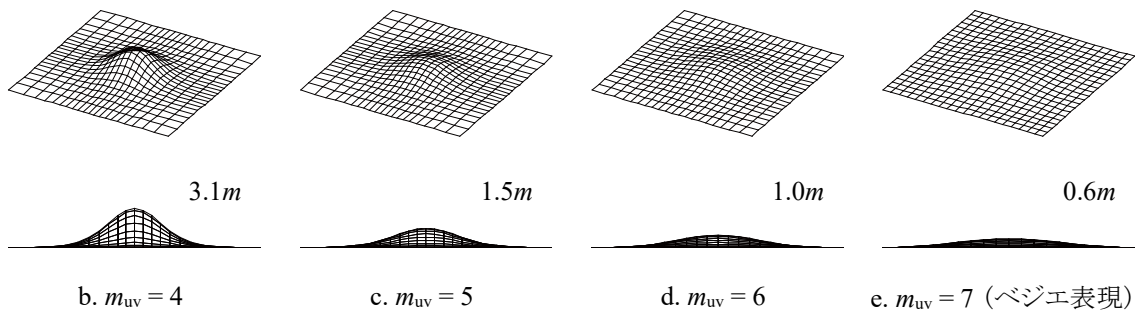
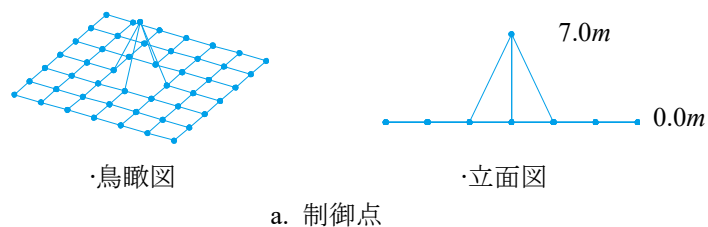


図 3.24 階数設定の計算例 1

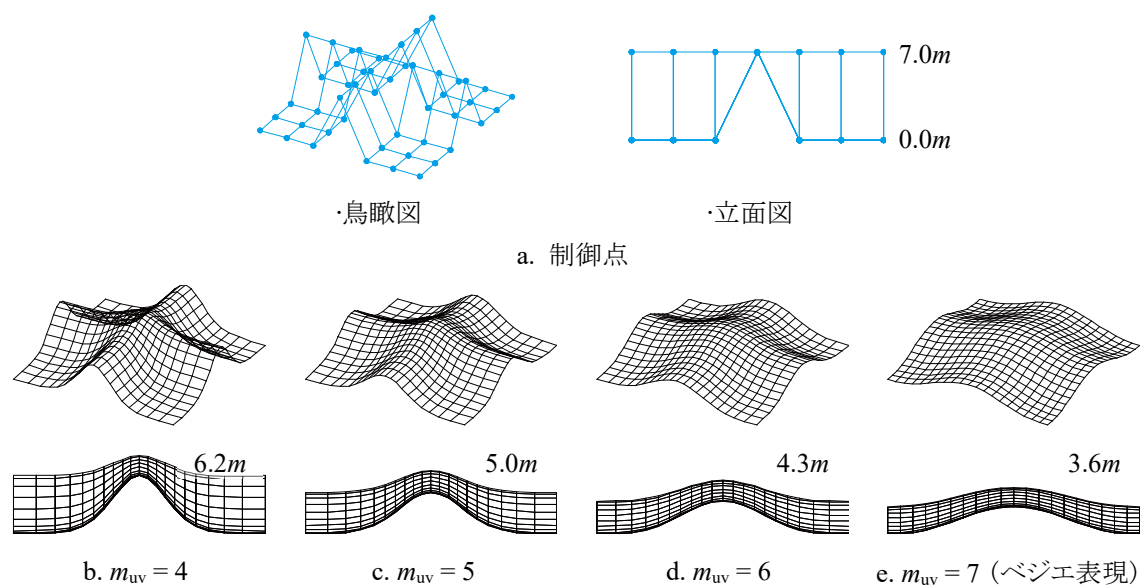


図 3.25 階数設定の計算例 2

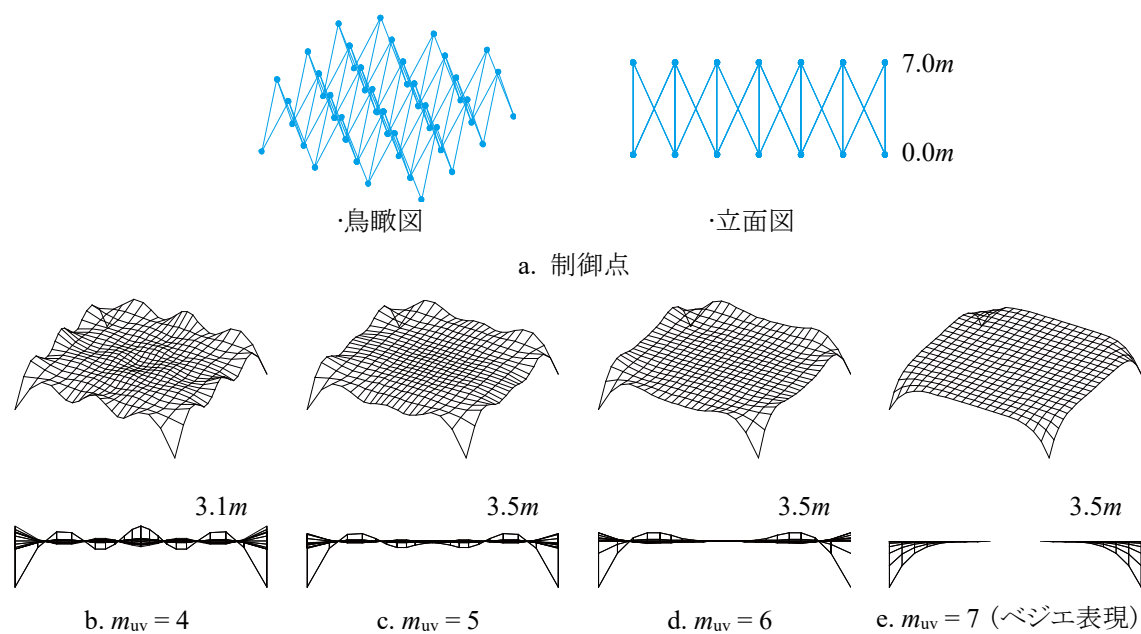


図 3.26 階数設定の計算例 3

## 考察

階数は図 3.19-3.22 に示す基底関数からわかるように、制御点の影響力と影響範囲を決定する。 $m_{uv} = 4$  の形状は計算例 1 から 3 において、制御点の配置によく対応した曲面が記述される。計算例 1 において、 $m_{uv}$  を 4 から 7 に変化させるにつれて、制御点一つの変動が曲面全体に分散して影響する。その結果、各階数で様相が異なる曲面形状が記述される。特に計算例 3 の  $m_{uv} = 7$  は、制御点列とは大きく異なり、平坦な形状となる。

## 制御点の配置範囲について

対称性を有する解析モデルにおいて、対称性を考慮した領域のみに制御点を配した場合、次の問題が生じると考える。

- 1) 端部の制御点を設計変数として扱う場合と扱わない場合の曲面記述特性の相異
- 2) 曲面をつなぎ合わせた箇所が接線不連続 ( $C^0$  級連続)

1)は端部の制御点は曲面座標と一致する特性によるものであり、これを設定変数として扱う場合と扱わない場合とでは得られる解特性に差が生じると考える。2)は部分的に滑らかでない自由曲面を記述することになる。一般に人の目にとって滑らかな曲面と感じることができるのは  $C^2$  級連続以上とされる。これらの問題を避けるため、本論文において制御点の配置は、対称性を有するモデルを対象とした場合でもモデル全体に配置する。

### 3.4.3 重み係数

重み係数は基底関数に掛ける係数で、制御点の影響力を変化させる。階数とは異なり、制御点一つずつに対して決定するため、曲面全体の様相を決定するものではない。

以下に、 $\mathbf{P}_{22}$  の  $z$  軸座標値  $z_{p22} = 15.0 \text{ m}$  とした図 3.27 の制御点配置に関して、 $\mathbf{P}_{22}$  の重み係数  $w_{22}$  を -1.0, 0.0, 1.0, 3.0, 5.0 と変化させ、 $w_{22}$  以外を 1.0 とする。

数値結果を図 3.28-3.30 に示す。左側に基底関数と重み係数を掛けたグラフ( $j=2$ )、中央に曲面の平面図、右側に鳥瞰図を示す。

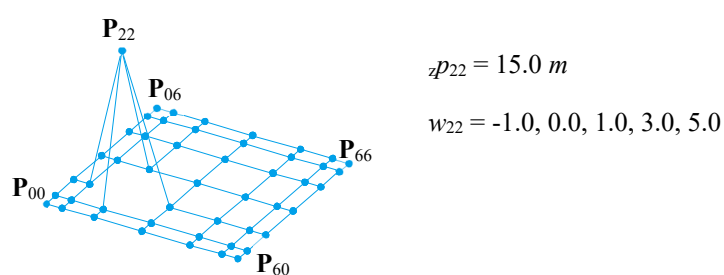
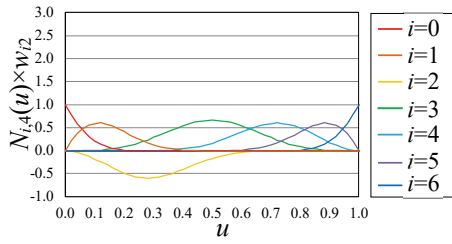
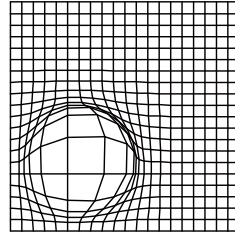


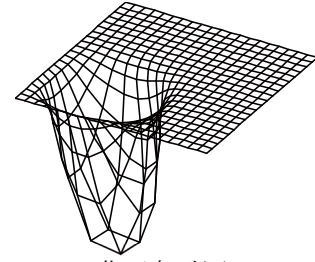
図 3.27 制御点配置（重み係数の検討）



・基底関数と重み係数の積

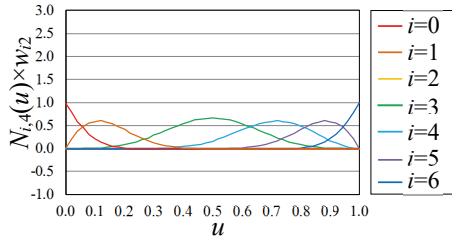


・曲面平面図

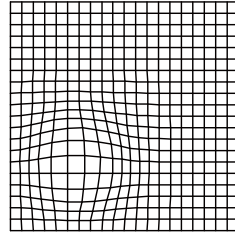


・曲面鳥瞰図

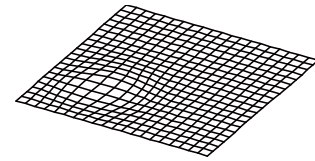
a.  $w_{22} = -1.0$



・基底関数と重み係数の積

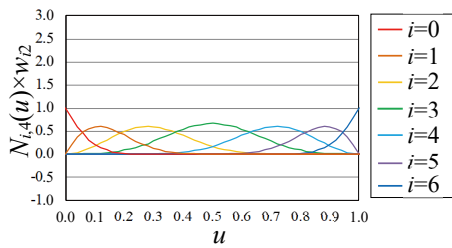


・曲面平面図

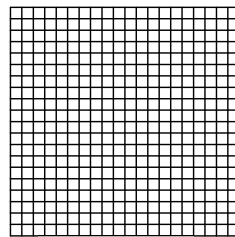


・曲面鳥瞰図

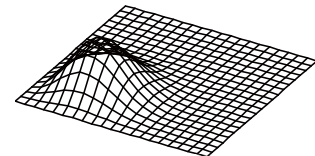
b.  $w_{22} = 0.0$



・基底関数と重み係数の積

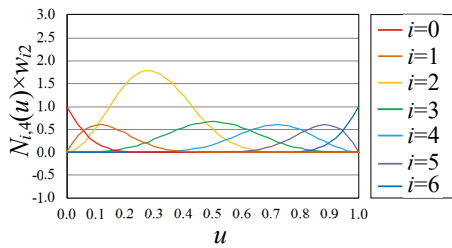


・曲面平面図

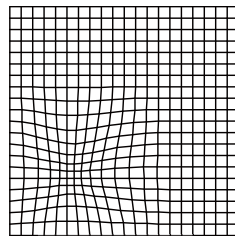


・曲面鳥瞰図

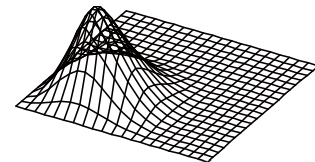
c.  $w_{22} = 1.0$



・基底関数と重み係数の積

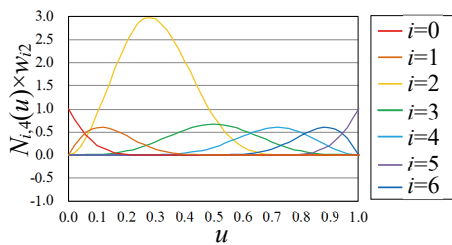


・曲面平面図

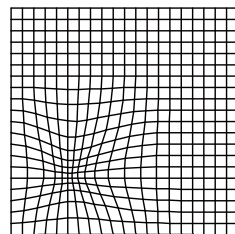


・曲面鳥瞰図

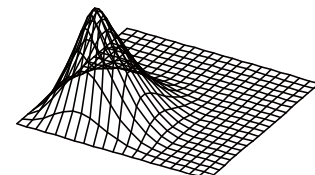
d.  $w_{22} = 3.0$



・基底関数と重み係数の積



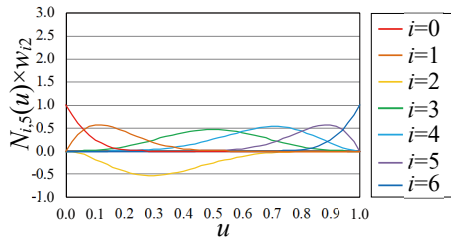
・曲面平面図



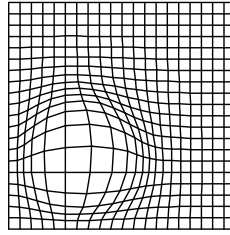
・曲面鳥瞰図

e.  $w_{22} = 5.0$

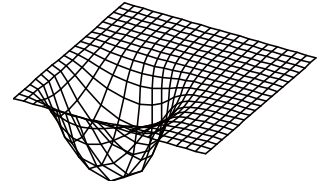
図 3.28 重み係数設定の計算例 ( $m_{uv}=4$ )



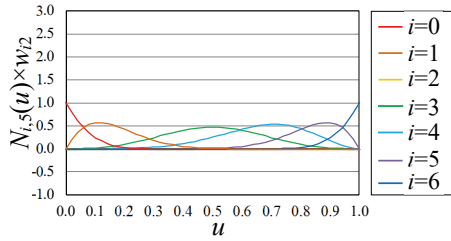
・基底関数と重み係数の積



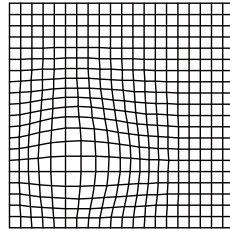
・曲面平面図



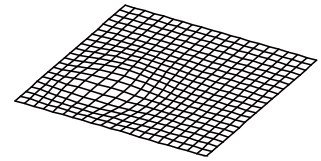
・曲面鳥瞰図

a.  $w_{22} = -1.0$ 

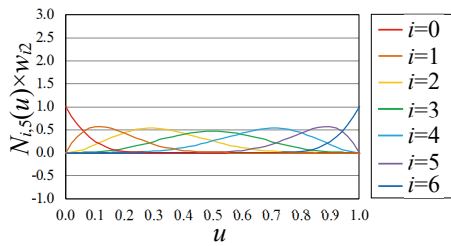
・基底関数と重み係数の積



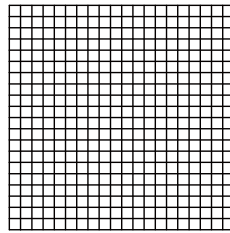
・曲面平面図



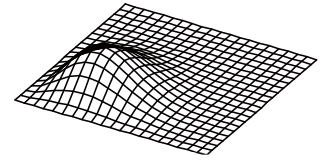
・曲面鳥瞰図

b.  $w_{22} = 0.0$ 

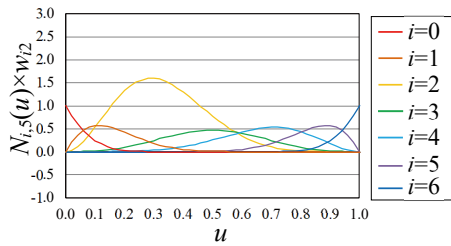
・基底関数と重み係数の積



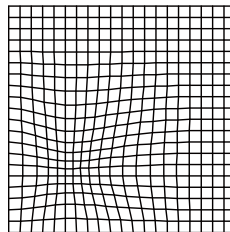
・曲面平面図



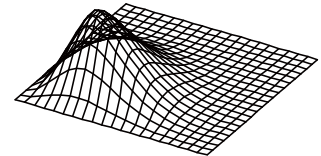
・曲面鳥瞰図

c.  $w_{22} = 1.0$ 

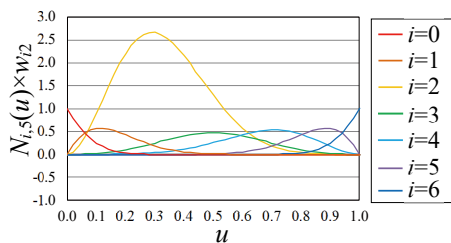
・基底関数と重み係数の積



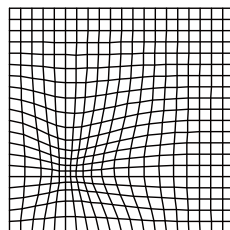
・曲面平面図



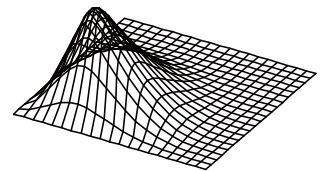
・曲面鳥瞰図

d.  $w_{22} = 3.0$ 

・基底関数と重み係数の積

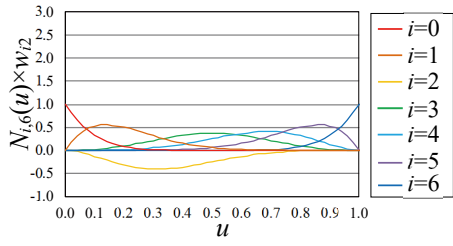


・曲面平面図

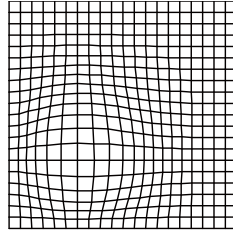


・曲面鳥瞰図

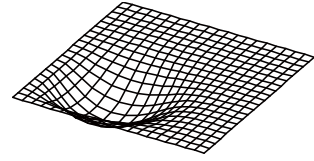
e.  $w_{22} = 5.0$ 図 3.29 重み係数設定の計算例 ( $m_{uv}=5$ )



・基底関数と重み係数の積

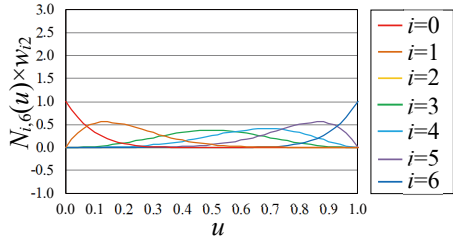


・曲面平面図

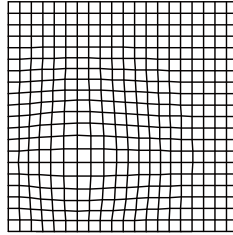


・曲面鳥瞰図

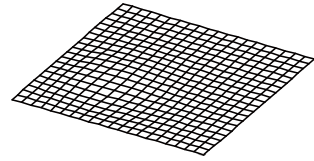
a.  $w_{22} = -1.0$



・基底関数と重み係数の積

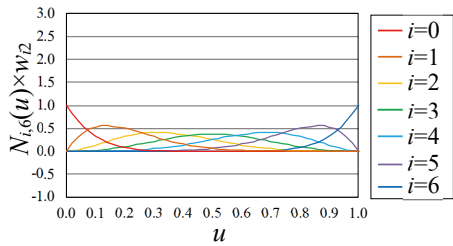


・曲面平面図

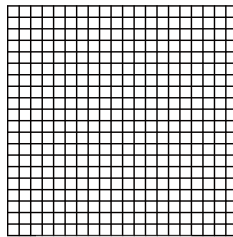


・曲面鳥瞰図

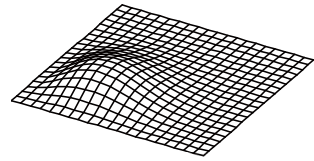
b.  $w_{22} = 0.0$



・基底関数と重み係数の積

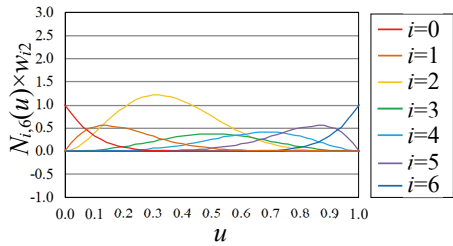


・曲面平面図

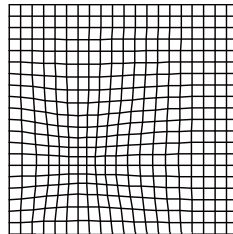


・曲面鳥瞰図

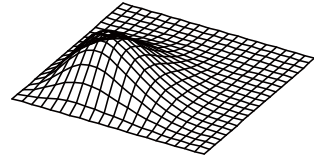
c.  $w_{22} = 1.0$



・基底関数と重み係数の積

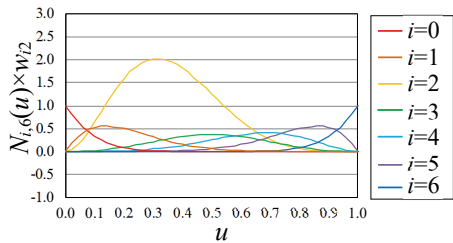


・曲面平面図

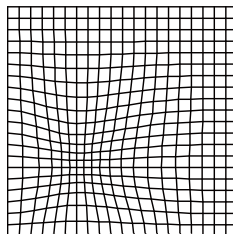


・曲面鳥瞰図

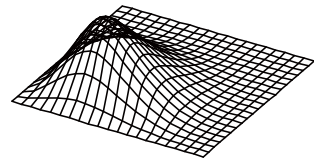
d.  $w_{22} = 3.0$



・基底関数と重み係数の積



・曲面平面図

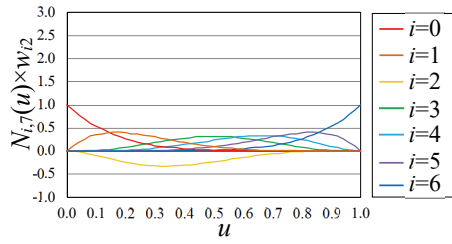


・曲面鳥瞰図

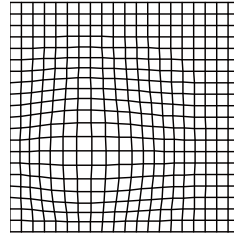
e.  $w_{22} = 5.0$

図 3.30 重み係数設定の計算例 ( $m_{uv}=6$ )

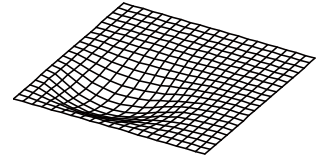




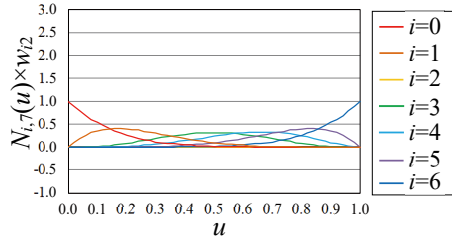
・基底関数と重み係数の積



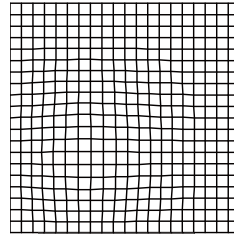
・曲面平面図



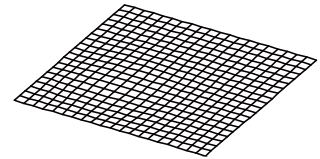
・曲面鳥瞰図

a.  $w_{22} = -1.0$ 

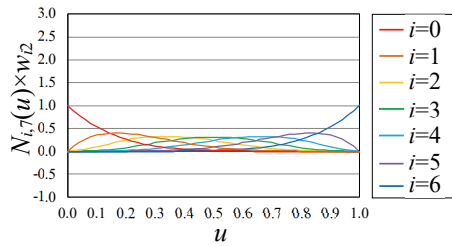
・基底関数と重み係数の積



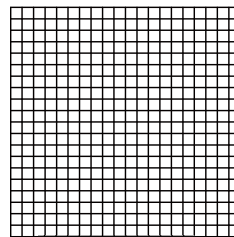
・曲面平面図



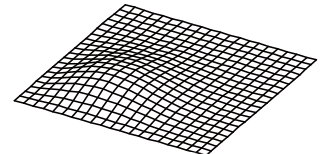
・曲面鳥瞰図

b.  $w_{22} = 0.0$ 

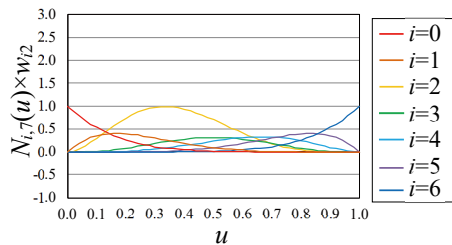
・基底関数と重み係数の積



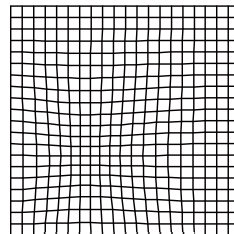
・曲面平面図



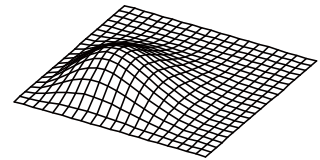
・曲面鳥瞰図

c.  $w_{22} = 1.0$ 

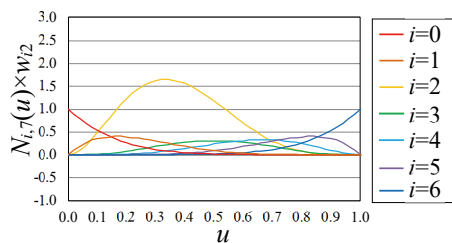
・基底関数と重み係数の積



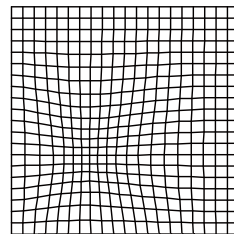
・曲面平面図



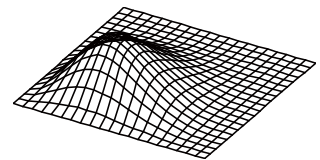
・曲面鳥瞰図

d.  $w_{22} = 3.0$ 

・基底関数と重み係数の積



・曲面平面図



・曲面鳥瞰図

e.  $w_{22} = 5.0$ 図 3.31 重み係数設定の計算例 ( $m_{uv}=7$ : ベジエ表現)

### 考察

同じ制御点配置に対して重み係数  $w_{22}$  を変化させると、大きく異なる曲面形状となる。 $w_{22} = 1.0$  から設定値を大きくすると、節点が制御点  $\mathbf{P}_{22}$  に近づく。 $w_{22} = -1.0$  の結果のように重み係数を負値に設定すると、制御点から斥力が働くかたちとなる。さらに、階数による曲面形状の違いが他の設定と比較して最も大きい。 $w_{22} = -1.0$  と  $w_{22} = 1.0$  において、基底関数と重み係数の積の図は、 $i = 2$  が上下反転した線となっている。ただし、重み係数が負値であることと、制御点座標の符号を負にすることは同義ではない。重み係数を  $w_{22} = 5.0$  と設定することで、記述される曲面の凸は制御点に近づく。これは、重み係数を大きく設定する設定する制約条件を与えることで、ライズを近似的に指定することができることを意味する。しかし、重み係数が  $1.0$  以外の設定では  $x$ - $y$  平面において節点が不等間隔となる。これは、 $w_{22} = 3.0, 5.0$  と設定することで制御点  $\mathbf{P}_{22}$  の影響力が強まるためである。 $w_{22} = 5.0$  の設定において、 $m_{uv} = 4$  は高く尖った形状であるが、 $m_{uv} = 7$  (ベジエ表現) はライズが低く丸みを帯びた形状であり、重み係数が広い範囲に影響している。重み係数の設定による影響の範囲と強さは、階数設定に応じた基底関数に従う。また、重み係数を極端な値に設定しても完全に制御点と曲面形状の座標は一致しない。以上のように、重み係数は単純な手順で凸形状を表現可能であるが、その設定は経験的に設定する必要がある。

### 3.5 NURBS 利用による形態表現

本論文で扱う形態創生問題の設計変数は、式(2-1)に示す、節点座標に関する節点情報ベクトル  $\mathbf{R}$  と部材特性ベクトル  $\mathbf{A}$  であり、これらは NURBS の制御点とする。 $\mathbf{R}$  より曲面形状の節点座標を決定し、 $\mathbf{A}$  より要素の部材特性(RC シェルの場合は板厚、グリッドシェルの場合は部材リスト番号)を決定する。したがって、NURBS の制御点列は 2 種類を用意する。図 3.32 に  $\mathbf{R}$  と  $\mathbf{A}$  からグリッドシェル形態を表現する手順の概念を示す。グリッドシェル形態に示す実線太さは断面積の比率を表す。

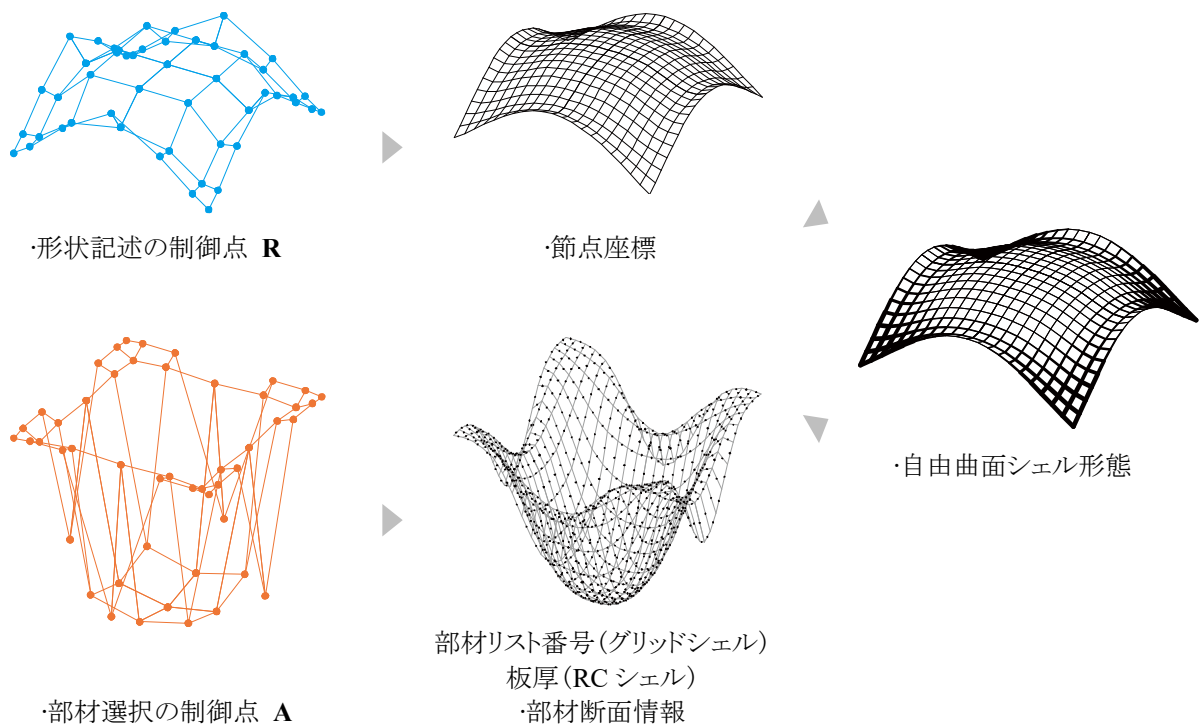


図 3.32 2 種類の制御点列から表現する自由曲面シェル形態

グリッドシェルの部材は、あらかじめ準備しておいたリストから選択する。通常、自由曲面構造は応力分布変化が滑らかであるから、部材の諸係数(断面積, 断面二次モーメント, 断面係数)も滑らかに分布することが望ましい。本論文では、パラメトリック曲面を形状記述だけでなく部材の選択時にも利用し、滑らかな部材分布を表現する。

部材選択方法は、まず、形状記述と同様にパラメトリック曲面を用いて仮の座標値を作成する。次に、要素  $k$  を構成する仮の座標  $r_{k,i}$  と  $r_{k,j}$  の  $z$  軸座標平均値の小数点以下を繰り上げ、リストの番号と対応させる。部材選択の例を図 3.33 に示す。この例では、要素  $k$  の部材はリスト番号 6 が選択される。

この手法を用いることでリスト番号が滑らかに変化することに注意すべきである。つまり、準備するリストの部材諸係数が昇順か降順でなければ、この手法の効果が発揮できない。本論文で扱う形態創生問題の目的関数(力学指標)は総ひずみエネルギーと曲げひずみエネルギーを採用する。これらの力学指標に重要な係数は、断面積と断面二次モーメントであり、この2種類の係数が昇順になるように設定する。

本論文で扱う形態創生問題におけるグリッドシェルの部材は一般構造用炭素鋼管(STK400)とし、表 3.1 に示すリストを用いる。リストに示す各部材の断面積を図 3.34 に、断面二次モーメントを図 3.35 に示す。

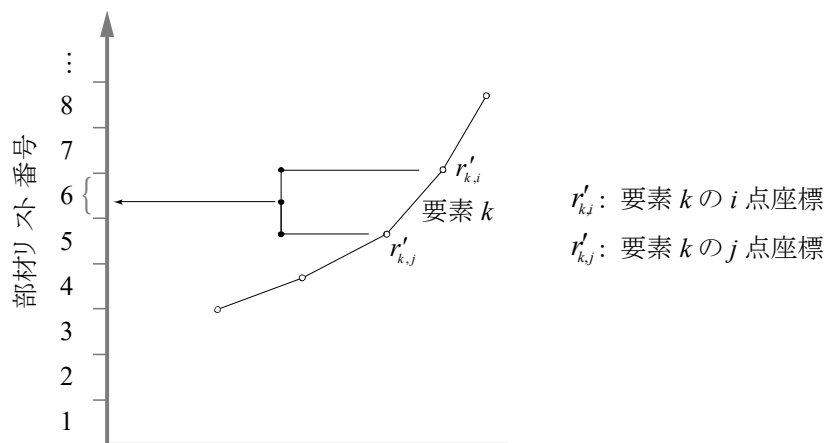


図 3.33 パラメトリック曲面利用の部材選択例

表 3.1 選択部材リスト(一般構造用炭素鋼管)

番号	外径 [mm]	厚さ [mm]	断面積 [ $cm^2$ ]	断面二次モーメント [ $cm^4$ ]
1	101.6	3.2	$0.989 \times 10^1$	$0.120 \times 10^3$
2	114.3	3.2	$0.112 \times 10^2$	$0.173 \times 10^3$
3	114.3	3.6	$0.125 \times 10^2$	$0.192 \times 10^3$
4	139.8	3.6	$0.154 \times 10^2$	$0.357 \times 10^3$
5	139.8	4.0	$0.171 \times 10^2$	$0.394 \times 10^3$
6	139.8	4.5	$0.191 \times 10^2$	$0.438 \times 10^3$
7	165.2	4.5	$0.227 \times 10^2$	$0.734 \times 10^3$
8	165.2	5.0	$0.252 \times 10^2$	$0.808 \times 10^3$
9	190.7	5.0	$0.292 \times 10^2$	$0.126 \times 10^4$
10	190.7	6.0	$0.348 \times 10^2$	$0.149 \times 10^4$
11	216.3	6.0	$0.396 \times 10^2$	$0.219 \times 10^4$
12	216.3	7.0	$0.460 \times 10^2$	$0.252 \times 10^4$
13	267.4	7.0	$0.573 \times 10^2$	$0.486 \times 10^4$
14	267.4	8.0	$0.652 \times 10^2$	$0.549 \times 10^4$
15	318.5	8.0	$0.780 \times 10^2$	$0.941 \times 10^4$
16	318.5	9.0	$0.875 \times 10^2$	$0.105 \times 10^5$
17	355.6	9.0	$0.980 \times 10^2$	$0.147 \times 10^5$
18	355.6	12.0	$0.130 \times 10^3$	$0.191 \times 10^5$
19	406.4	12.0	$0.149 \times 10^3$	$0.289 \times 10^5$
20	406.4	16.0	$0.196 \times 10^3$	$0.374 \times 10^5$

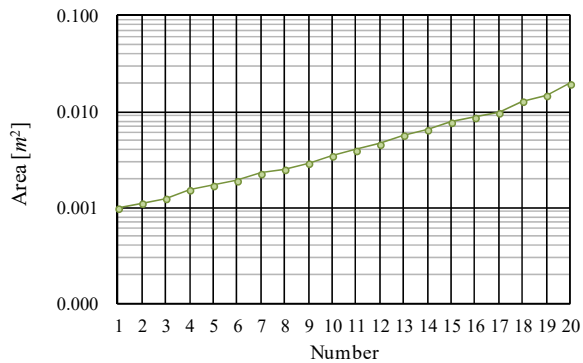


図 3.34 リストの部材断面積

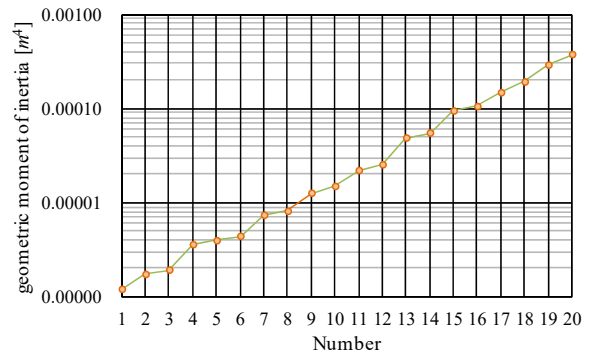


図 3.35 リストの部材断面二次モーメント

## 3.6 曲面に対する形状特徴指標

パラメトリック曲面のパラメータを変更して得られた解形状について、その特徴を表す指標が重要である。本論文では微分幾何学の曲率[70]に着目する。まず、3次元空間内でパラメトリック表示される曲面の曲率について説明し、NURBSの曲率計算方法を示す。次に曲率を利用した形状特徴指標を定義し、単純曲面について計算しその特性を示す。

### 3.6.1 パラメトリック曲面における曲率の算定

曲率は、曲線や曲面の湾曲具合を表す量である。図 3.36 に示す、曲面パラメータ  $t$  で表される2次元空間内の曲線  $\mathbf{q}(t)$  を考える。 $\mathbf{q}(t)$  から  $\mathbf{q}(t+\Delta t)$  に動いたときの曲線長さを  $ds$  とし、 $ds$  が十分微小のとき、この曲線は半径  $R$  の円弧とみなせる。 $\mathbf{q}(t)$ ,  $\mathbf{q}(t+\Delta t)$  における接ベクトル  $\mathbf{q}'(t)$ ,  $\mathbf{q}'(t+\Delta t)$  がなす角度  $d\theta$  を用いると次のような関係がある。

$$Rd\theta = ds \quad (3-22)$$

$$R = \frac{ds}{d\theta} \quad (3-23)$$

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3-24)$$

$R$  の逆数  $\kappa$  が曲率である。つまり、曲率  $\kappa$  とは曲線  $\mathbf{q}(t)$  上を微小長さ動いたときの、接ベクトル角度の変化量である。ここで  $R$  は曲率半径と呼ばれ、半径  $R$  の円を曲率円、その中心を曲率中心と呼ぶ。

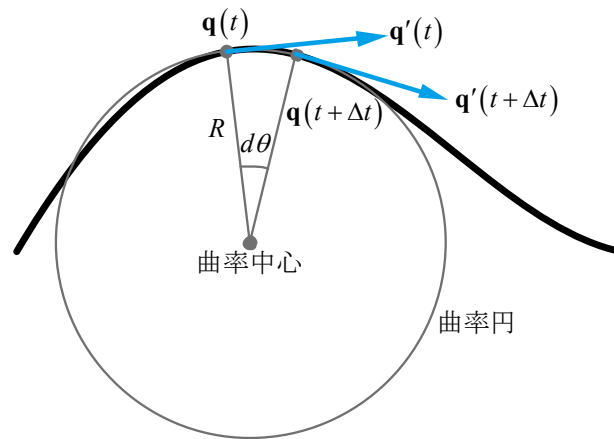


図 3.36 曲線と曲率円

曲面の曲率を計算するには、参照点を任意の方向に切断することで現れる曲線に注目する。 $u$  と  $v$  でパラメータ表示される次式の曲面  $\mathbf{p}(u,v)$  を考える。

$$\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (3-25)$$

$\mathbf{p}(u,v)$ の  $u$  および  $v$  に関する偏微分係数を次のように簡易表記する。

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_{uu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_{vv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \mathbf{k} \equiv \mathbf{p}_{uv} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

式(3-25)の微分形式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}(u,v) &= dx(u,v)\mathbf{i} + dy(u,v)\mathbf{j} + dz(u,v)\mathbf{k} \\ &= \begin{bmatrix} dx(u,v) & dy(u,v) & dz(u,v) \end{bmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right) \mathbf{k} \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \right) du + \left( \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k} \right) dv \\ &= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} dv \\ &= \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv \\ &= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_u \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-31)$$

$\mathbf{p}_u$  と  $\mathbf{p}_v$  間の内積を考え、第一基本量  $E, F, G$  から成る第一基本行列を次式のように定義する。

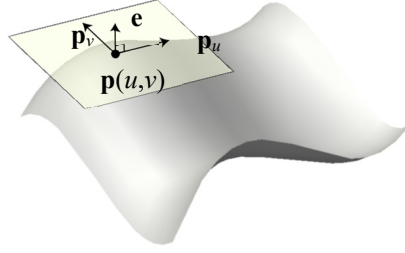
$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

パラメトリック曲面のパラメータ  $u$  と  $v$  における曲面上曲線長の微分形式は次式で与えられ、 $\mathbf{p}(u,v)$ の第一基本形式 I (first fundamental form)と呼ぶ。

$$\begin{aligned} I &= ds^2 = d\mathbf{p}^T d\mathbf{p} = d\mathbf{p} d\mathbf{p}^T \\ &= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \\ &= E du du + 2F du dv + G dv dv \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$ds(u,v) = |d\mathbf{p}(u,v)| = \sqrt{d\mathbf{p}(u,v)^T d\mathbf{p}(u,v)} = \sqrt{dx(u,v)^2 + dy(u,v)^2 + dz(u,v)^2} \quad (3-34)$$

$\mathbf{p}(u,v)$ は一次独立であり、接平面は  $\mathbf{p}_u$  と  $\mathbf{p}_v$  で構成できる。図 3.37 に示すように  $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$  は  $\mathbf{p}_u$  と  $\mathbf{p}_v$  に直交することか


 図 3.37 接平面と単位法ベクトル  $\mathbf{e}$ 

ら、接平面に垂直な単位ベクトルである単位法ベクトル  $\mathbf{e}$  は次式で得られる。

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|} \quad (3-35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{e} &= 0 \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{e} &= 0 \end{aligned} \quad (3-36)$$

式(3-36)を  $u$  および  $v$  について偏微分することにより、第二基本量  $L, M, N$  から成る第二基本行列を次式のように定義する。

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{e} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{e}_u & -\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{e}_v \\ -\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{e}_u & -\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{e}_v \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

$\mathbf{p}(u, v)$  の第二基本形式  $\Pi$  (second fundamental form) を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \Pi &= -d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{e} \\ &= -(\mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv) \cdot (\mathbf{e}_u du + \mathbf{e}_v dv) \\ &= \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \\ &= L du du + 2M du dv + N dv dv \end{aligned} \quad (3-38)$$

次に曲面上の点  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(u_0, v_0)$  の単位接ベクトル  $\mathbf{w}$  に対する第二基本形式  $\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$  を考える。

$$\mathbf{w} = \xi \mathbf{p}_u(u_0, v_0) + \eta \mathbf{p}_v(u_0, v_0) \quad (3-39)$$

$$\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 \quad (3-40)$$

$\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$  において図 3.38 のように、 $\mathbf{w}$  を  $\mathbf{p}_0$  の接平面内の単位円上を動かすときの最大・最小を求める。これは次式の制約条件下で式(3-40)の最大・最小を求めることである。

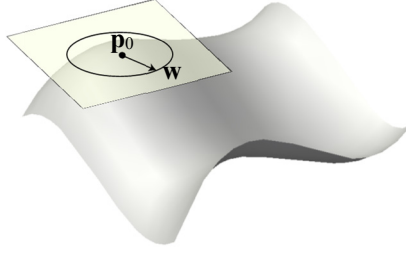
$$|\mathbf{w}|^2 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1 \quad (3-41)$$

条件式(3-41)の代わりに  $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$  という条件下で次式を求めることと同義である。

$$\lambda = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} \quad (3-42)$$

$\xi$  および  $\eta$  で偏微分し、 $\partial\lambda/\partial\xi = \partial\lambda/\partial\eta = 0$  とおくと次式となる。



図 3.38 接平面上の単位円を動く  $\mathbf{w}$ 

$$\begin{aligned}(L - \lambda E)\xi + (M - \lambda F)\eta &= 0 \\ (M - \lambda F)\xi + (N - \lambda G)\eta &= 0\end{aligned}\tag{3-43}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} &= 0 \\ (\xi, \eta) &\neq 0\end{aligned}\tag{3-44}$$

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN + GL - 2FM)\lambda + LN - M^2 = 0\tag{3-45}$$

解を  $\lambda = \kappa_1, \kappa_2$  とすると、解と係数の関係より次式が得られる。

$$\kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K\tag{3-46}$$

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = P\tag{3-47}$$

ここで、 $K$  をガウス曲率(Gaussian curvature),  $P$  を平均曲率(mean curvature),  $\kappa_1$  および  $\kappa_2$  を主曲率(principal curvature)と呼ぶ。特に、 $\kappa_1, \kappa_2$  を各々最大, 最小主曲率( $\kappa_1 \geq \kappa_2$ )と呼び、 $\Pi(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = \kappa_1, \Pi(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2) = \kappa_2$  となる

単位ベクトル  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  の方向を、点  $\mathbf{p}_0$  における主方向(principal direction)と呼ぶ。 $\kappa_1 \neq \kappa_2$  であるとき、 $\mathbf{w}_1$  と  $\mathbf{w}_2$  は直交する。

次に  $\kappa_1 = \kappa_2$  の場合を考える。これは式(3-40)の最大と最小が一致するため、 $\Pi(\mathbf{w}, \mathbf{w})$  は  $\mathbf{w}$  が接平面の単位円上を動くとき定数  $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$  となる。つまり、次式がすべての  $(\xi, \eta)$  で成り立つ。

$$\kappa(E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2\tag{3-48}$$

式(3-42)が成り立つ点を臍点(umblic)と呼び、第一基本量と第二基本量には次の関係がある。

$$L = \kappa E \quad M = \kappa F \quad N = \kappa G\tag{3-49}$$

ここで特に、 $\kappa = 0$  の点を平坦点、 $\kappa \neq 0$  の点を円点と呼ぶ。臍点ではすべての方向が主方向となる。

### 3.6.2 NURBS の偏微分

前節で示したように、曲率の計算には曲面の2階までの  $u, v$  方向偏微分係数が必要となる。NURBS の偏微分は以下のように計算される。

NURBS の偏微分の計算には基底関数の微分係数が必要である。 $m$  階 B スプライン基底関数  $N_{i,m}(t)$  の  $r$  階微分係数は次式で得られる。

$$\frac{d^r N_{i,m}(t)}{dt^r} \equiv N_{i,m}^{(r)}(t) = \frac{m-1}{t_{i+m-1} - t_i} N_{i,m-1}^{(r-1)}(t) - \frac{m-1}{t_{i+m} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}^{(r-1)}(t) \quad (3-50)$$

次式のように、式(3-18)で表される NURBS の式について、分子を  $\omega$ 、分母を  $\mathbf{A}$  とおく。

$$\omega \equiv \omega(u, v) = \sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} N_{i,mu}(u) N_{j,mv}(v) \omega_{ij} \quad (3-51)$$

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(u, v) = \sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} N_{i,mu}(u) N_{j,mv}(v) \omega_{ij} \mathbf{q}_{ij} \quad (3-52)$$

このとき、曲面  $\mathbf{P}(u, v)$  の  $u$  方向  $k$  階、 $v$  方向  $l$  階の偏微分係数  $\mathbf{P}^{(k,l)}(u, v)$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(k,l)}(u, v) &= \frac{\partial^{k+l}}{\partial u^k \partial v^l} \mathbf{P}(u, v) \\ &= \frac{1}{\omega} \left\{ \mathbf{A}^{(k,l)} - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \omega^{(i,0)} \mathbf{P}^{(k-i,l)}(u, v) - \sum_{j=1}^l \binom{l}{j} \omega^{(0,j)} \mathbf{P}^{(k,l-j)}(u, v) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \sum_{j=1}^l \binom{l}{j} \omega^{(i,j)} \mathbf{P}^{(k-i,l-j)}(u, v) \right\} \end{aligned} \quad (3-53)$$

$$\mathbf{A}^{(k,l)} = \sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} N_{i,mu}^{(k)}(u) N_{j,mv}^{(l)}(v) \omega_{ij} \mathbf{q}_{ij} \quad (3-54)$$

$$\omega^{(k,l)} = \sum_{i=0}^{nu-1} \sum_{j=0}^{nv-1} N_{i,mu}^{(k)}(u) N_{j,mv}^{(l)}(v) \omega_{ij} \quad (3-55)$$

### 3.6.3 形状特徴指標

形状の湾曲具合を示す指標として、曲率を曲面全体にわたって平均した値を用いる。その曲率に式(3-46), (3-47)のガウス曲率  $K$  と平均曲率  $P$  を利用するには、次のような問題点がある。 $K$  は主曲率を掛け合わせるため、主曲率に  $0$  が含まれると必ず  $0$  になる。 $P$  は主曲率を足し合わせるため、符号が異なった場合、相殺して  $0$  になることがある。例えば、 $K$  は筒面で、 $P$  は極小曲面で  $0$  になる。そのため、湾曲の強弱を示す指標として採用できない。

主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  の符号は凹凸方向の情報である。湾曲の強弱を示す形状特徴指標として、 $\kappa_1, \kappa_2$  の絶対値から計算する平均曲率  $\tilde{C}$  を曲面全体で平均した次式の  $C$  を定義する。

$$\tilde{C}_i = \frac{|\kappa_{1,i}| + |\kappa_{2,i}|}{2} \quad (3-56)$$

$$C = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{C}_i \quad (3-57)$$

ここで、 $N_p$ : 曲面上の参照点数,  $k_1$ :  $i$  番目の最大主曲率,  $k_2$ :  $i$  番目の最小主曲率 である。

#### 数値例題

単純な曲面に対して、前節で定義した形状特徴指標  $C$  を計算し、その特性を示す。次式の 4 種類の曲面について計算する。

$$\text{EP 曲面 (elliptic paraboloid)} \quad \mathbf{p}(u, v) = \left( u, v, c \left( 1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) \right) \quad (3-58)$$

$$\text{HP 曲面 (hyperbolic paraboloid)} \quad \mathbf{p}(u, v) = \left( u, v, c \left( \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) \right) \quad (3-59)$$

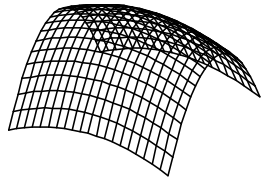
$$\text{筒面 (cylindrical surface)} \quad \mathbf{p}(u, v) = \left( u, v, c \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \right) \quad (3-60)$$

$$\text{懸垂曲面 (catenoid)} \quad \mathbf{p}(u, v) = \left( u, a \cosh \frac{u}{a} \cos v, a \sinh \frac{u}{a} \cos v \right) \quad (3-61)$$

ここで、 $a$  と  $b$  は曲面形状を決める定数である。

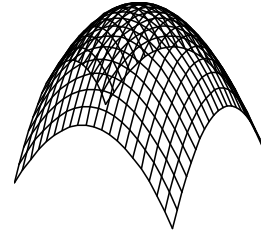
図 3.39 に曲面形状と計算結果を示す。曲面形状は定数  $a$  および  $b$  を変え、右側に示す曲面形状の方が強く湾曲するようにした。形状特徴指標  $C$  とあわせて、式(3-57)の  $\tilde{C}$  を式(3-46)のガウス曲率  $K$  に置き換えて計算した  $C_K$  と、式(3-47)の平均曲率  $P$  に置き換えて計算した  $C_P$  も併せて示す。二つの曲面形状に対する数値を比較して大きな値を下線で示す。いずれの曲面においても右側の曲面の方が大きな値を示すのは  $C$  のみであり、湾曲の強弱を表している。

図 3.40 に曲面上  $\tilde{C}$  のコンター図を示す。強く湾曲する箇所では  $\tilde{C}$  が大きくなり、形状の詳細を把握できる。



$a=1.0, b=1.0$

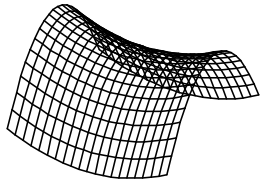
$$\begin{aligned} C_K &= 0.318 \\ C_P &= 0.591 \\ C &= 0.591 \end{aligned}$$



$a=2.0, b=1.0$

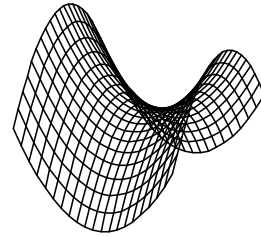
$$\begin{aligned} C_K &= \underline{0.602} \\ C_P &= \underline{0.773} \\ C &= \underline{0.773} \end{aligned}$$

a. EP 曲面



$a=1.0, b=1.0$

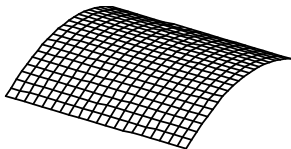
$$\begin{aligned} C_K &= \underline{-0.318} \\ C_P &= \underline{0.262} \\ C &= 0.584 \end{aligned}$$



$a=2.0, b=1.0$

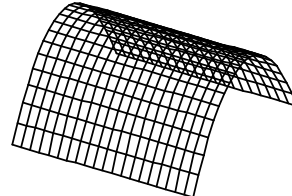
$$\begin{aligned} C_K &= -0.602 \\ C_P &= 0.000 \\ C &= \underline{0.711} \end{aligned}$$

b. HP 曲面



$a=1.0$

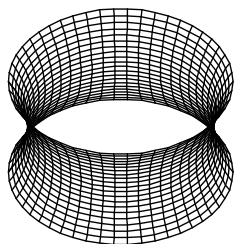
$$\begin{aligned} C_K &= 0.000 \\ C_P &= 0.221 \\ C &= 0.221 \end{aligned}$$



$a=2.0$

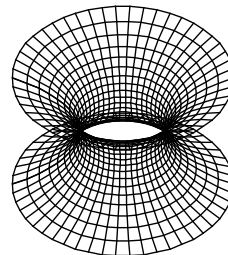
$$\begin{aligned} C_K &= 0.000 \\ C_P &= \underline{0.430} \\ C &= \underline{0.430} \end{aligned}$$

c. 筒面



$a=2.0$

$$\begin{aligned} C_K &= -0.018 \\ C_P &= 0.000 \\ C &= 0.134 \end{aligned}$$

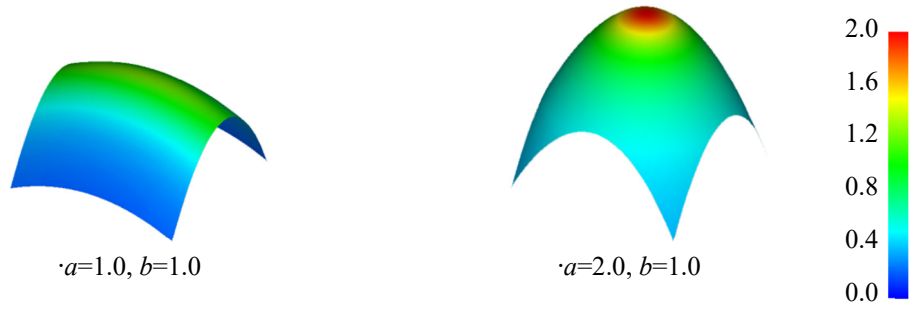


$a=5.0$

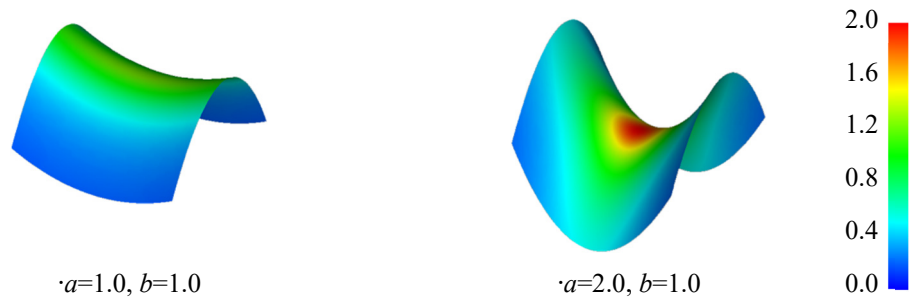
$$\begin{aligned} C_K &= \underline{-0.085} \\ C_P &= 0.000 \\ C &= \underline{0.267} \end{aligned}$$

d. 懸垂面 (極小曲面)

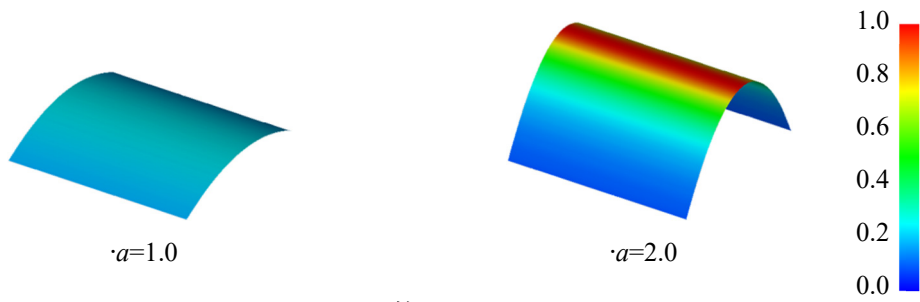
図 3.39 単純曲面の形状特徴指標  $C$



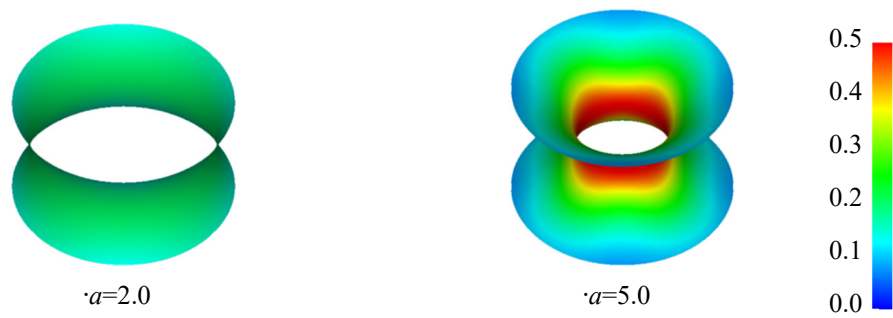
a. EP 曲面



b. HP 曲面



c. 筒面



d. 懸垂面 (極小曲面)

図 3.40  $\tilde{C}_i$  の分布

### 3.7 制御点配置

設計変数である部材特性ベクトル  $\mathbf{A}$  と節点情報ベクトル  $\mathbf{R}$  は、各々NURBS の制御点  $z$  軸座標値であり、制御点数  $n_{uv} = 7$ 、ノットベクトル  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  を開一様に設定する。NURBS の階数と優良解形状の関係を確認するため、形状に関しては  $m_{uv} = 4, 5, 6, 7$  に変化させ、部材に関しては  $m_{uv} = 4$  に設定する。その際、有限要素節点座標を  $x$ - $y$  平面で等間隔となるよう、制御点配置を階数に応じて図 3.41 に示す間隔に設定する。この配置間隔に設定することで、階数を変化させても同じ基準形状を扱うことが可能となる。また、基準形状の制御点  $z$  軸座標値はすべて  $0.0\text{ m}$  に設定し、支持点位置の形状に関する制御点は設計変数に含まず  $0.0\text{ m}$  に固定する。したがって、設計変数の数は形状に関して 9 個と部材に関して 10 個の合計 19 個である。

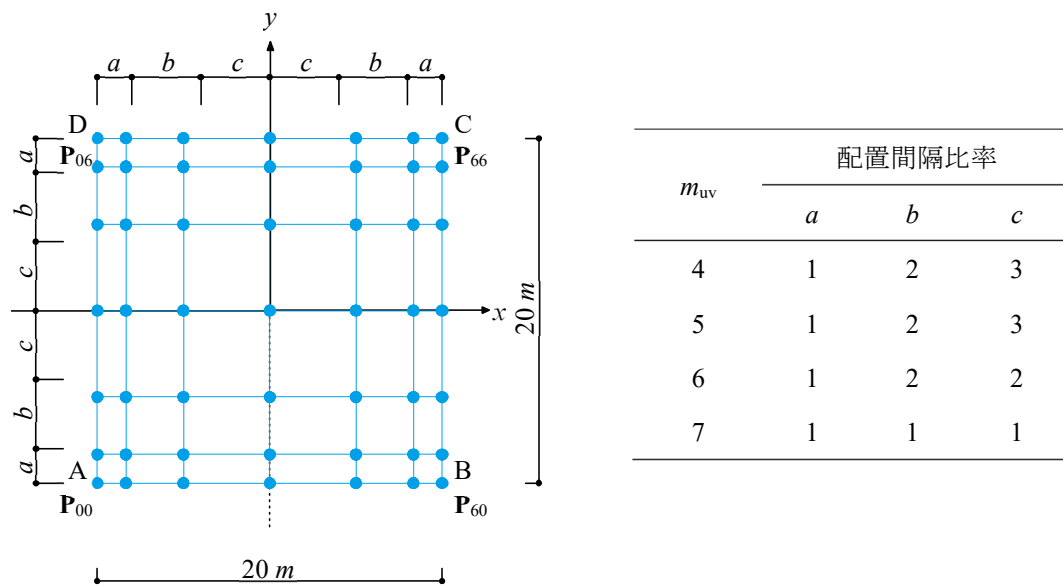


図 3.41 制御点配置間隔の比率

### 3.8 曲面補間手法

本論文では、意匠性あるいは内部空間の制御を想定した凹凸曲面を扱う。ただし、NURBS は制御点位置と曲面形状が一致しないため、制御点の操作のみでは具体的な座標を指定することはできず、凹凸の度合は経験的に決める必要がある。一方、 $u, v$  方向で制御点数が同一の場合( $n_u = n_v$ )、逆行列計算より任意の点列座標を指定する曲面記述が可能である。この手順を補間(interpolation)と呼ぶ。以下に、与えた点列の全てを座標指定点とする方法と、任意点のみを座標指定する方法を説明する。

#### 3.8.1 全点列座標指定

点列補間は順序づけられた点列を与え、その点列を通過するという条件のもと同数個の制御点列を求める方法である。まず式(3-19)の右辺を  $k, l$  を代入して次式のように展開する( $k = 0, 1, 2, \dots, n_{pu}, l = 0, 1, 2, \dots, n_{pv}$ )。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} \\
 &= \left[ \begin{aligned} & \frac{w_{00} N_{0,m_u}(\bar{u}_0) N_{0,m_v}(\bar{v}_0) \mathbf{P}_{00}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_0) N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} + \frac{w_{01} N_{0,m_u}(\bar{u}_0) N_{1,m_v}(\bar{v}_0) \mathbf{P}_{01}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_0) N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} + \dots + \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)} N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_0) N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_0) \mathbf{P}_{(n_u-1)(n_v-1)}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_0) N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} \\ & \vdots \\ & \frac{w_{00} N_{0,m_u}(\bar{u}_k) N_{0,m_v}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{00}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} + \frac{w_{01} N_{0,m_u}(\bar{u}_k) N_{1,m_v}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{01}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} + \dots + \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)} N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_k) N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{(n_u-1)(n_v-1)}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} \\ & \vdots \\ & \frac{w_{00} N_{0,m_u}(\bar{u}_m) N_{0,m_v}(\bar{v}_n) \mathbf{P}_{00}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} + \frac{w_{01} N_{0,m_u}(\bar{u}_m) N_{1,m_v}(\bar{v}_n) \mathbf{P}_{01}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} + \dots + \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)} N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_m) N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_n) \mathbf{P}_{(n_u-1)(n_v-1)}}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} \end{aligned} \right] \\
 &= \left[ \begin{aligned} & \frac{w_{00} N_{0,m_u}(\bar{u}_0) N_{0,m_v}(\bar{v}_0)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_0) N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} & \frac{w_{01} N_{0,m_u}(\bar{u}_0) N_{1,m_v}(\bar{v}_0)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_0) N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} & \dots & \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)} N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_0) N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_0)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_0) N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \frac{w_{00} N_{0,m_u}(\bar{u}_k) N_{0,m_v}(\bar{v}_l)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} & \frac{w_{01} N_{0,m_u}(\bar{u}_k) N_{1,m_v}(\bar{v}_l)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} & \dots & \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)} N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_k) N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_l)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_k) N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \frac{w_{00} N_{0,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{0,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} & \frac{w_{01} N_{0,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{1,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} & \dots & \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)} N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij} N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}}) N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} \end{aligned} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} \\ \mathbf{P}_{01} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{10} \\ \mathbf{P}_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{(n_u-1)(n_v-3)} \\ \mathbf{P}_{(n_u-1)(n_v-2)} \\ \mathbf{P}_{(n_u-1)(n_v-1)} \end{bmatrix} \quad (3-62)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{u}_k, \bar{v}_l$ : 制御点  $\mathbf{P}_{ij}$  を通過するときの位置情報パラメータである。制御点  $\mathbf{P}_{ij}$  の  $x, y, z$  座標  $\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y, \mathbf{P}_z$  と  $(n_u-1) \times (n_v-1)$  マトリクス  $\tilde{\mathbf{N}}$  を用いて、通過点列  $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$  の  $x, y, z$  座標  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  は次式の  $(n_u-1) \times (n_v-1)$  元連立一次方程式で表現することができる。

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_z \end{bmatrix} \quad (i=0, 1, \dots, n_u-1, \quad j=0, 1, \dots, n_v-1) \quad (3-63)$$

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \frac{w_{00}N_{0,m_u}(\bar{u}_0)N_{0,m_v}(\bar{v}_0)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_0)N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} & \frac{w_{01}N_{0,m_u}(\bar{u}_0)N_{1,m_v}(\bar{v}_0)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_0)N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} & \dots & \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)}N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_0)N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_0)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_0)N_{j,m_v}(\bar{v}_0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_{00}N_{0,m_u}(\bar{u}_k)N_{0,m_v}(\bar{v}_l)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_k)N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} & \frac{w_{01}N_{0,m_u}(\bar{u}_k)N_{1,m_v}(\bar{v}_l)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_k)N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} & \dots & \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)}N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_k)N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_l)}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_k)N_{j,m_v}(\bar{v}_l)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_{00}N_{0,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}})N_{0,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}})N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} & \frac{w_{01}N_{0,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}})N_{1,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}})N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} & \dots & \frac{w_{(n_u-1)(n_v-1)}N_{n_u-1,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}})N_{n_v-1,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})}{\sum_{i=0}^{n_u-1} \sum_{j=0}^{n_v-1} w_{ij}N_{i,m_u}(\bar{u}_{n_{pu}})N_{j,m_v}(\bar{v}_{n_{pv}})} \end{bmatrix} \quad (3-64)$$

また、式(3-63)は  $n_u = n_v$  であれば正方行列であり、逆行列を算出することで次式のように通過点列  $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$  を通る曲面を記述する制御点列  $\mathbf{P}_{ij}$  が導かれる。

$$\mathbf{P}_x = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{X} \quad \mathbf{P}_y = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Y} \quad \mathbf{P}_z = \tilde{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z} \quad (3-65 \text{ a-c})$$

位置情報パラメータ  $\bar{u}_k, \bar{v}_l$  は、通過点の点間距離を基に、次式のように決定する。

$$\bar{u}_k = \frac{1}{n_v} \sum_{n=0}^{n_v-1} \bar{u}_k^{(n)}$$

$$\bar{u}_k^{(n)} = \begin{cases} 0.0 & (k=0) \\ \bar{u}_{k-1}^{(n)} + \frac{|\mathbf{P}_{kn} - \mathbf{P}_{k-1n}|}{d} & (k=1, 2, \dots, n_u-2) \\ 1.0 & (k=n_u-1) \end{cases} \quad (3-66 \text{ a-c})$$

$$d = \sum_{k=0}^{n_u-1} |\mathbf{P}_{kn} - \mathbf{P}_{k-1n}|$$



$$\begin{aligned}
\bar{v}_l &= \frac{1}{n_u} \sum_{m=0}^{n_u-1} \bar{v}_l^{(m)} \\
\bar{v}_l^{(m)} &= \begin{cases} 0.0 & (l=0) \\ \bar{v}_{l-1}^{(m)} + \frac{|\mathbf{P}_{ml} - \mathbf{P}_{m,l-1}|}{d} & (l=1, 2, \dots, n_v-2) \\ 1.0 & (l=n_v-1) \end{cases} \\
d &= \sum_{l=0}^{n_v-1} |\mathbf{P}_{ml} - \mathbf{P}_{m,l-1}|
\end{aligned} \tag{3-67 a-c}$$

ただし本論文では、制御点の $z$ 軸座標値 ${}_zp_{ij}$ によって節点が不等間隔となることをさけるため、位置情報パラメータ $\bar{u}_k$ 、 $\bar{v}_l$ の計算時のみ ${}_zp_{ij} = 0.0 \text{ m}$ とする。

以上の計算より、与えた通過点列を通る NURBS の制御点を得ることができる。すべての点列を通過する補間手順の概念を図 3.42 に示す。

### 数値例題

数値例題より、全点列通過の補間に関する特性を示す。通過点列数を $n_{uv} = 7$ 、記述する曲面の分割数を $n_p = 40$ とする。通過点を ${}_z\tilde{r}_{33} = 7.0 \text{ m}$ および ${}_z\tilde{r}_{24} = 7.0 \text{ m}$ と設定し、その他の通過点 $z$ 軸座標値を $0.0 \text{ m}$ に設定した計算結果を図 3.43, 3.44 に示す。図 3.43a および図 3.44a に示す通過点列 $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$ に対して、階数 $m_{uv} = 4, 5, 6, 7$ に設定した結果である。

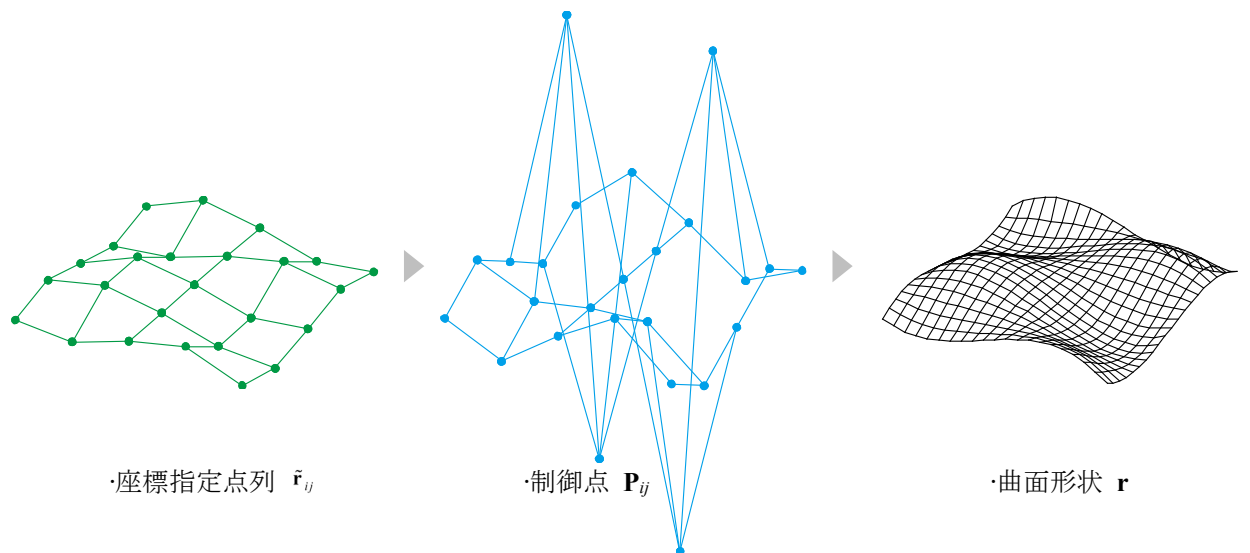
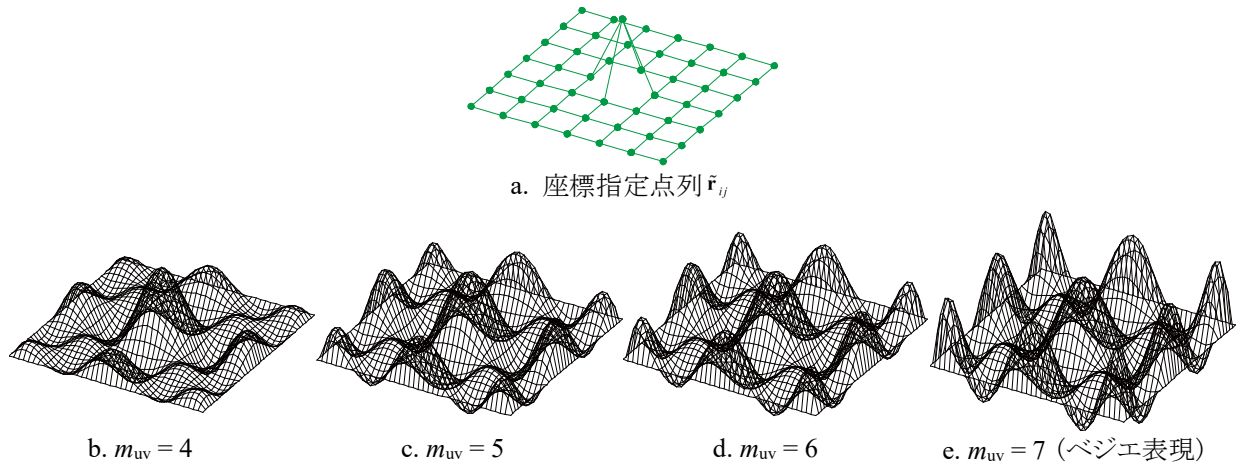
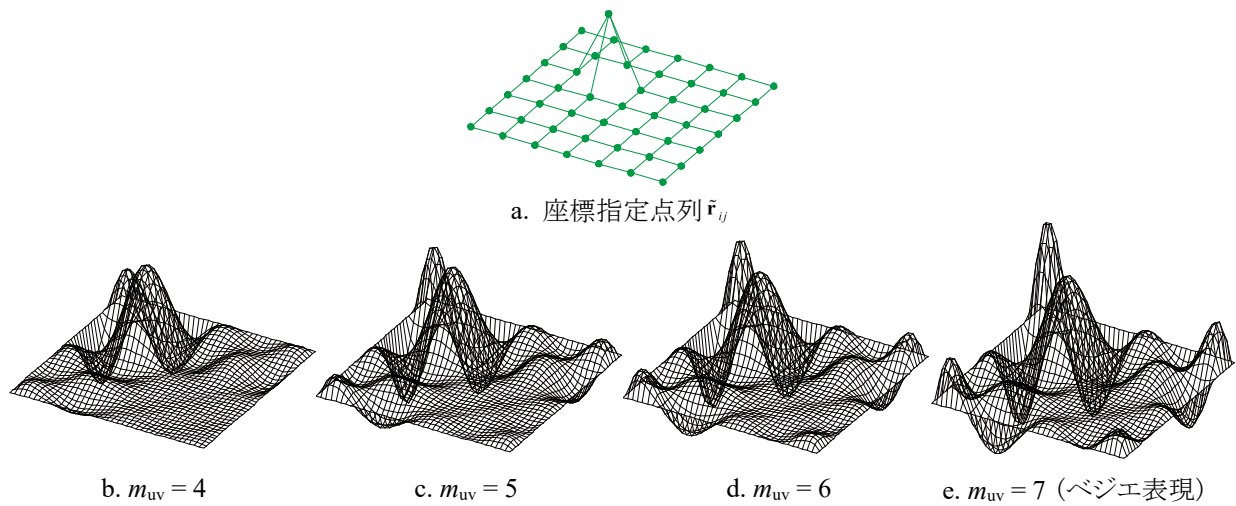


図 3.42 全点列座標指定の補間手順概念

図 3.43 階数に応じた全点列通過の曲面補間 ( ${}_z \tilde{r}_{33} = 7.0\text{ m}$ )図 3.44 階数に応じた全点列座標指定の曲面補間 ( ${}_z \tilde{r}_{24} = 7.0\text{ m}$ )

### 考察

補間により、与えた点列を通る曲面が記述されるが、平板形状から操作した制御点の一つであるにもかかわらず、曲面全体が波打つ。NURBS は階数設定値によって制御点の影響力と影響範囲が変化するが、補間による形状記述の場合は影響力が変化する。つまり、階数によらず制御点の変動は曲面全体に影響する。また、座標指定点列に負値の  $z$  軸座標は含まれないが、記述される曲面の節点座標には負値が含まれる。これらの理由は、座標指定点列の一点のみが  $7\text{ m}$  であるため、すべての点列を通るように極端に高低差のある制御点が求められるためである。操作する点の位置や周りの点の配置状況によって挙動が異なり、補間による操作は容易ではない。以上、全点列座標指定の補間における特性を示した。なお、この波打ち現象は制御点の数が増える程、顕著に生じる。

### 3.8.2 任意点座標指定

任意点の座標値を指定し、その他の点は通常の制御点として扱う補間手法を説明する。

任意の  $n_s$  個の座標指定点を通る NURBS 曲面は、座標指定点以外の点で  $\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}$  とする。したがって、未知量が  $n_s$  個あるため、 $n_s$  元連立一次方程式を解くことで制御点列が求まる。ここでは  $n_s$  を任意に選ぶことができる一般式として、式(3-63)と同様に  $(n_u-1) \times (n_v-1)$  元連立一次方程式を解く手法を示す。 $(n_u-1) \times (n_v-1)$  の点列のうち、任意の座標指定点とする点の数を  $n_s$  とし、次式の座標指定点情報の集合  $\mathbf{S}$  に点列番号を格納する。

$$\mathbf{S} = \{s_k \mid k = 1, 2, \dots, n_s\} \quad (3-68)$$

座標指定点番号  $s_k$  は、式(3-64)における該当する点の行番号である。したがって、 $\tilde{\mathbf{r}}_{00}, \tilde{\mathbf{r}}_{10}, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_{n_u-1,0}, \tilde{\mathbf{r}}_{01}, \tilde{\mathbf{r}}_{11}, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_{n_u-1,n_v-1}$  の順に振る通し番号であり、 $\tilde{\mathbf{r}}_{ij}$  の番号  $s_k$  は  $i \times n_u + (j+1)$  である座標指定点情報  $\mathbf{S}$  に含む点を座標指定点とし、その他を制御点として扱う方法は、前項の手順のうち、式(3-63), (3-65 a-c)を次式と入れ換える。

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}}^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_z \end{bmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, n_u - 1, \quad j = 0, 1, \dots, n_v - 1) \quad (3-69)$$

$$\mathbf{P}_x = \tilde{\mathbf{N}}^{*-1} \mathbf{X} \quad \mathbf{P}_y = \tilde{\mathbf{N}}^{*-1} \mathbf{Y} \quad \mathbf{P}_z = \tilde{\mathbf{N}}^{*-1} \mathbf{Z} \quad (3-70)$$

$$\tilde{N}_{kl}^* = \begin{cases} \tilde{N}_{kl} & \text{if } k \in \mathbf{S} \\ \delta_{kl} & \text{if } k \notin \mathbf{S} \end{cases} \quad (3-71)$$

$$(k = 1, 2, \dots, (n_u - 1) \times (n_v - 1), l = 1, 2, \dots, (n_u - 1) \times (n_v - 1))$$

ここで、 $\tilde{N}_{kl}^*$ :  $\tilde{\mathbf{N}}^*$  の  $k$  行  $l$  列成分,  $\tilde{N}_{kl}$ : 式(3-64)の  $k$  行  $l$  列成分,  $\delta_{kl}$ : クロネッカのデルタ(Kronecker delta) である。

以上の計算より、与えた任意の座標指定点を通る NURBS の制御点を得ることができる。任意の点を座標指定する補間手順の概念を図 3.45 に示す。

#### 数値例題

数値例題より、任意点座標指定の補間に関する特性を示す。座標指定点の列数を  $n_{uv} = 7$ 、記述する曲面の分割数を  $n_p = 40$  とする。1 点を座標指定点とした結果を図 3.46 に、3 点を座標指定点とした結果を図 3.47 に示す。各図の上段に示す点列に対して、階数  $m_{uv} = 4, 5, 6, 7$  に設定した結果である。

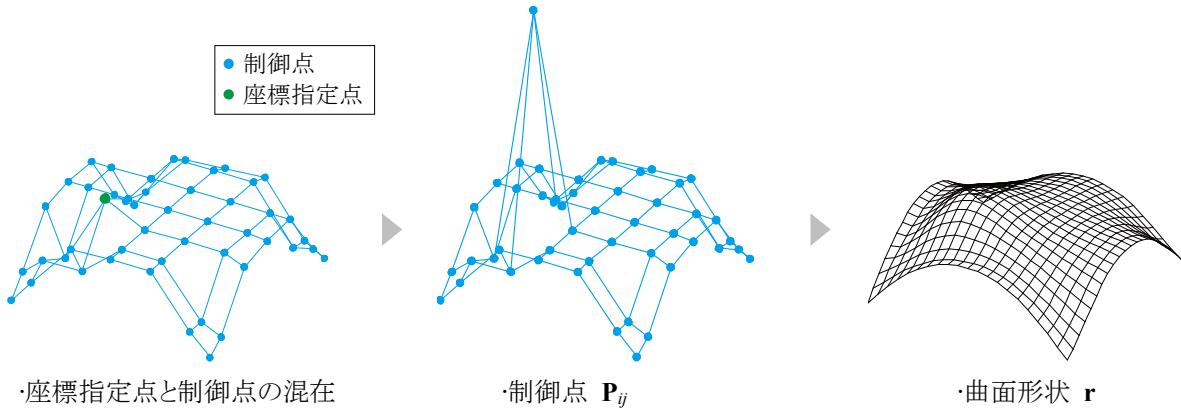


図 3.45 任意点座標指定の補間手順概念

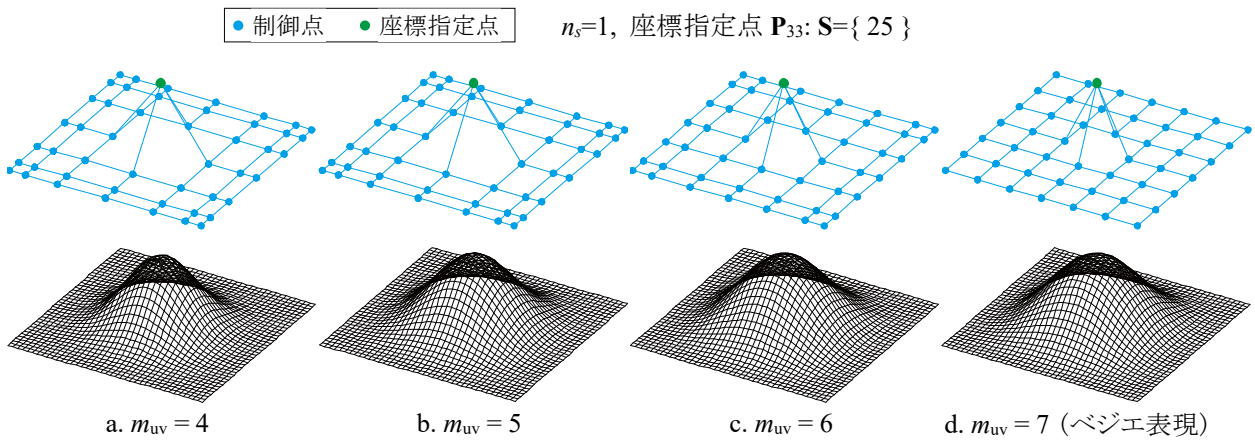


図 3.46 階数に応じた任意点座標指定の曲面補間( ${}_z\tilde{r}_{33}=7.0\text{ m}$ )

(上段: 制御点と座標指定点, 下段: 曲面形状)

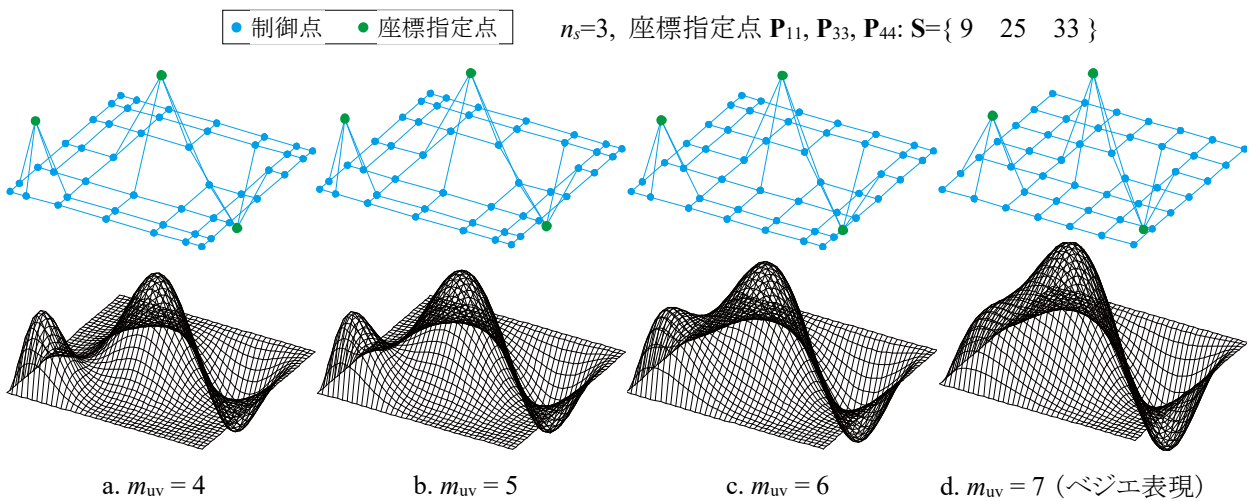


図 3.47 階数に応じた任意点座標指定の曲面補間 ( ${}_z\tilde{r}_{11}=7.0\text{ m}$ ,  ${}_z\tilde{r}_{33}=10.0\text{ m}$ ,  ${}_z\tilde{r}_{44}=-7.0\text{ m}$ )

(上段: 制御点と座標指定点, 下段: 曲面形状)

---

**考察**

どの設定においても、座標指定点を曲面形状が通り、階数に応じた範囲に影響する。中でも  $m_{uv} = 7$  は影響範囲が広いので、図 3.47d において二つの山が繋がる曲面形状となる。図 3.46 より任意点の座標を指定した補間は、全点列の座標を指定した場合に見られた波打ち現象が生じず、パラメトリック曲面の特性を極力維持したまま任意点の座標値を指定することができる。以上、任意点座標指定の補間による曲面制御の有効性を示した。本論文における非対称形状モデルは、ここに示した任意点座標指定の補間による曲面制御手法を用いる。



## 第4章 優良解探索解法

---

### *Chapter 4: Search for Decent Solutions*





## 第4章 優良解探索解法

### 4.1 解探索手法の分類

最適化問題に対する解探索手法は数理計画法(mathematical programming)、発見的手法(heuristic procedure)、最適性基準法(optimality criteria method)に大別される。数理計画法と発見的手法は大域的に解を探索する手法である。

数理計画法の中でも非線形計画法は、一般に初期値を基準に感度係数を用いて大域的最適解を探索する。数理計画法は問題によって線形計画問題と非線形計画問題として扱いが異なるが、その複雑性により十分汎用的なものとは確立されていない。

発見的手法は、解の修正時に方向を考慮せずに探索する。代表的な手法に、ダーウィンの進化論を工学的に模倣した GA や、生物の群れの行動を模倣した群知能、熱統計力学的現象に着想を得たシミュレーテッドアニーリング(simulated annealing: SA)などがあり、本研究で用いる GA 系解法は発見的手法に属する。GA 系解法は、探索時の解生成に感度係数などの大域的最適解の方向を直接求めない点が数理計画法との大きな違いである。数理計画法は問題の性質に依存するのに対し、GA 系解法は目標とする評価指標を算出できれば、解を探索することができるため、問題に対する汎用性が高い。

単純な規則に基づいて収束解を得る最適性基準法は、必ずしも最適解が得られる保証はないものの、簡単な応力・変位制約の場合、単純な繰り返し計算を通して適当な解が得られる手法として注目されている。セルオートマトン(cell automaton: CA)、ESO 法(evolutionary structural optimization method)、拡張 ESO 法(extended ESO method)、全応力設計(fully stressed design: FSD)はこれに属する。

これらを探索法で大別すると図 4.1 のように表すことができる。

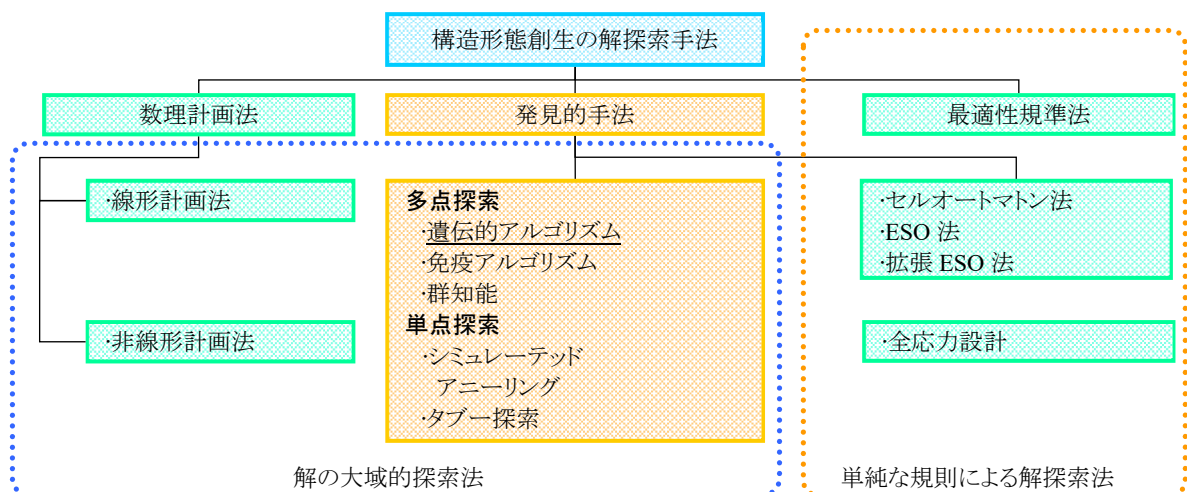


図 4.1 構造形態創生における解探索手法の分類

## 4.2 優良解の定義

### 単一目的最適化における優良解

単一目的最適化において、最大化あるいは最小化する大域的最適解の目的関数値は唯一である。また、解空間が多峰性を有する場合、複数の局所解が存在する。単一目的最適化において本研究では、この二種の解を含む、その近傍の比較的評価の高い解を優良解と定義する。

**優良解の定義：** 許容解のうち大域的最適解および局所最適解を含むその近傍の比較的評価の高い解

図 4.2 に、横軸を設計変数  $x$ 、縦軸を目的関数  $f(x)$  とした優良解の概念図を示す。なお、設計変数が複数存在する場合は、解空間を視覚的に確認することは困難である。そのため、既往解法で得られた大域的最適解との比較や、得られた解を初期形状として局所探索をするなどして、優良解の判断を行う必要がある。

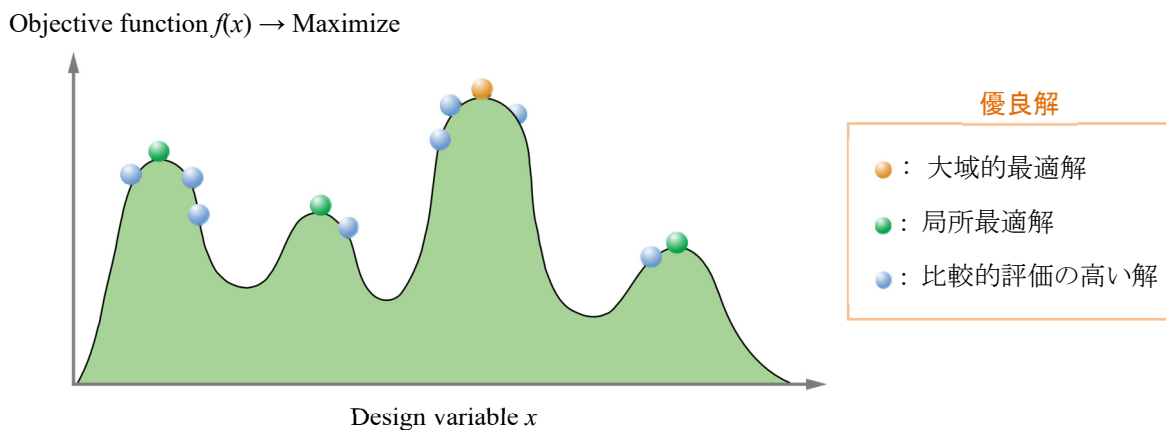


図 4.2 最適解の概念（単一目的最適化）

### 多目的最適化における優良解

多目的最適化において、一般に複数の目的関数を同時に最大化あるいは最小化する唯一の完全最適解は存在せず、相反する関係であることが多い。そのため、許容解領域と非許容解領域の境にあるパレート最適解を探索する。多目的最適化において本研究では、パレート最適解および局所パレート最適解を含む、その近傍の比較的評価の高い解を優良解と定義する。

**優良解の定義：** 許容解のうちパレート最適解を含む局所パレート最適解やその近傍に存在する比較的評価の高い解および局所的に評価の高い解

図 4.3 に二つの目的関数最小化の多目的最適化における優良解の概念図を示す。

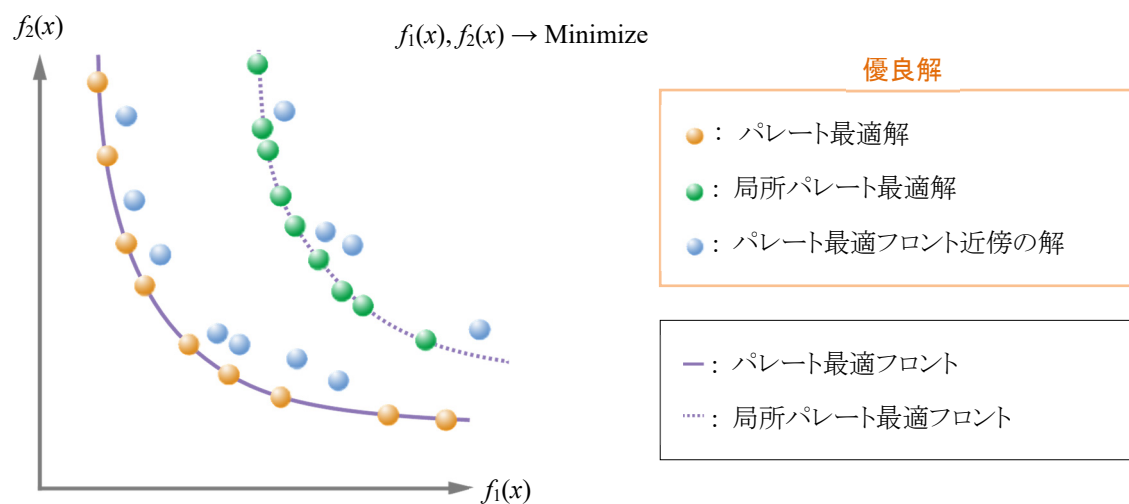


図 4.3 優良解の概念 (多目的最適化)

### 4.3 ISGA

最適化に対する解法は種々あるが、既往解法のほとんどは目的関数空間での多様性に主眼を置く。これらは、各目的関数値をどの程度重視し、どの妥協点にある解を採用するか選択することができる。しかし、建築物の形態創生における最適化では、目的関数だけでなくその前提の設計変数も重要になる。設計変数が建築空間や形態に影響するためである。

本研究で用いる GA 系解法 ISGA は、免疫システムの考え方を導入することで、局所的に優れた解に高い評価を与え、優良解の探索を可能としている。免疫システムとは、体内に侵入した細菌やウイルスなどを外敵とみなし、その抗体などにより抗原を排除しようとする機能である。生体の免疫系は細胞遺伝子の再編成を行い、侵入する抗原に対応する抗体を生成し排除する。一度排除した抗原に対しては、これを排除する抗体を素早く生成する記憶学習能力がある。また、生体内に大量に発生した抗体の産生を抑制し、定常状態に戻すような、自己に対する免疫性も兼ね備える。免疫系は、このような機構により膨大な種類の抗原に対応することが可能である。免疫システムの考え方は、免疫系の多様性のある抗体を生成する機構と、その自己調整機構を模倣しており、多様性を持つ手法であると考えられる。

#### 4.3.1 計算アルゴリズム

ここでは本研究で用いる ISGA のアルゴリズムを説明する[12]。GA 系解法である ISGA の基本的な計算フローは、従来の GA 系解法に即している。また、ISGA は従来の GA 系解法のパラメータに加え、優良解探索機能として特有のパラメータであるクラスタ数  $r$ 、上位個体選択率  $H$ 、記憶細胞数  $M$  の設定が必要である。これらの設定により得られる解の多様性を調節することができ、構造最適化において多様な構造形態を有する優良解探索が可能である。

目的関数値の最小化問題を対象とした ISGA の計算手順を以下に示す。個体間距離の概念はすべて設計変数空間でのユークリッド距離を扱う。なお、本手法は単一・多目的最適化問題の両方に適用可能である。

**Step 1 初期個体群の発生：**乱数を用いて初期個体群  $\mathbf{P}_0 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  を発生させる。ここで、 $\mathbf{x}_i$ ：個体  $i$  の設計変数ベクトル である。

**Step 2 各目的関数の計算：**第  $t$  世代( $t \geq 0$ )における集団  $\mathbf{P}_t$  内各個体の目的関数値  $f_k(\mathbf{x}_i)$  ( $k=1, 2, \dots, l, i=1, 2, \dots, n$ )を算出する。

**Step 3 適応度  $F(i)$  の評価：**以下の手順より適応度  $F(i)$ を算出する(図 4.4)。

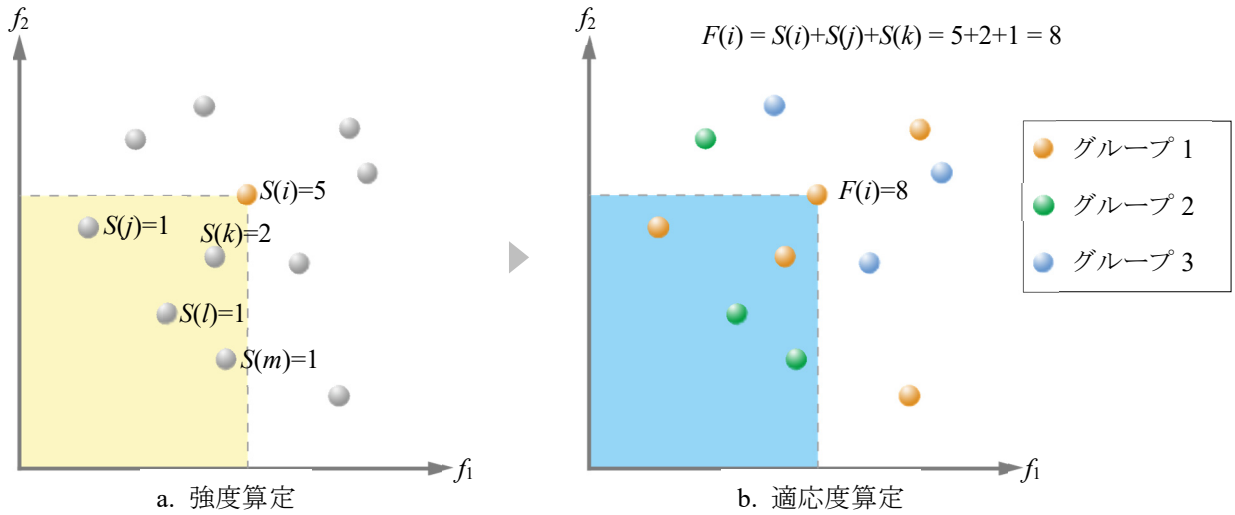


図 4.4 強度・適応度算定

①各個体が集団内で支配される個体数を強度  $S(i)$  として求める。強度算定は MOGA に用いられるパレートランキング方式を採用する。第  $t$  世代の母集団  $\mathbf{P}_t$  と後述する記憶細胞  $\bar{\mathbf{P}}$  に含まれるすべての個体  $i$  (設計変数  $\mathbf{x}_i$ ) に対し、次式の集合  $\mathbf{Q}(i)$  を定義する。

$$\mathbf{Q}(i) = \left\{ j \mid \left( f_k(\mathbf{x}_j) \leq f_k(\mathbf{x}_i), k = 1, 2, \dots, l \right), i, j \in \mathbf{P}_t \cup \bar{\mathbf{P}}_t \right\} \quad (4-1)$$

ここで、強度  $S(i)$  は次式で与えられる。

$$S(i) = |\mathbf{Q}(i)| \quad (4-2)$$

②集団内で、設計変数空間上において近傍個体同士でクラスタ  $C_s$  ( $s=1, 2, \dots, r$ ) を形成する。ここで、 $r$ : クラスタ数である。

③個体  $i$  が同一クラスタ内で支配される個体の強度  $S(i)$  の総和を適応度  $F(i)$  とする。

$$F(i) = \sum_{\substack{j \\ \bigwedge_{k=1}^l f_k(\mathbf{x}_i) \leq f_k(\mathbf{x}_j)}} S(j) - \sum_{\substack{m \\ \bigwedge_{k=1}^l f_k(\mathbf{x}_i) = f_k(\mathbf{x}_m)}} S(m) \quad \left( i, j, m (i \neq m) \in C_s, \mathbf{P}_t (= \mathbf{g}_s) \subset (\mathbf{P}_t \cup \hat{\mathbf{P}}_t) \right) \quad (4-3)$$

ここで、 $C_s, \mathbf{P}_t$ : クラスタ  $C_s$  に属する母集団と記憶細胞内の個体群,  $\bigwedge$ : 論理積記号 である。 $\Sigma$  の下に付く論理積記号  $\bigwedge$  は、1 から  $l$  までの式がすべて真である個体を数える。例えば  $l=2$  のとき、次式で表される。

$$\bigwedge_{k=1}^l f_k(i) = f_k(j) \quad \rightarrow \quad f_1(i) = f_1(j) \cap f_2(i) = f_2(j) \quad (4-4)$$

Step 4 記憶細胞候補の選択: 集団  $\mathbf{P}_t$  内で適応度が高い  $H$  (上位個体選択率) までの個体を記憶細胞候補  $\tilde{\mathbf{P}}_t$  とする。

Step 5 記憶細胞への記憶: 記憶細胞候補  $\tilde{\mathbf{P}}_t$  と記憶細胞  $\bar{\mathbf{P}}_t$  (暫定優良解集合) を統合して新たな記憶細胞  $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$  とする。その際、強度を基準に定率  $q$  で記憶細胞から個体を削除する(記憶細胞除去率)。さらに、 $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$  の個体数が  $M$  (記憶細胞数) を超えた場合、設計変数空間上での端切り法(archive truncation method)により個体数を  $M$  に調節する。なお、 $t=0$  のとき、記憶細胞  $\bar{\mathbf{P}}_t$  は空集合である。

Step 6 次世代個体群の生成: 適応度に基づき集団  $\mathbf{P}_t$  と記憶細胞  $\bar{\mathbf{P}}_{t+1}$  から次世代個体群  $\mathbf{P}_{t+1}$  を生成する。

上述の Step2-6 を指定世代数繰り返し、最終世代における記憶細胞を解とする。なお、目的関数値の最大化問題を対象とする場合、式(4-1), (4-3)の不等号を逆にして考える。以上の ISGA 計算フローチャートを図 4.5 に示す。

Step1, 2, 6 は単純 GA (standard GA: SGA)などの GA 系解法と同一である。ISGA はその他の Step3-5 の計算スキームに特徴がある。本節ではこの計算スキームについて述べる。なお、本論文では記憶細胞除去率は  $q=0.0$  とする。

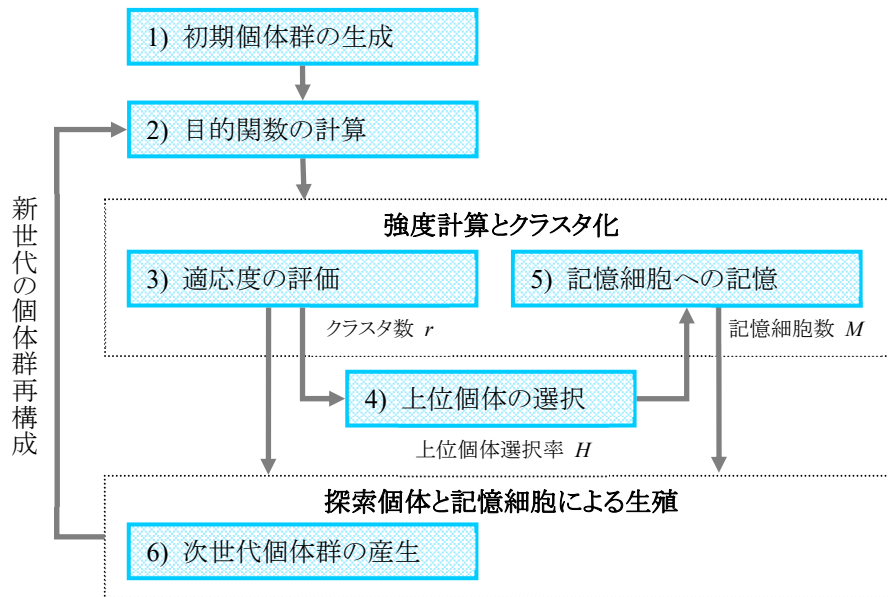


図 4.5 ISGA の計算フロー

### 4.3.2 クラスタリング

ISGA は適応度を算出する際、優良解に高い解を与えるため個体間距離の近い個体どうしで  $r$  個のクラスタを形成し、局所的に高評価の解を捉える。その計算手順を以下に示す。また、図 4.6 に設計変数空間上と目的関数空間上の個体の位置関係を示す。

Step 1 集合の定義：クラスタ  $C_l$  の各個体  $\beta_k (k = 1, 2, 3, \dots, k_l)$  を要素とする集合  $g_l$  とその個体数  $k_l$  を次のように定義する。

$$\mathbf{g}_l = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{k_l}\} \quad k_l = |\mathbf{g}_l| \quad (4-5)$$

Step 2 集合間距離の計算：設計変数空間において、すべての集合間距離を  $d^*(\mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n)$  を次式で計算する。

$$d^*(\mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n) = \frac{1}{k_m \cdot k_n} \sum_{i \in \mathbf{g}_m, j \in \mathbf{g}_n} d(i, j) \quad (4-6)$$

ここで、 $d(i, j)$  は個体  $i$  と個体  $j$  の設計変数空間上で無次元化したユークリッド距離である。

Step 3 集合の統合：最小の  $d^*(\mathbf{g}_m, \mathbf{g}_n)$  を持つ 2 つの集合を同一集合として統合する。ここで、クラスタの総数が設定したクラスタ数  $r$  ではない場合、Step 2 に戻る。

以上のクラスタリングより、クラスタ毎の相対評価が可能となる。なお、初期段階で 1 クラスタ 1 個体とする。設定するクラスタ数  $r = 1$  のとき、適応度算定が絶対評価となる。

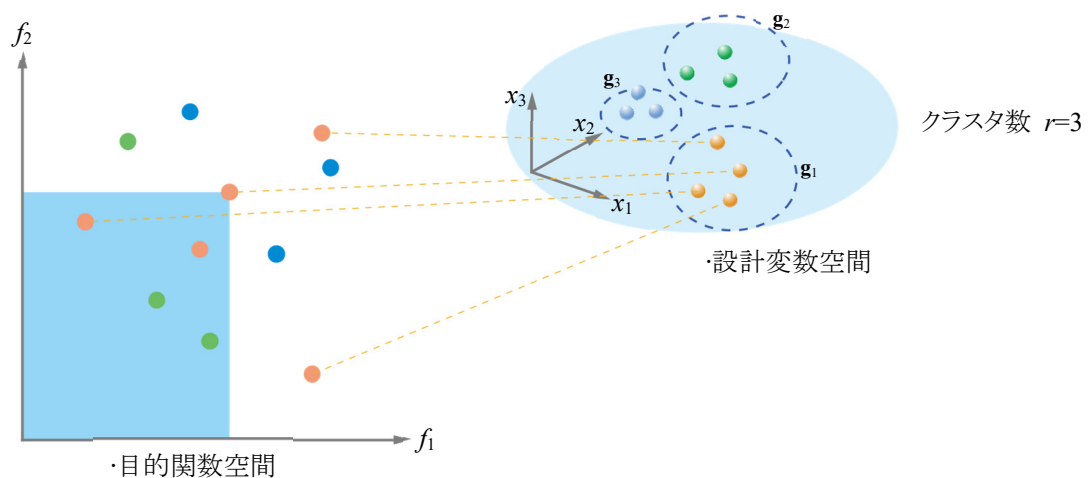


図 4.6 クラスタリングにおける目的関数空間と設計変数空間

### 4.3.3 端切り法

記憶細胞候補と記憶細胞を統合した段階で、設定した記憶細胞数  $M$  を超える場合、端切り法により個体の削除を行う(図 4.7)。以下にその手順を示す。

**Step 1 個体間距離の算出：** 各個体間距離を設計変数空間上で無次元化したユークリッド距離として算出し、最小の個体間距離を持つ 2 個体を削除候補とする。

**Step 2 個体の削除：** 削除候補の 2 番目に小さい個体間距離を比較し、小さい値を持つ個体を削除する。

以上を、記憶細胞数が設定された  $M$  になるまで Step 1, 2 を繰り返す。この端切り法はニッチ操作(niche: 生態的地位)として行う。既往の解法は目的関数空間上でニッチ操作をおこなっており、設計変数空間の多様性を失う可能性を有する。目的関数空間における一つの位置に対して、設計変数空間におけるその解の位置が唯一であるとは限らない。そのため、形態に重要な設計変数の多様性に主眼を置く ISGA は設計変数空間上でニッチ操作を行う。ただし、設計変数空間でのニッチ操作は目的関数空間上で解の位置を表現したとき、解密度が均一とはならず、もしくは偏りが生じる可能性があることに注意が必要である。

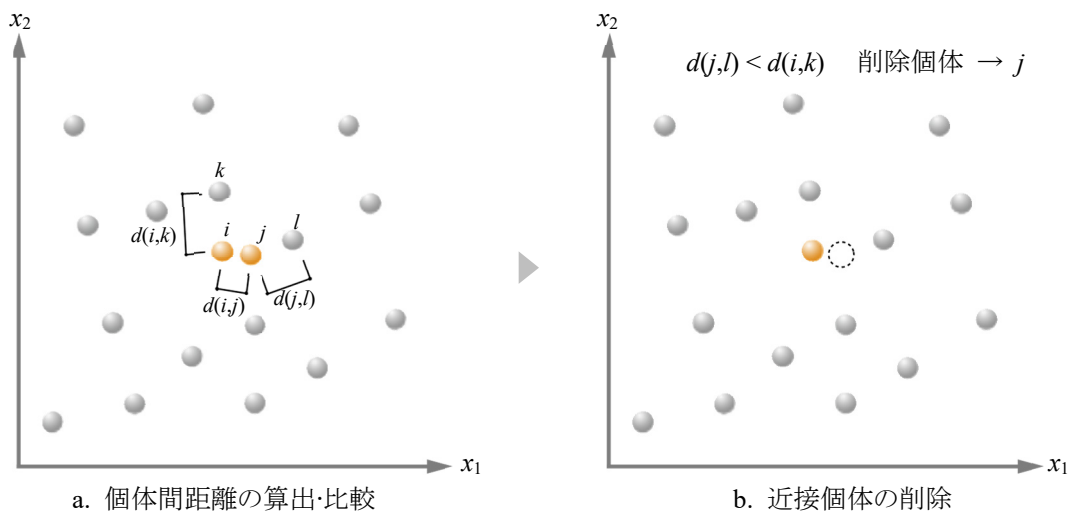


図 4.7 端切り法



### 4.3.4 優良解選択率

ISGA は設計変数空間におけるクラスタリングによる解の相対評価と端切り法による解の均一化によって優良解を探索する。ただし、解の更新は設計変数空間の多様性に従って行い、エリート戦略は行われない。そのため、多目的最適化において複雑な解空間を有し、複数の設計変数を設定した場合、最終世代で得られた記憶細胞には評価の低い解が存在することがある。したがって、本研究では、多目的最適化において最終世代で得られた記憶細胞内の個体に対し、優良解選択率  $S_d$  を導入し、評価の低い解の削除を行う。計算手順を以下に示す。

Step 1 個体の強度算定：強度は SPEA2 の算定手順を用いる。記憶細胞  $\bar{\mathbf{P}}$  の個体に対して支配している個体の数  $S(i)$  を強度として算定する。強度算定式は次式である。

$$S(i) = \left\{ j \mid \left( f_k(\mathbf{x}_j) > f_k(\mathbf{x}_i), k = 1, 2, 3, \dots, l \right) i, j \in \bar{\mathbf{P}}_t \right\} \quad (4-7)$$

Step 2 個体の適応度算定：算定された強度  $S(i)$  に基づき、各個体の適応度  $F(i)$  が次式で計算される。

$$F(i) = \sum_{\substack{j \\ f_k(\mathbf{x}_i) > f_k(\mathbf{x}_j)}} S(j) \quad (4-8)$$

Step 3 優良解の選択：適応度  $F(i)$  の高い上位  $S_d$  (優良解選択率) の個体群を選択する。

以上の操作により低評価の解を削除する。SPEA2 の適応度算定は優越非優越の関係を利用し、既往の解法における適応度算定方法と比べて、評価の差が顕著に表れる。

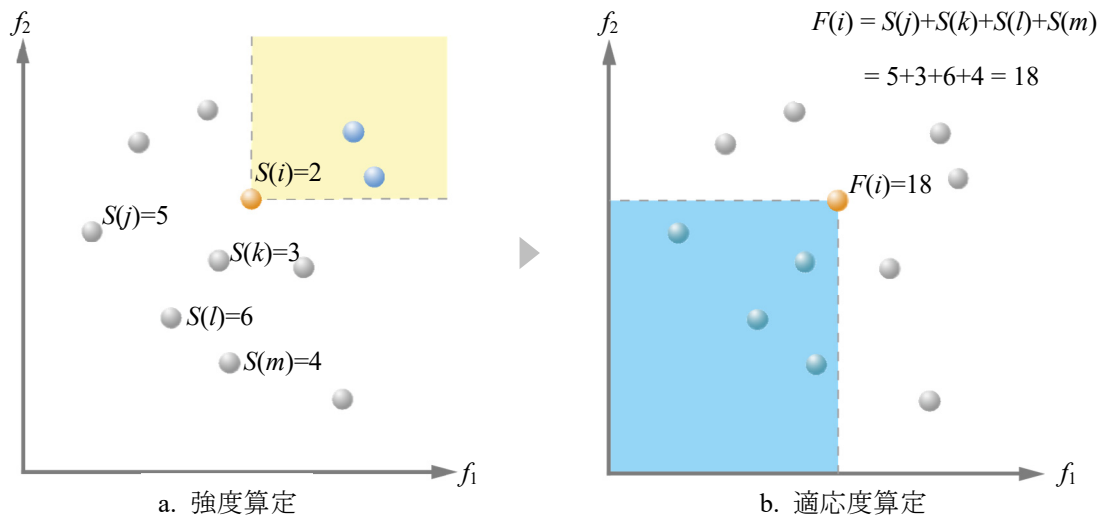


図 4.8 SPEA2 の強度・適応度算定

## 4.4 多様度指数

優良解の探索状況を把握するため、設計変数空間における記憶細胞に対する多様性の指標が重要である。統計学の平均情報エントロピー(information entropy)は、GA の探索における収束判定に利用されることがあり[71]、一般に設計変数の遺伝子型(2 進数)から算出される(付録 B.8 参照)。ここではこの方法を応用して、表現型の個体間距離(実数値)を利用した設計変数空間における記憶細胞の多様度の指数  $D_p$  を次式で定義し、これを多様度指数(diversity index)とする[21]。

$$D_p = \sum_{i=1}^{N_s} (-p_i \cdot \log_e p_i) \quad (4-9)$$

$$p_i = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} (1.0 - d_{i,j})^2 \quad (4-10)$$

ここで、 $N_s$ : 記憶細胞内の個体数、 $p_i$ : 個体  $i$  の近傍存在確率(周辺個体の散らばり具合)、 $d_{i,j}$ : 個体  $i$  と個体  $j$  の設計変数空間上における個体間距離である。 $d_{i,j}$  は同一種設計変数において 0.0 から 1.0 になるように、側面制約を考慮して無次元化した数値である。 $D_p$  が大きな値のとき、設計変数空間における記憶細胞の多様性が高い。式(4-9)は平均情報エントロピーと同一であり、式(4-10)は統計学の散らばり具合を表す分散を参考に、0.0 から 1.0 の値になる式としている。したがって、参照個体から見た周辺個体の散らばり具合を表している。

### 数値例題

表現型(phenotype)から算出される多様度指数  $D_p$  と、「B.8 平均情報エントロピー」に示す遺伝子型(genotype)から算出される平均情報エントロピー  $D_g$  との比較を示す。図 4.9 に示す、個体数 3 の設計変数より、 $D_p$ ,  $D_g$  を算出する。設計変数は 1 種類、その側面制約は  $0.0 \leq x \leq 10.0$  とし、 $D_g$  の計算に必要な遺伝子型には表 B.2 に示す 4 bit のグレイコードを用いる。表 4.1 に結果の数値を、図 4.10 に横軸に Case 番号、縦軸に各値を示したグラフを示す。

### 考察

図 4.9 より、Case-1 から Case-6 の順に設計変数の多様性が高くなる。 $D_g$  の結果は、Case-3, -4, -5, -6 において大小関係が前後している。 $D_g$  の計算が設計変数の直接的な距離を用いないためである。一方、 $D_p$  の結果は Case-1 から Case-6 の順となっており、設計変数の多様性を表している。

$D_g$  が GA の探索における収束判定に用いられる際、その値が 0.0 を示すときに収束したと判定可能である。3 個体が同一設計変数に収束している Case-1 では、 $D_p$  と  $D_g$  は共に 0.0 である。つまり  $D_p$  は  $D_g$  と同様に収束判定としても利用できる。

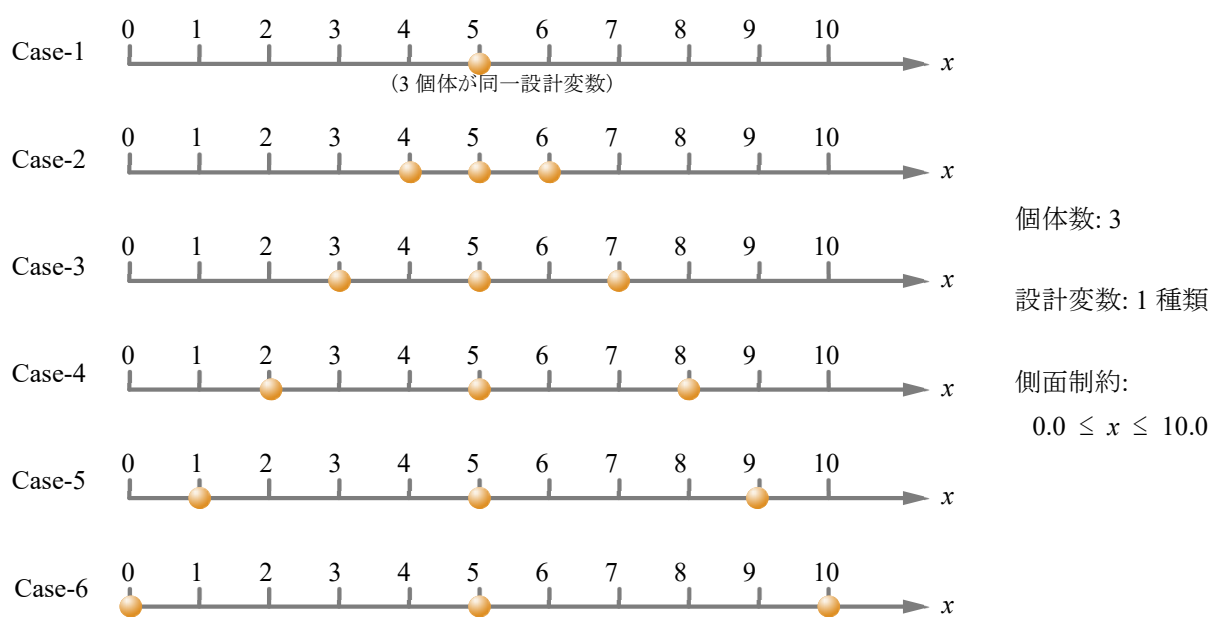
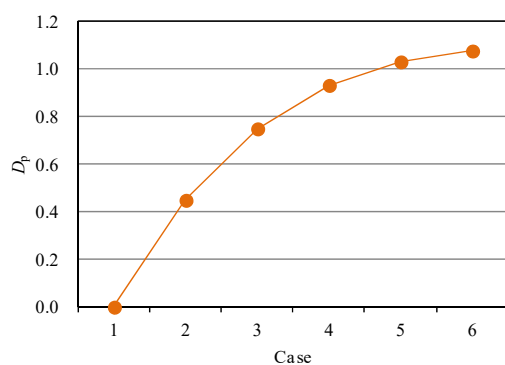
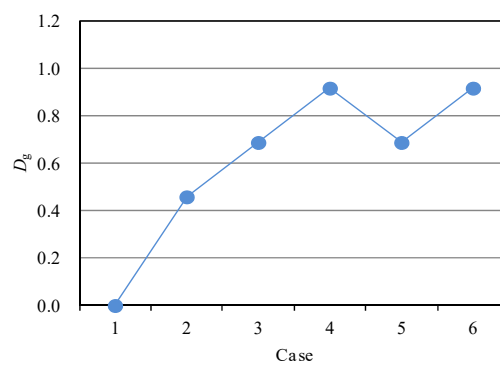


図 4.9 多様度指数計算の数値例題

表 4.1 数値結果

	$D_p$	$D_g$
Case-1	0.000	0.000
Case-2	0.449	0.459
Case-3	0.749	0.689
Case-4	0.932	0.918
Case-5	1.030	0.689
Case-6	1.076	0.918

a. 多様度指数  $D_p$ b. 平均情報エントロピー  $D_g$ 図 4.10 多様度指数  $D_p$  と平均情報エントロピー  $D_g$

## 4.5 ISGA の探索概念

ISGA 特有の クラスタ数  $r$ , 上位個体選択率  $H$ , 記憶細胞数  $M$  の設定は、優良解獲得状況に相互に影響し合う。 $r$  は、設計変数空間上の距離が近い個体同士で組むクラスタの数であり、相対評価時に各クラスタ内で評価を行うことで局所的に高評価の解を捉える。 $H$  は記憶細胞の候補を選ぶ割合であり、優良解の密度・範囲にかかわる。 $M$  は記憶細胞の上限数で、得られる解集合の大きさを決める。パラメータは問題毎に設定することで、解空間特性に応じた優良解探索が可能となる。以下に、これらのパラメータが影響を及ぼす ISGA の解探索を、イメージ図を用いて段階的に示す。

Step 1: 各個体は設計変数空間における個体間距離の近いもの同士で  $r$  個のクラスタを構成する。

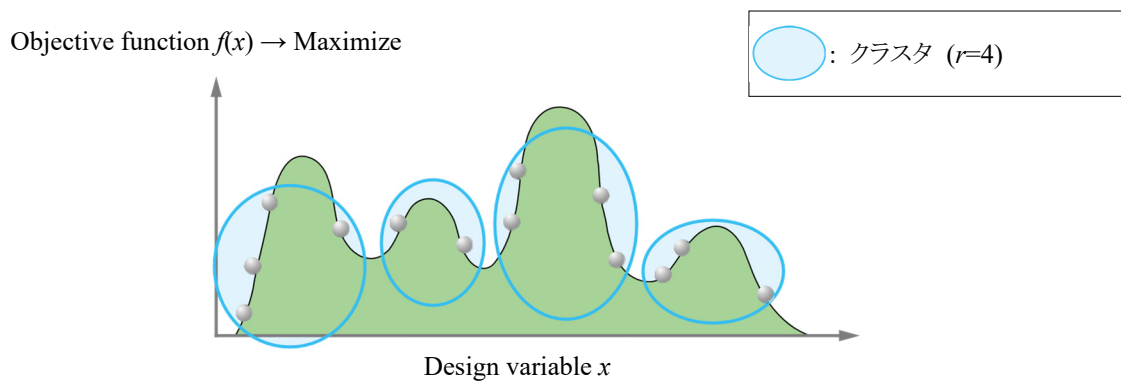


図 4.11 クラスタリング

Step 2: 全個体中で上位個体選択率に基づくラインを設ける。ここで、クラスタが構成されているため評価は絶対評価から相対評価となる。上位個体選択率に基づくラインより上にある評価の高い個体は記憶細胞内に記憶される。記憶細胞内の個体は次世代個体群を生成する際に用いる。

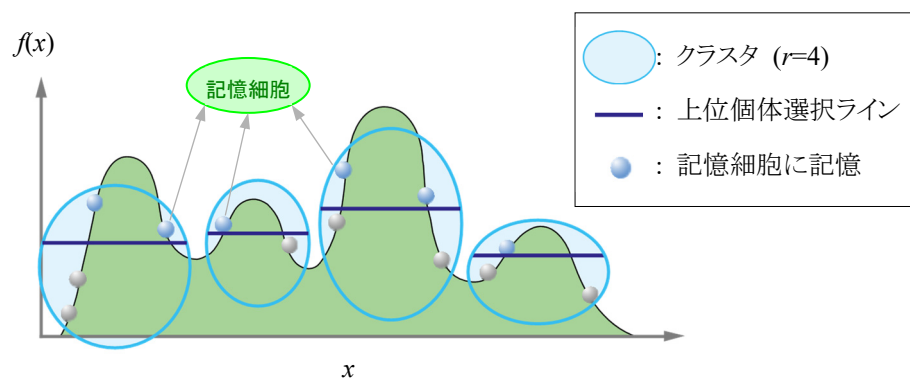


図 4.12 上位個体選択・記憶細胞への記憶

Step 3: クラスタ内の相対評価により、局所的に高評価の個体も次世代個体群の生成に介入することができ、山の高さが異なっても次第に各山を登っていく。

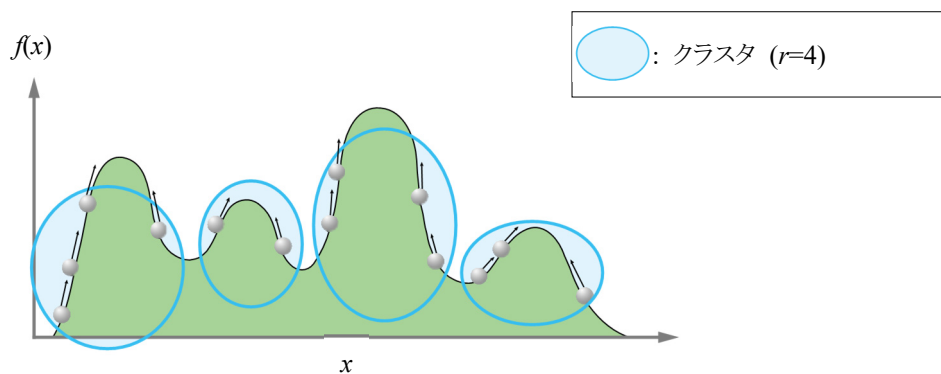


図 4.13 個体群の更新

Step 4: 端切り法により密集する位置の個体を削除し、解密度を均一にする。

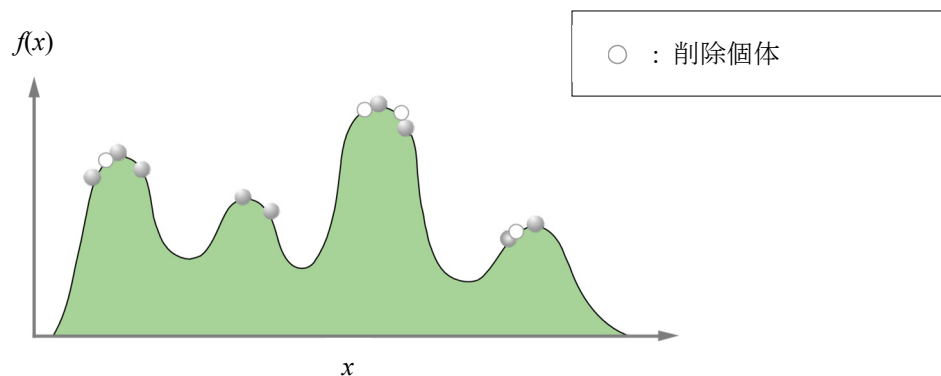


図 4.14 端切り法による個体削除

Step 5: 以上の結果、最終的には山の高さにかかわらず、頂点およびその近傍の優良解が得られる。

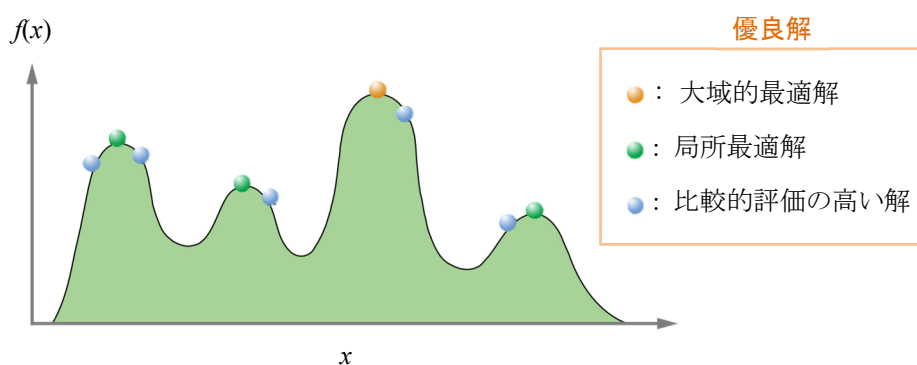


図 4.15 最終的に得られる解

## 4.6 形態創生アルゴリズム

本論文では、NURBS で表現する自由曲面シェルの構造形態創生に ISGA を適用する。まず、既往の多くの研究で行われている剛性最大化問題である総ひずみエネルギー最小化を目標とした単一目的最適化を扱う。さらに、総ひずみエネルギーと部材体積の同時最小化の多目的最適化に拡張する。その際、自由曲面グリッドシェルの形状表現に NURBS を利用する。NURBS のパラメータのうち、階数の設定値を変化させ、特性が異なる NURBS を構造形態創生に適用した場合の優良解形態を明確にする。得られた解形状に対し、曲率を利用した形状特徴指標、および曲面上の曲率をコンター図で示すことで形状確認を行う。

本章で提案する構造形態創生手順は、優良解探索 GA 系解法 ISGA を用いて、式(2-1)-(2-5)に示す最適化問題を解くものである。ここで示すアルゴリズムの流れを以下に示す。なお、FEM 解析は弾性範囲で行う。

- Step 1: 解析モデルの初期形状情報(節点数, 要素数, 境界条件, 材料定数)と GA および NURBS のパラメータを設定する。
- Step 2: 乱数を用いて初期個体群  $\mathbf{P}_t = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n\}$  ( $\mathbf{x}_i = [\mathbf{A}_i, \mathbf{R}_i]^T$ ) を二進数により生成する(世代数  $t = 0$ )。
- Step 3: NURBS を利用して構造形態を表現し、FEM 解析により目的関数  $f(\mathbf{A}, \mathbf{R})$  の計算および制約条件の判定を行う。
- Step 4: ISGA による解の評価および優良解の保存を行う。このとき、制約条件を満たしていない個体は、記憶細胞へ保存させず、解の評価時に  $f(\mathbf{A}, \mathbf{R})$  にペナルティ定数を加算しておく。
- Step 5: 世代数が設定数に達していない場合、GA オペレータにより次世代個体群を生成し、Step 3 に戻る( $t = t + 1$ )。世代数が設定数に達している場合、ISGA の計算を終了し、Step 6 に進む。
- Step 6: 得られた優良解形態に対して、曲率解析を利用した形状確認を行う。

第5章 グリッドシェル構造の形態創生

---

*Chapter 5: Structural Morphogenesis for Grid Shell*





## 第5章 グリッドシェル構造の形態創生

### 5.1 1m 間隔配置モデルのひずみエネルギー最小化(Model-A)

本節では 1m 間隔に部材を配置した鉄骨グリッドシェルの総ひずみエネルギー最小化を目標とした単一目的最適化問題を扱う。

#### 5.1.1 解析モデル

解析モデルは、図 5.1 に示す、隅角部ピン支持とした一辺が 20 m の正方形平板を基準形状とする。図 5.1b のハッチ部に示す対称性を考慮した 1/4 領域を解析対象とする(節点数: 121, 要素数: 220)。载荷条件は長期に自重 78.5 kN/m<sup>3</sup> と等分布荷重 1.0 kN/m<sup>2</sup> を設定する。グリッドシェルの材料は、表 3.1 に示す 20 種類の一般構造用炭素鋼管 (STK400)とする。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (5-1)$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (5-2)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (5-3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (5-4)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル(=  $[A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル(=  $[R_k]$ ),  $f$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $\mathbf{d}$ : 節点変位ベクトル,  $\mathbf{K}$ : 剛性マトリクス,  $R_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0 \text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $A_j^U = 20.0 \text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(5-4)は長期荷重に対する許容応力度設計による応力制約条件であり、鋼材の基準強度は 235 N/mm<sup>2</sup>、ヤング係数は  $2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ 、せん断弾性係数は  $7.8 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  である。解析パラメータは表 5.1 のように設定する。

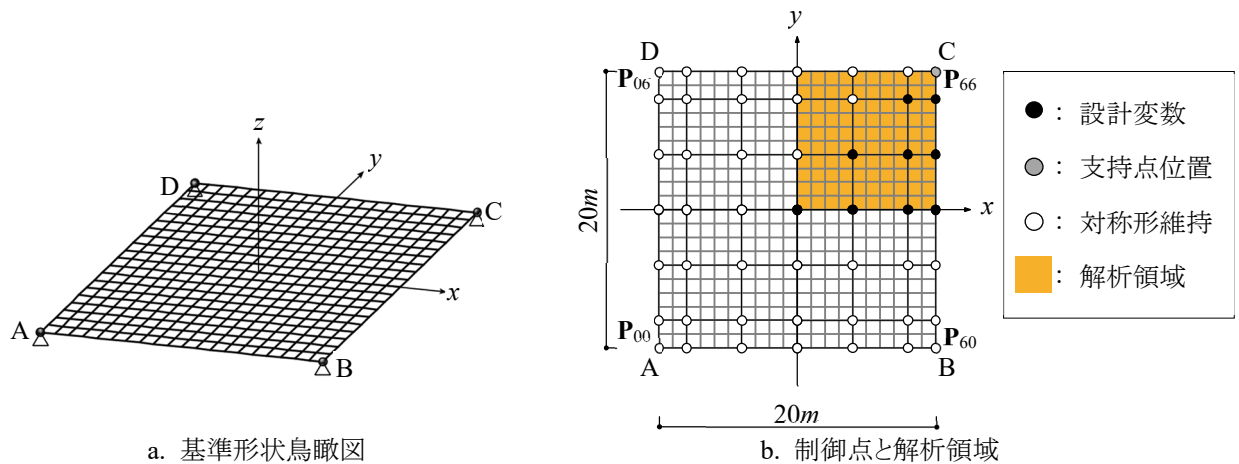


図 5.1 解析モデル

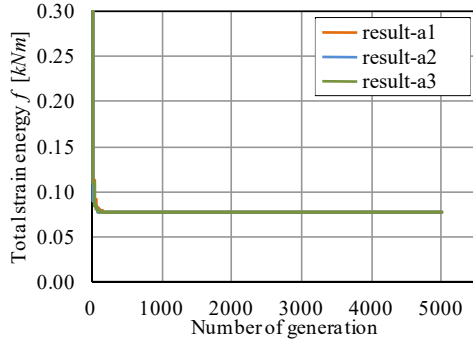
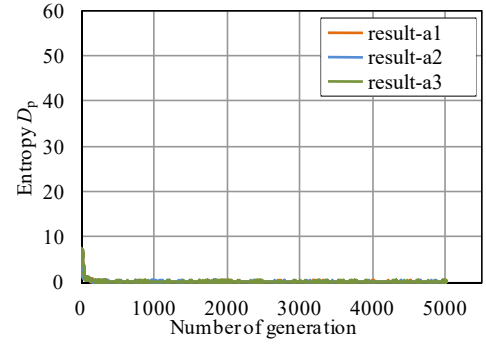
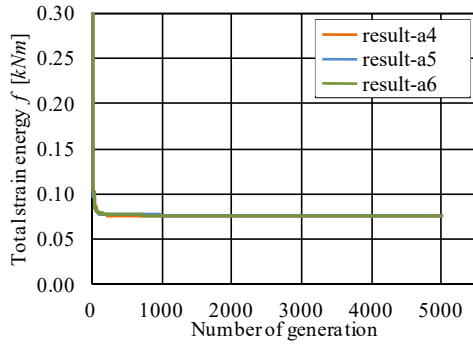
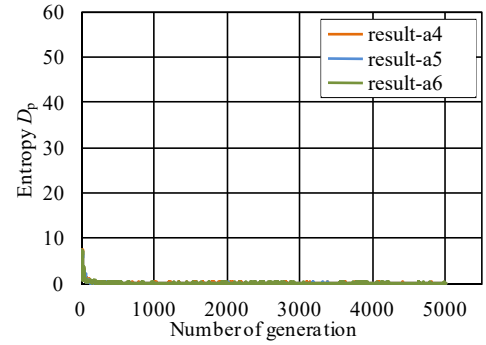
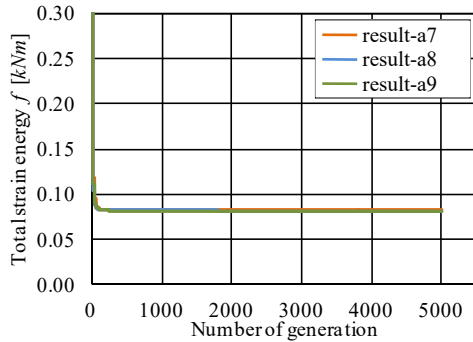
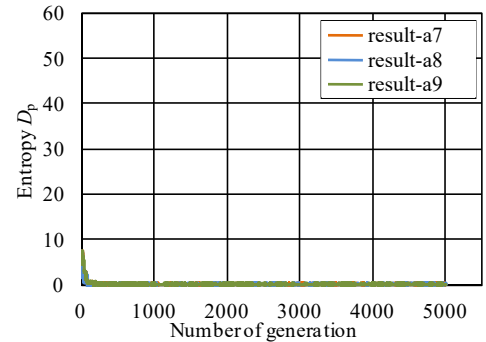
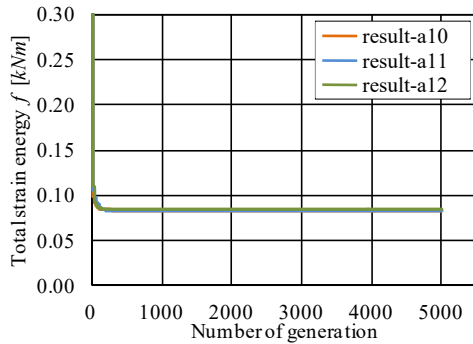
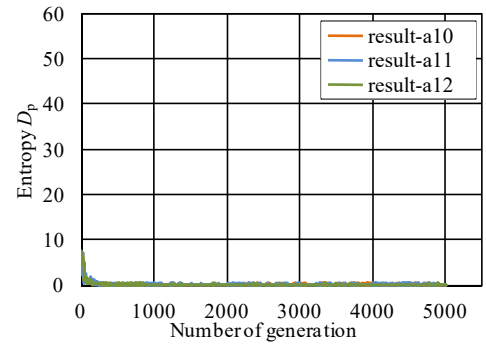
表 5.1 GA パラメータ (ISGA, SGA)

世代数	5000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
<b>A</b> の遺伝子長	$10 \times 16 \text{ bit}$
<b>R</b> の遺伝子長	$9 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

### 5.1.2 SGA による数値結果

SGA による数値結果を図 5.2 - 5.10 に示す。図 5.2 - 5.5 は、SGA により得られた各階数設定 3 試行における解の収束状況であり、横軸が世代数、縦軸が **a**: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , **b**: 多様度指数  $D_p$  である。図 5.6 は、各試行で得られた解形態の  $\tilde{c}$  コンター図、制御点、形態鳥瞰図を示す。得られた解形態の力学性状を図 5.7 - 5.10 に示す(**a**: 部材分布, **b**: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), **c**: 面外 ( $y$  軸まわり) 曲げモーメント, **d**: 面内 ( $z$  軸まわり) 曲げモーメント)。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\tilde{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_y M_{\max} \cdot {}_z M_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメントである。

図 5.2 - 5.5 より、SGA は各  $m_{uv}$  設定値で試行回数によらずほぼ同じ解形態を捉える。目的関数値は 200 世代程度で収束し、その後大きな変化がない。したがって、得られた解は大域的最適解と判断する。得られた形態は既往研究で報告されている最適形態(カテナリー曲面)に対応している。図 5.6 より、得られた大域的最適解形態の  $\tilde{c}$  コンター図は  $m_{uv}$  設定値で異なる。目的関数値は、 $m_{uv}$  設定値 4 と 5、および  $m_{uv}$  設定値 6 と 7 がほぼ同値であるが、 $m_{uv} = 4, 5$  と  $m_{uv} = 6, 7$  には差がある。これらの結果より、大域的最適解形態は  $m_{uv}$  設定値に依存する。図 5.7 - 5.10 より、部材は各応力に従った分布となっており、面内抵抗型の力学特性を有している。

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.2 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=4$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.3 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=5$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.4 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=6$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.5 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=7$ )

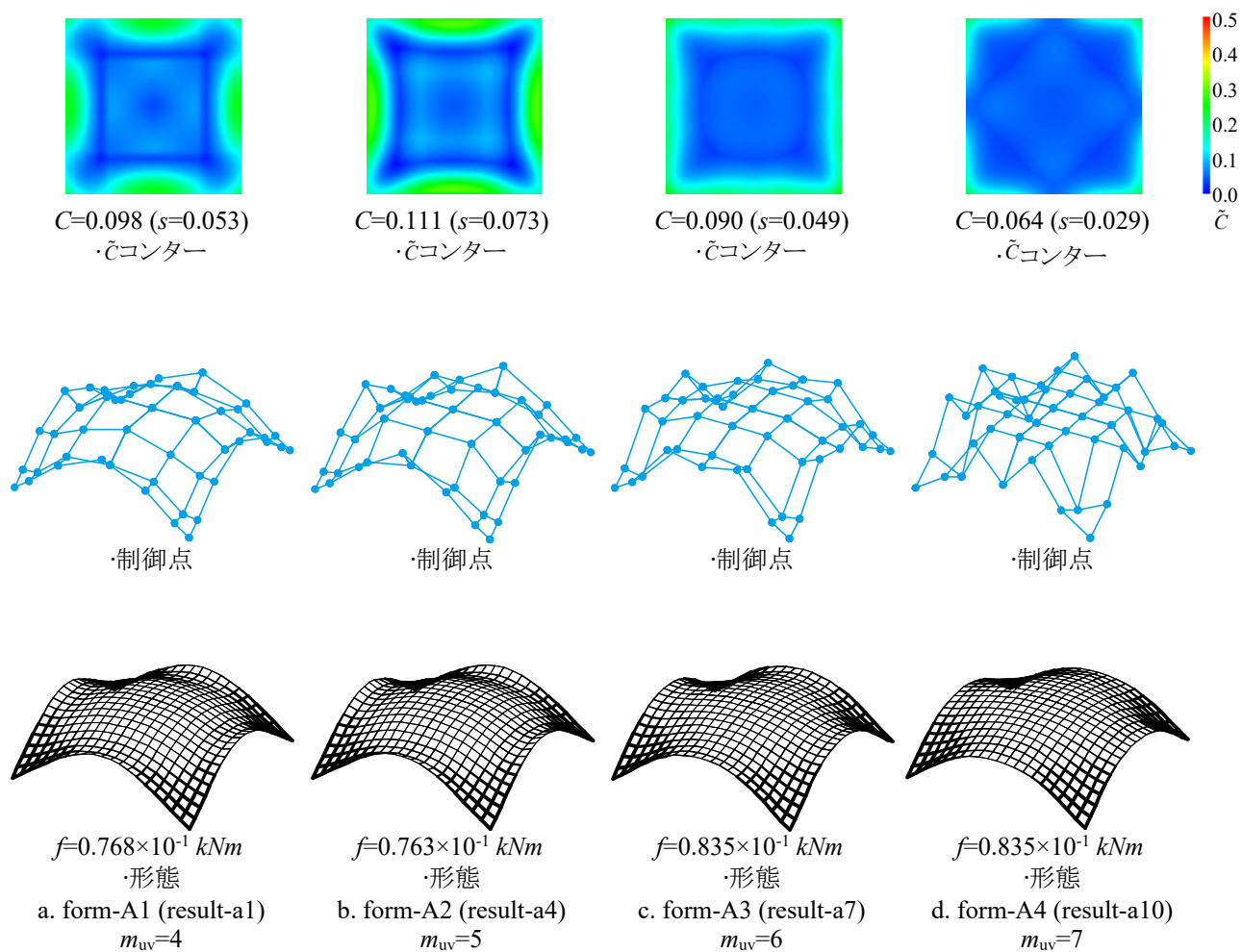
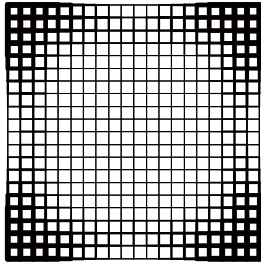


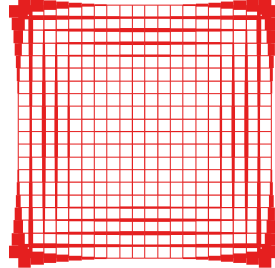
図 5.6 SGA の解形態例



$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.112 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

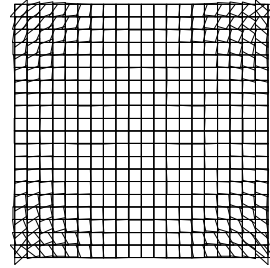
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.636 \text{ kN}$$

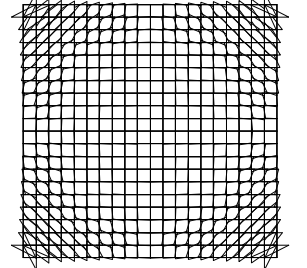
$$N_{\min}=-0.176 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



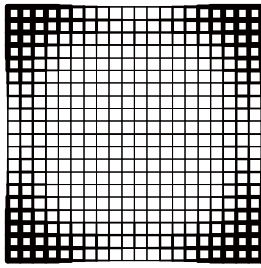
$$yM_{\max}=0.148 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$$zM_{\max}=0.224 \times 10^2 \text{ kNm}$$

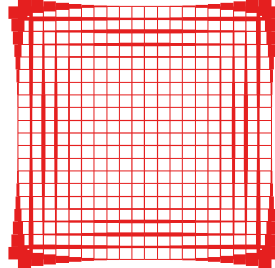
d. 面内曲げモーメント

図 5.7 form-A1 の力学性状 ( $m_{uv}=4$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.989 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

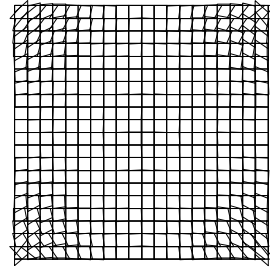
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.557 \text{ kN}$$

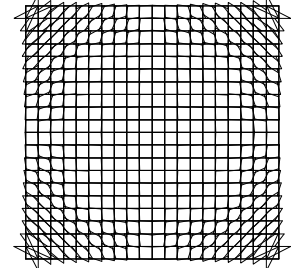
$$N_{\min}=-0.174 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



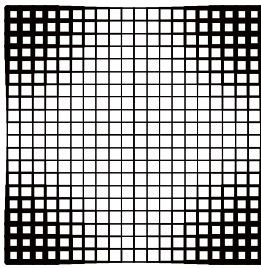
$$yM_{\max}=0.142 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$$zM_{\max}=0.223 \times 10^2 \text{ kNm}$$

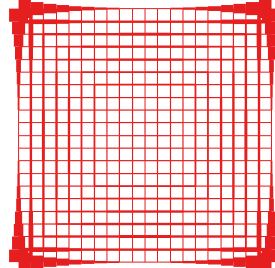
d. 面内曲げモーメント

図 5.8 form-A2 の力学性状 ( $m_{uv}=5$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.125 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

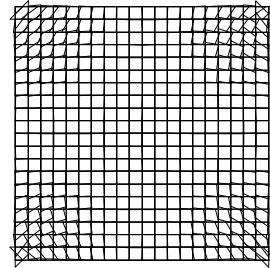
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.101 \text{ kN}$$

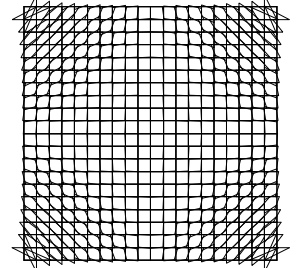
$$N_{\min}=-0.178 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



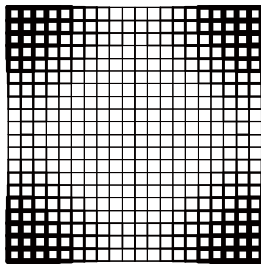
$$yM_{\max}=0.151 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$$zM_{\max}=0.234 \times 10^2 \text{ kNm}$$

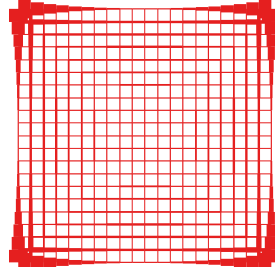
d. 面内曲げモーメント

図 5.9 form-A3 の力学性状 ( $m_{uv}=6$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.125 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

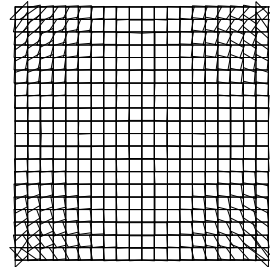
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.454 \text{ kN}$$

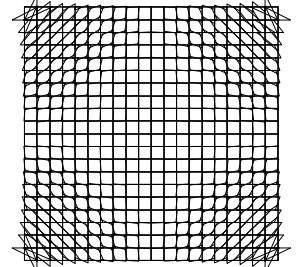
$$N_{\min}=-0.179 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



$$yM_{\max}=0.156 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$$zM_{\max}=0.236 \times 10^2 \text{ kNm}$$

d. 面内曲げモーメント

図 5.10 form-A4 の力学性状 ( $m_{uv}=7$ )

### 5.1.3 ISGA による数値結果

図 5.11 - 5.34 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果の解の収束状況を図 5.11, 5.12 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.17, 5.18 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.23, 5.24 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.29, 5.30 ( $m_{uv} = 7$ ) に示し、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\hat{c}$  コンター図、制御点、形態鳥瞰図を図 5.13, 5.15 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.19, 5.21 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.25, 5.27 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.31, 5.33 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。各々得られた記憶細胞内の適応度上位 10 個体から抜粋して示す。得られた優良解形態の力学性状 (a: 部材分布, b: 軸力 (青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外 ( $y$  軸まわり) 曲げモーメント, d: 面内 ( $z$  軸まわり) 曲げモーメント) を図 5.14, 5.16 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.20, 5.22 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.26, 5.28 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.32, 5.34 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\hat{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力 (正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。

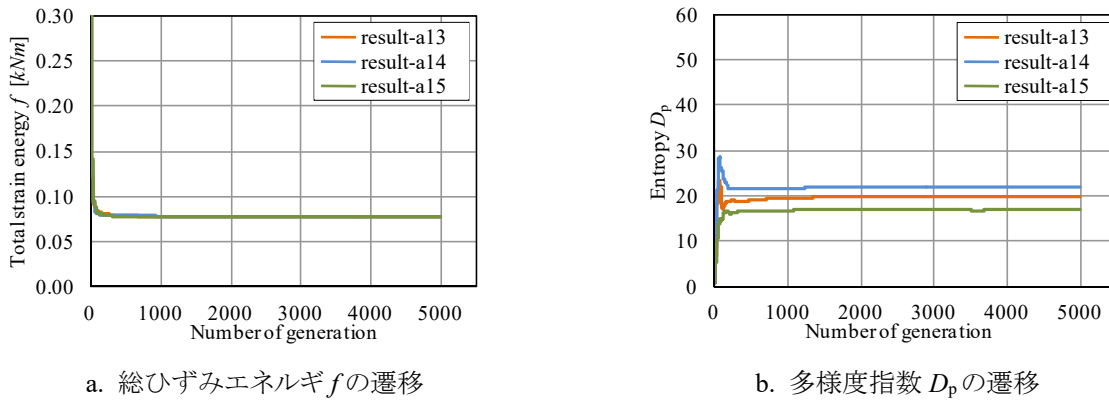


図 5.11 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.01$

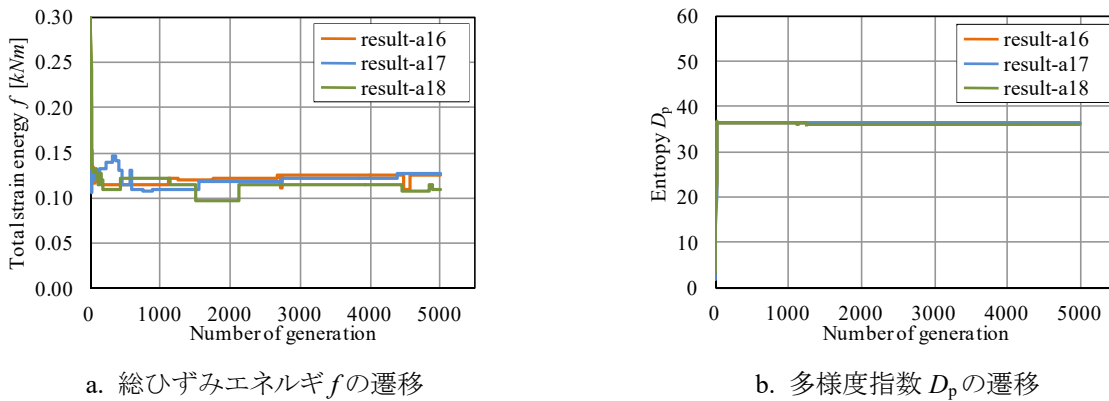


図 5.12 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.1$

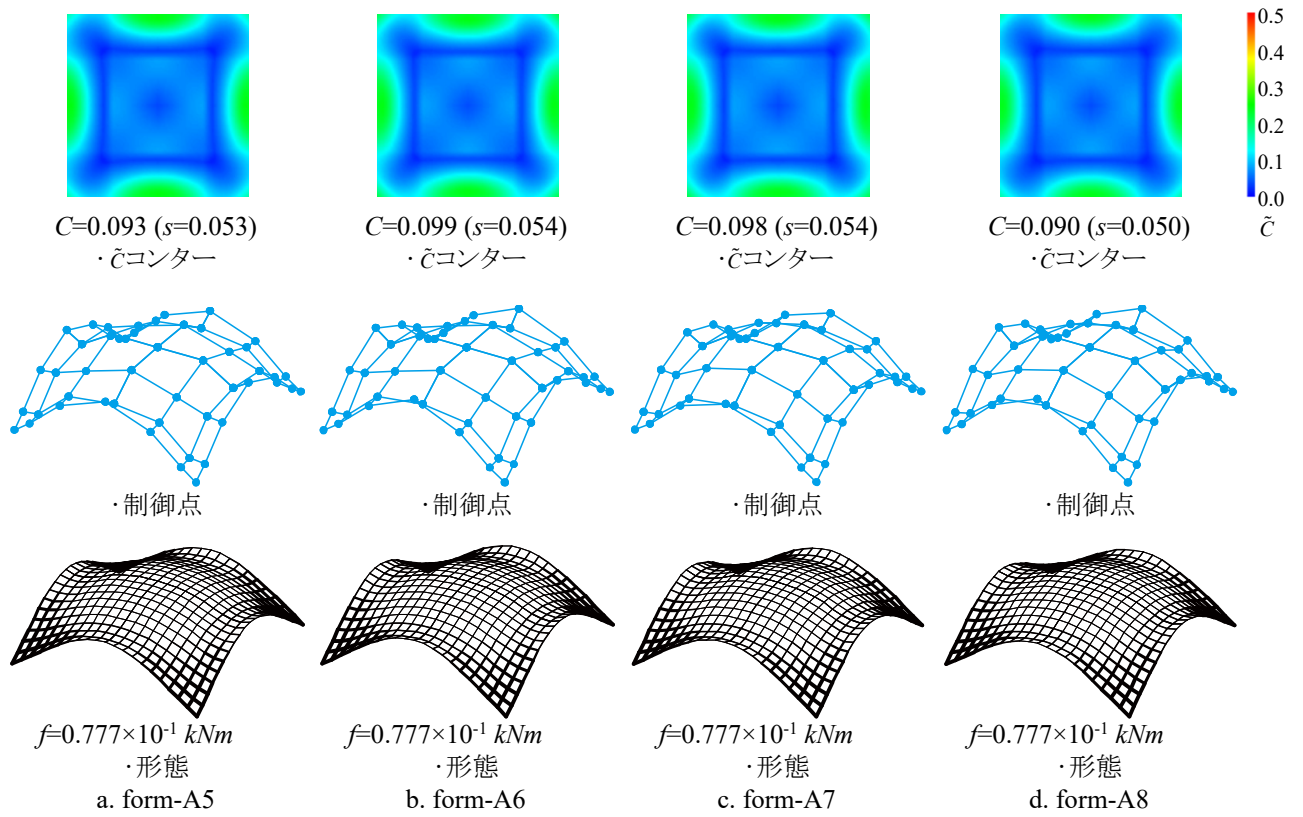


図 5.13 優良解形態例 result-a15 ( $m_{uv}=4, H=0.01$ )

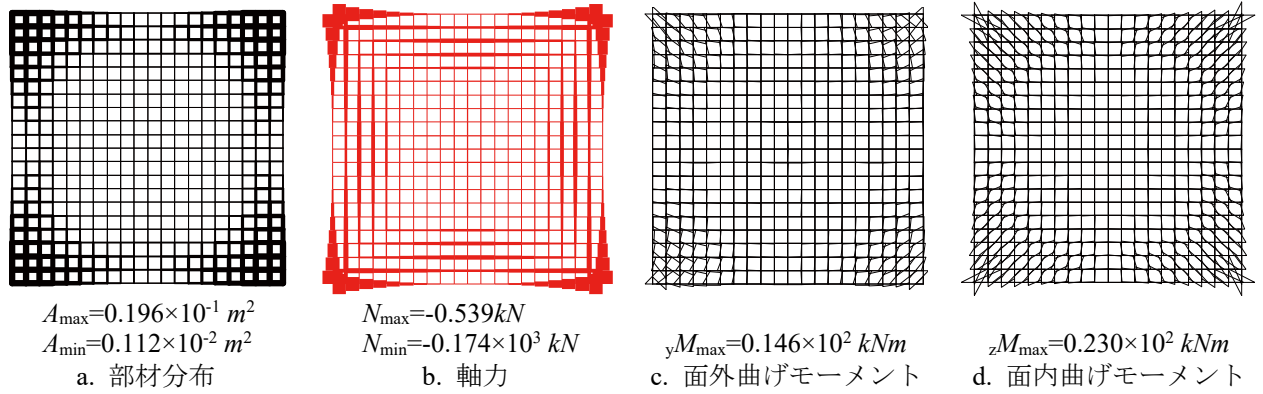


図 5.14 form-A5 の力学性状

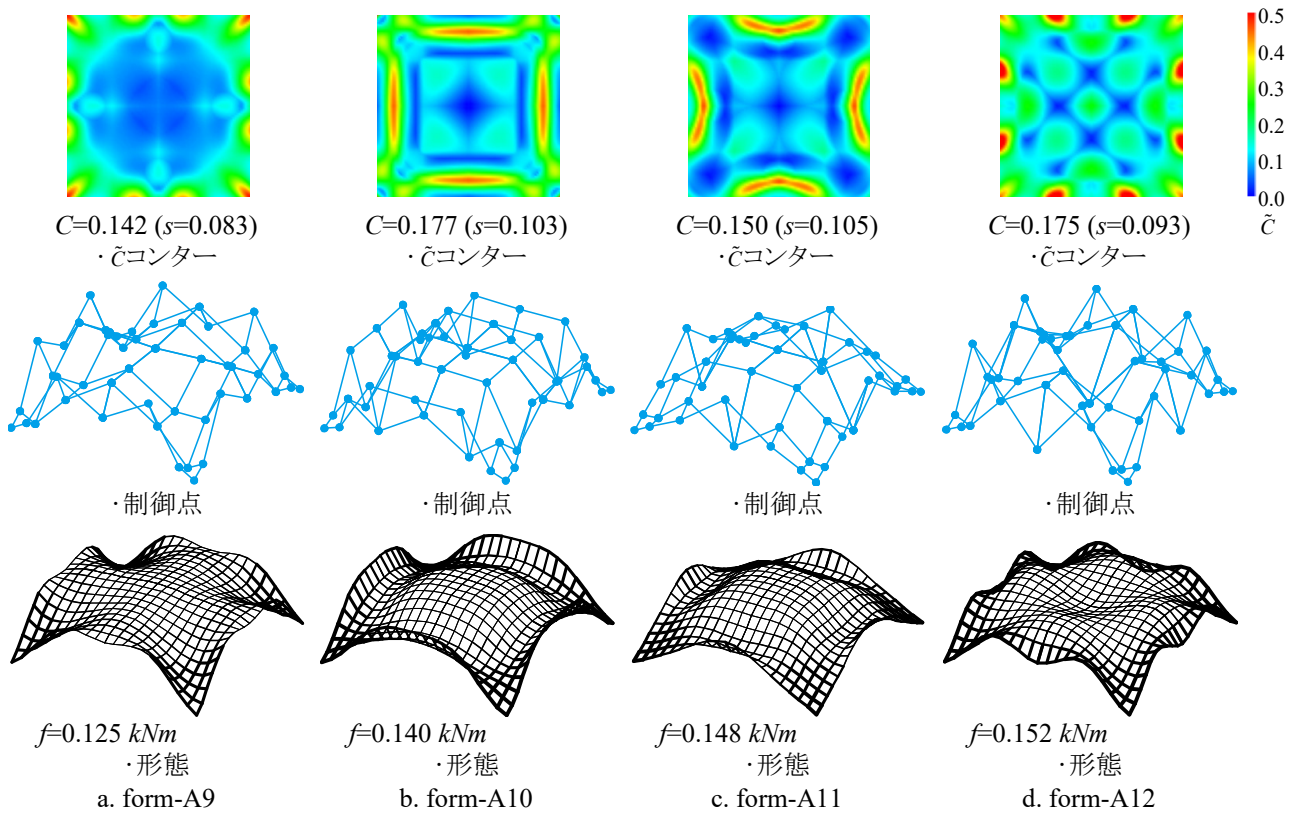


図 5.15 優良解形態例 result-a16 ( $m_{uv}=4$ ,  $H=0.1$ )

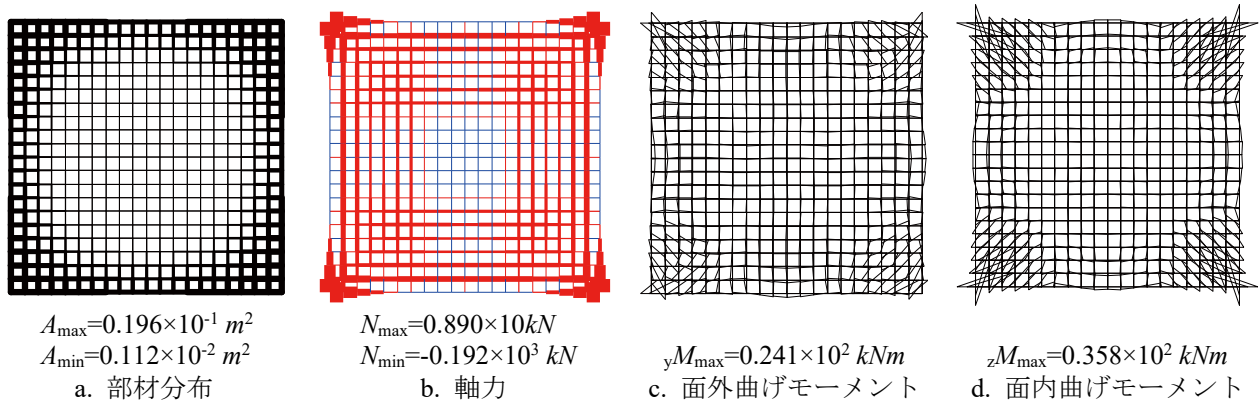
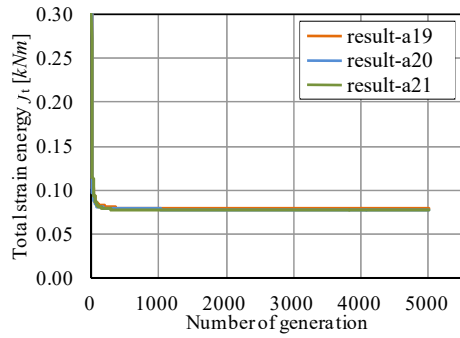
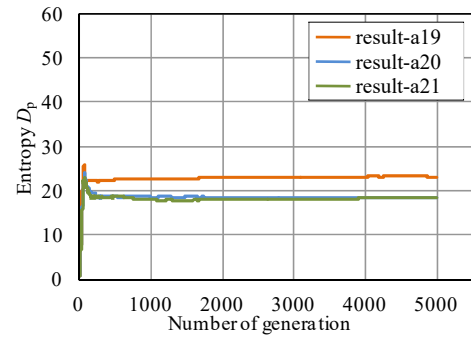
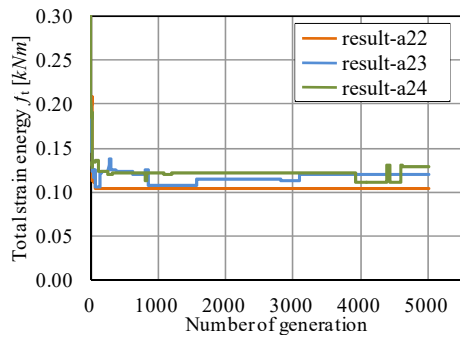
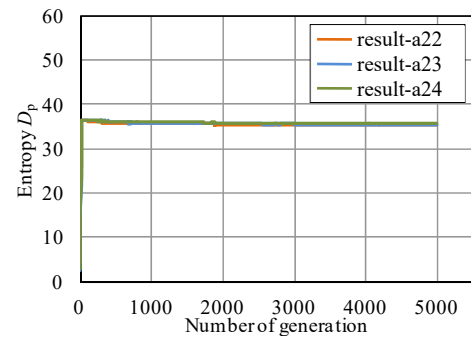


図 5.16 form-A12 の力学性状



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.17 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.18 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.1$

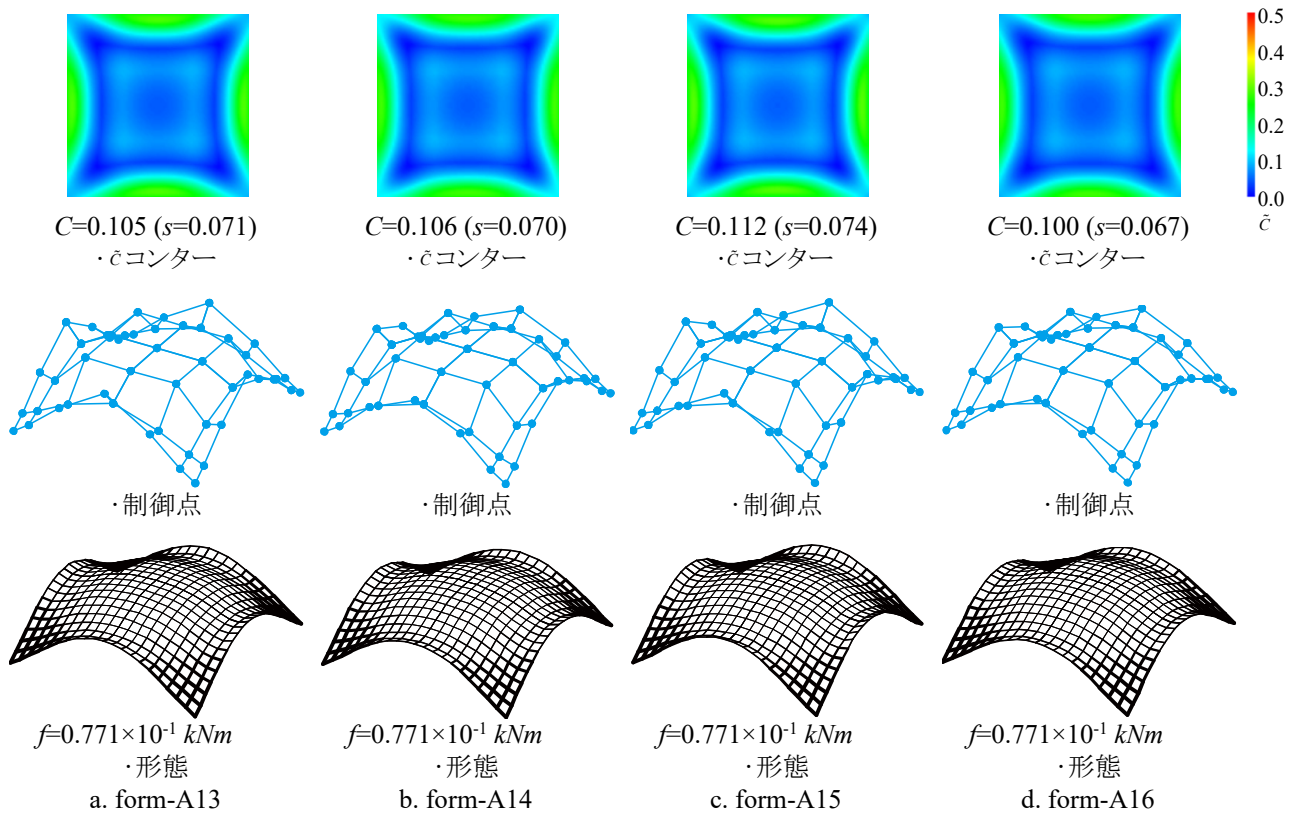


図 5.19 優良解形態例 result-a19 ( $m_{uv}=5, H=0.01$ )

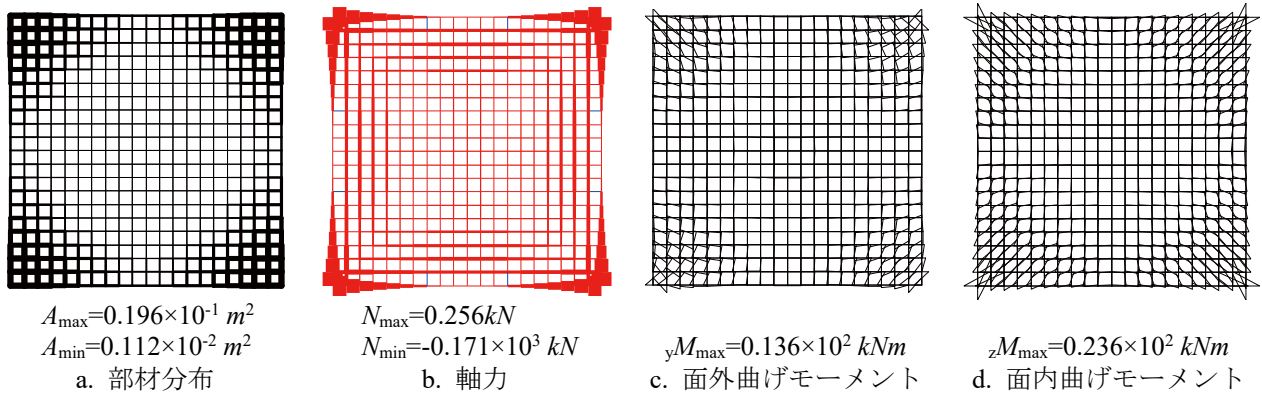


図 5.20 form-A13 の力学性状

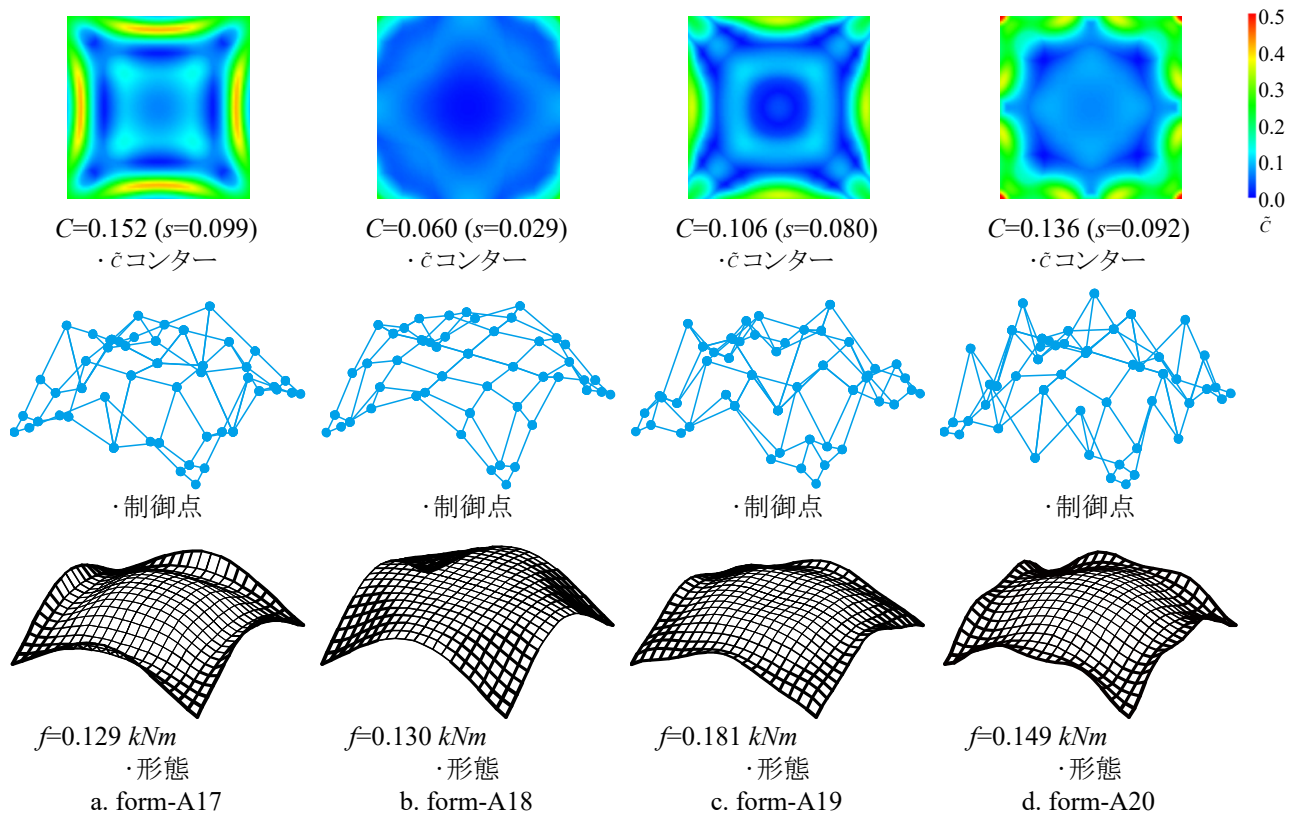


図 5.21 優良解形態例 result-a23 ( $m_{uv}=5, H=0.1$ )

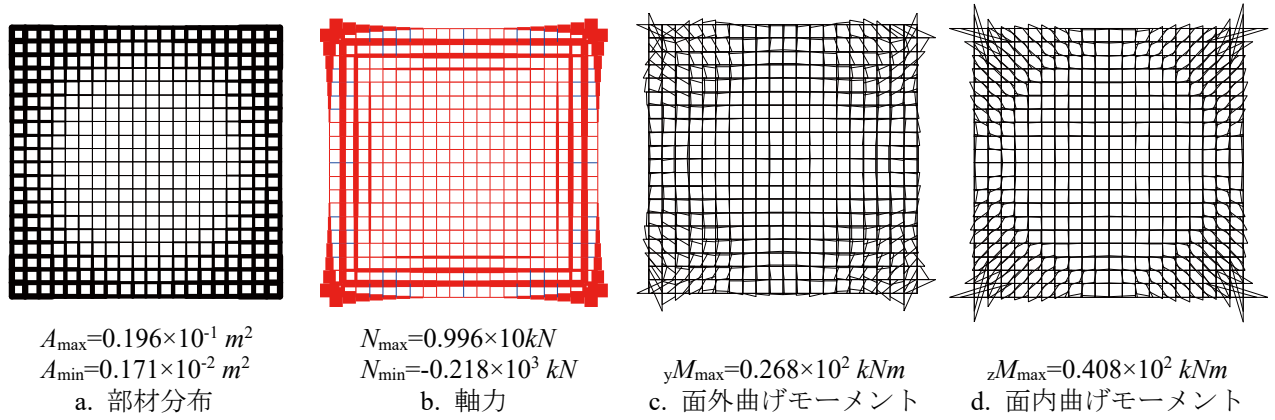
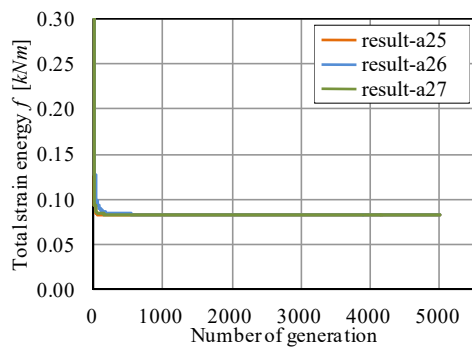
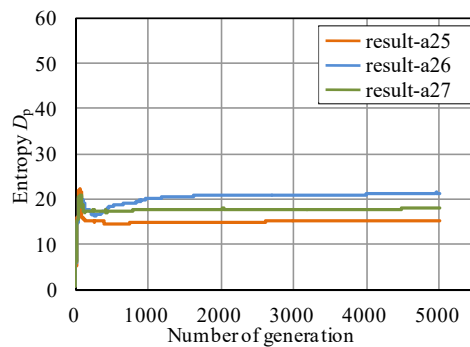


図 5.22 form-A20 の力学性状

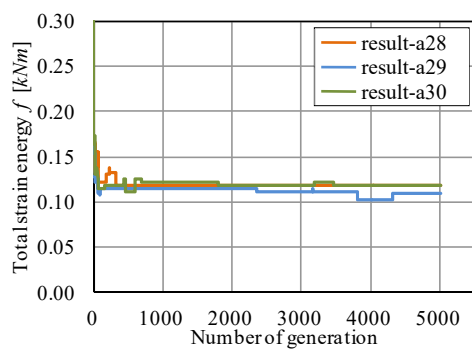


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

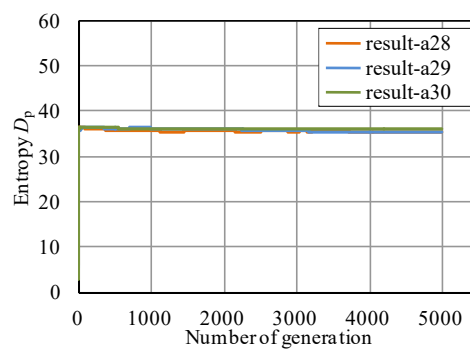


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.23 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.01$



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.24 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.1$

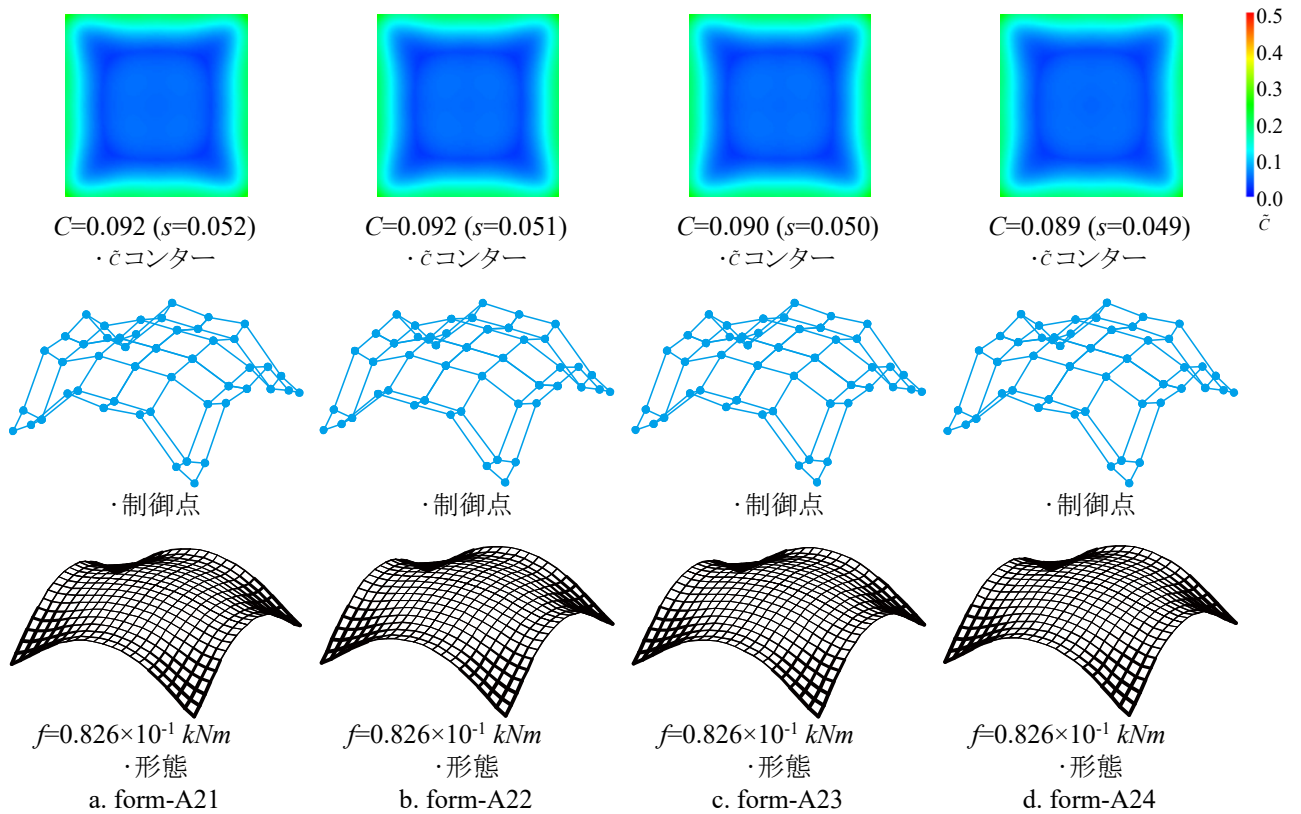


図 5.25 優良解形態例 result-a25 ( $m_{uv}=6, H=0.01$ )

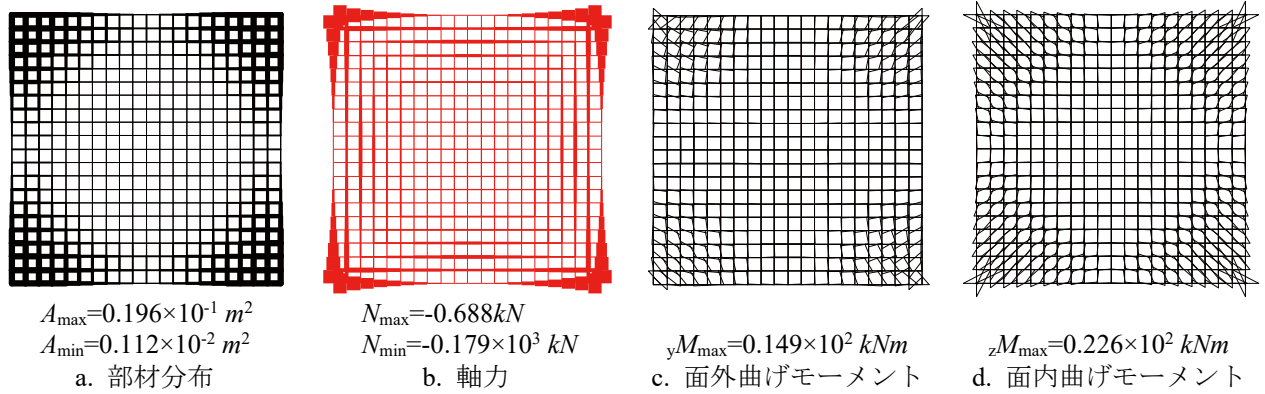


図 5.26 form-A21 の力学性状

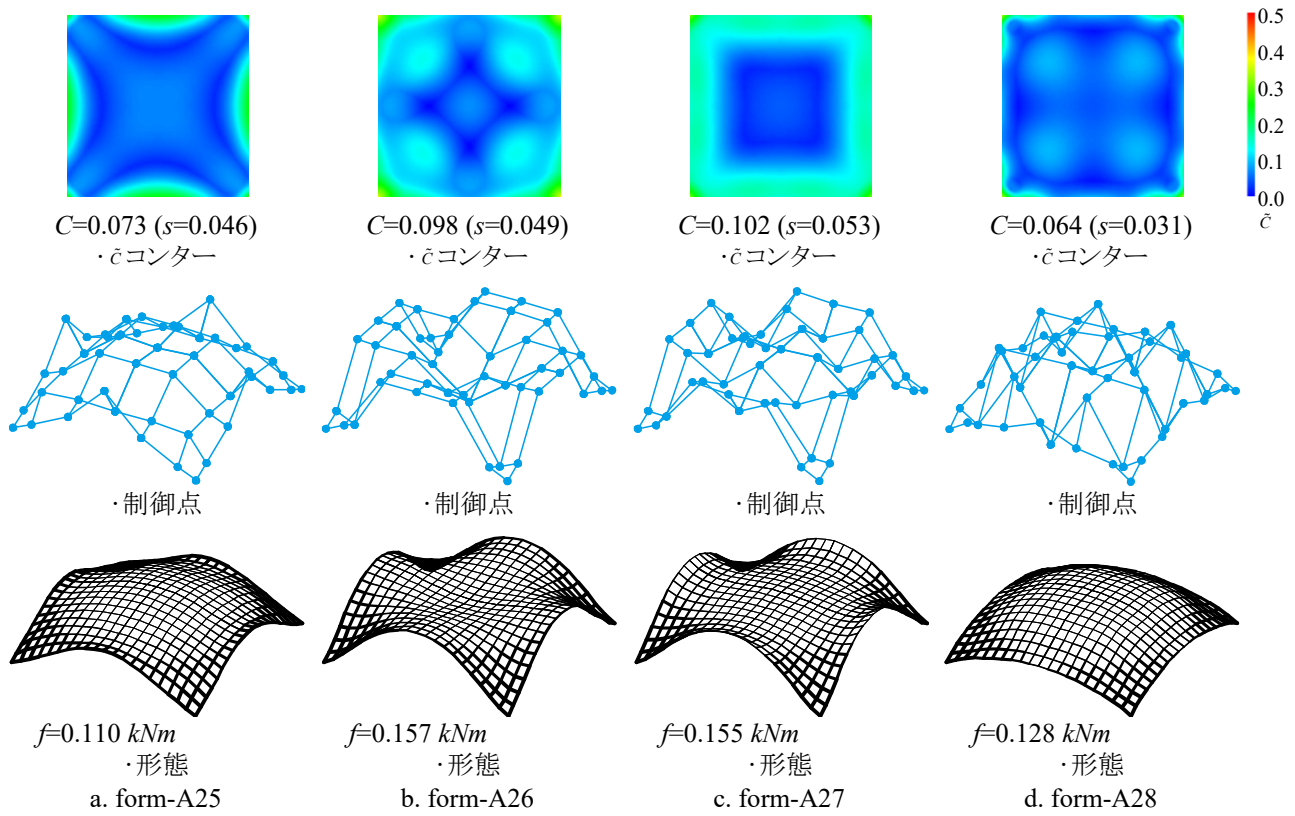


図 5.27 優良解形態例 result-a28 ( $m_{uv}=6, H=0.1$ )

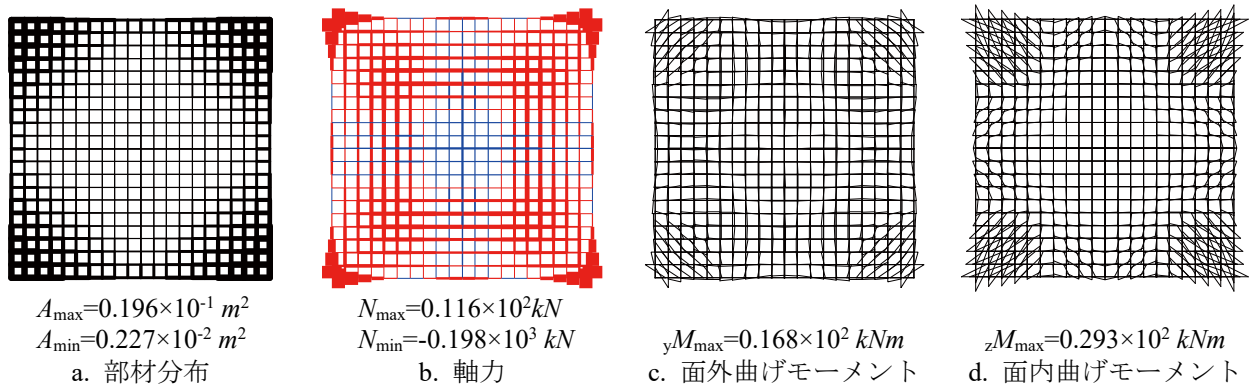
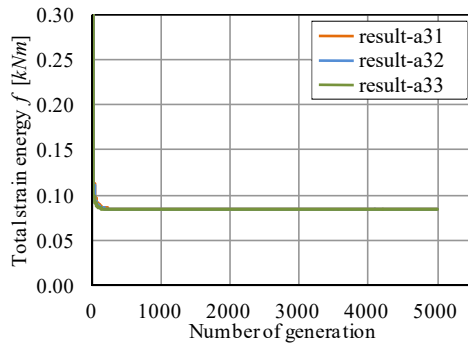
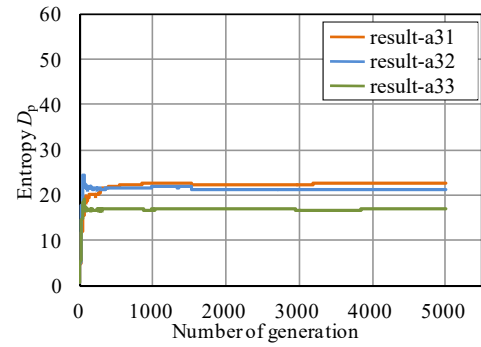
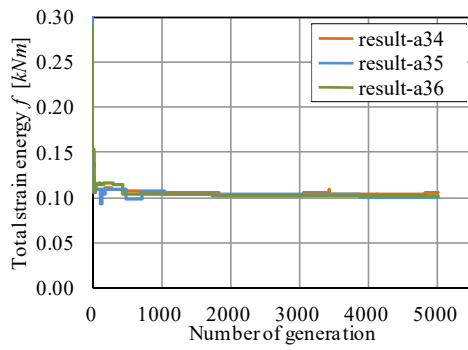
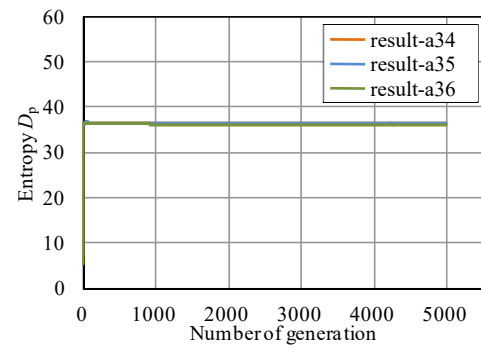


図 5.28 form-A26 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.29 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.30 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.1$

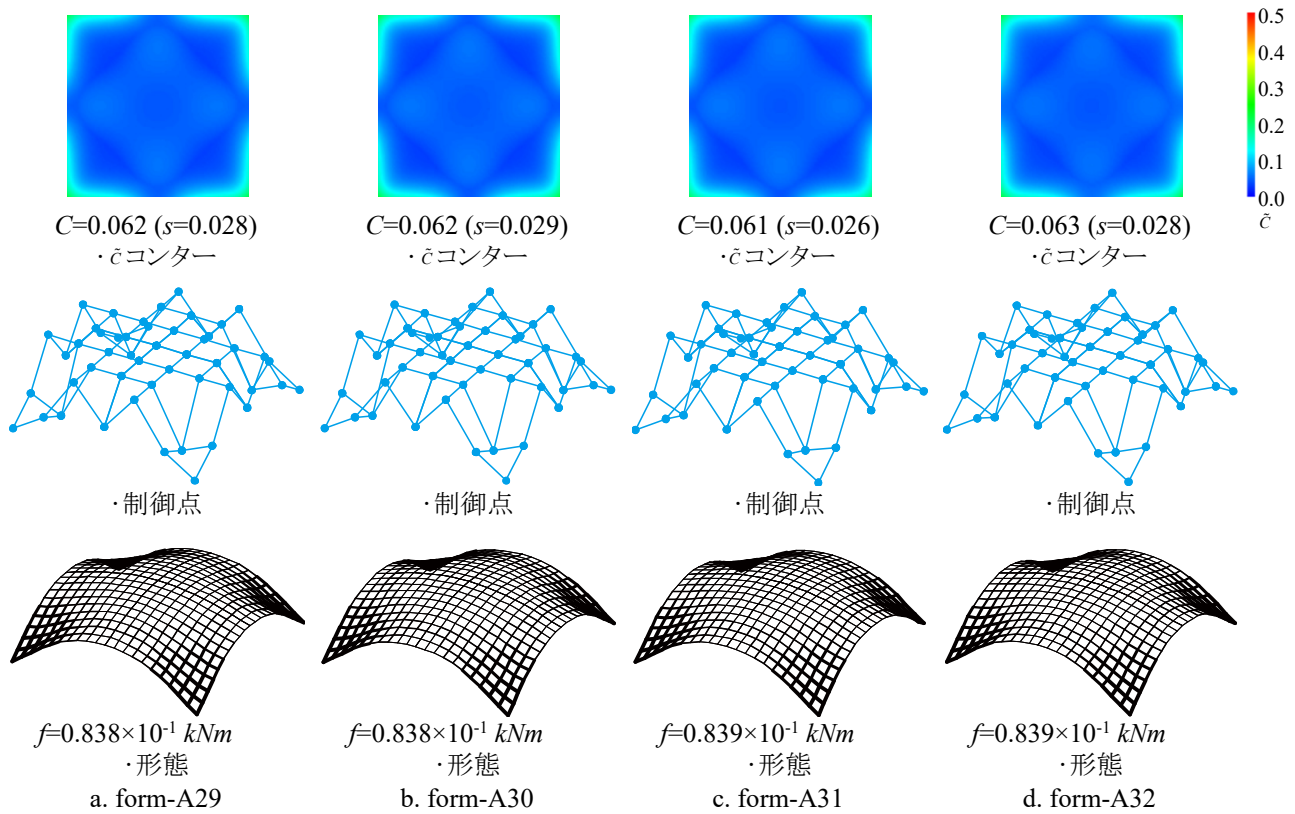


図 5.31 優良解形態例 result-a33 ( $m_{uv}=7, H=0.01$ )

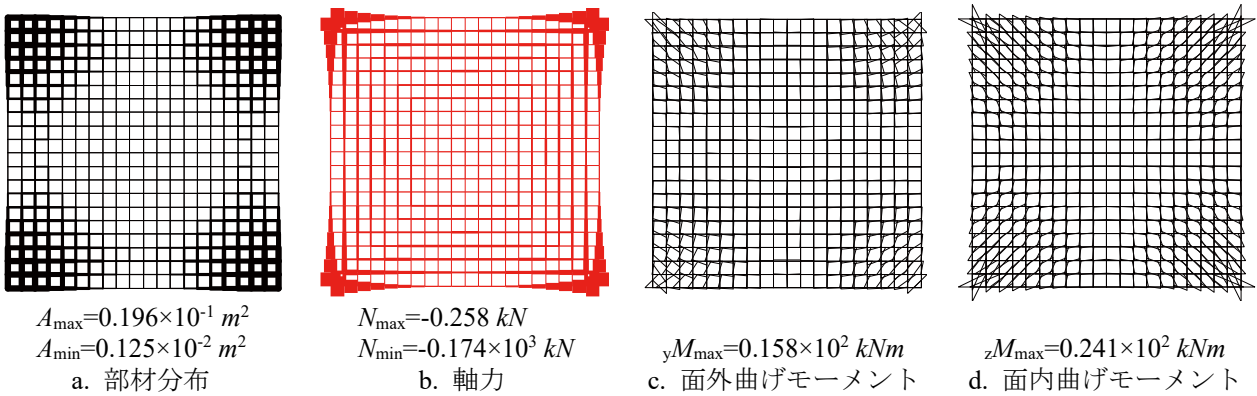


図 5.32 form-A29 の力学性状



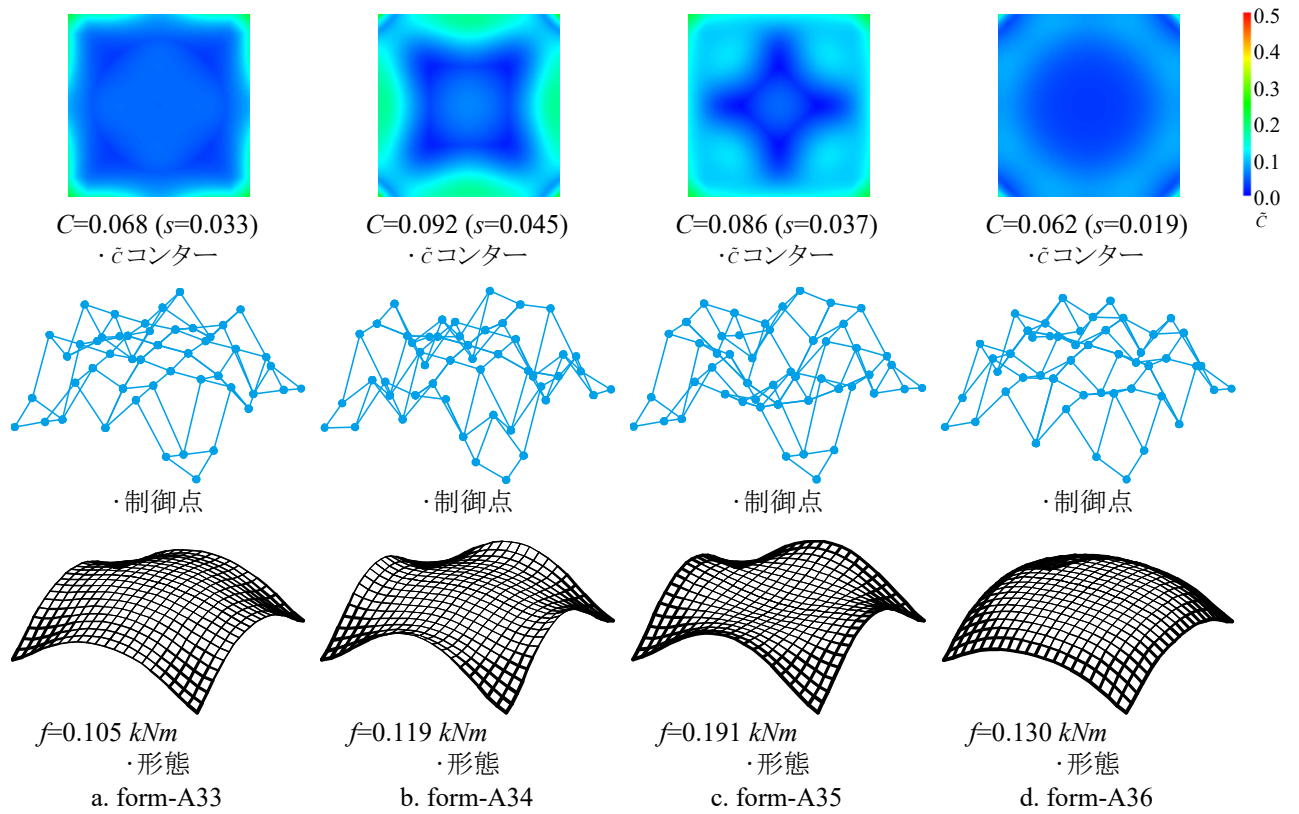
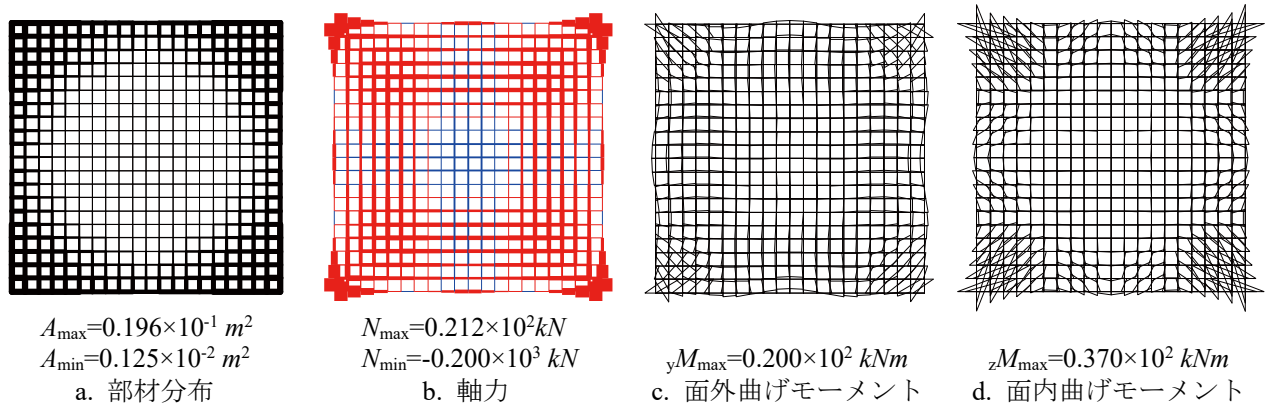
図 5.33 優良解形態例 result-a34 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )

図 5.34 form-A35 の力学性状

### 5.1.4 考察

$H = 0.01$  のとき目的関数値の収束状況と得られる解形態は SGA に対応する。1000 世代にはほぼ収束値に達し、その後は収束値を維持する。 $H = 0.01$  の設定における多様度指数  $D_p$  は、 $H = 0.1$  と比較して低い値で変動が少なく、多様性を重視しない探索が行われる。記憶細胞内個体の解形態は多様性が低く、大域的最適解を含むその付近の解を探索した結果である。 $H = 0.1$  とすると目的関数値が探索中に変動し、収束値にばらつきが生じる。また、 $D_p$  の値は試行ごとで比較的大きな値に安定して収束する。これは ISGA がエリート戦略を採っておらず、解の多様性に従って記憶細胞を更新するためである。 $H = 0.1$  のとき、どの  $m_{uv}$  においても目的関数値の変動が最も大きいことから、本モデルの総ひずみエネルギー最小化は、峰の数が少ない解空間を有していると考えられる。得られた優良解には、form-A17, -A18 (図 5.21 a, b), form-A26, -A27 (図 5.27 b, c) のように、一度の試行で目的関数値がほぼ同値であるにもかかわらず形状が大きく異なる解を得た。これは ISGA が設計変数空間の多様性を維持した結果である。

多様性を重視した結果( $H = 0.1$ )において、 $m_{uv} = 4, 5$  に設定した優良解には form-A9, -A12 ( $m_{uv} = 4$ )および form-A20 ( $m_{uv} = 5$ )のように強く湾曲する形状、または form-A10, -A11 ( $m_{uv} = 4$ )および form-A17 ( $m_{uv} = 5$ )のように境界部がめくれ上がる形状が含まれる。これらの  $C$  の値は比較的大きく( $C = 0.136 \sim 0.175$ )、数値的にも強く湾曲した形状であることが示されている。特に、めくれ上がる形状が得られたのは、基底関数の特性上、内側よりも外周部の制御点の局所制御性が強いためである。また、強く湾曲する形状と同時に form-A18 のような  $C = 0.06$  である滑らかな形状も含まれている。 $m_{uv} = 4, 5$  に設定することで形状のバリエーションに富んだ結果を得た。一方  $m_{uv} = 6, 7$  に設定すると強く湾曲する形態を得ることがなく、特に、 $m_{uv} = 7$  で  $C \geq 0.10$  の形態はほとんど得られない。 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなる。さらに形状のバリエーションは  $m_{uv} = 4, 5$  の結果と比較すると少ない。これは、階数を大きく設定することで各制御点の影響力が弱まり、影響範囲が広がるためである。つまり、局所制御性が低いため形状表現の自由度が抑制される。例えば、 $m_{uv} = 4$  で得られた強く湾曲する形状の form-A12 (図 5.15d)と  $m_{uv} = 7$  で得られた form-A36 (図 5.33d)における外周部制御点は比較的類似しているが、記述される形状は全く異なっており、 $C$  は 1/3 程度である。

力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。この結果は、ISGA の探索において形状の設計変数のみ多様性を考慮し、部材選択に関する設計変数の多様性を考慮していない結果である。図 5.16 より、 $\bar{c}$  が大きな箇所では曲げモーメントの変動が大きく、曲率と曲げモーメントが関係していることが確認できる。

## 5.2 2m 間隔配置モデルのひずみエネルギー最小化(Model-B)

本節では 2m 間隔に部材を配置した鉄骨グリッドシェルの総ひずみエネルギー最小化を目標とした単一目的最適化問題を扱う。

### 5.2.1 解析モデル

解析モデルは、図 5.35 に示す、隅角部ピン支持とした一辺が 20 m の正方形平板を基準形状とする。図 5.35b のハッチ部に示す対称性を考慮した 1/4 領域(節点数: 36, 要素数: 60)を解析対象とする。载荷条件は長期に自重 78.5  $kN/m^3$  と等分布荷重 1.0  $kN/m^2$  を設定する。グリッドシェルの材料は、表 3.1 に示す 20 種類の一般構造用炭素鋼管(STK400)とする。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (5-5)$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (5-6)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (5-7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (5-8)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル(=  $[A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル(=  $[R_k]$ ),  $f$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $\mathbf{d}$ : 節点変位ベクトル,  $\mathbf{K}$ : 剛性マトリクス,  $R_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0 \text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $A_j^U = 20.0 \text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(5-8)は長期荷重に対する許容応力度設計による応力制約条件であり、鋼材の基準強度は 235  $N/mm^2$ 、ヤング係数は  $2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ 、せん断弾性係数は  $7.8 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  である。解析パラメータは表 5.2 のように設定する。

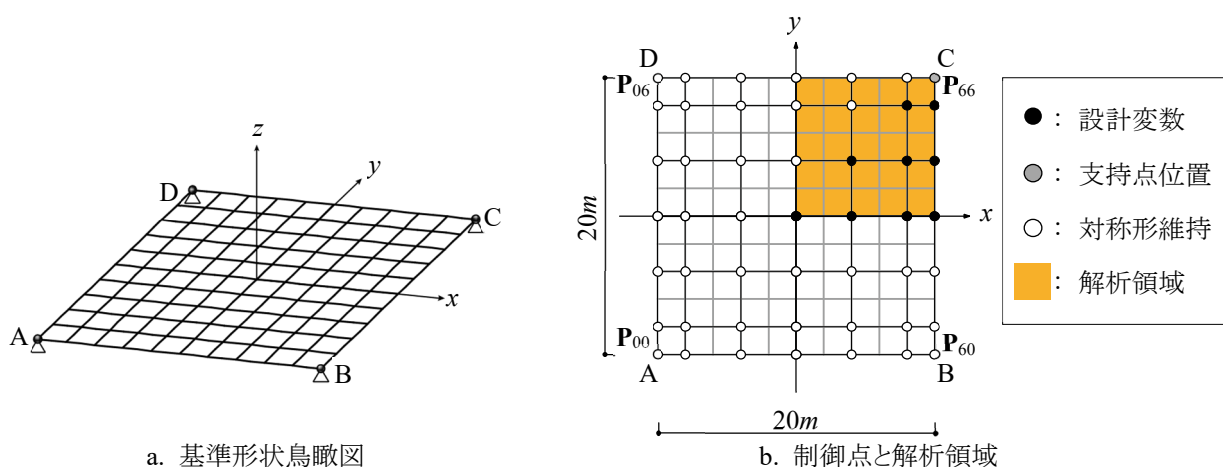


図 5.35 解析モデル

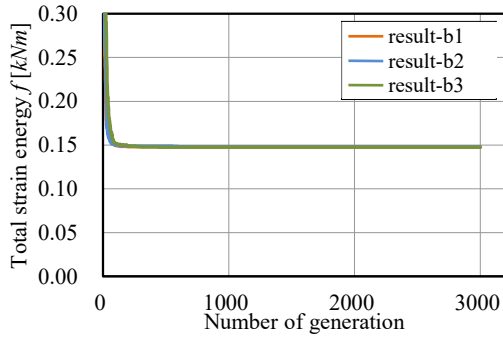
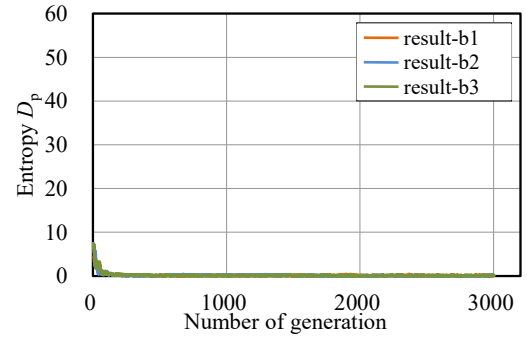
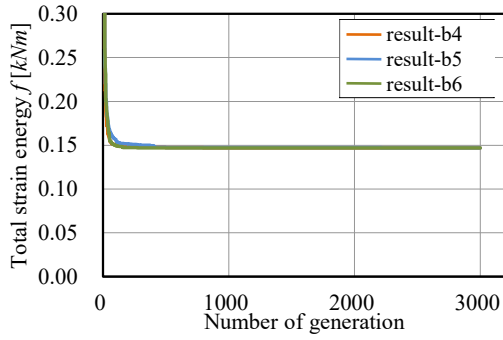
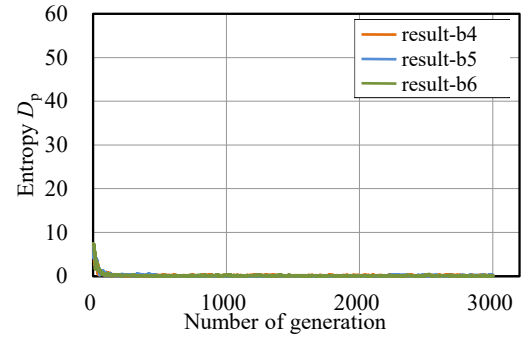
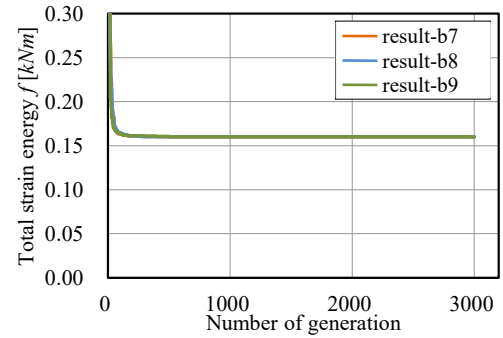
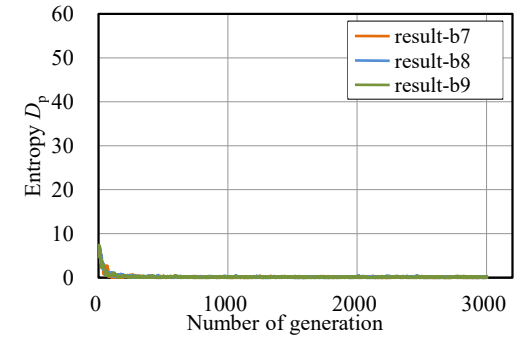
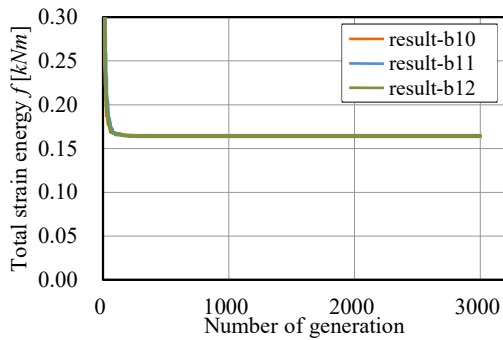
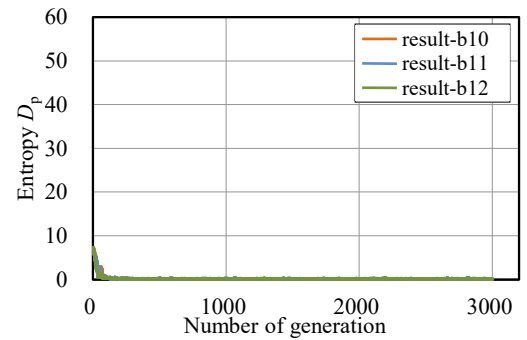
表 5.2 GA パラメータ (ISGA, SGA)

世代数	3000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
A の遺伝子長	$10 \times 16 \text{ bit}$
R の遺伝子長	$9 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

### 5.2.2 SGA による数値結果

SGA による数値結果を図 5.36 - 5.44 に示す。図 5.36 - 5.39 は、SGA により得られた各階数設定 3 試行における解の収束状況であり、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。図 5.40 は、各試行で得られた解形態の  $\tilde{C}$  コンター図、制御点、形態鳥瞰図を示す。得られた解形態の力学性状を図 5.41 - 5.44 に示す(a: 部材分布, b: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外( $y$  軸まわり)曲げモーメント, d: 面内( $z$  軸まわり)曲げモーメント)。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\tilde{C}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_y M_{\max} \cdot {}_z M_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメントである。

図 5.36 - 5.39 より、SGA は各  $m_{uv}$  設定値で試行回数によらずほぼ同じ解形態を捉える。目的関数値は 200 世代程度で収束し、その後大きな変化がない。したがって、得られた解は大域的最適解と判断する。得られた形態は既往研究で報告されている最適形態(カテナリー曲面)に対応している。図 5.40 より、得られた大域的最適解形態の  $\tilde{C}$  コンター図は  $m_{uv}$  設定値で異なる。目的関数値は、 $m_{uv}$  設定値 4 と 5、および  $m_{uv}$  設定値 6 と 7 がほぼ同値であるが、 $m_{uv} = 4, 5$  と  $m_{uv} = 6, 7$  には差がある。これらの結果より、大域的最適解形態は  $m_{uv}$  設定値に依存する。図 5.41 - 5.44 より、部材は各応力に従った分布となっている。

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.36 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=4$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.37 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=5$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.38 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=6$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.39 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=7$ )

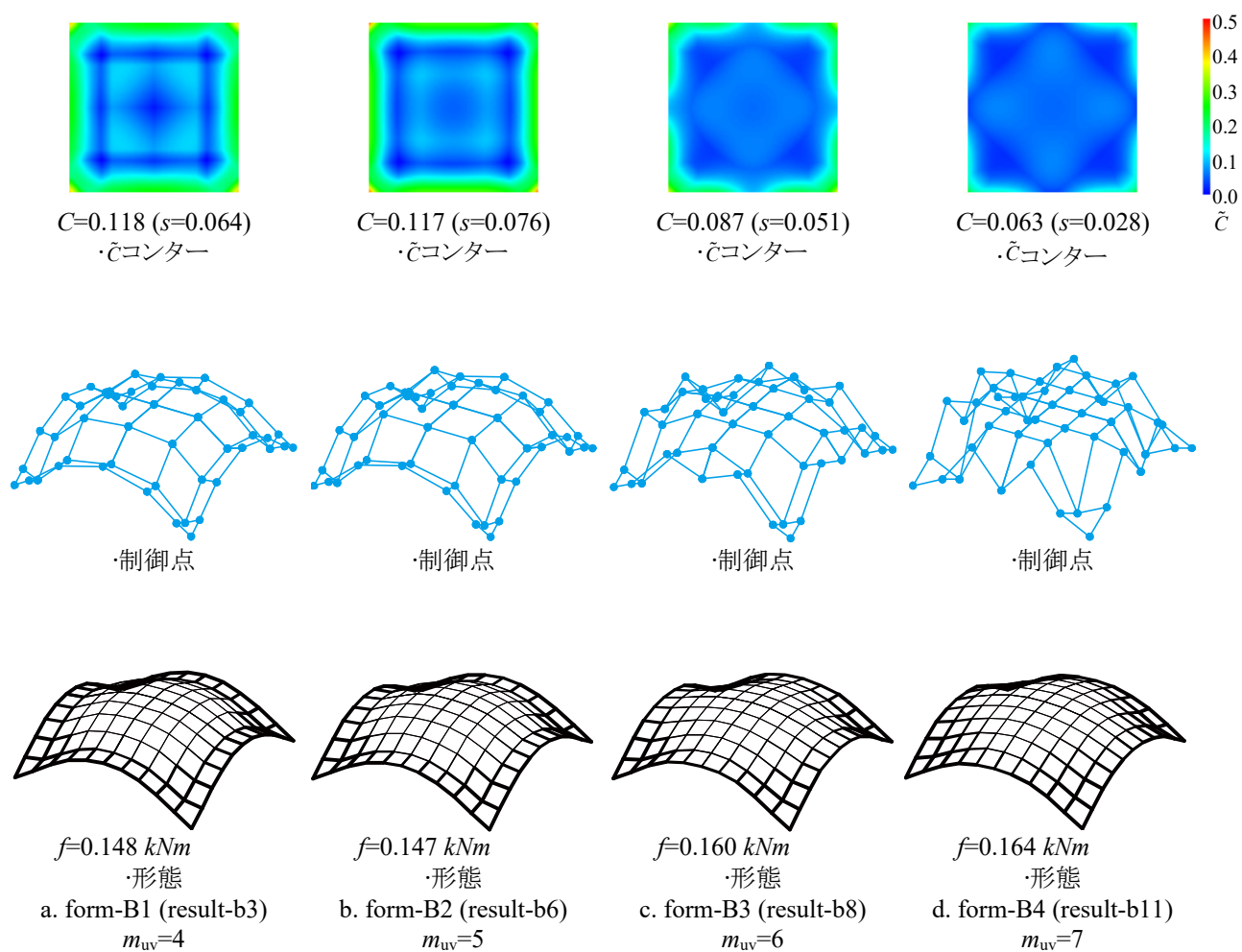
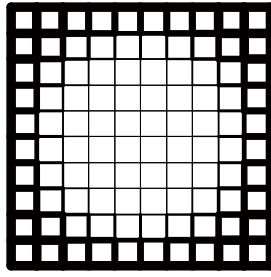


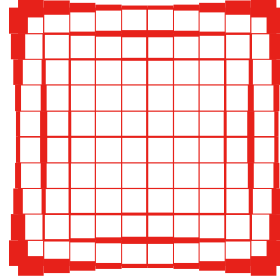
図 5.40 SGA の解形態例



$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.112 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

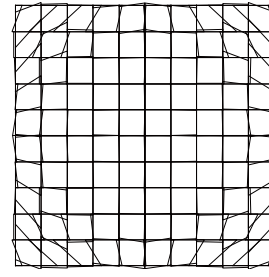
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.401 \times 10 \text{ kN}$$

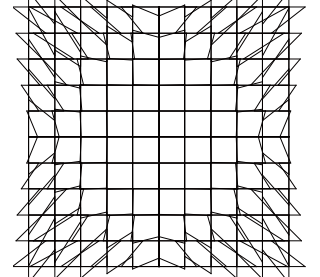
$$N_{\min}=-0.172 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



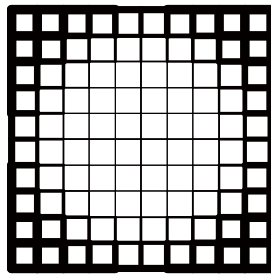
$${}_yM_{\max}=0.243 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.383 \times 10^2 \text{ kNm}$$

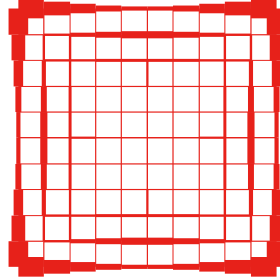
d. 面内曲げモーメント

図 5.41 form-B1 の力学性状( $m_{uv}=4$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.112 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

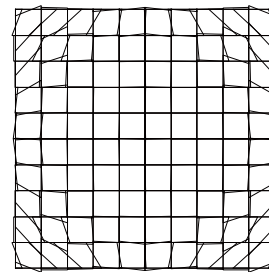
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.282 \times 10 \text{ kN}$$

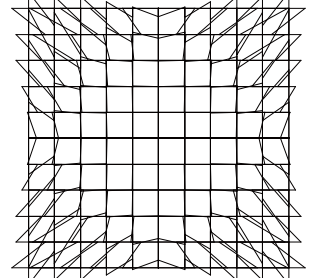
$$N_{\min}=-0.168 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



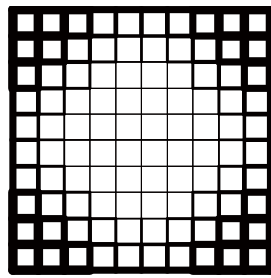
$${}_yM_{\max}=0.237 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.385 \times 10^2 \text{ kNm}$$

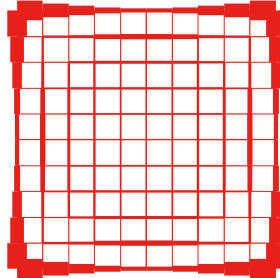
d. 面内曲げモーメント

図 5.42 form-B2 の力学性状( $m_{uv}=5$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.125 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

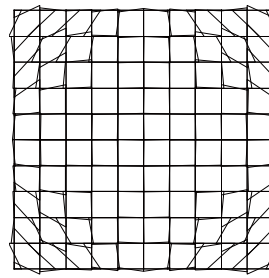
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.890 \text{ kN}$$

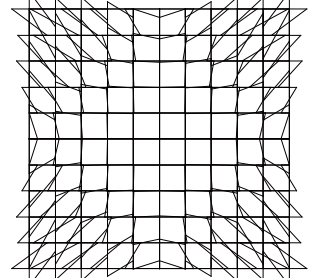
$$N_{\min}=-0.166 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



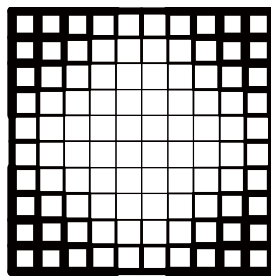
$${}_yM_{\max}=0.233 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.386 \times 10^2 \text{ kNm}$$

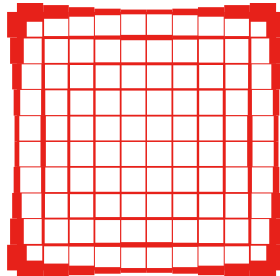
d. 面内曲げモーメント

図 5.43 form-B3 の力学性状( $m_{uv}=6$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.125 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

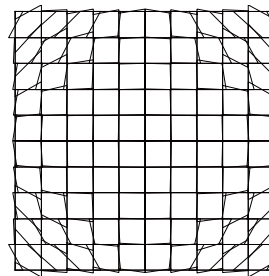
a. 部材分布



$$N_{\max}=-0.651 \times 10 \text{ kN}$$

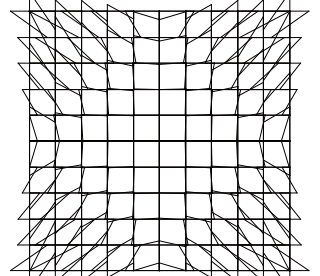
$$N_{\min}=-0.170 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



$${}_yM_{\max}=0.236 \times 10^2 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.405 \times 10^2 \text{ kNm}$$

d. 面内曲げモーメント

図 5.44 form-B4 の力学性状 ( $m_{uv}=7$ )

### 5.2.3 ISGA による数値結果

図 5.45 - 5.68 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果の解の収束状況を図 5.45, 5.46( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.51, 5.52 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.57, 5.58( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.63, 5.64( $m_{uv} = 7$ )に示し、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\hat{c}$  コンター図, 制御点, 形態鳥瞰図を図 5.47, 5.49 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.53, 5.55 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.59, 5.61 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.65, 5.67 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。各々得られた記憶細胞内の適応度上位 10 個体から抜粋して示す。得られた優良解形態の力学性状 (a: 部材分布, b: 軸力 (青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外 ( $y$  軸まわり) 曲げモーメント, d: 面内 ( $z$  軸まわり) 曲げモーメント) を図 5.48, 5.50 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.54, 5.56 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.60, 5.62 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.66, 5.68 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\hat{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力 (正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。

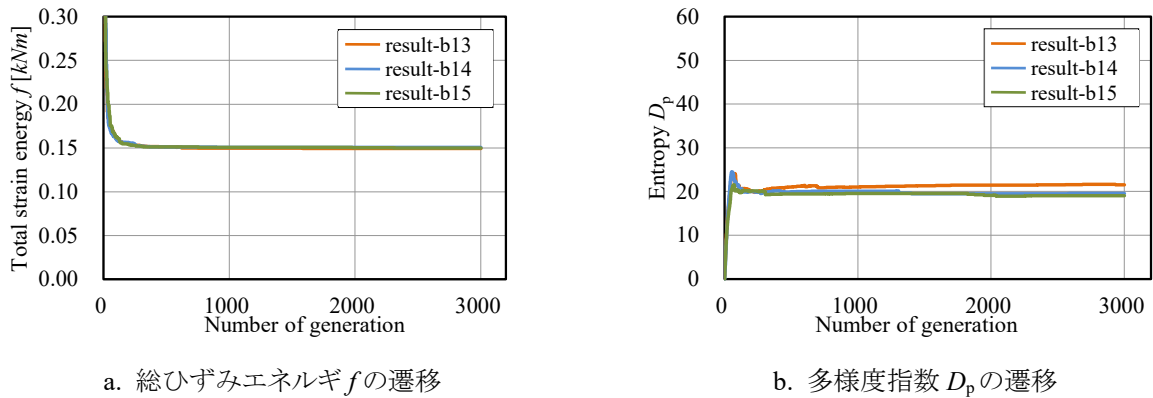


図 5.45 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.01$

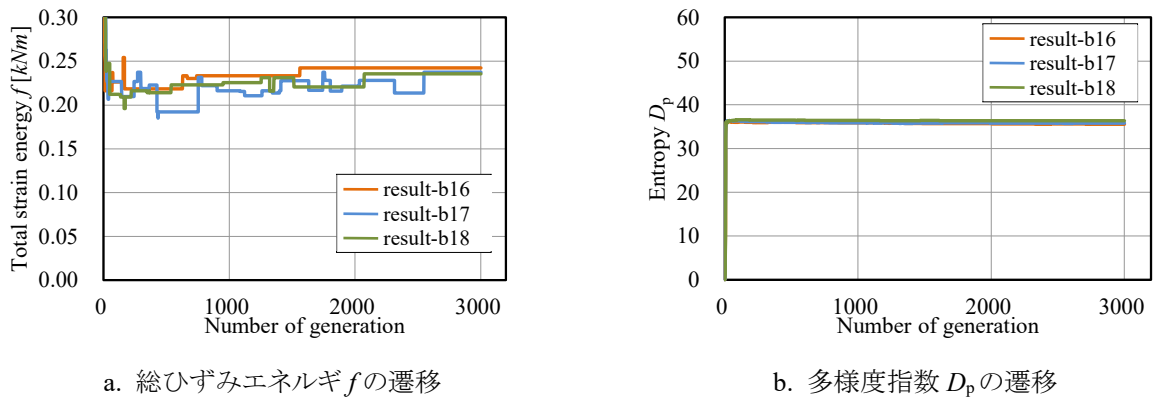


図 5.46 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.1$



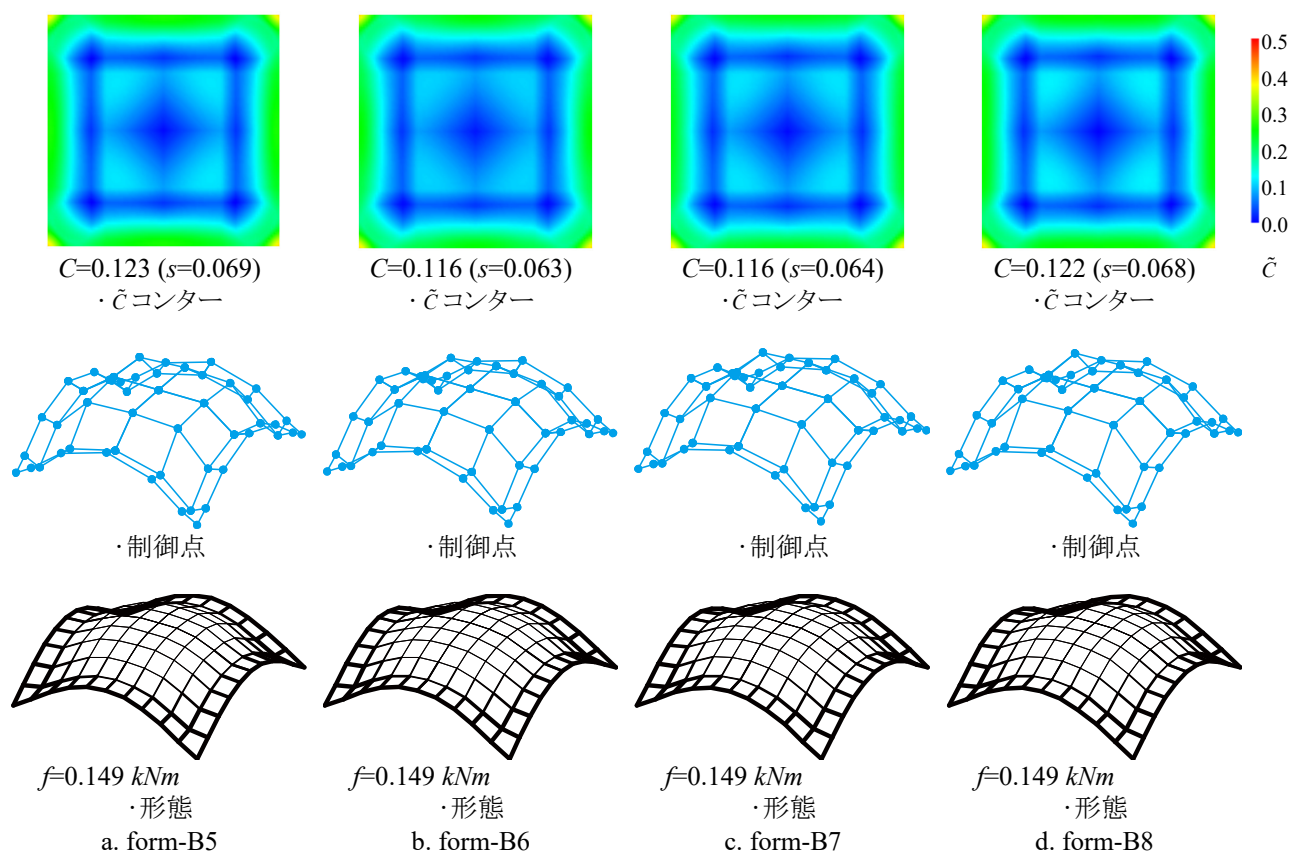
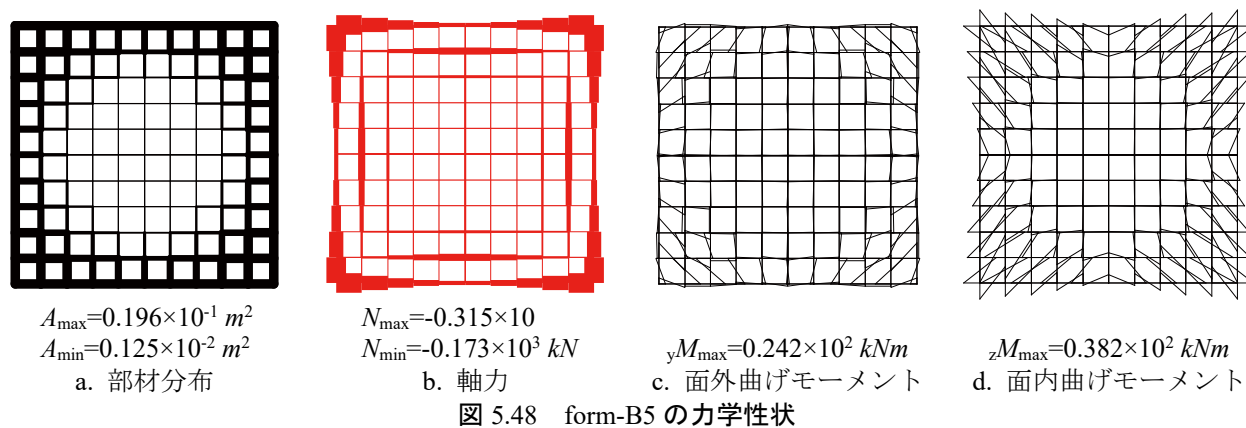
図 5.47 優良解形態例 result-b15 ( $m_{uv}=4, H=0.01$ )

図 5.48 form-B5 の力学性状

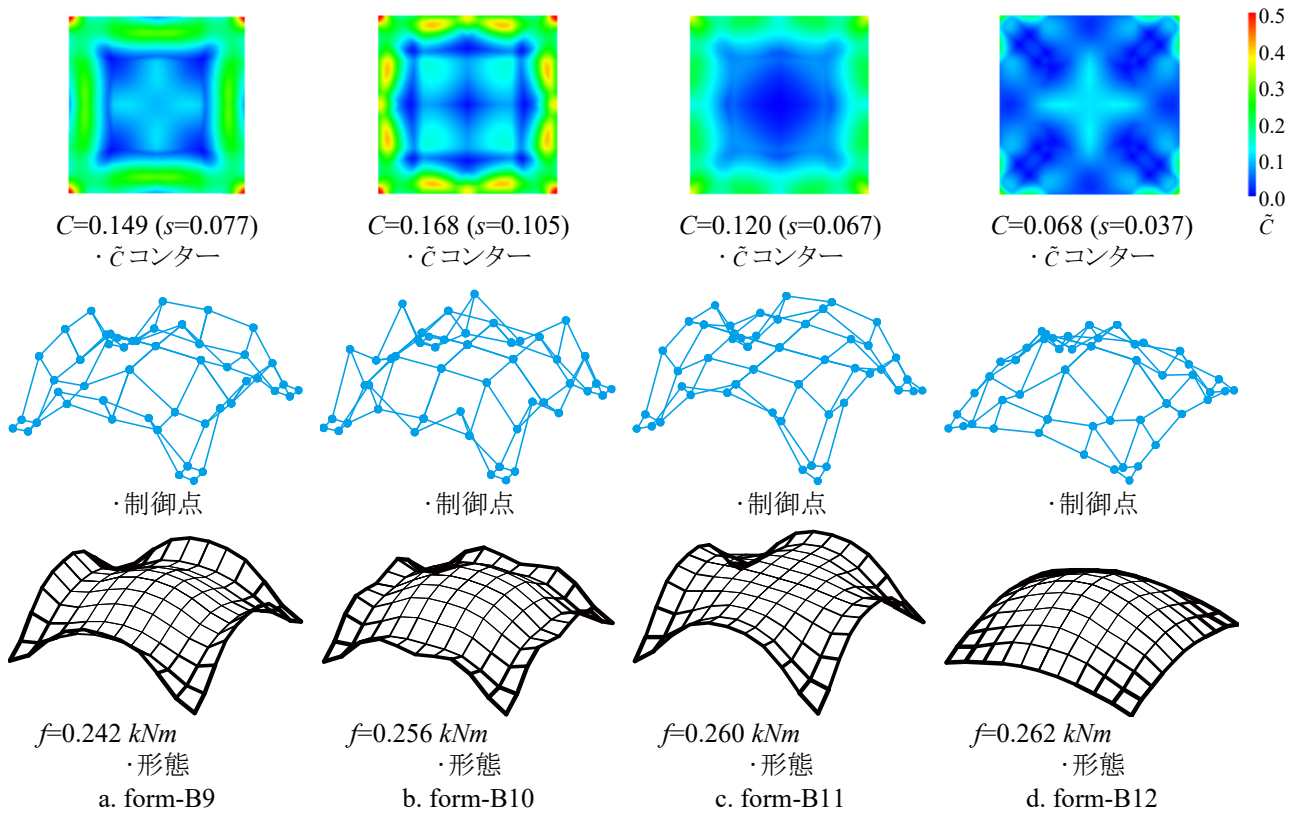


図 5.49 優良解形態例 result-b17 ( $m_{uv}=4$ ,  $H=0.1$ )

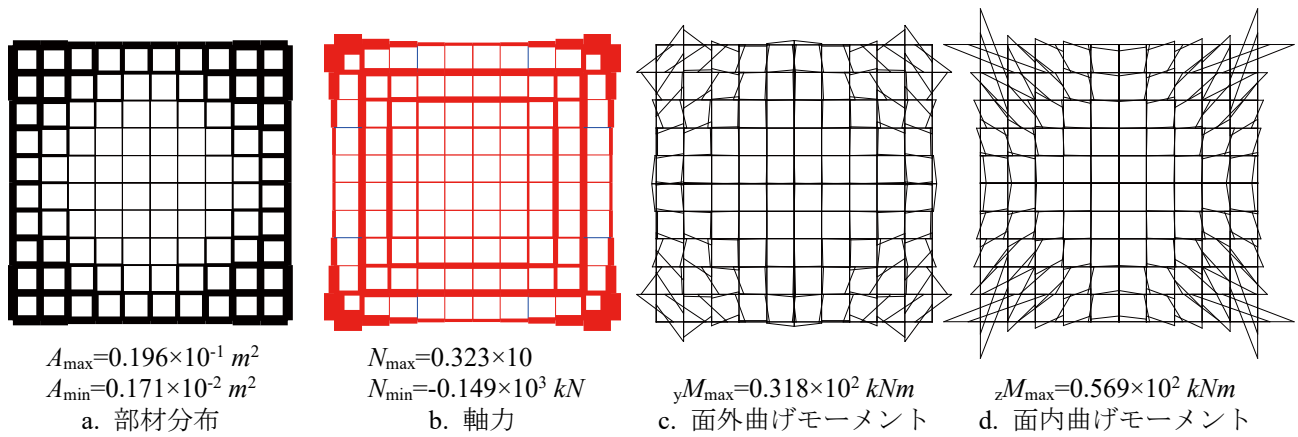
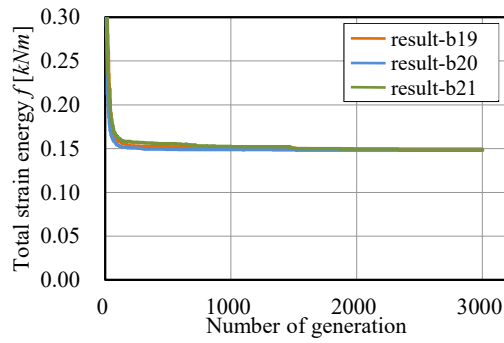
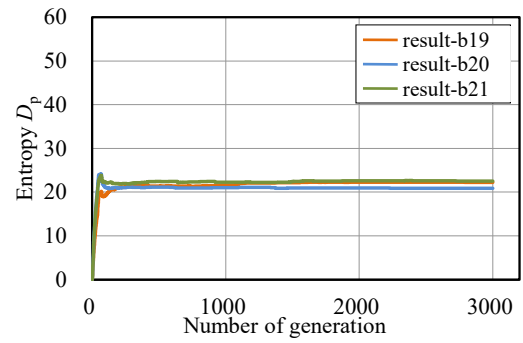
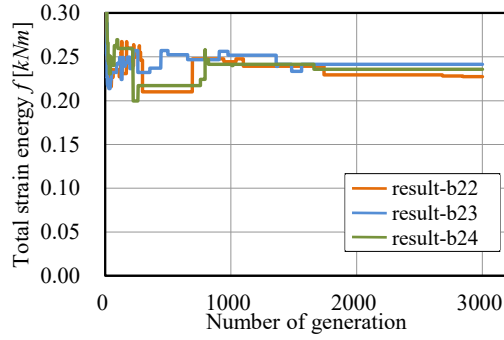
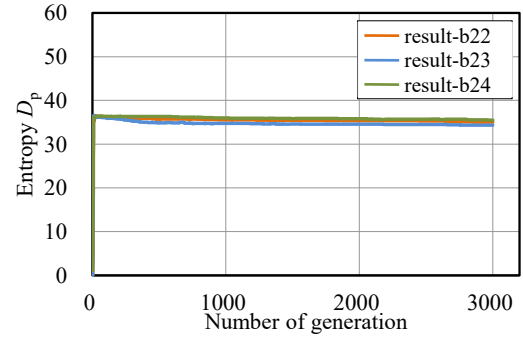


図 5.50 form-B10 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.51 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.52 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.1$

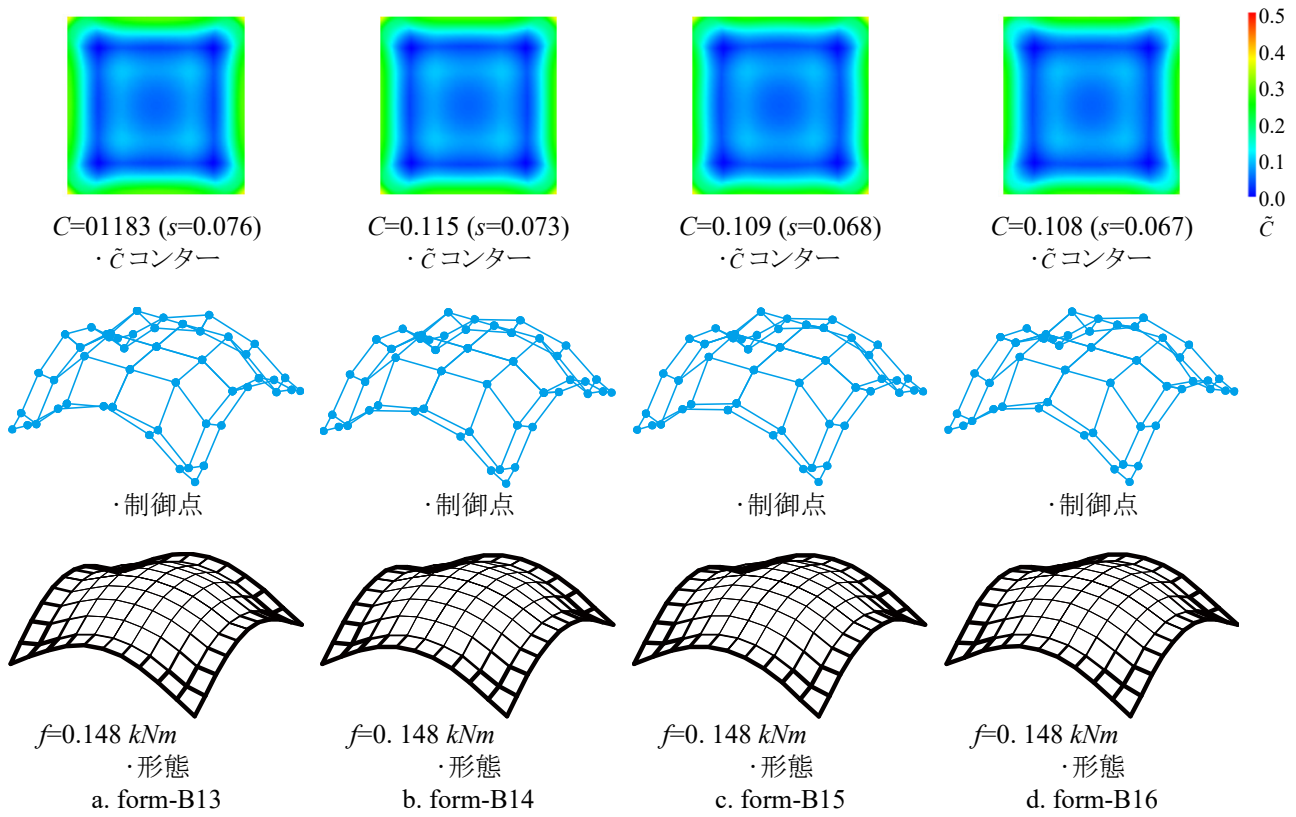


図 5.53 優良解形態例 result-b15 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.01$ )

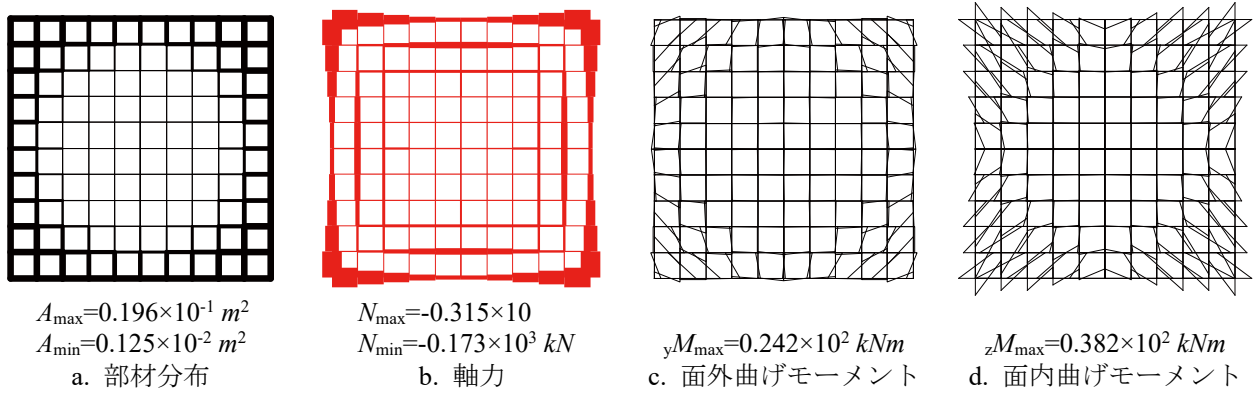


図 5.54 form-B13 の力学性状

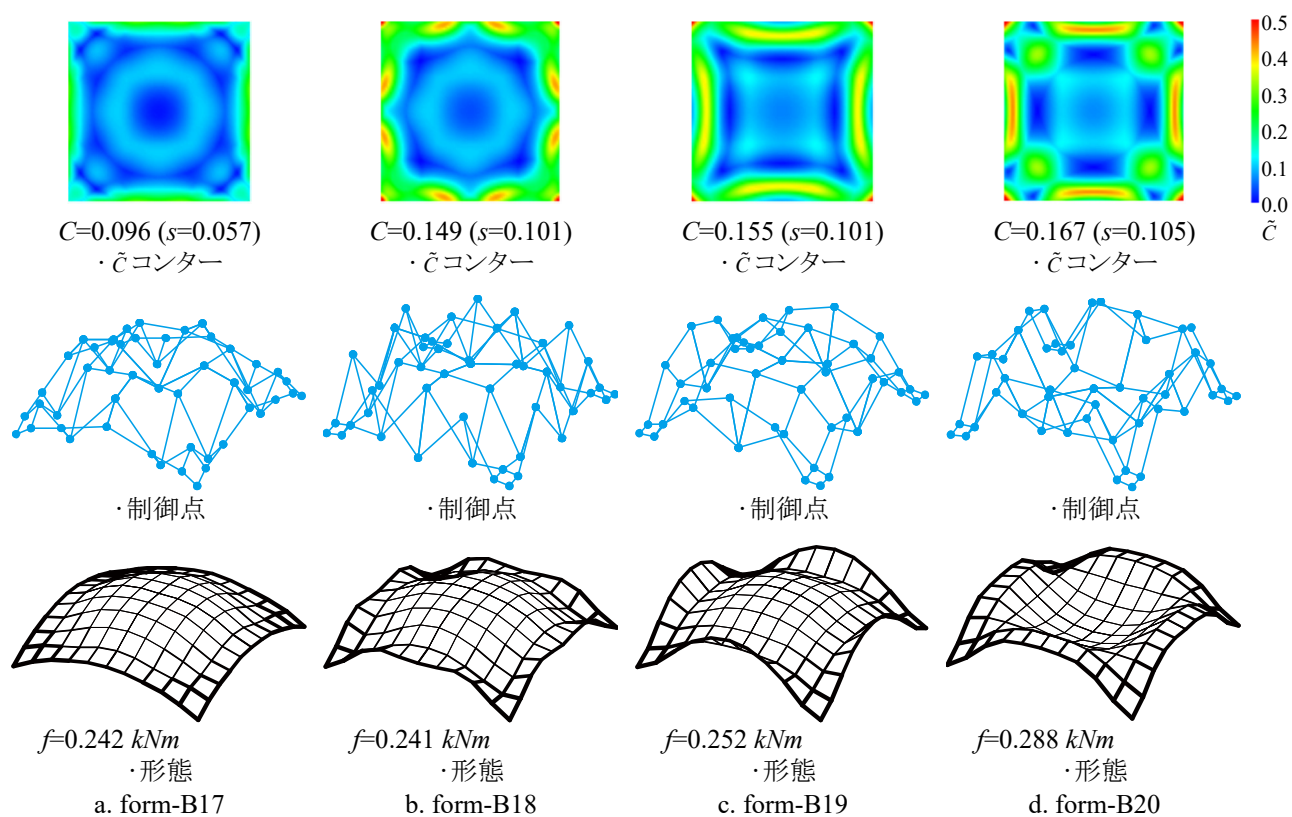
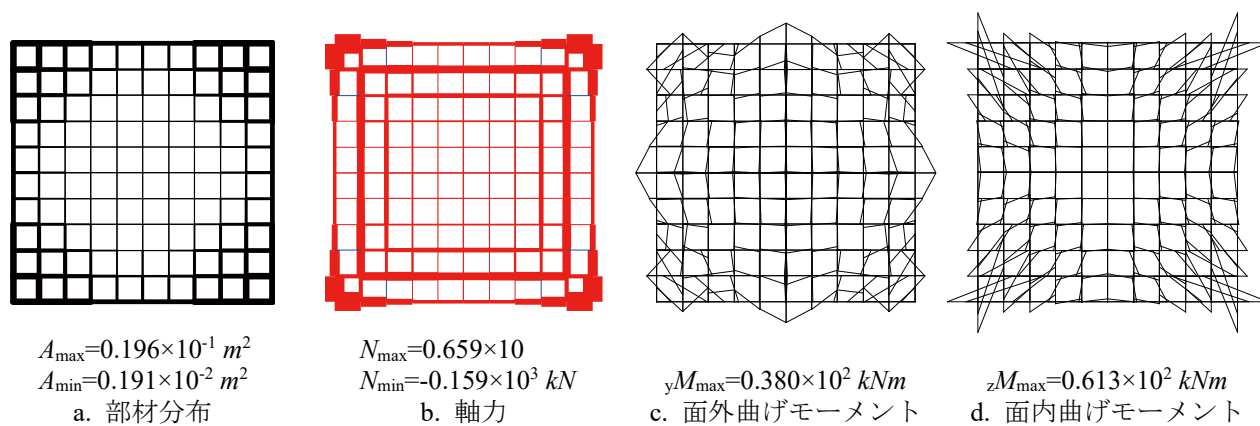
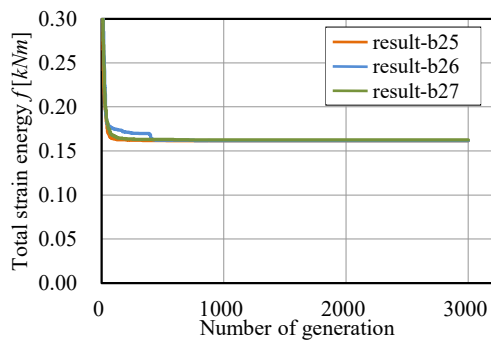
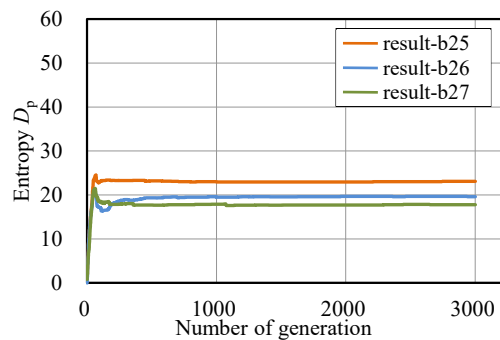
図 5.55 優良解形態例 result-b17 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.1$ )

図 5.56 form-B18 の力学性状

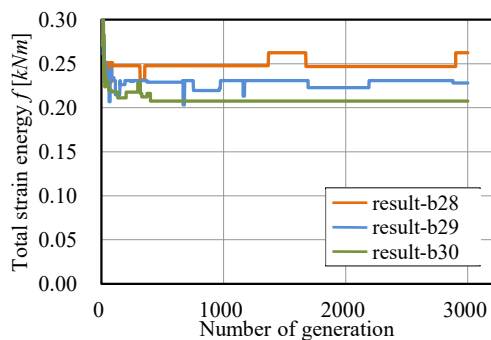


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

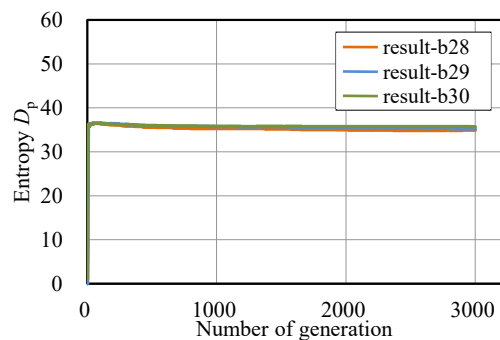


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.57 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.01$



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.58 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.1$

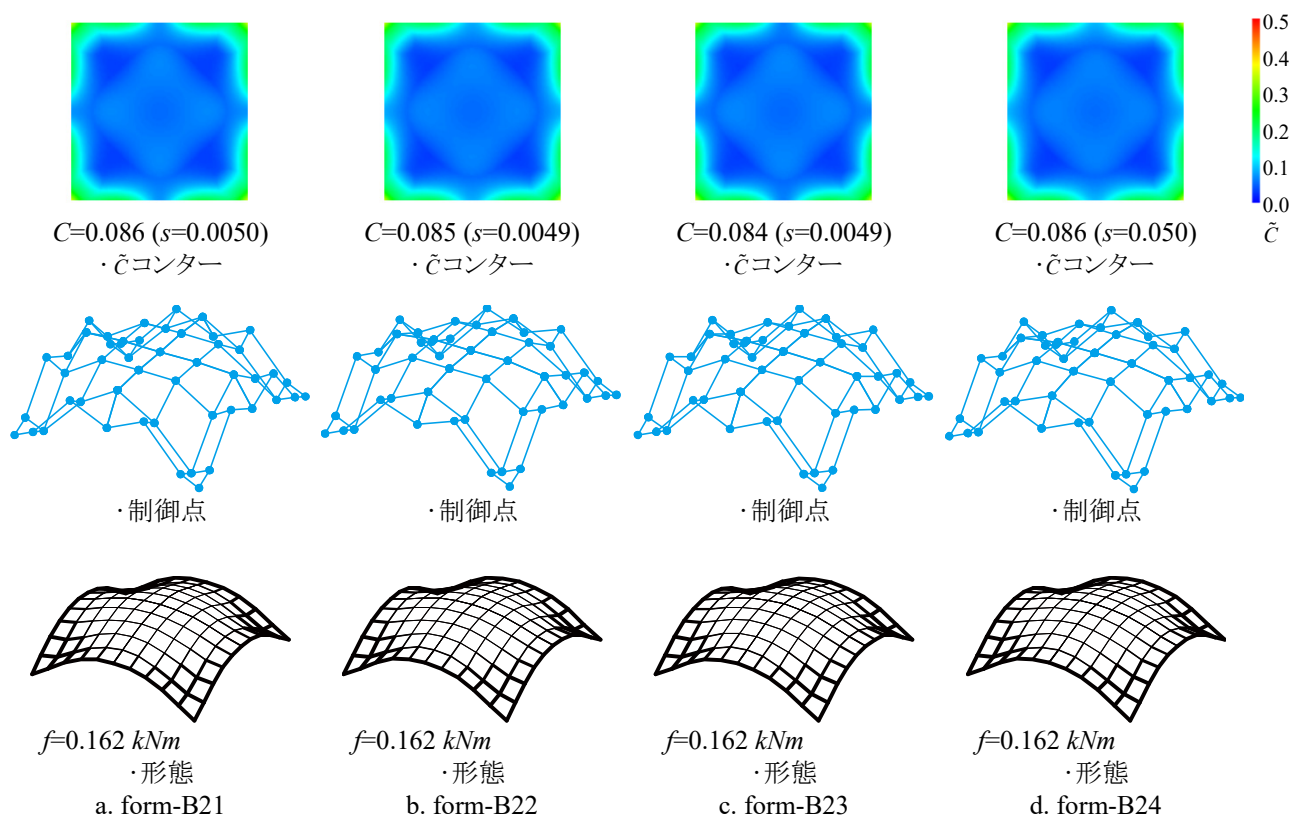
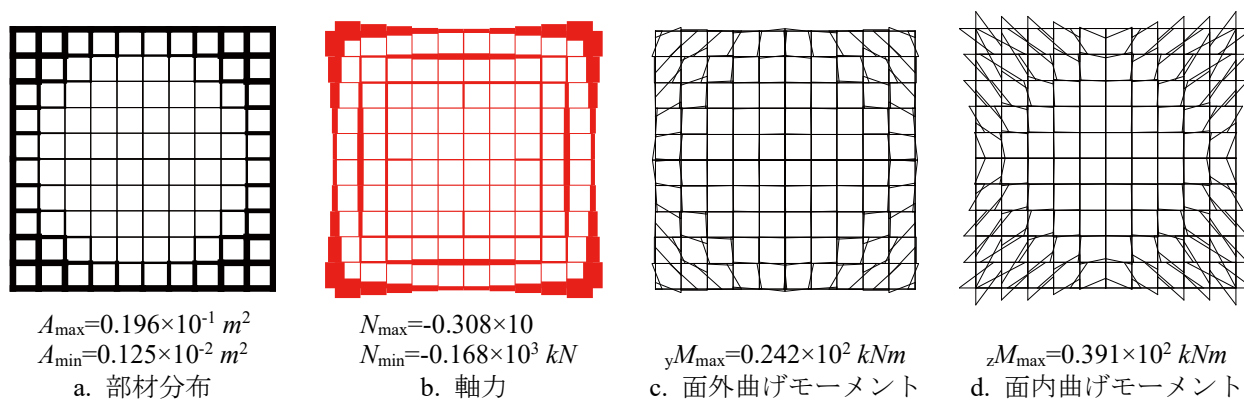
図 5.59 優良解形態例 result-b15 ( $m_{uv}=6, H=0.01$ )

図 5.60 form-B21 の力学性状

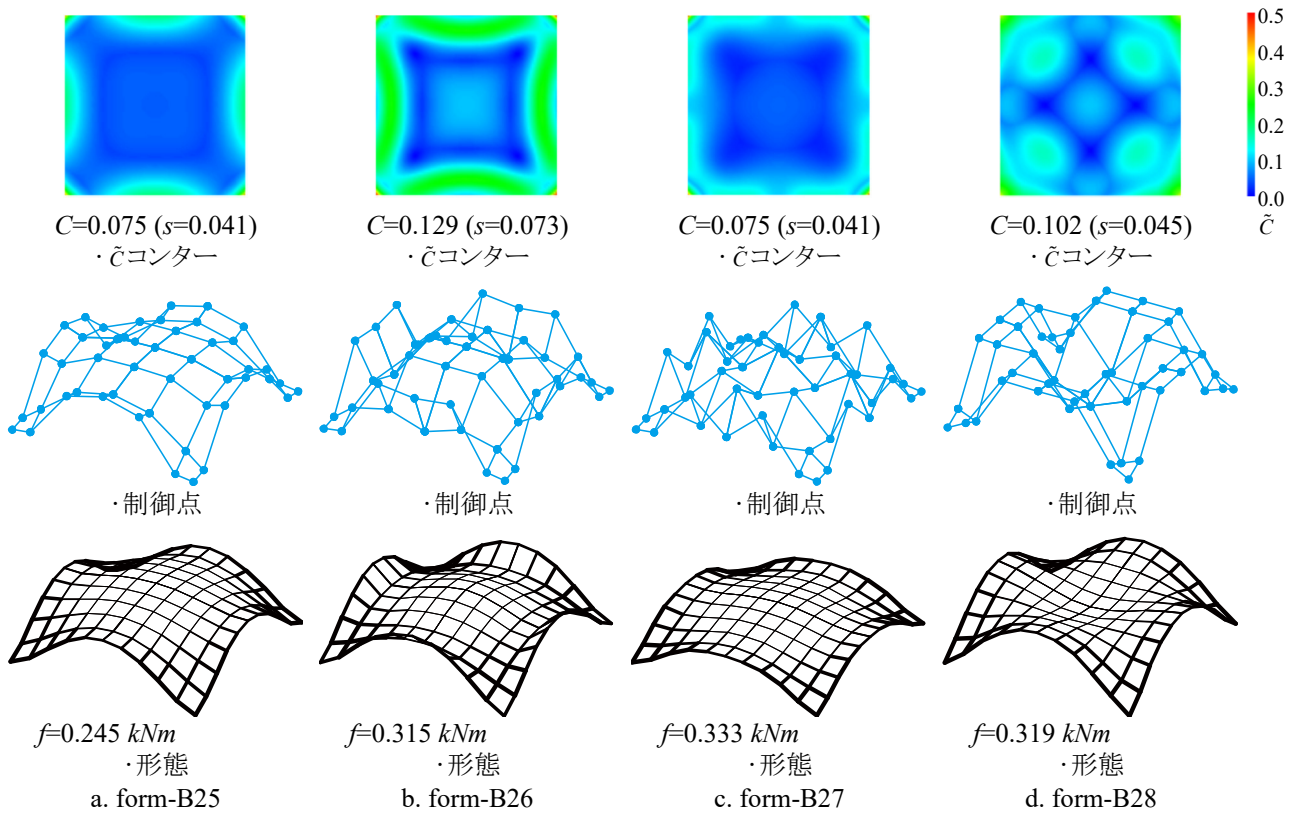


図 5.61 優良解形態例 result-b29 ( $m_{uv}=6, H=0.1$ )

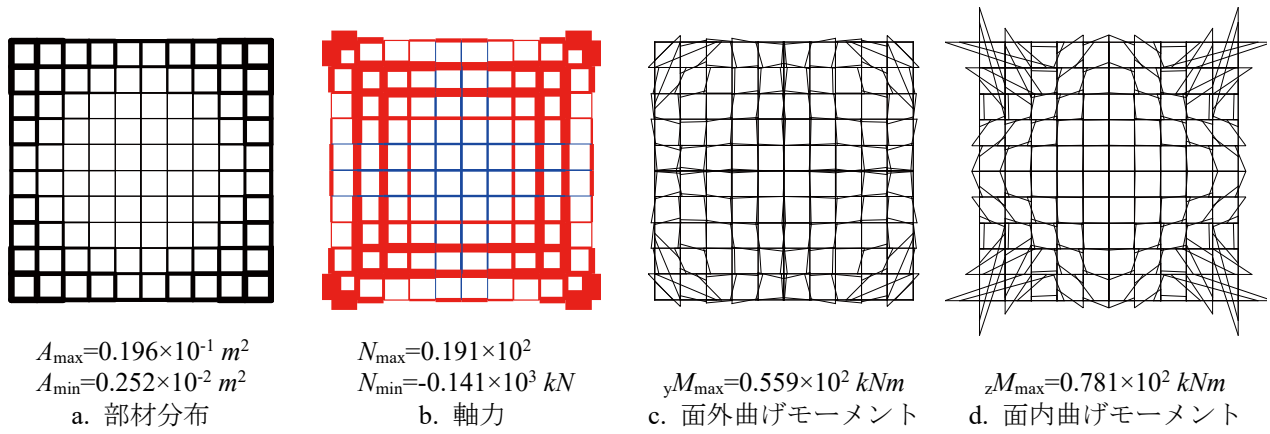
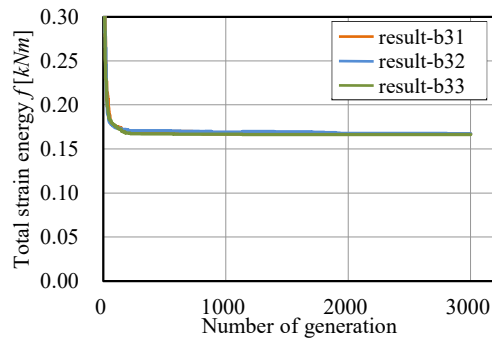
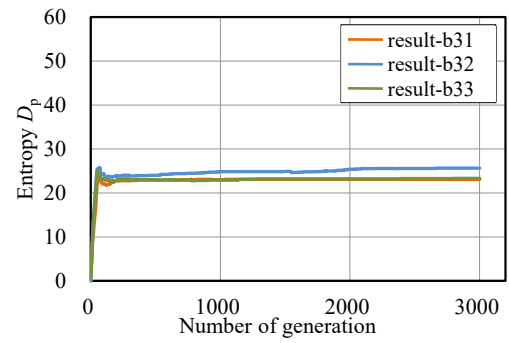
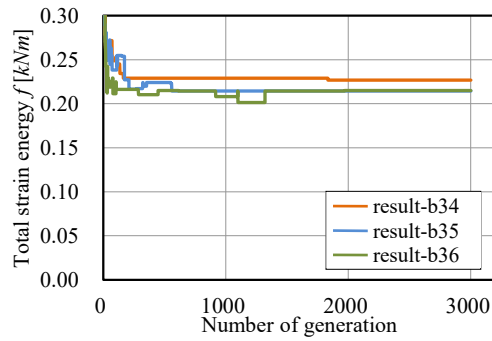
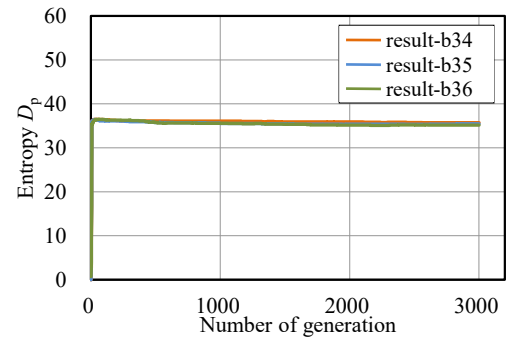


図 5.62 form-B28 の力学性状



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.63 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.64 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.1$

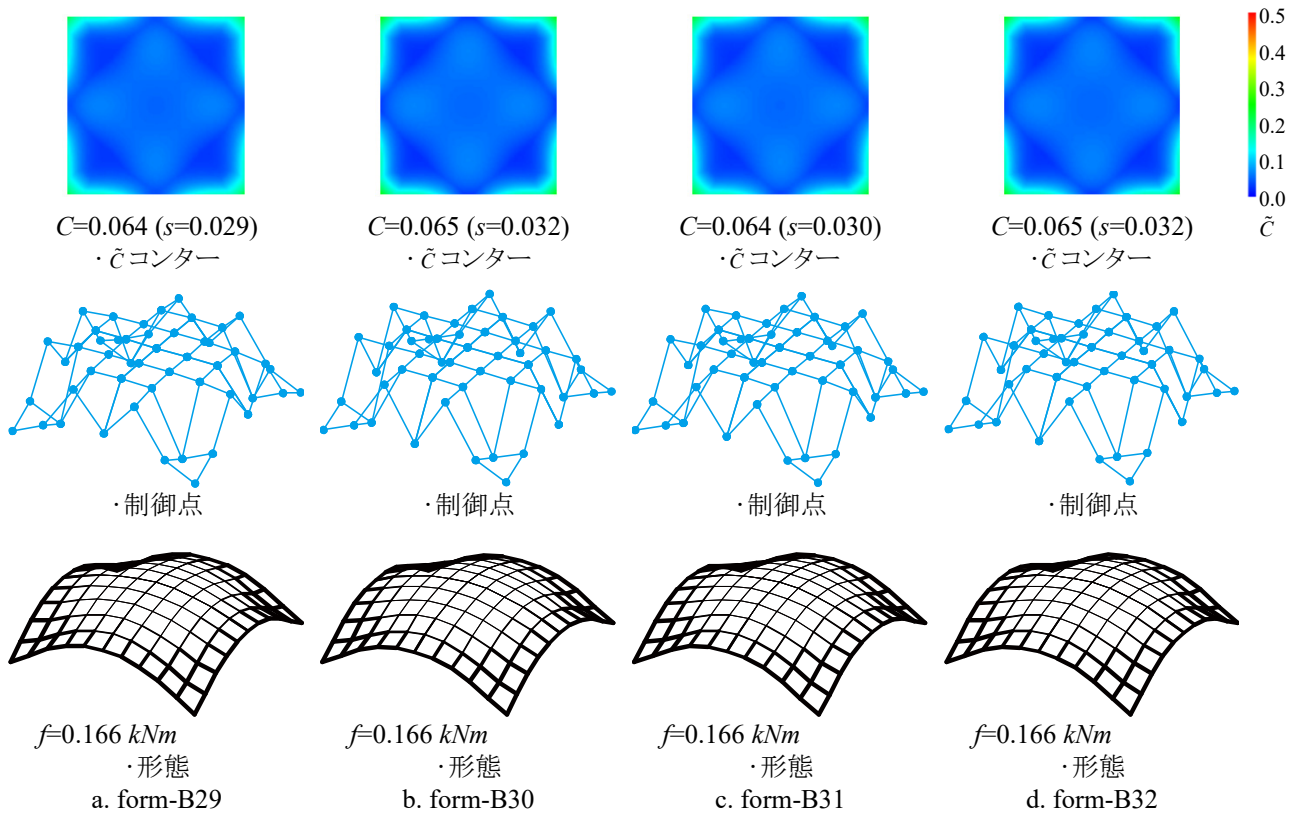


図 5.65 優良解形態例 result-b15 ( $m_{uv}=7, H=0.01$ )

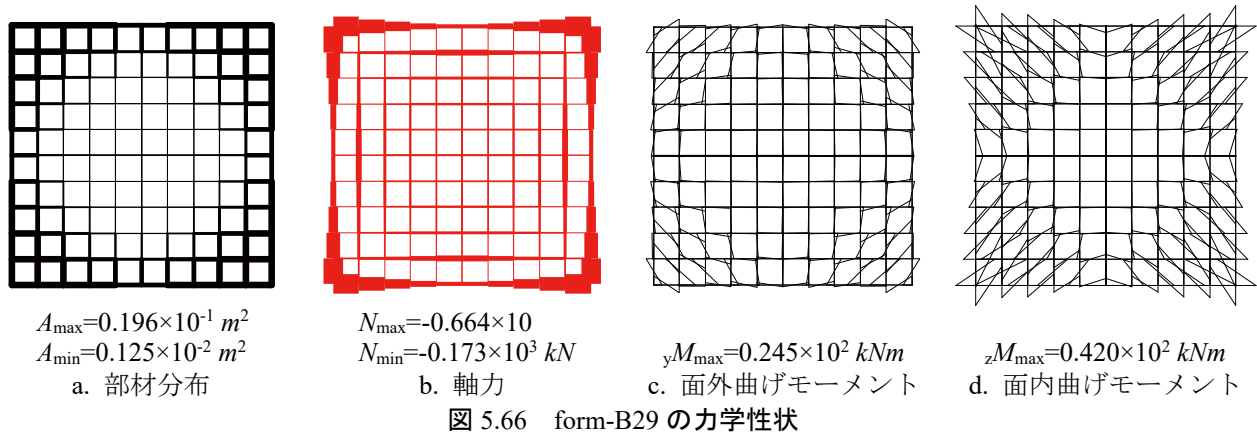
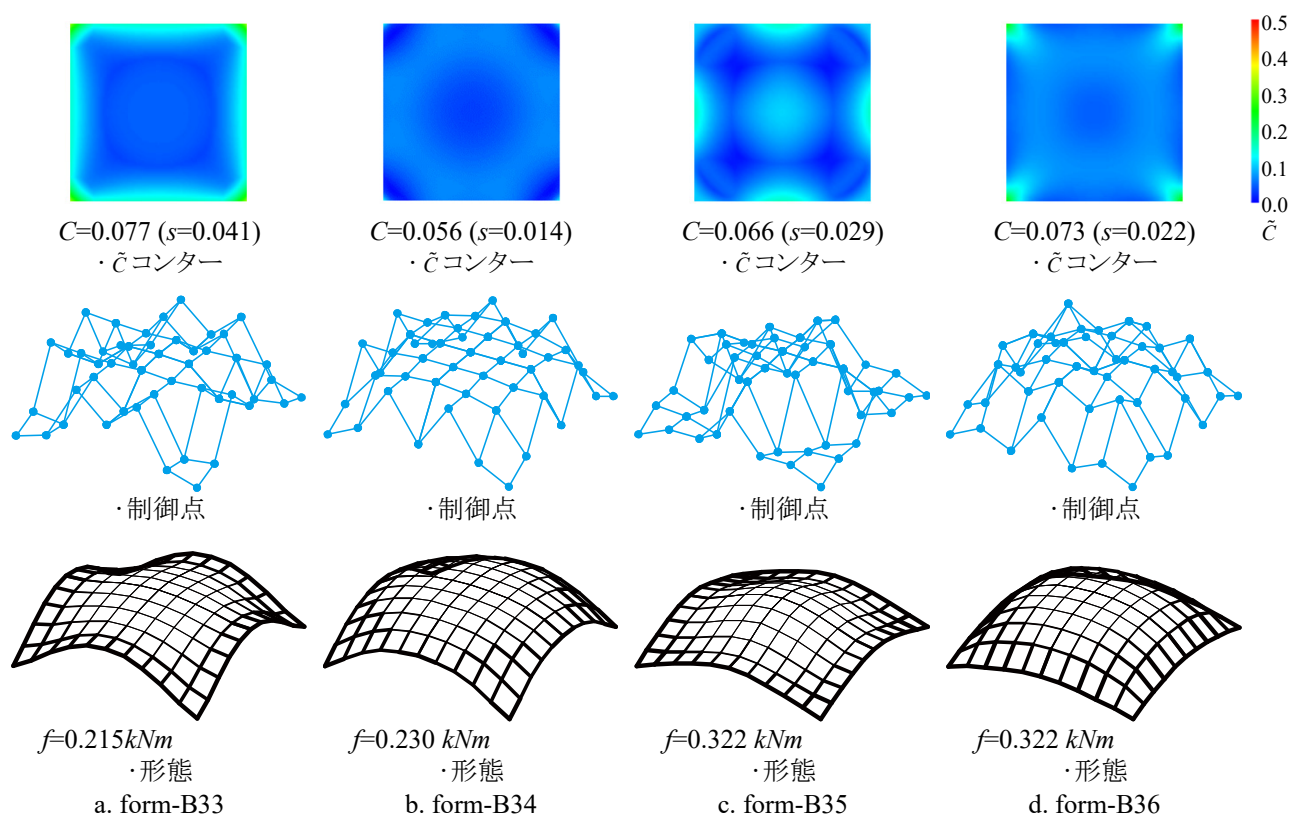
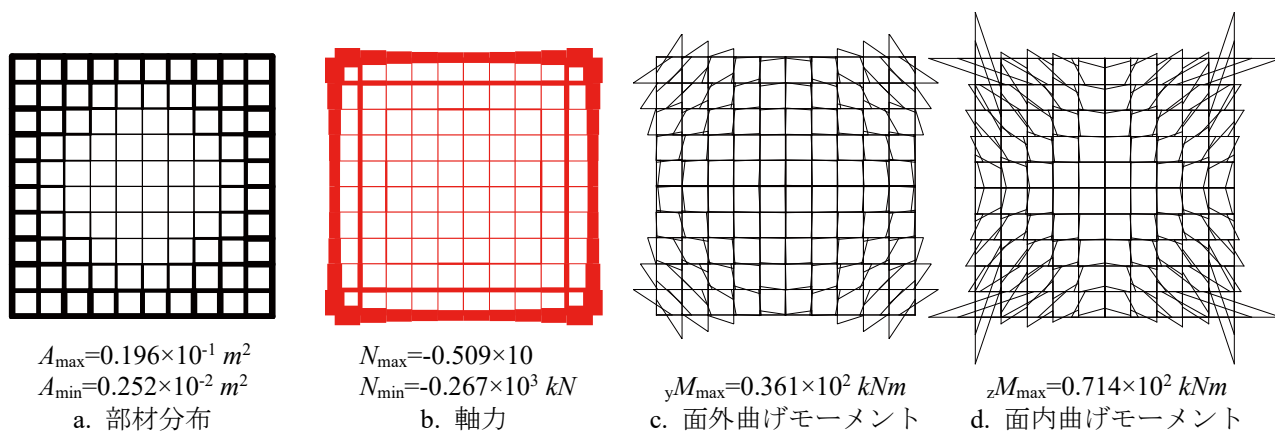


図 5.66 form-B29 の力学性状

図 5.67 優良解形態例 result-b36 ( $m_{uv}=7$ ,  $H=0.1$ )図 5.68 form-B36 の力学性状 result-b36 ( $m_{uv}=7$ ,  $H=0.1$ )

### 5.2.4 考察

Model-A と同様、 $H = 0.01$  のとき目的関数値の収束状況と得られる解形態は SGA に対応する。1000 世代にはほぼ収束値に達し、その後は収束値を維持する。 $H = 0.01$  の設定における多様度指数  $D_p$  は、 $H = 0.1$  と比較して低い値で変動が少なく、多様性を重視しない探索が行われる。記憶細胞内個体の解形態は多様性が低く、大域的最適解を含むその付近の解を探索した結果である。 $H = 0.1$  とすると目的関数値が探索中に変動し、収束値にばらつきが生じる。また、 $D_p$  の値は試行ごとで比較的大きな値に安定して収束し、収束値は Model-A と同程度であった。ISGA がエリート戦略を採っておらず、解の多様性に従って記憶細胞を更新するためである。 $H = 0.1$  のとき、どの  $m_{uv}$  においても目的関数値の変動が最も大きいことから、本モデルの総ひずみエネルギー最小化は、峰の数が少ない解空間を有していると考えられる。得られた優良解には、form-B11, -B12 (図 5.49 c, d), form-B17, -B18 (図 5.55 b, c) のように、一度の試行で目的関数値がほぼ同値であるにもかかわらず形状が大きく異なる解を得た。これは ISGA が設計変数空間の多様性を維持した結果である。

多様性を重視した結果( $H = 0.1$ )において、 $m_{uv} = 4, 5$  に設定した優良解には form-B10 ( $m_{uv} = 4$ )および form-B18 ( $m_{uv} = 5$ )のように強く湾曲する形状、または form-B9 ( $m_{uv} = 4$ )および form-B19 ( $m_{uv} = 5$ )のように境界部がめくれ上がる形状が含まれる。これらの  $C$  の値は比較的大きく( $C = 0.149 \sim 0.168$ )、数値的にも強く湾曲した形状であることが示されている。また、強く湾曲する形状と同時に form-B12, B17 のような  $C < 0.10$  の滑らかな形状も含まれている。 $m_{uv} = 4, 5$  に設定することで形状のバリエーションに富んだ結果を得た。一方  $m_{uv} = 6, 7$  に設定すると強く湾曲する形態を得ることがなく、特に、 $m_{uv} = 7$  で  $C \geq 0.10$  の形態はほとんど得られない。 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなる。さらに形状のバリエーションは  $m_{uv} = 4, 5$  の結果と比較すると少ない。これは、階数を大きく設定することで各制御点の影響力が弱まり、影響範囲が広がるためである。つまり、局所制御性が低いため形状表現の自由度が抑制される。例えば、 $m_{uv} = 6$  で得られた form-B27 (図 5.61 c)における制御点は、乱雑な配置であるにもかかわらず、 $C=0.075$  の滑らかな形状である。form-B12, -B17, -B35, -B36 のような、外周部アーチライズが低く中央が膨らむ形態が Model-A より多く得られる傾向がある。これは、軸力抵抗機構が対角上に形成されにくく、外周部アーチに頼る形態が評価が高くなるためと考える。

力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。この結果は、ISGA の探索において形状の設計変数のみ多様性を考慮し、部材選択に関する設計変数の多様性を考慮していない結果である。Model-A の結果と比較すると、部材間隔が荒いため、多様性を重視しない場合でも曲げモーメントが大きい。例えば form-A5 (図 5.14)に対し form-B5 (図 5.48)は、面外・面内曲げモーメントが共に 1.66 倍であった。

### 5.3 対角状配置モデルのひずみエネルギー最小化(Model-C)

本節では対角状に部材を配置した鉄骨グリッドシェル of 総ひずみエネルギー最小化を目標とした単一目的最適化問題を扱う。

#### 5.3.1 解析モデル

解析モデルは、図 5.69 に示す、隅角部ピン支持とした一辺が  $20\text{ m}$  の正方形平板を基準形状とする。図 5.69b のハッチ部に示す対称性を考慮した 1/4 領域(節点数: 61, 要素数: 110)を解析対象とする。载荷条件は長期に自重  $78.5\text{ kN/m}^3$  と等分布荷重  $1.0\text{ kN/m}^2$  を設定する。グリッドシェルの材料は、表 3.1 に示す 20 種類の一般構造用炭素鋼管(STK400)とする。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (5-9)$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (5-10)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (5-11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (5-12)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル( $= [A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル( $= [R_k]$ ),  $f$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $\mathbf{d}$ : 節点変位ベクトル,  $\mathbf{K}$ : 剛性マトリクス,  $R_j^L = 0.0\text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0\text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.0\text{ m}$ ,  $A_j^U = 20.0\text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(5-12)は長期荷重に対する許容応力度設計による応力制約条件であり、鋼材の基準強度は  $235\text{ N/mm}^2$ 、ヤング係数は  $2.1 \times 10^8\text{ kN/m}^2$ 、せん断弾性係数は  $7.8 \times 10^7\text{ kN/m}^2$  である。解析パラメータは表 5.3 のように設定する。

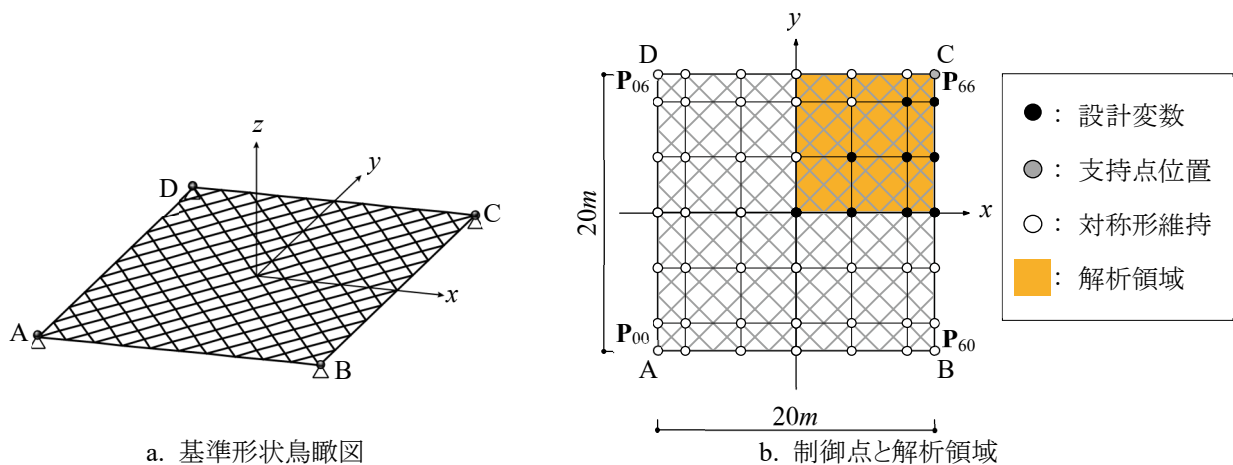


図 5.69 解析モデル

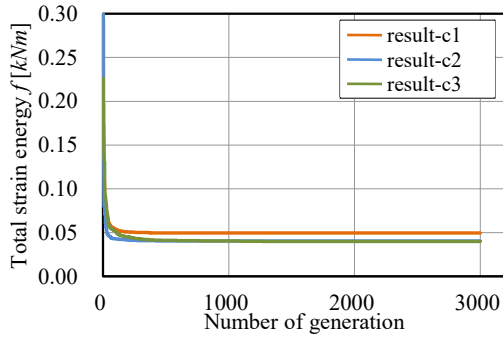
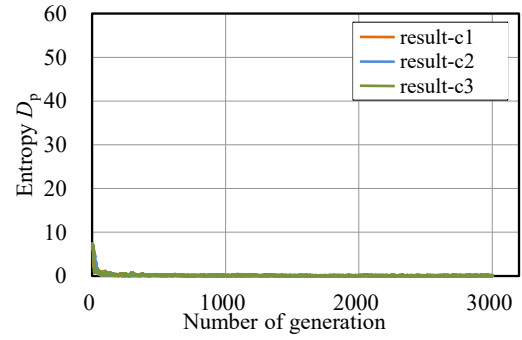
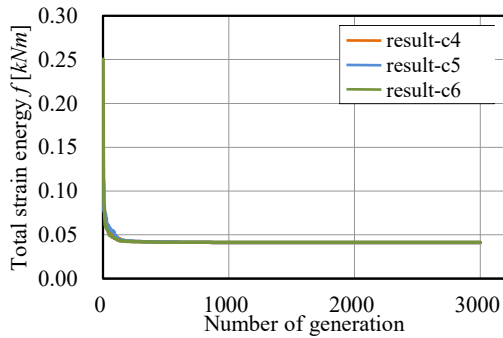
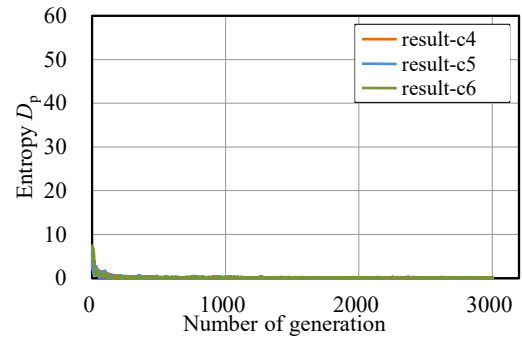
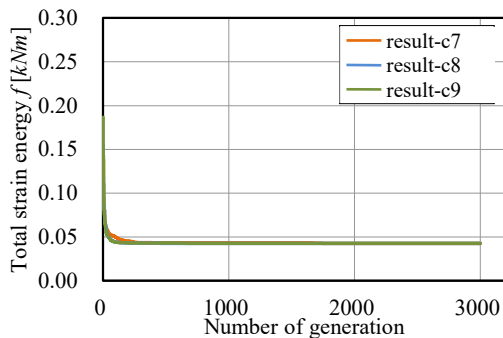
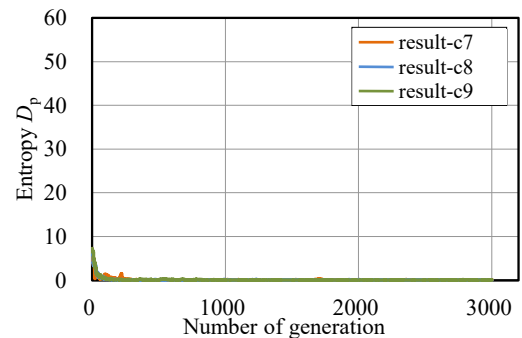
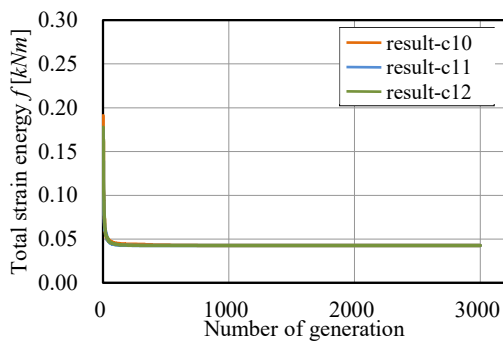
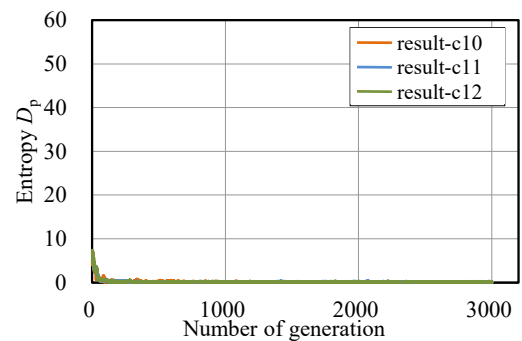
表 5.3 GA パラメータ (ISGA, SGA)

世代数	3000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
A の遺伝子長	$10 \times 16 \text{ bit}$
R の遺伝子長	$9 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

### 5.3.2 SGA による数値結果

SGA による数値結果を図 5.70 - 5.78 に示す。図 5.70 - 5.73 は、SGA により得られた各階数設定 3 試行における解の収束状況であり、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。図 5.74 は、各試行で得られた解形態の  $\tilde{c}$  コンター図、制御点、形態鳥瞰図を示す。得られた解形態の力学性状を図 5.75 - 5.78 に示す(a: 部材分布, b: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外( $y$  軸まわり)曲げモーメント, d: 面内( $z$  軸まわり)曲げモーメント)。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\tilde{c}$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  $yM_{\max} \cdot zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメントである。

図 5.70 - 5.73 より、SGA は各  $m_{uv}$  設定値で試行回数によらずほぼ同じ解形態を捉える目的関数値は 200 世代程度で収束し、その後大きな変化がない。したがって、得られた解は大域的最適解と判断する。得られた形態は既往研究で報告されている最適形態(カテナリー曲面)に対応している。図 5.74 より、得られた大域的最適解形態の  $\tilde{c}$  コンター図は  $m_{uv}$  設定値で異なる。目的関数値は、 $m_{uv}$  設定値 4 が最も小さく、 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $f$  が大きくなり、 $m_{uv}$  設定値 6 と 7 がほぼ同値である。これらの結果より、大域的最適解形態は  $m_{uv}$  設定値に依存する。図 5.75 - 5.78 より、部材は各応力に従った分布となっており、面内抵抗型の力学特性を有している。特に、対角上の部材に大きな軸力が発生しており、曲げモーメントは Model-A の 14 ~ 32%と比較的小さい応力であった。

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.70 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=4$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.71 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=5$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.72 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=6$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.73 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=7$ )

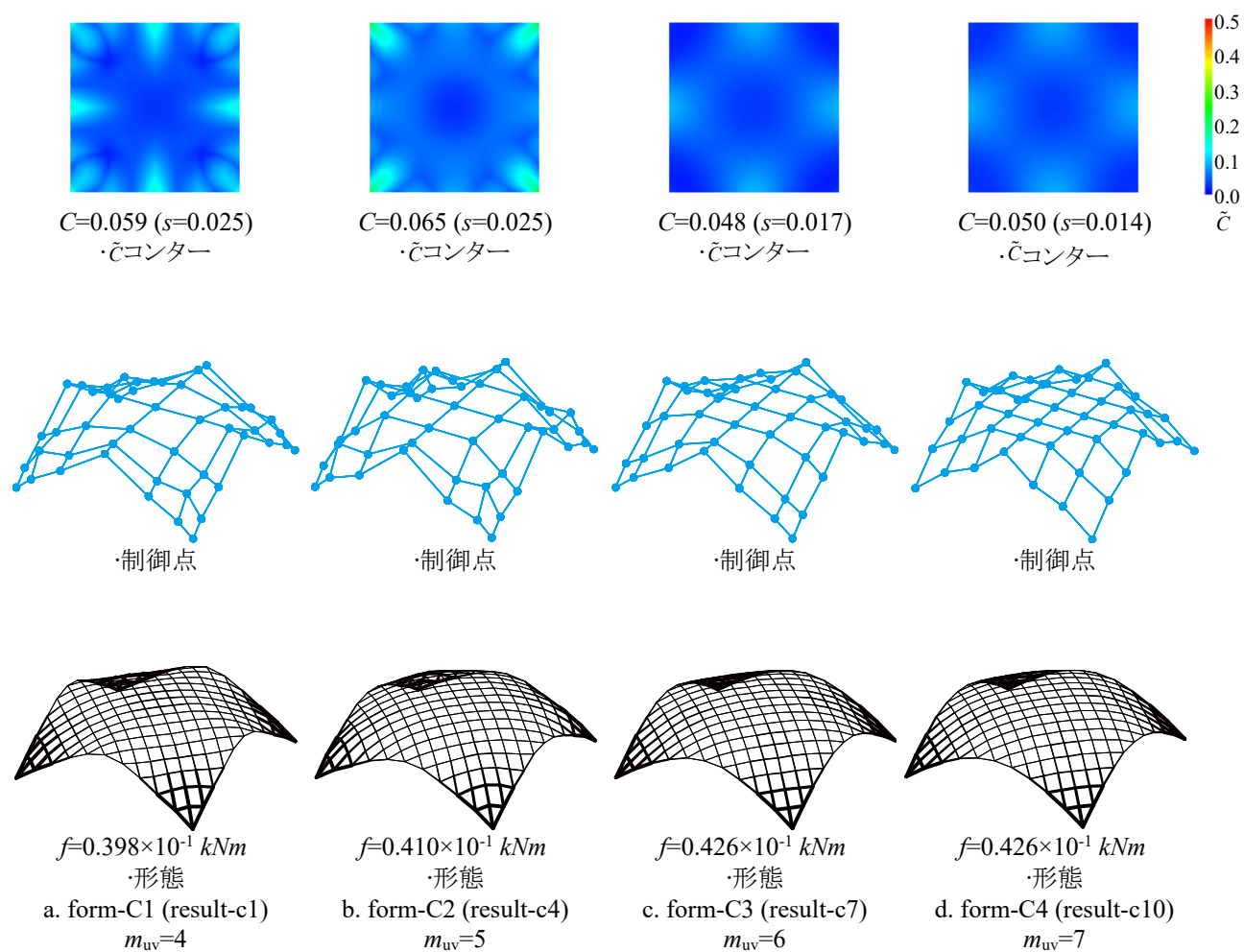
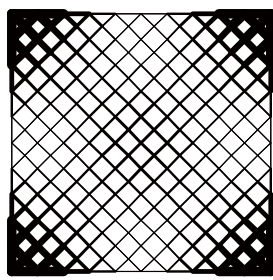


図 5.74 SGA の解形態例

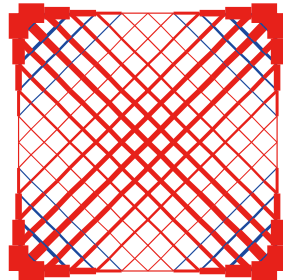




$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.227 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

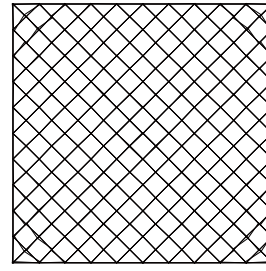
a. 部材分布



$$N_{\max}=0.190 \times 10^2 \text{ kN}$$

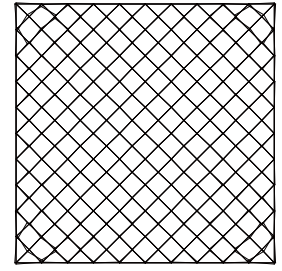
$$N_{\min}=-0.107 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



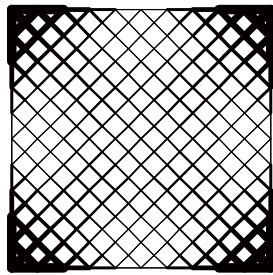
$${}_yM_{\max}=0.441 \times 10 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.398 \times 10 \text{ kNm}$$

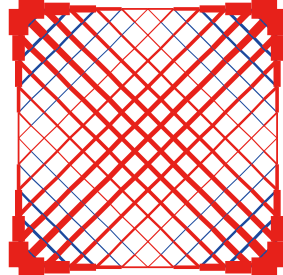
d. 面内曲げモーメント

図 5.75 form-C1 の力学性状 ( $m_{uv}=4$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.227 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

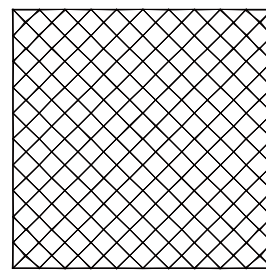
a. 部材分布



$$N_{\max}=0.175 \times 10^2 \text{ kN}$$

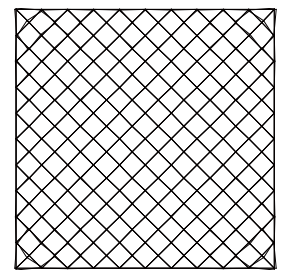
$$N_{\min}=-0.106 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



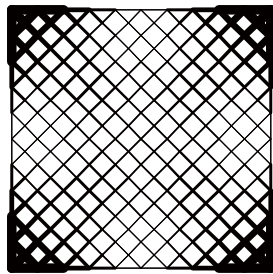
$${}_yM_{\max}=0.203 \times 10 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.473 \times 10 \text{ kNm}$$

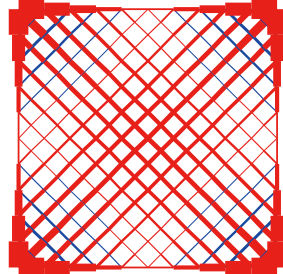
d. 面内曲げモーメント

図 5.76 form-C2 の力学性状 ( $m_{uv}=5$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.227 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

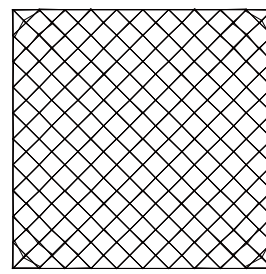
a. 部材分布



$$N_{\max}=0.181 \times 10^2 \text{ kN}$$

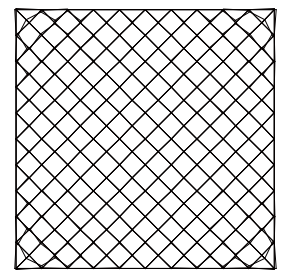
$$N_{\min}=-0.110 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



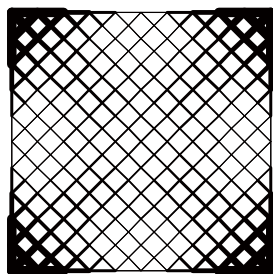
$${}_yM_{\max}=0.475 \times 10 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.631 \times 10 \text{ kNm}$$

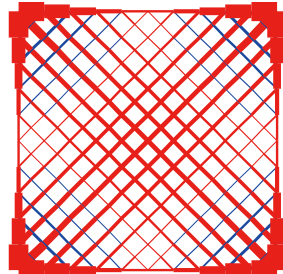
d. 面内曲げモーメント

図 5.77 form-C3 の力学性状 ( $m_{uv}=6$ )

$$A_{\max}=0.196 \times 10^{-1} \text{ m}^2$$

$$A_{\min}=0.227 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

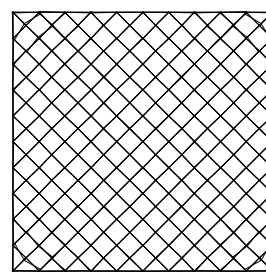
a. 部材分布



$$N_{\max}=0.172 \times 10^2 \text{ kN}$$

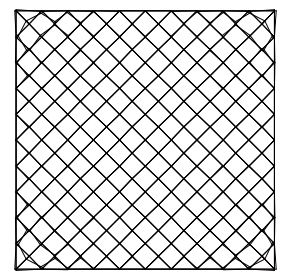
$$N_{\min}=-0.108 \times 10^3 \text{ kN}$$

b. 軸力



$${}_yM_{\max}=0.427 \times 10 \text{ kNm}$$

c. 面外曲げモーメント



$${}_zM_{\max}=0.645 \times 10 \text{ kNm}$$

d. 面内曲げモーメント

図 5.78 form-C4 の力学性状 ( $m_{uv}=7$ )

### 5.3.3 ISGA による数値結果

図 5.79 - 5.102 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果の解の収束状況を図 5.79, 5.80 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.85, 5.86 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.91, 5.92 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.97, 5.98 ( $m_{uv} = 7$ ) に示し、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\hat{c}$  コンター図、制御点、形態鳥瞰図を図 5.81, 5.83 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.87, 5.89 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.93, 5.95 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.99, 5.101 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。各々得られた記憶細胞内の適応度上位 10 個体から抜粋して示す。得られた優良解形態の力学性状 (a: 部材分布, b: 軸力 (青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外 ( $y$  軸まわり) 曲げモーメント, d: 面内 ( $z$  軸まわり) 曲げモーメント) を図 5.82, 5.84 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.88, 5.90 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.94, 5.96 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.100, 5.102 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\hat{c}$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力 (正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。

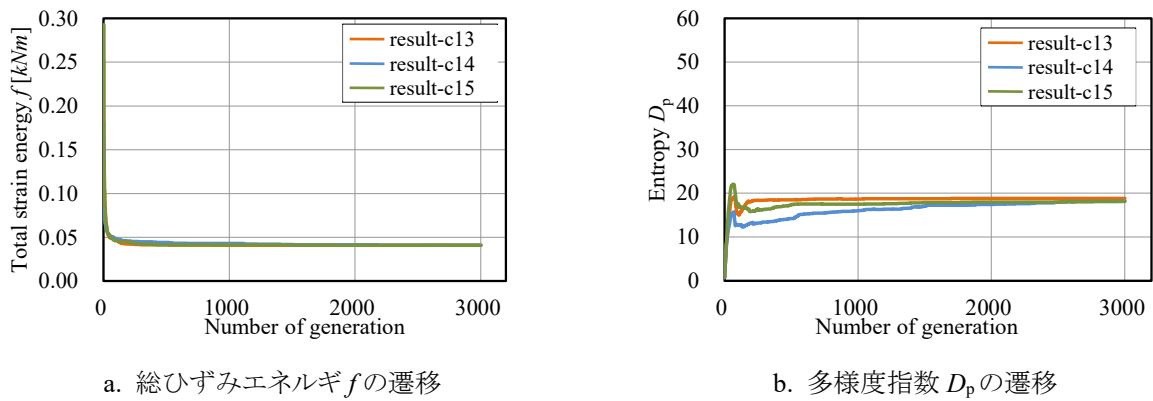


図 5.79 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.01$

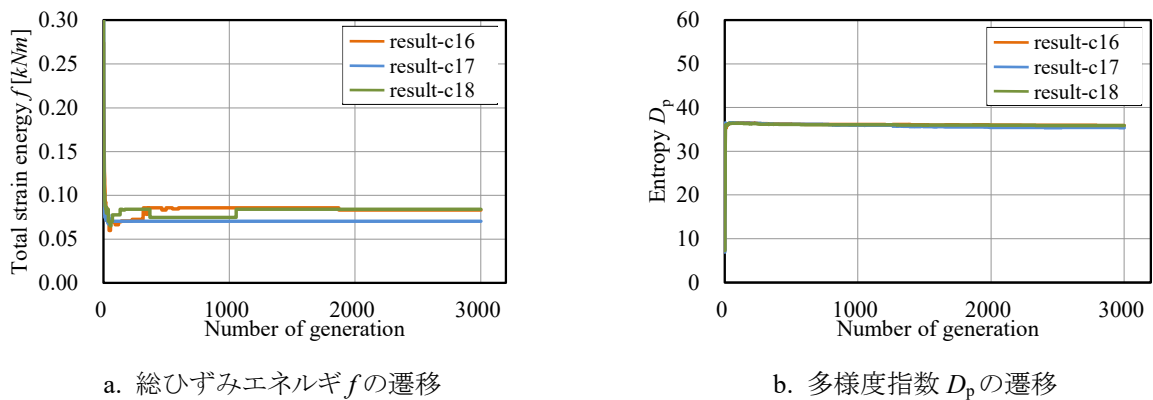


図 5.80 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.1$

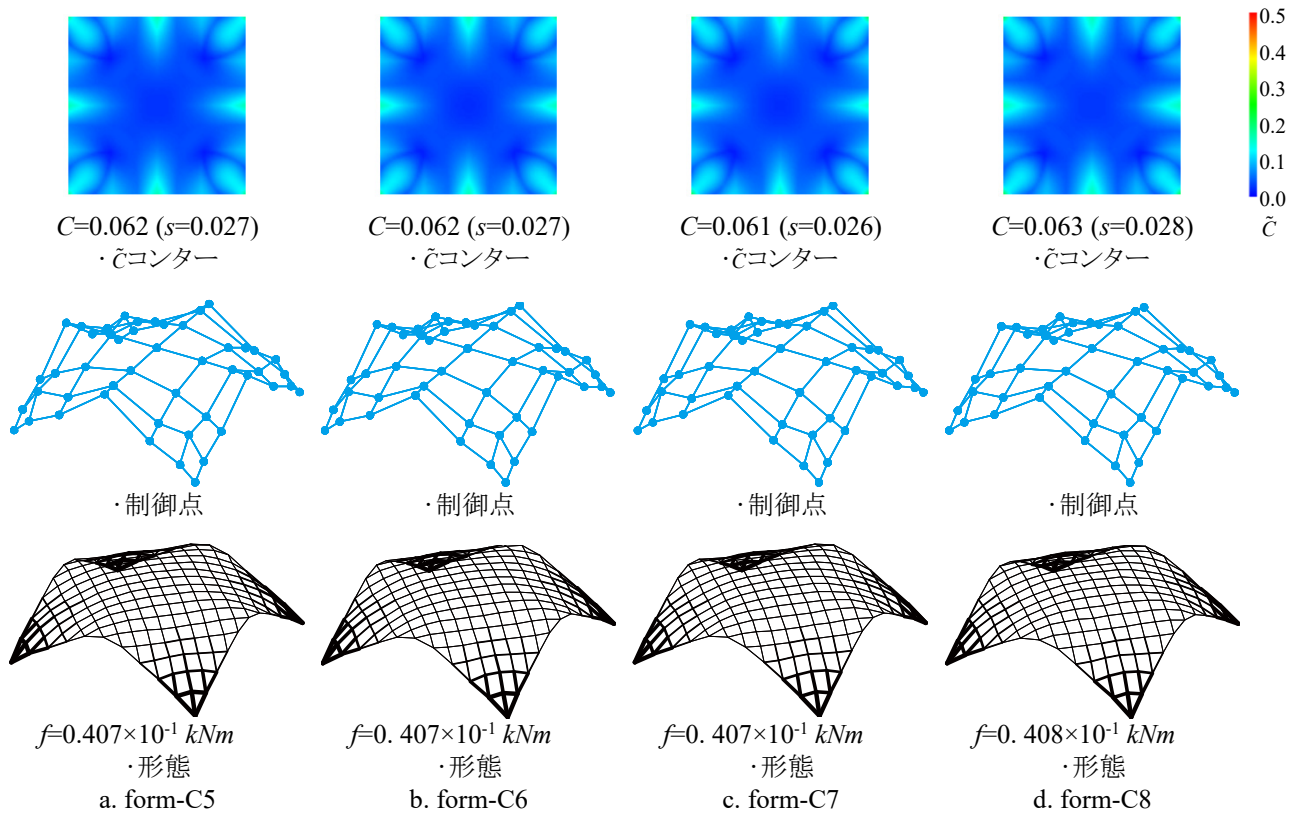
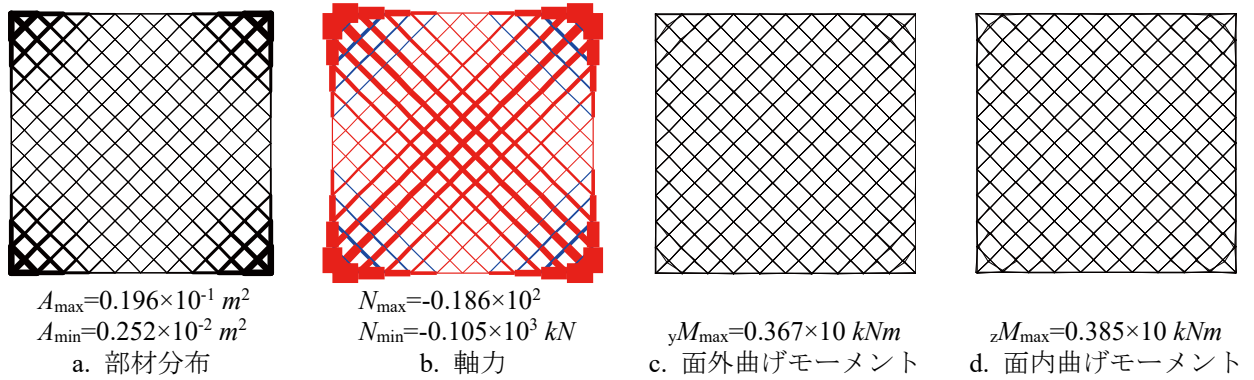

 図 5.81 優良解形態例 result-c15 ( $m_{uv}=4, H=0.01$ )


図 5.82 form-C5 の力学性状

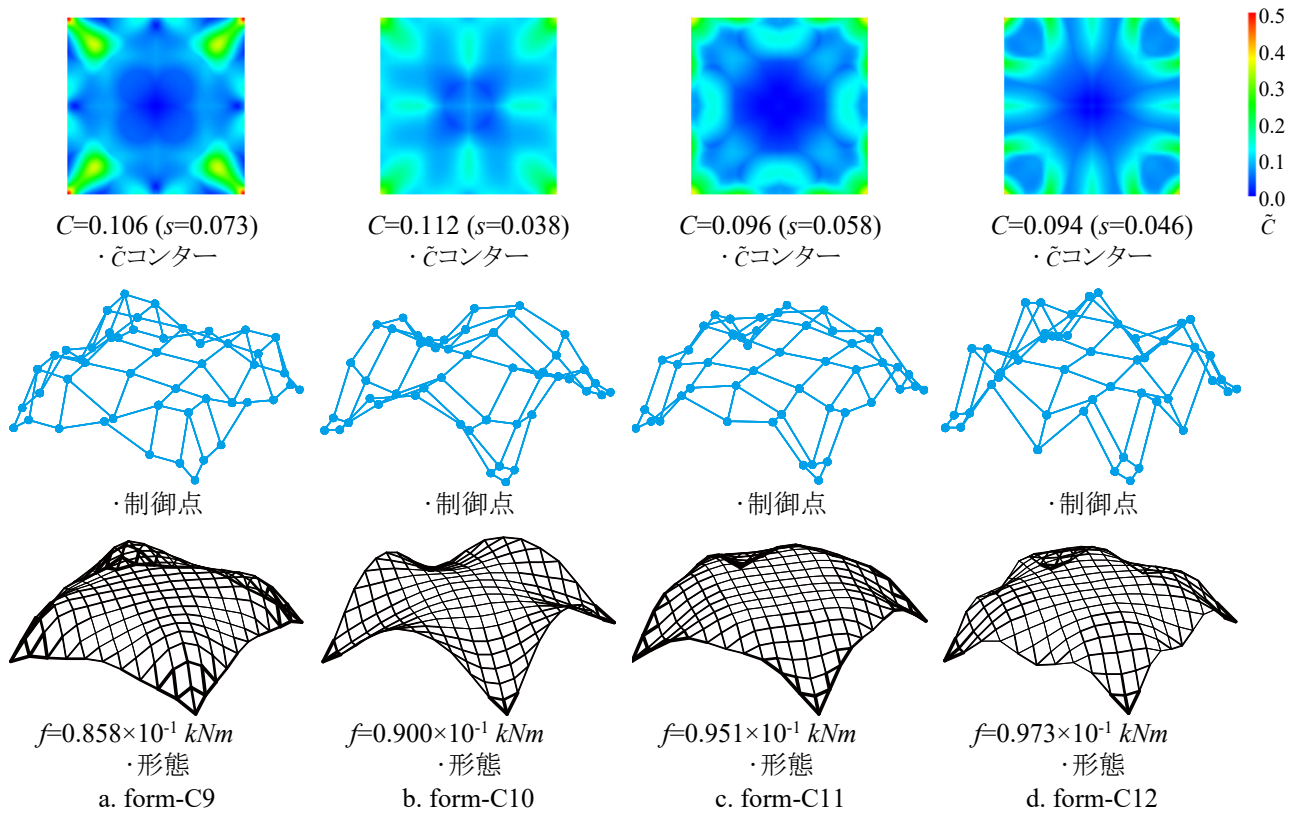


図 5.83 優良解形態例 result-c16 ( $m_{uv}=4, H=0.1$ )

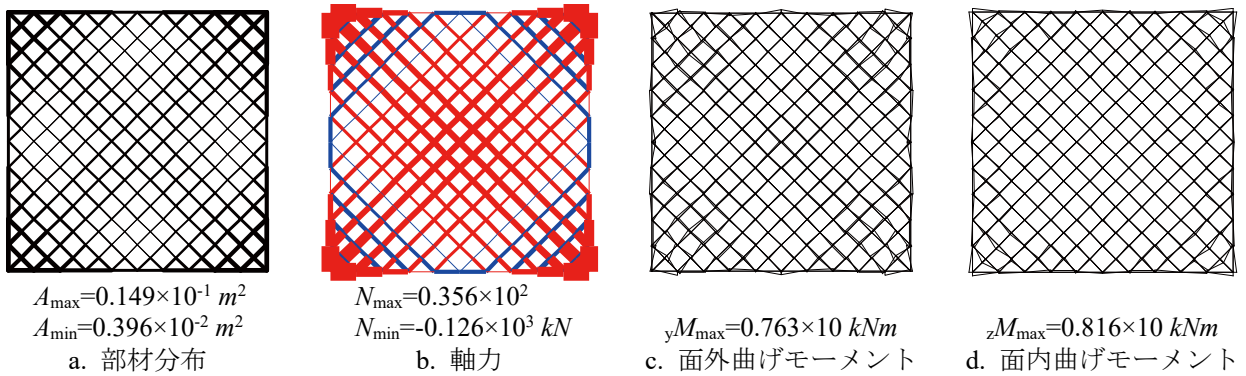
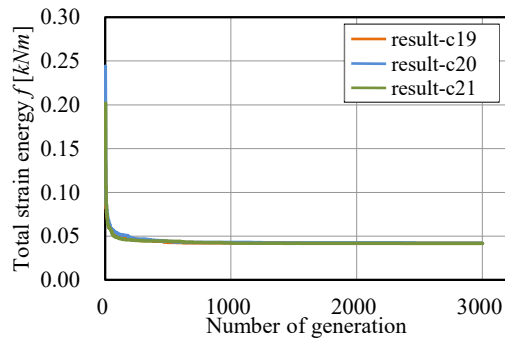
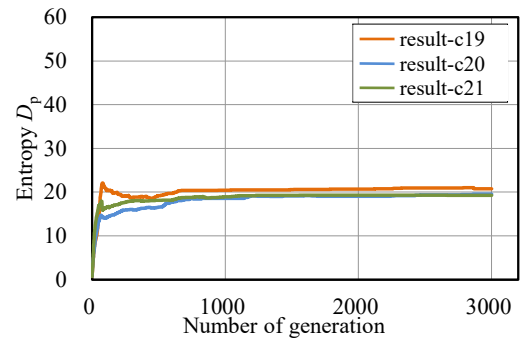
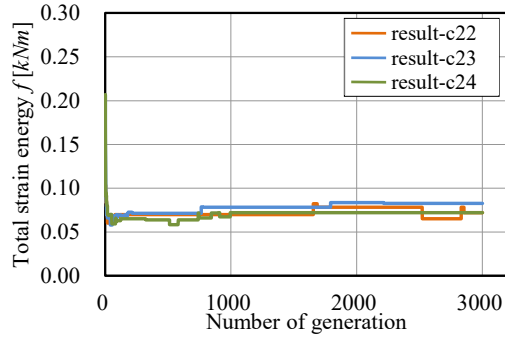
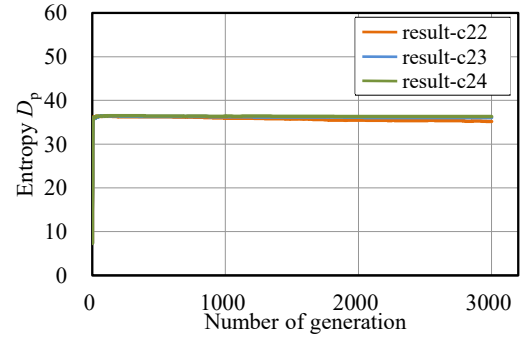


図 5.84 form-C9 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.85 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.86 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.1$

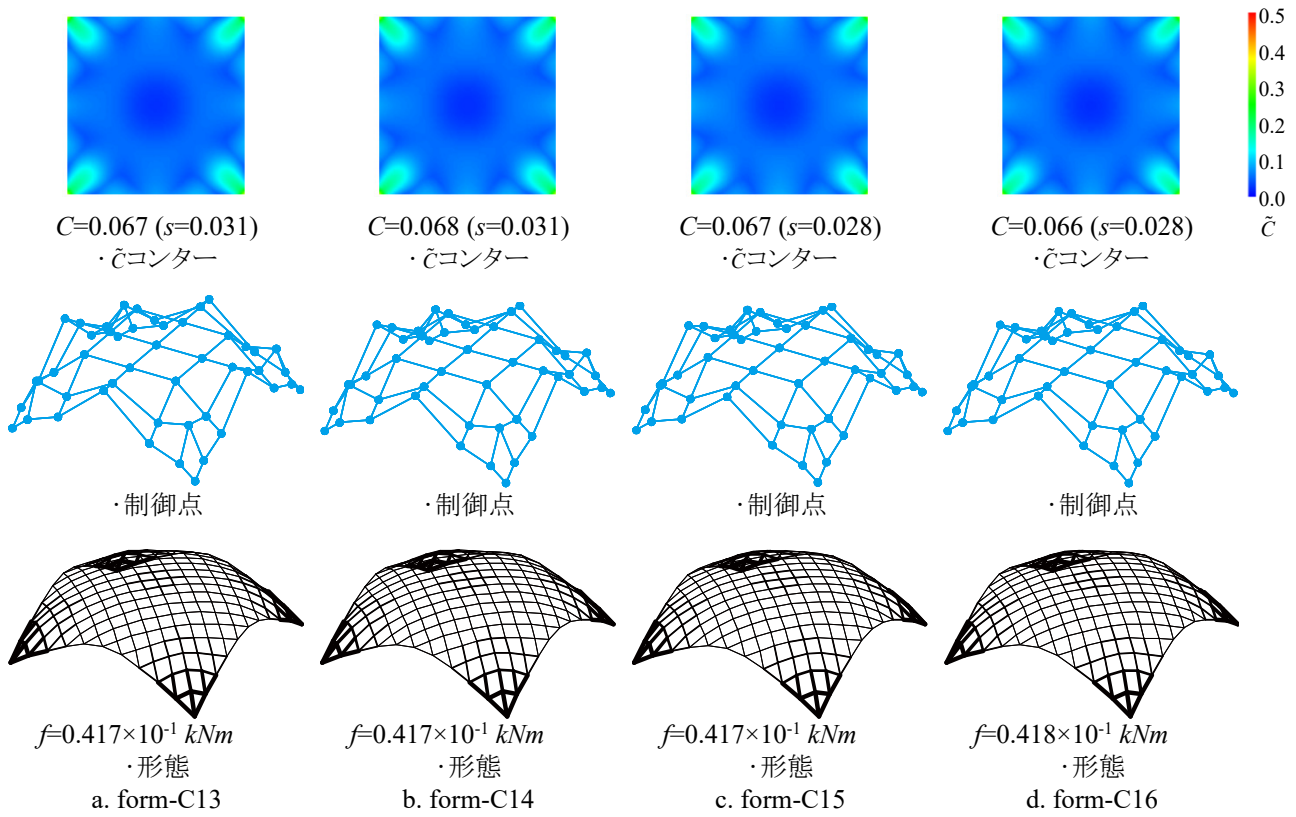


図 5.87 優良解形態例 result-c15 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.01$ )

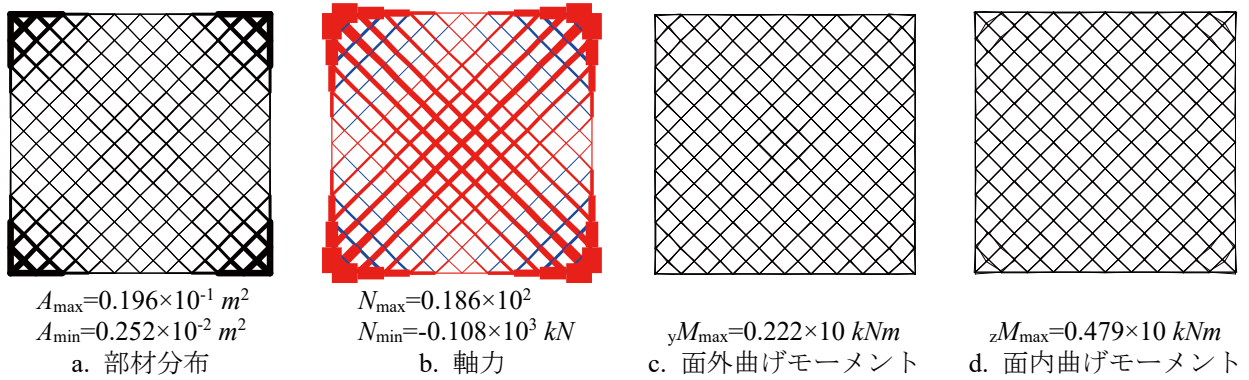


図 5.88 form-C13 の力学性状



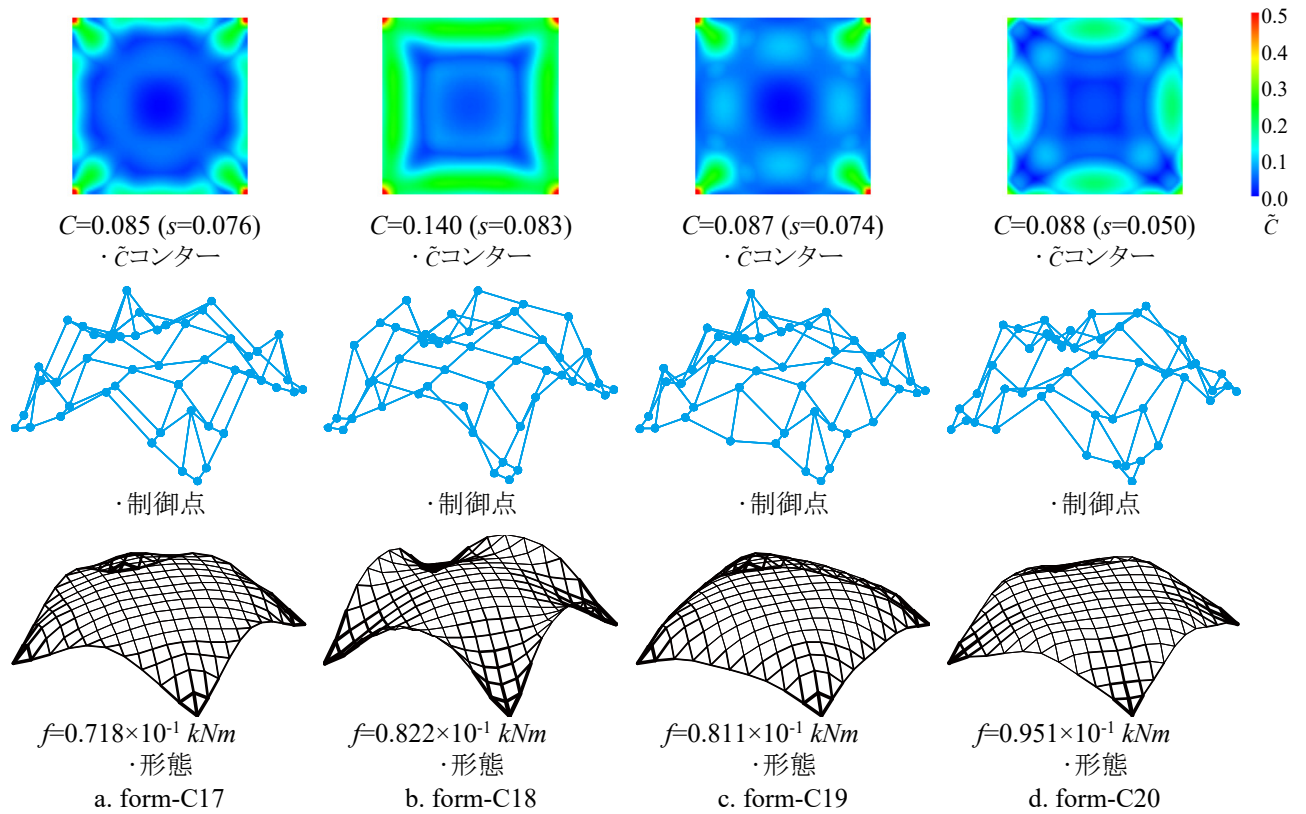
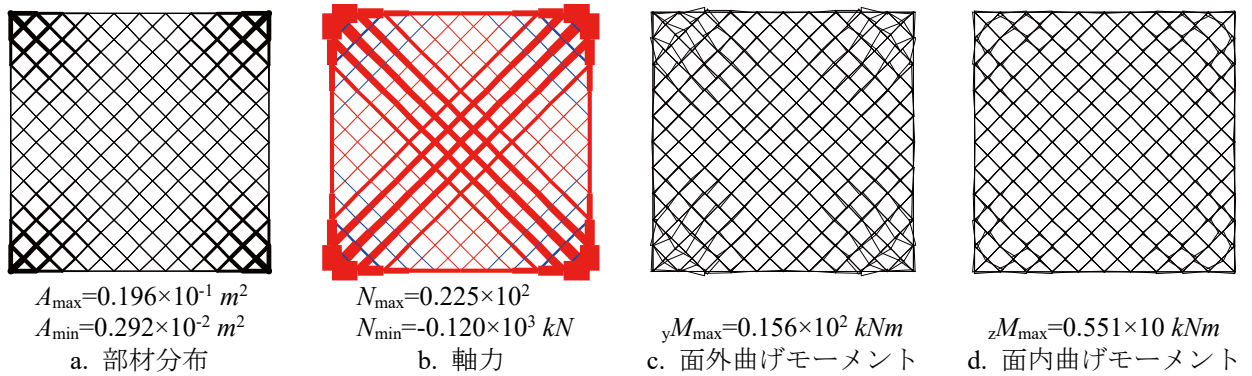
図 5.89 優良解形態例 result-c22 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.1$ )

図 5.90 form-C20 の力学性状

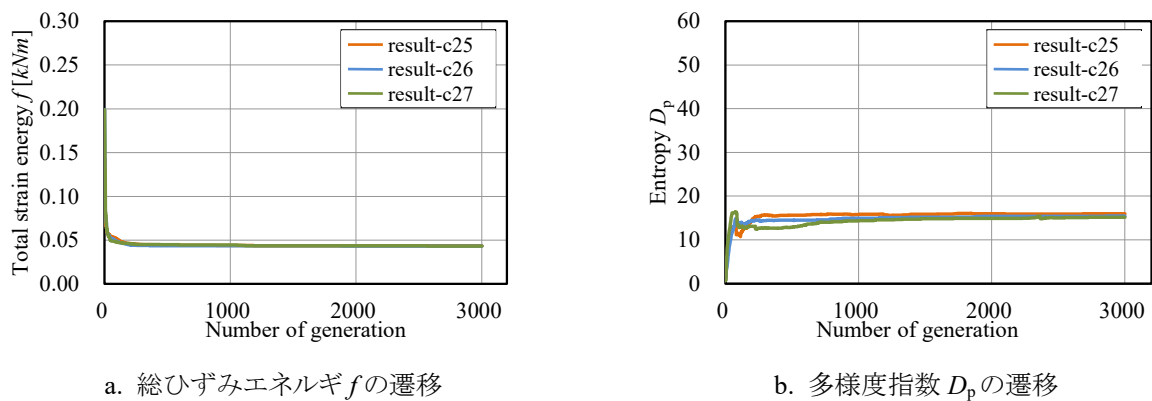


図 5.91 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.01$

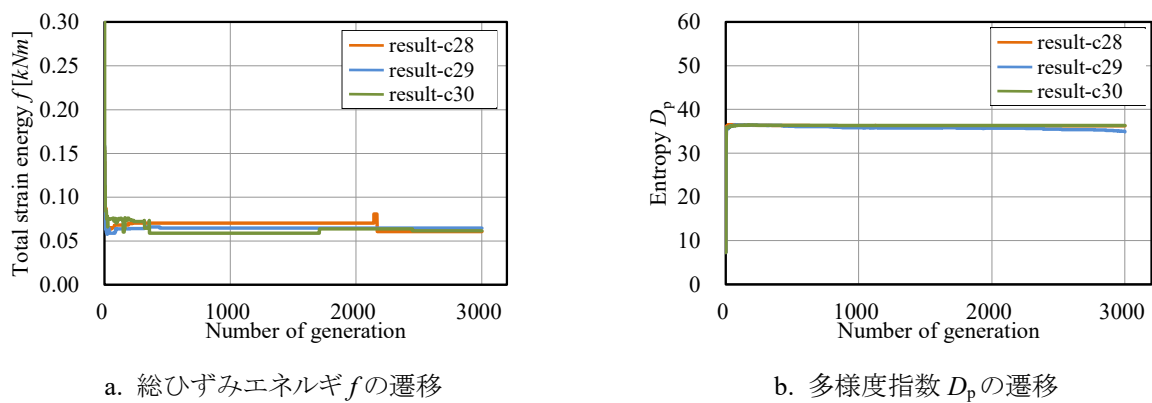


図 5.92 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.1$



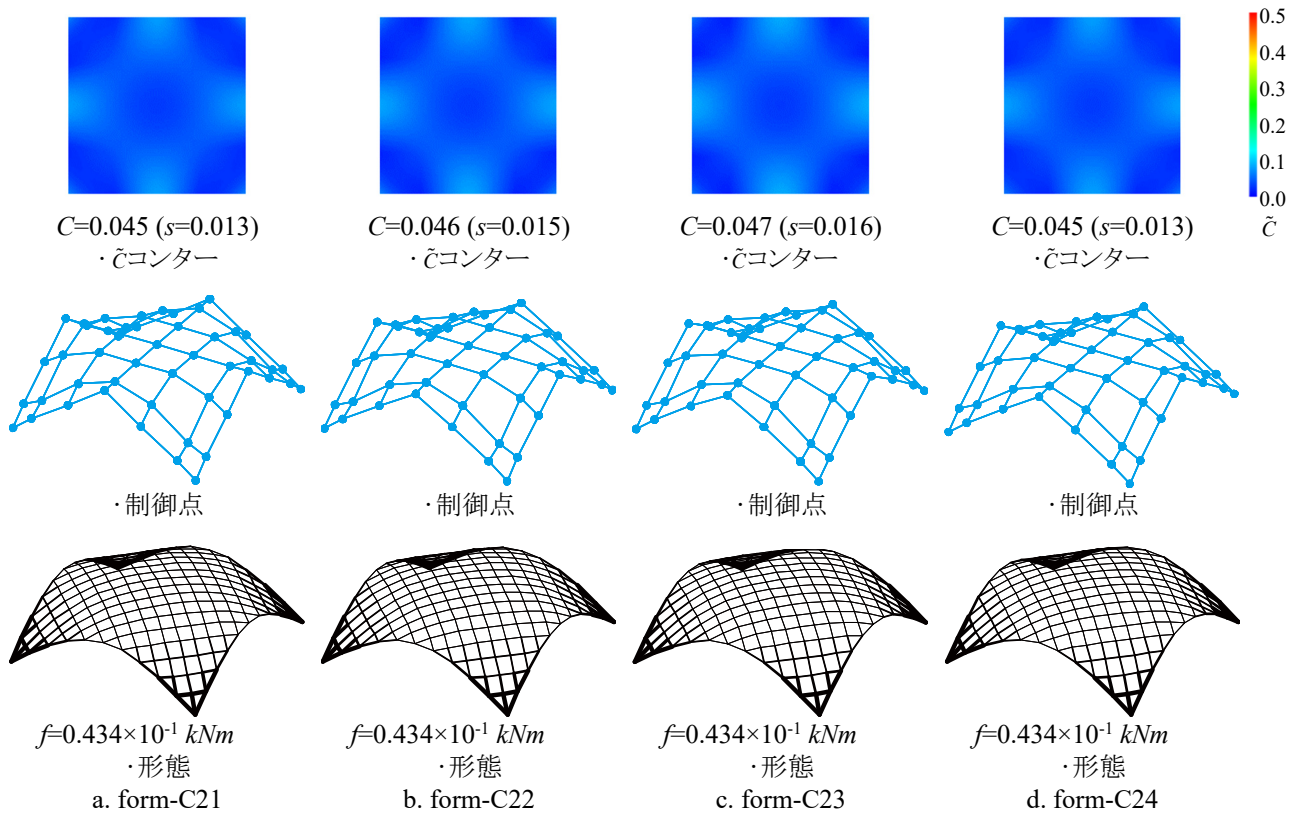


図 5.93 優良解形態例 result-c15 ( $m_{uv}=6, H=0.01$ )

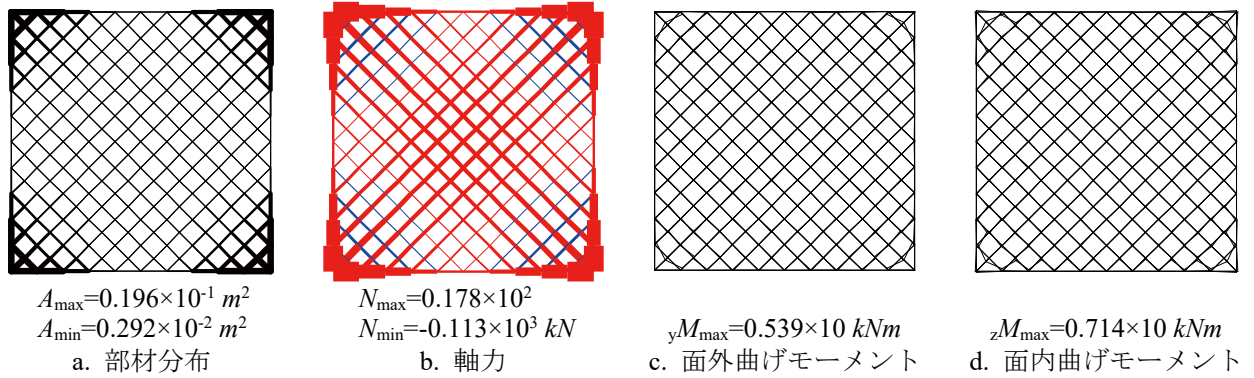


図 5.94 form-C21 の力学性状

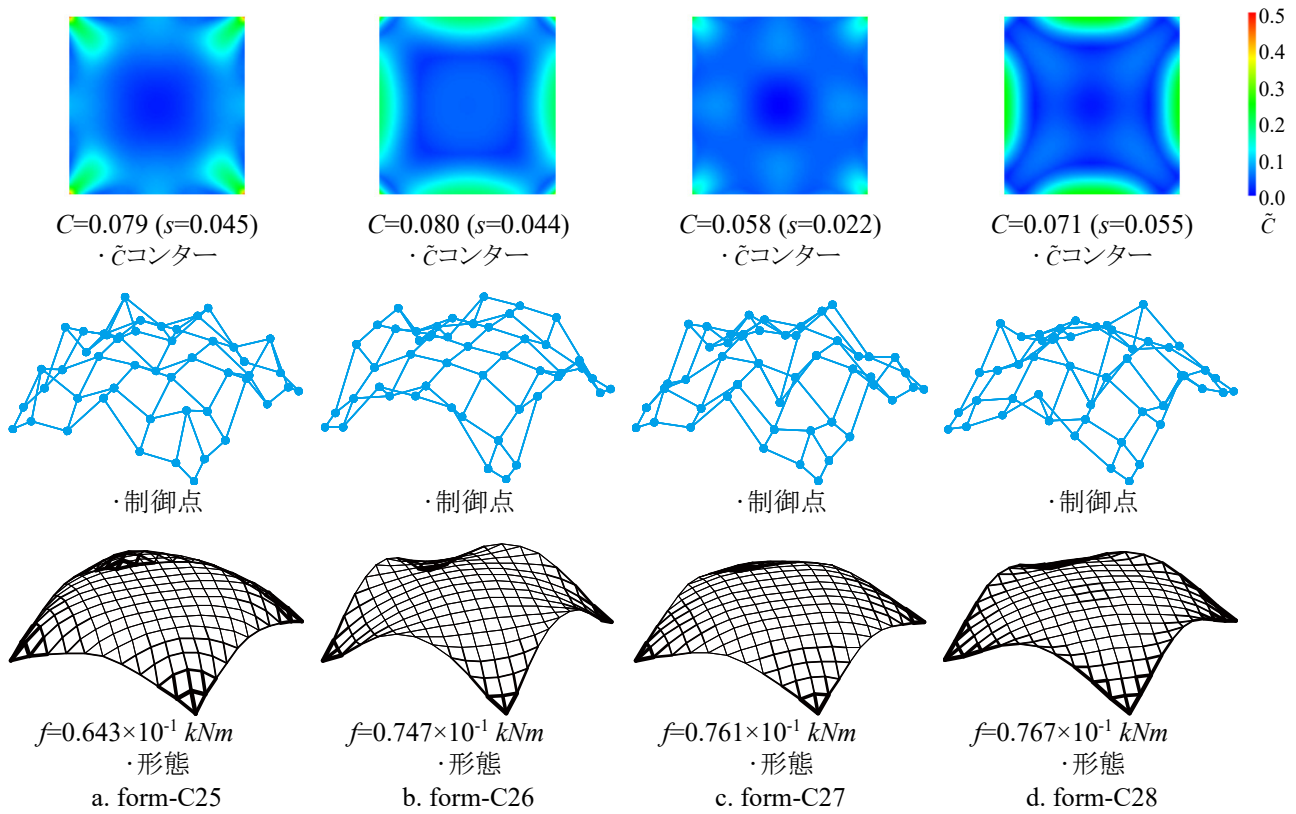


図 5.95 優良解形態例 result-c17 ( $m_{uv}=6, H=0.1$ )

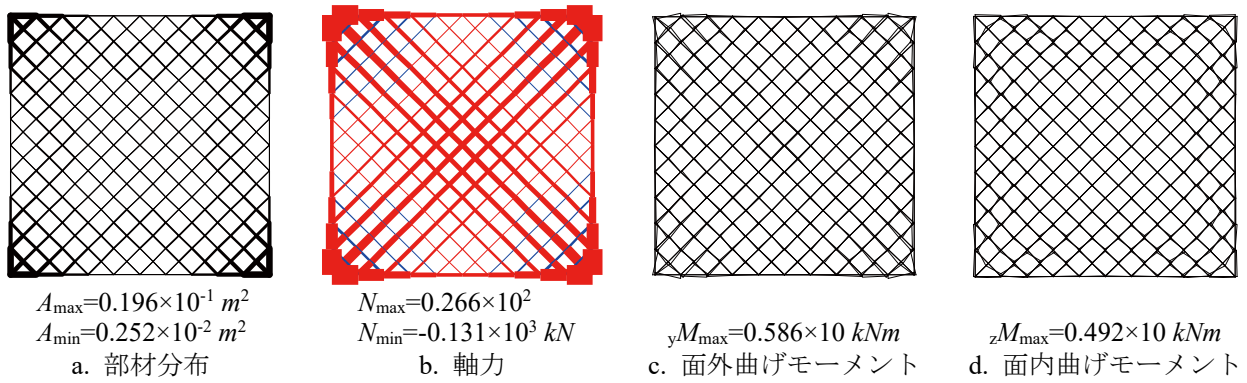
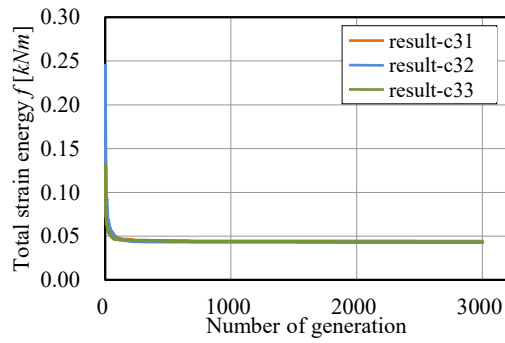
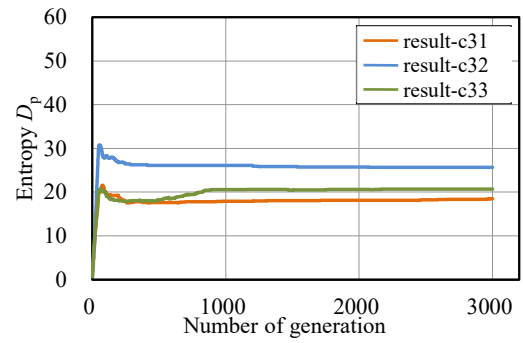
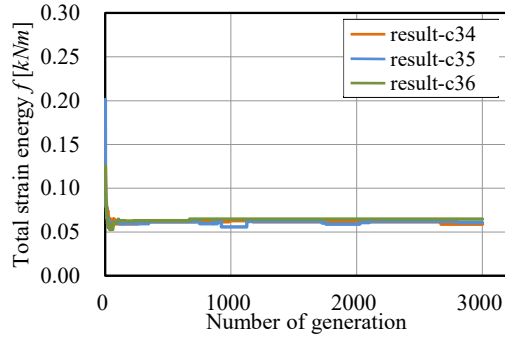
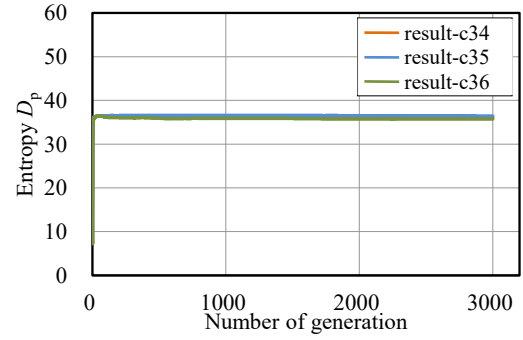


図 5.96 form-C27 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.97 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.98 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.1$

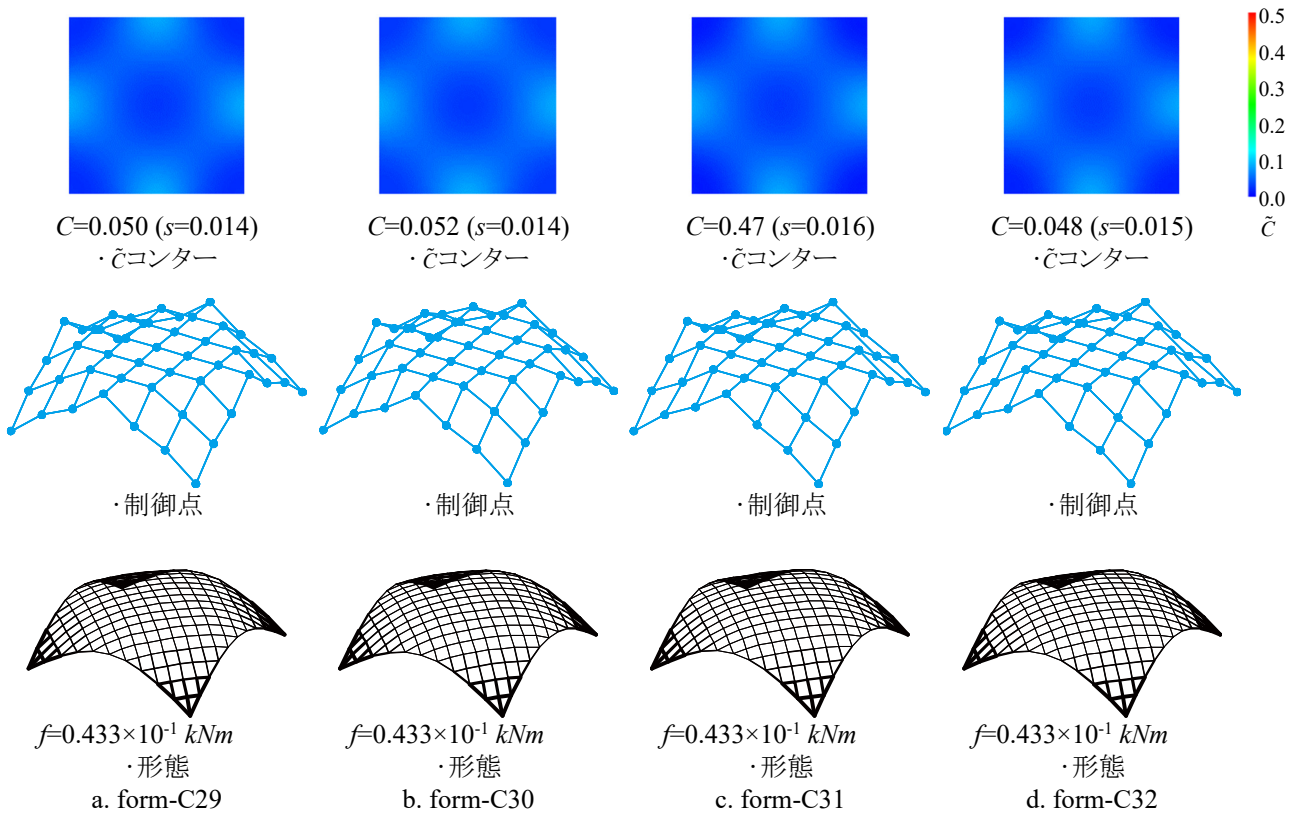


図 5.99 優良解形態例 result-c15 ( $m_{uv}=7, H=0.01$ )

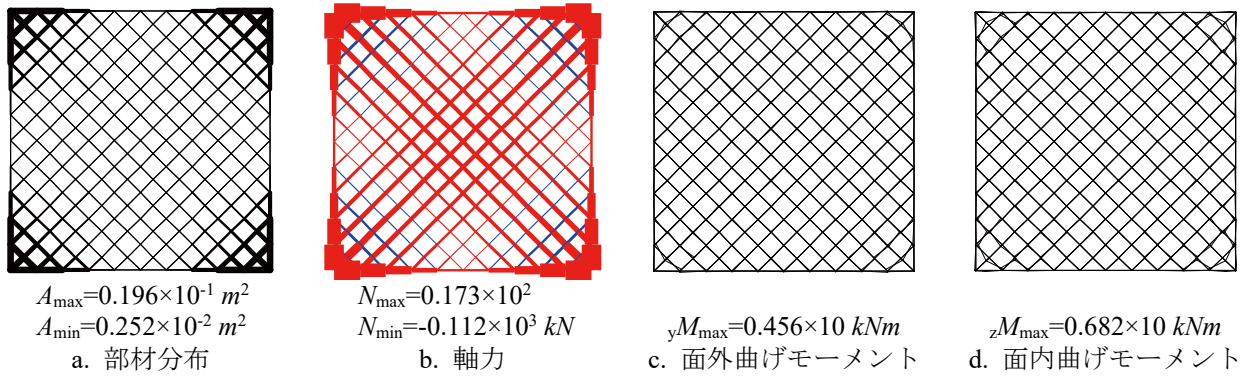
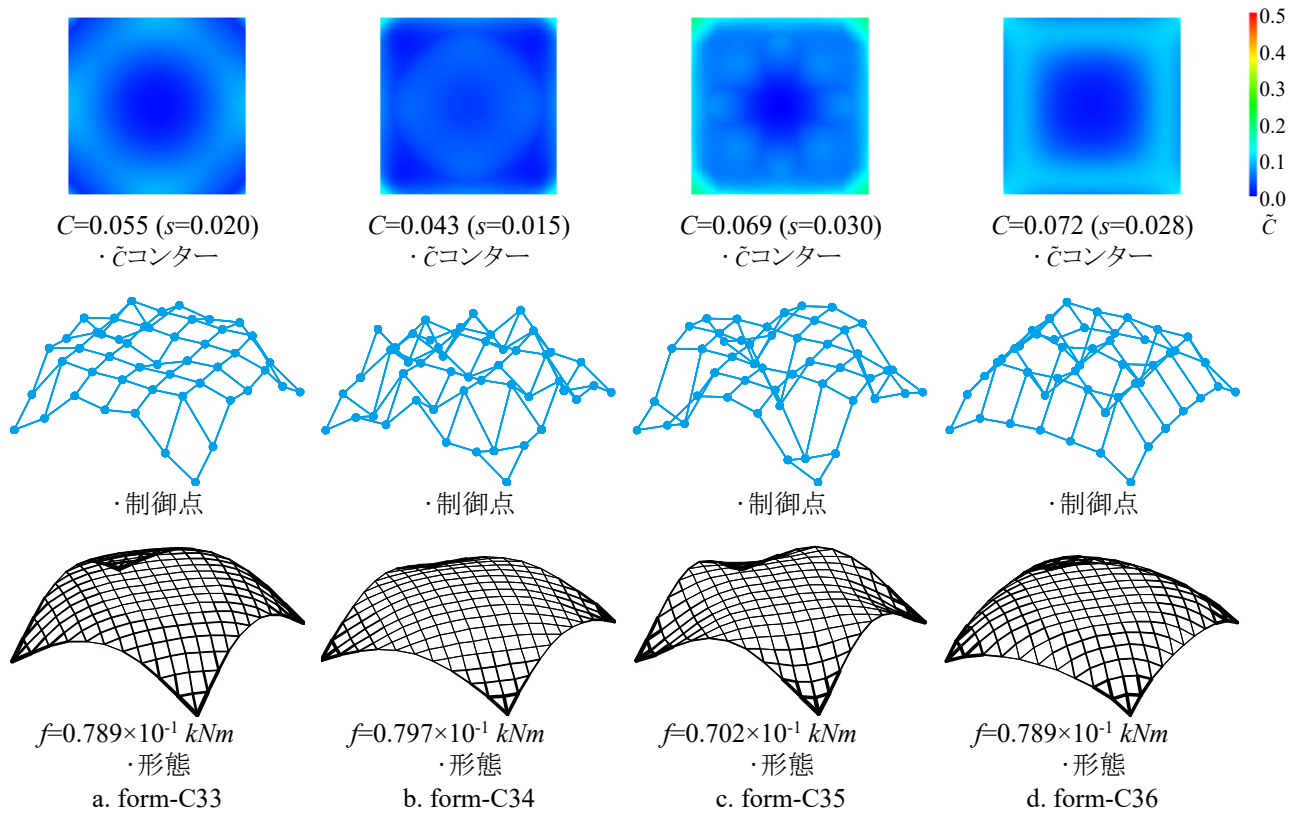
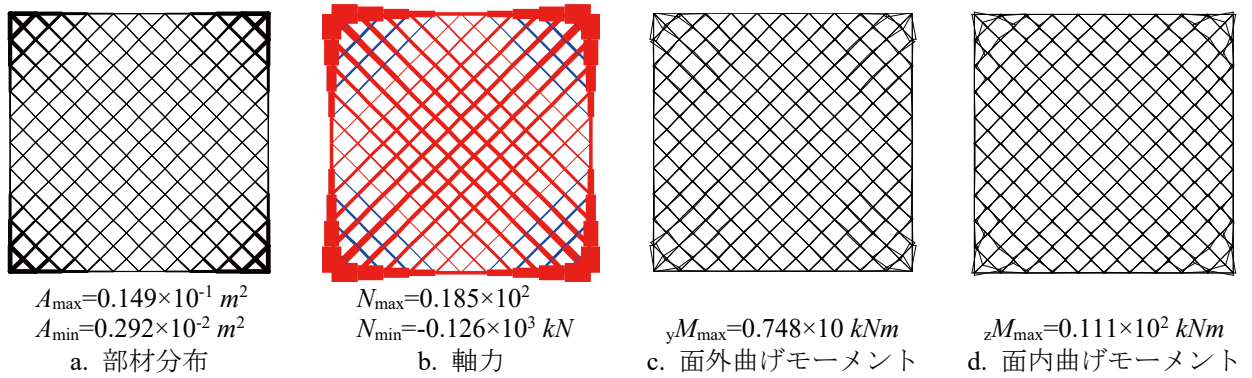


図 5.100 form-C29 の力学性状


 図 5.101 優良解形態例 result-c16 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )

 図 5.102 form-C34 の力学性状 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )

### 5.3.4 考察

Model-A, -Bと同様、 $H = 0.01$  のとき目的関数値の収束状況と得られる解形態はSGAに対応する。1000世代にはほぼ収束値に達し、その後は収束値を維持する。 $H = 0.01$  の設定における多様度指数  $D_p$  は、 $H = 0.1$  と比較して低い値で変動が少なく、多様性を重視しない探索が行われる。記憶細胞内個体の解形態は多様性が低く、大域的最適解を含むその付近の解を探索した結果である。 $H = 0.1$  とすると目的関数値が探索中に変動し、収束値にばらつきが生じる。また、 $D_p$  の値は試行ごとで比較的大きな値に安定して収束し、収束値は Model-A, -B と同程度であった。ISGA がエリート戦略を採っておらず、解の多様性に従って記憶細胞を更新するためである。 $H = 0.1$  のとき、どの  $m_{uv}$  においても目的関数値の変動が最も大きいことから、本モデルの総ひずみエネルギー最小化は、峰の数が少ない解空間を有していると考える。得られた優良解には、form-C18, -C19 (図 5.89 b, c), form-C27, -C28 (図 5.95 c, d) のように、一度の試行で目的関数値が同程度であるにもかかわらず形状が大きく異なる解を得た。これは ISGA が設計変数空間の多様性を維持した結果である。

多様性を重視した結果( $H = 0.1$ )において、 $m_{uv} = 4, 5$  に設定した優良解には form-C12 ( $m_{uv} = 4$ ) のように強く湾曲する形状、または form-C9 ( $m_{uv} = 4$ ) および form-C18 ( $m_{uv} = 5$ ) のように境界部がめくれ上がる形状が含まれる。これらの  $C$  の値は比較的大きく ( $C = 0.094 \sim 0.140$ )、数値的にも強く湾曲した形状であることが示されている。また、強く湾曲する形状と同時に form-C9, C19 のような滑らかな形状も含まれている。 $m_{uv} = 4, 5$  に設定することで形状のバリエーションに富んだ結果を得た。一方  $m_{uv} = 6, 7$  に設定すると強く湾曲する形態を得ることがなく、特に、 $m_{uv} = 7$  で  $C \geq 0.10$  の形態はほとんど得られない。 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなる。さらに形状のバリエーションは  $m_{uv} = 4, 5$  の結果と比較すると少ない。これは、階数を大きく設定することで各制御点の影響力が弱まり、影響範囲が広がるためである。つまり、局所制御性が低いいため形状表現の自由度が抑制される。例えば、 $m_{uv} = 7$  の結果のうち form-C33 と form-C34 は、どちらも球殻状であり、ライズが異なる優良解であるが、その制御点配置は大きく異なっている(図 5.101 a, b)。

力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。この結果は、ISGA の探索において形状の設計変数のみ多様性を考慮し、部材選択に関する設計変数の多様性を考慮していない結果である。どの解形状も対角方向に比較的大きな圧縮軸力が生じ、Model-A, -B と比較して曲げモーメントが小さい。 $H = 0.01$  の結果において Model-A の結果と比べると、面外最大曲げモーメントが 16 ~ 36%、面内最大曲げモーメントが 18 ~ 32%であった。したがって対角部材に軸力抵抗機構が構成されるモデルであり、対角上がアーチ形状に近い解が相対的に評価が高い。そのため、支持部近くが外側に膨らむ優良解が Model-A, -B よりも得られやすい傾向がある。

## 5.4 1m 間隔配置モデルのひずみエネルギーと部材体積の同時最小化(Model-D)

本節では対角状に部材を配置した鉄骨グリッドシェルの総ひずみエネルギーと部材体積の同時最小化を目標とした多目的最適化問題を扱う。

### 5.4.1 解析モデル

解析モデルは、図 5.103 に示す、隅角部ピン支持とした一辺が 20 m の正方形平板を基準形状とする。図 5.103b のハッチ部に示す対称性を考慮した 1/4 領域(節点数: 121, 要素数: 220)を解析対象とする。载荷条件は長期に自重  $78.5 \text{ kN/m}^3$  と等分布荷重  $1.0 \text{ kN/m}^2$  を設定する。グリッドシェルの材料は、表 3.1 に示す 20 種類の一般構造用炭素鋼管(STK400)とする。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (5-13)$$

$$\text{to minimize} \quad f_t(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (5-14)$$

$$f_v(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \mathbf{L}(\mathbf{R})^T \mathbf{C}(\mathbf{A}) \quad (5-15)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (5-16)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (5-17)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル(=  $[A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル(=  $[R_k]$ ),  $f_t$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $f_v$ : 目的関数(部材体積),  $\mathbf{L}$ : 部材長ベクトル,  $\mathbf{C}$ : 断面積ベクトル,  $R_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0 \text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $A_j^U = 20.0 \text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(5-17)は長期荷重に対する許容応力度設計による応力制約条件であり、基準強度は  $235 \text{ N/mm}^2$ 、ヤング係数は  $2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ 、せん断弾性係数は  $7.8 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  である。解析パラメータは表 5.4 のように設定する。

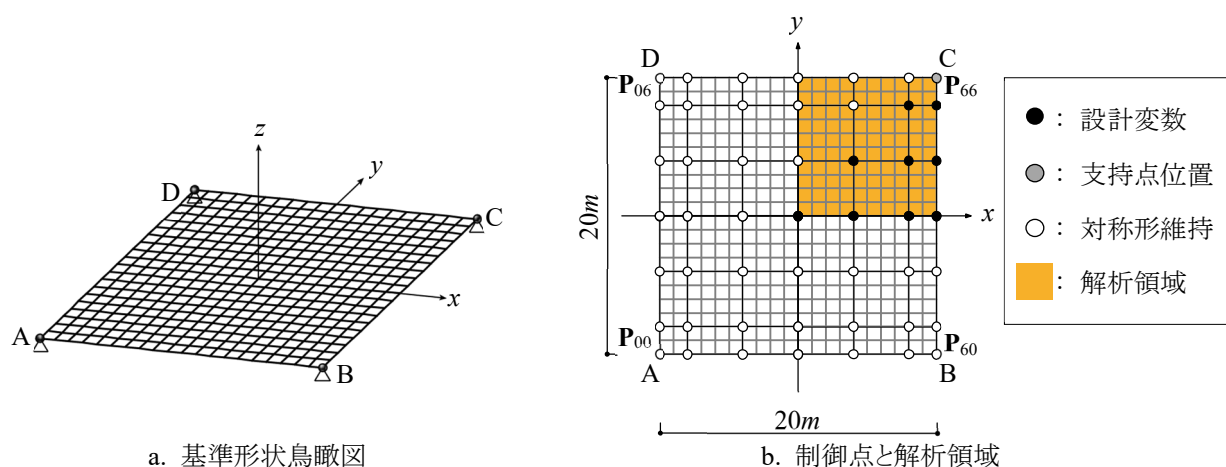


図 5.103 解析モデル

表 5.4 GA パラメータ (ISGA, SPEA2)

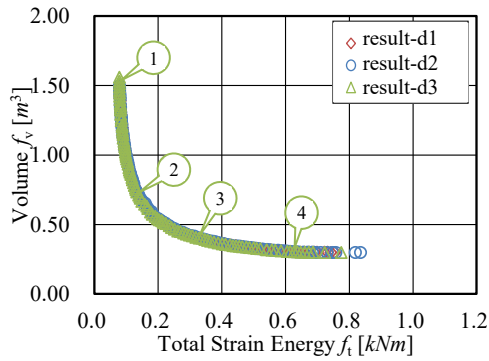
世代数	5000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
A の遺伝子長	$10 \times 16 \text{ bit}$
R の遺伝子長	$9 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

### 5.4.2 SPEA2 による数値結果

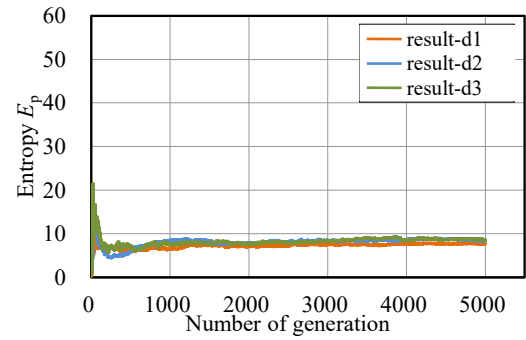
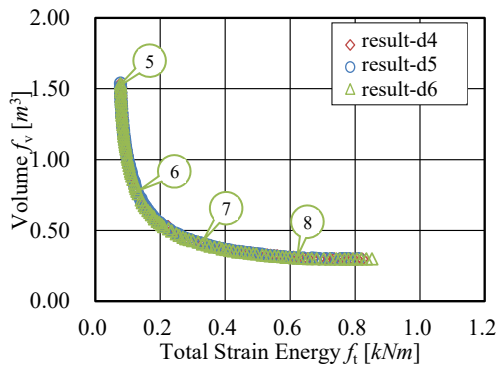
SPEA2 による数値結果を図 5.104 - 5.115 に示す。図 5.104 - 5.107 は、SPEA2 により得られた各階数設定 3 試行における目的関数空間のアーカイブ個体(横軸: 総ひずみエネルギー  $f_t$ , 縦軸: 部材体積  $f_v$ )と多様度指数  $D_p$  の遷移(横軸: 世代数, 縦軸: 多様度指数  $D_p$ )である。図 5.108 - 5.111 は、解形態の  $\tilde{c}$  コンター図, 制御点, 形態鳥瞰図を示し、形態の記号数字は目的関数空間のアーカイブ個体(図 5.104 - 5.107)の数字に対応する。吹き出しの色は図中個体プロットの色に対応させている。得られた解形態の力学性状を図 5.112 - 5.115 に示す(a: 部材分布, b: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外( $y$  軸まわり)曲げモーメント, d: 面内( $z$  軸まわり)曲げモーメント)。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、C: 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\tilde{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメントである。

図 5.104 - 5.107 より、各試行でほぼ同じ位置にパレートフロントを形成する。パレートフロント上の解形態はほぼ同じであり、SPEA2 によりパレート最適解が得られたと判断する。いずれの結果においても、SPEA2 の解形態はパレートフロント上で類似し、設計変数の多様性は低い。

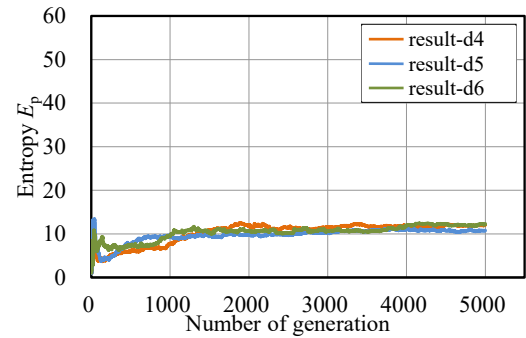
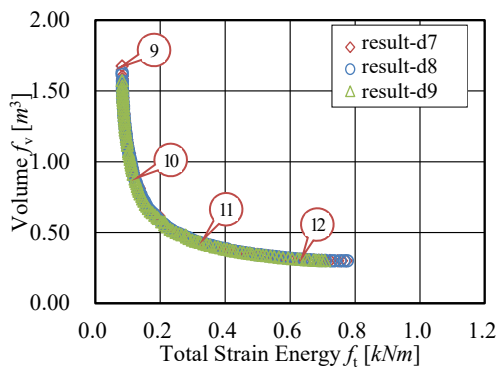




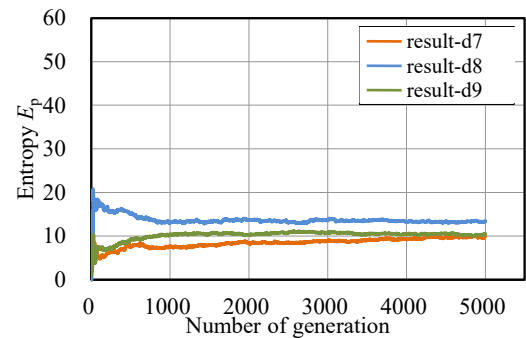
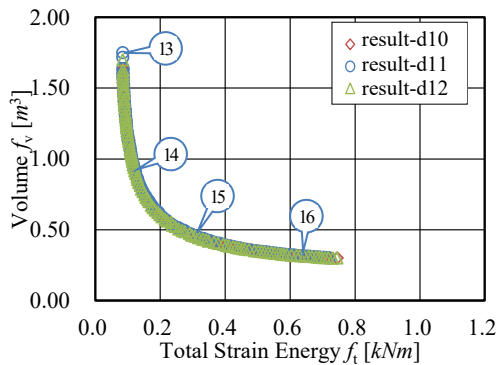
a. 目的関数空間のアーカイブ個体

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.104 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=4$ )

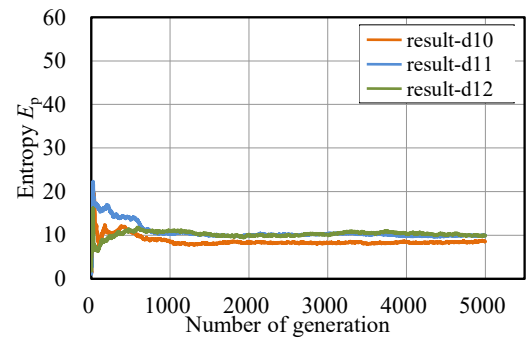
a. 目的関数空間のアーカイブ個体

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.105 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=5$ )

a. 目的関数空間のアーカイブ個体

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.106 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=6$ )

a. 目的関数空間のアーカイブ個体

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.107 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=7$ )

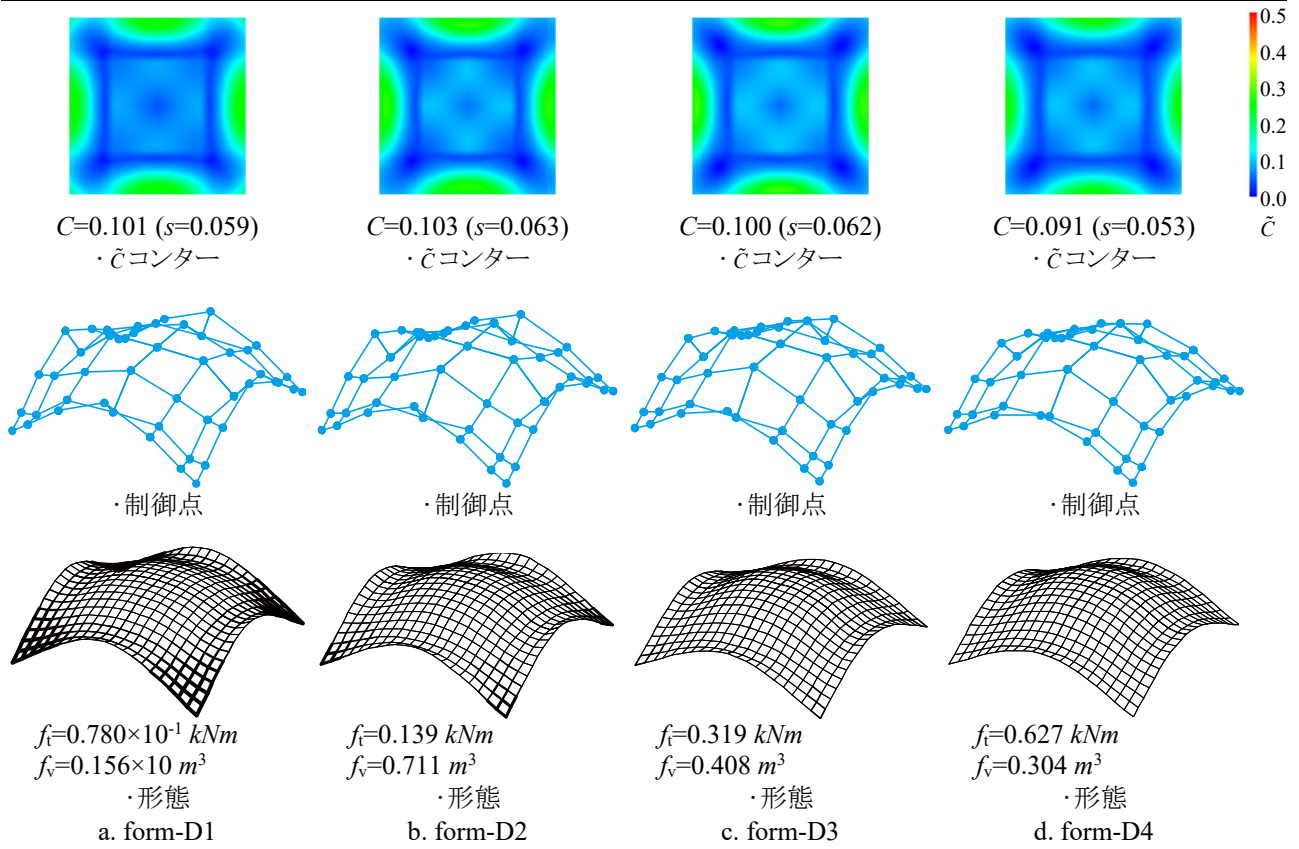


図 5.108 SPEA2 形態例 result-d3 ( $m_{uv}=4$ )

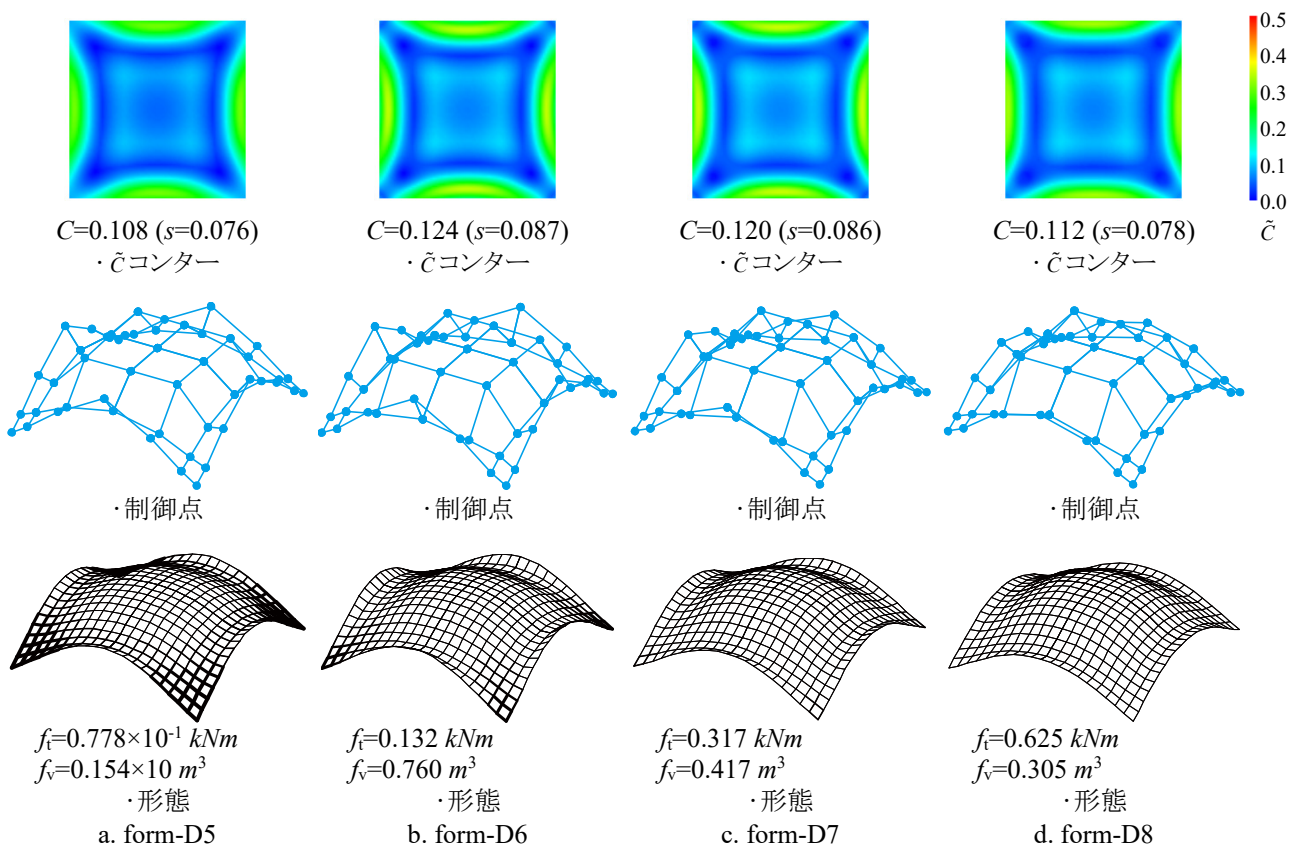
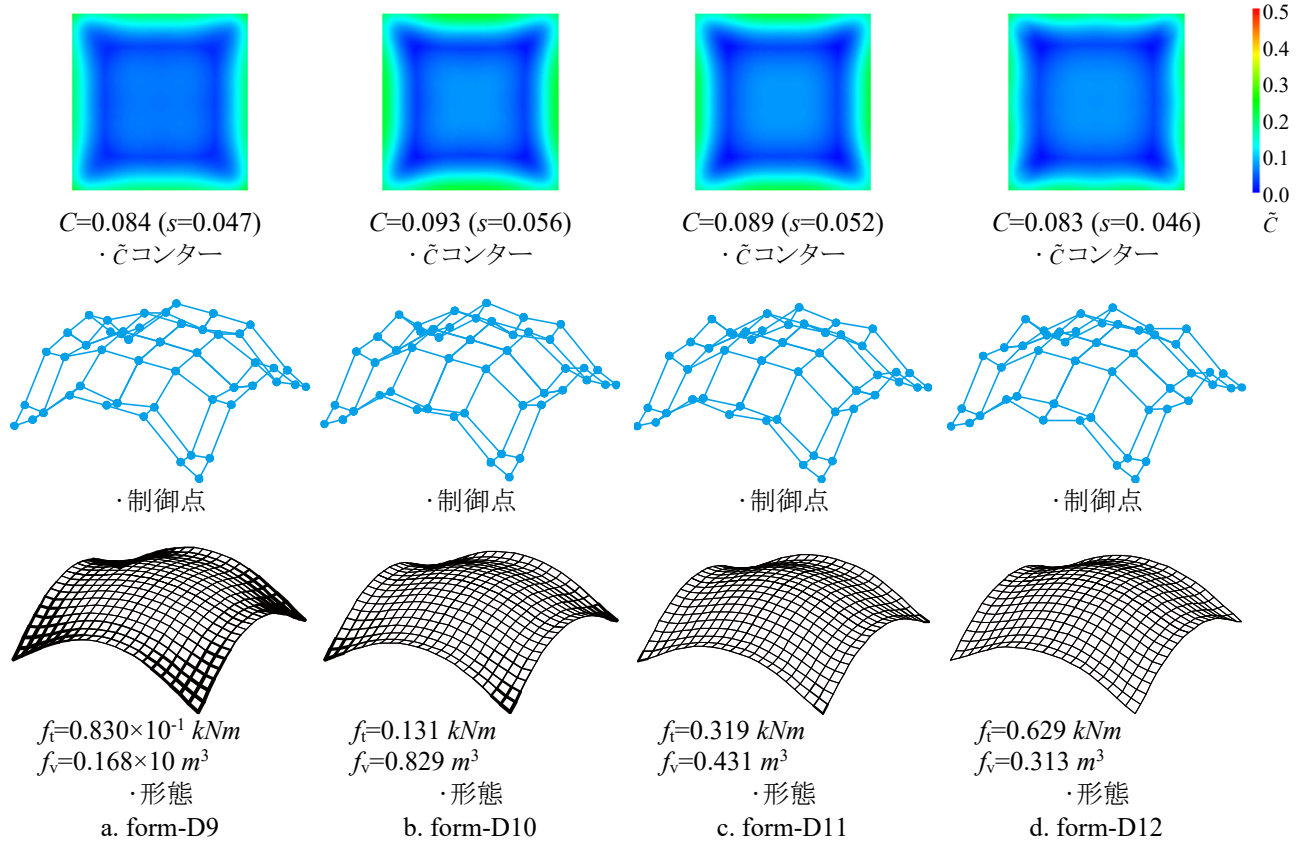
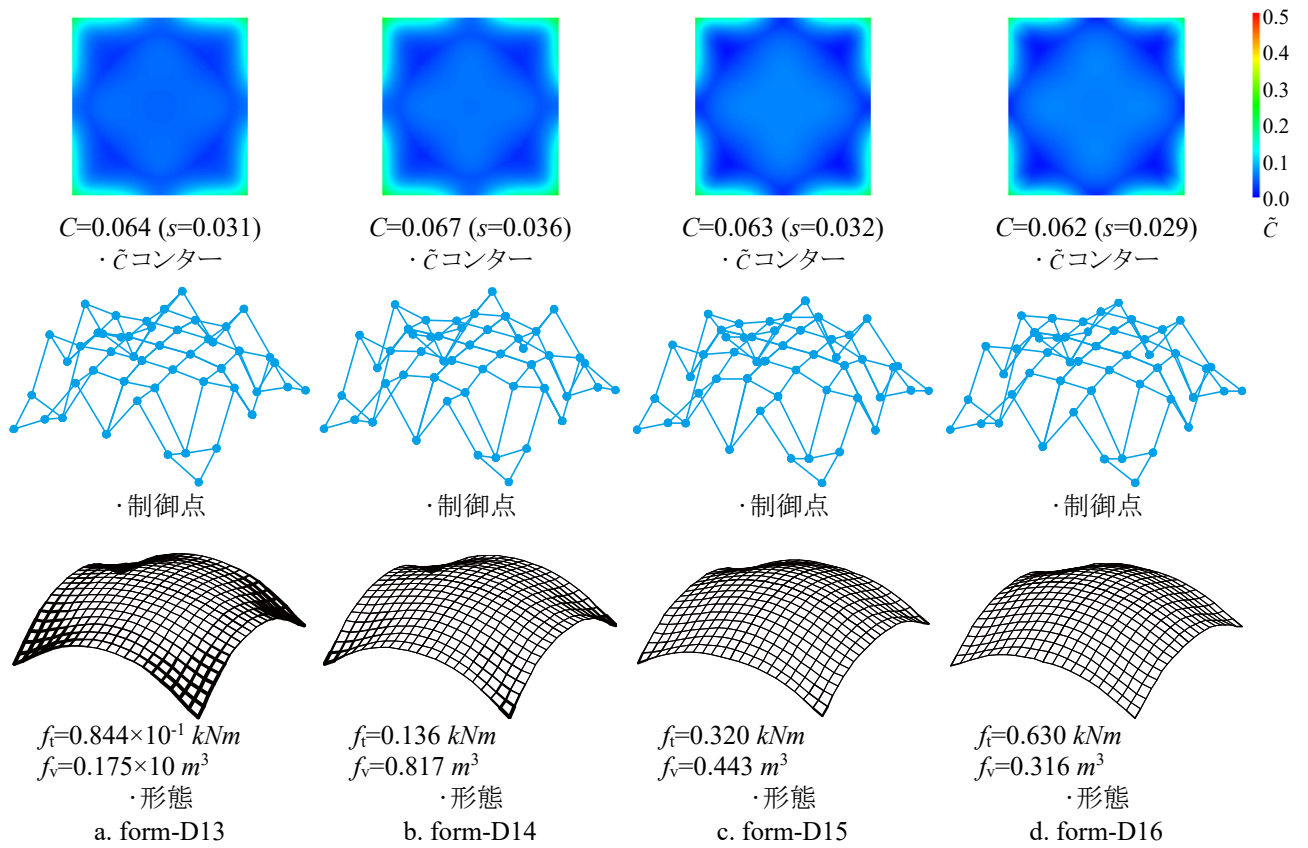


図 5.109 SPEA2 形態例 result-d6 ( $m_{uv}=5$ )


 図 5.110 SPEA2 形態例 result-d7 ( $m_{uv}=6$ )

 図 5.111 SPEA2 形態例 result-d11 ( $m_{uv}=7$ )

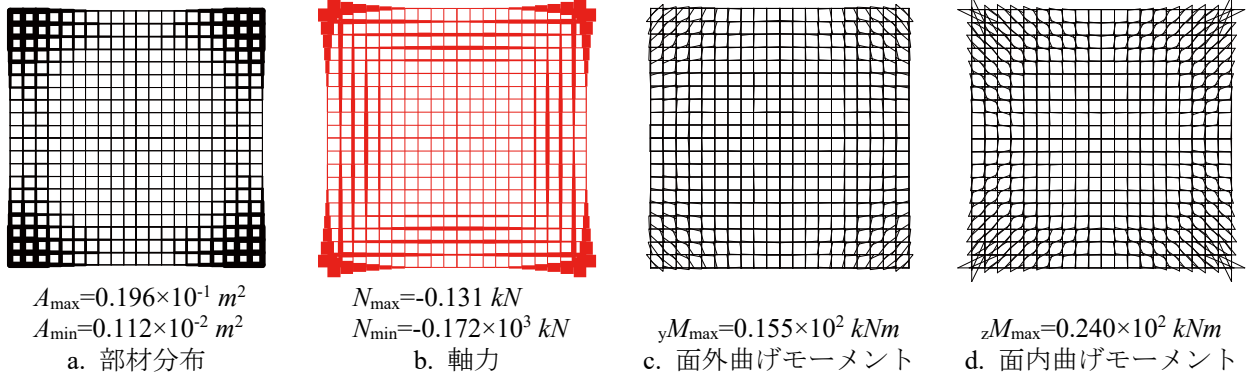


図 5.112 form-D1 の力学性状

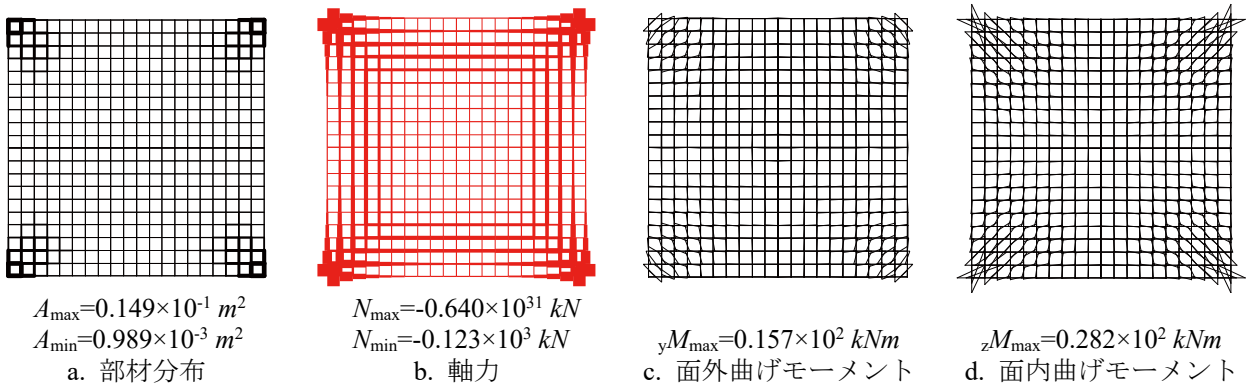


図 5.113 form-D2 の力学性状

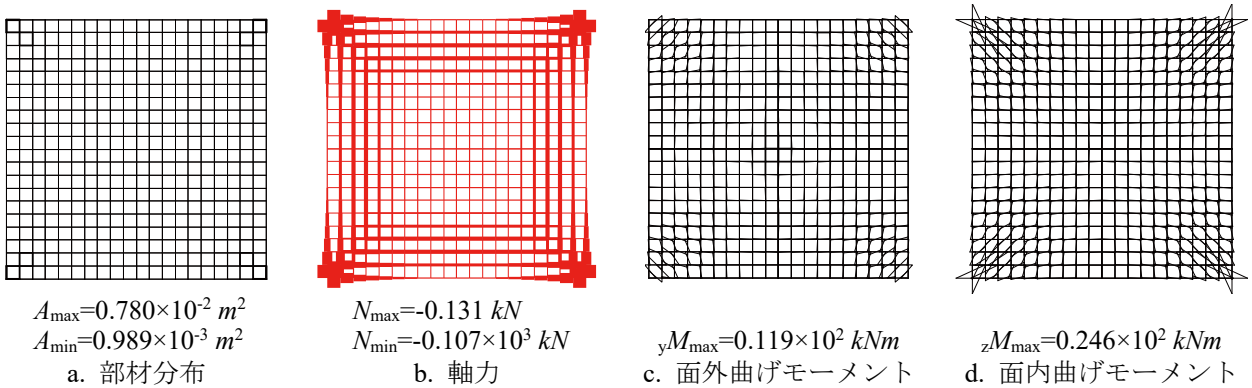


図 5.114 form-D3 の力学性状

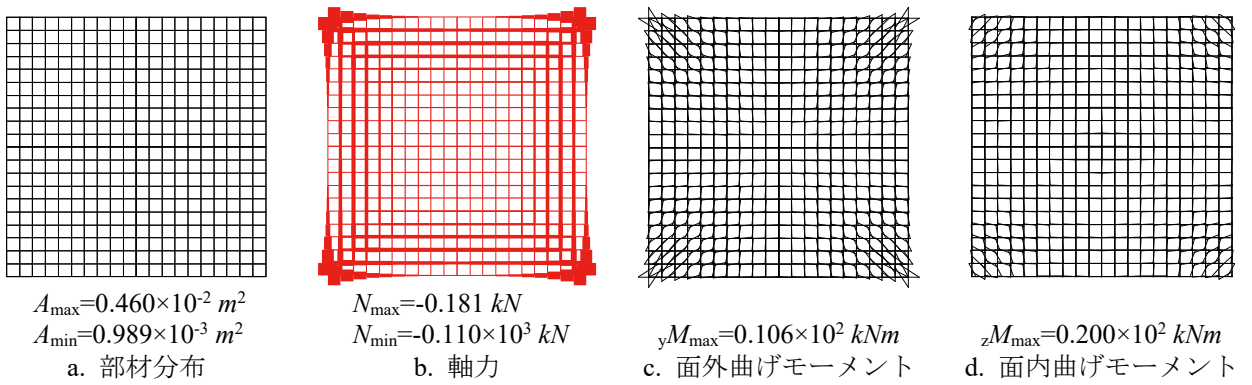
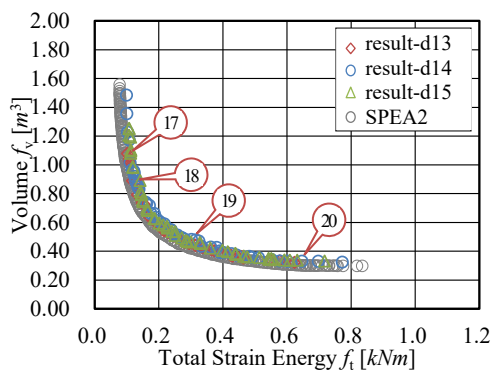


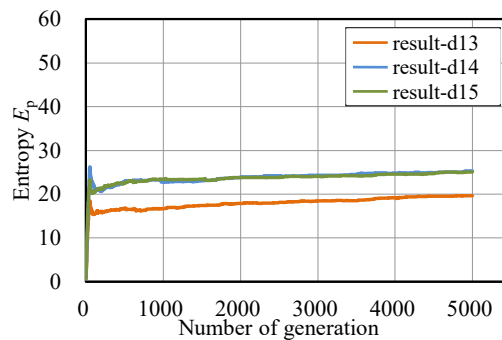
図 5.115 form-D4 の力学性状

### 5.4.3 ISGA による数値結果

図 5.116 - 5.139 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果における目的関数空間の記憶細胞個体(横軸: 総ひずみエネルギー  $f_t$ , 縦軸: 部材体積  $f_v$ )と多様度指数  $D_p$  の遷移(横軸: 世代数, 縦軸: 多様度指数  $D_p$ )を図 5.116 - 5.117 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.122, 5.123 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.128, 5.129 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.134, 5.135 ( $m_{uv} = 7$ )に示す。ここで、優良解選択率  $S_d = 0.5$  とし、SPEA2 で得られた解を白抜き円○でプロットする。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\bar{c}$  コンター図, 制御点, 形態鳥瞰図を図 5.118, 5.120 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.124, 5.126 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.130, 5.132 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.136, 5.138 ( $m_{uv} = 7$ )に示し、形態の記号数字は目的関数空間のアーカイブ個体の数字に対応する。吹き出しの色は図中個体プロットの色に対応させている。得られた優良解形態の力学性状(a: 部材分布, b: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外(y 軸まわり)曲げモーメント, d: 面内(z 軸まわり)曲げモーメント)を図 5.119, 5.121 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.125, 5.127 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.131, 5.133 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.137, 5.139 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、C: 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\bar{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。

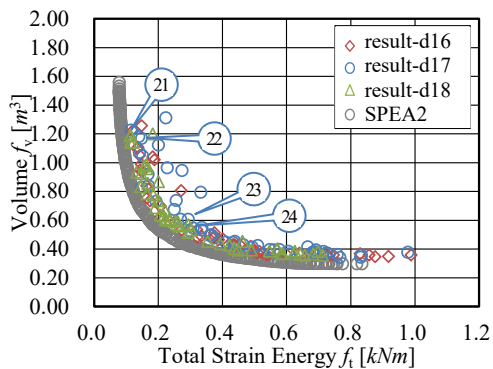


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

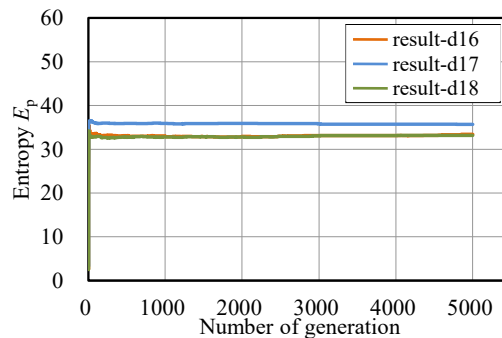


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.116 数値結果  $m_{uv}=4, H=0.01$



a. 目的関数空間の記憶細胞個体



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.117 数値結果  $m_{uv}=4, H=0.10$

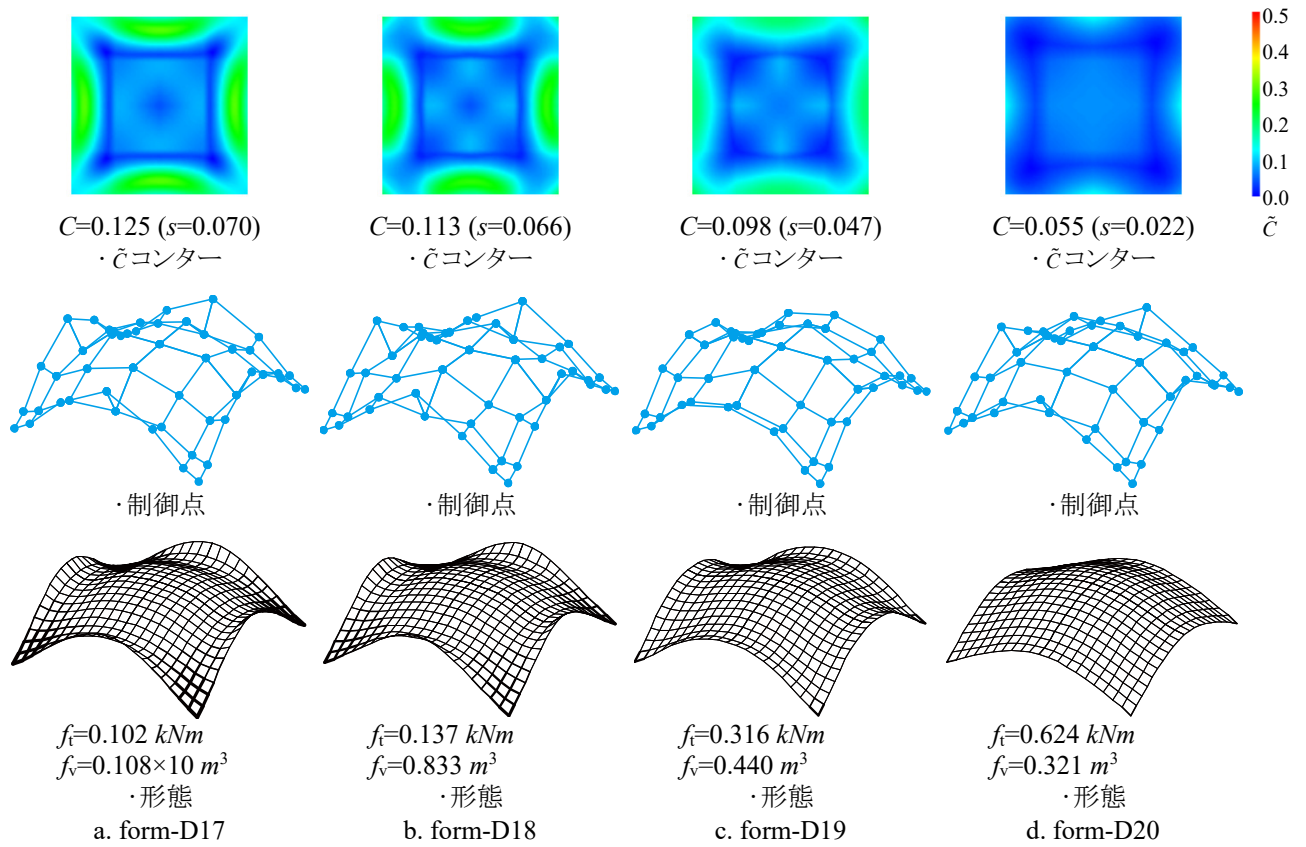
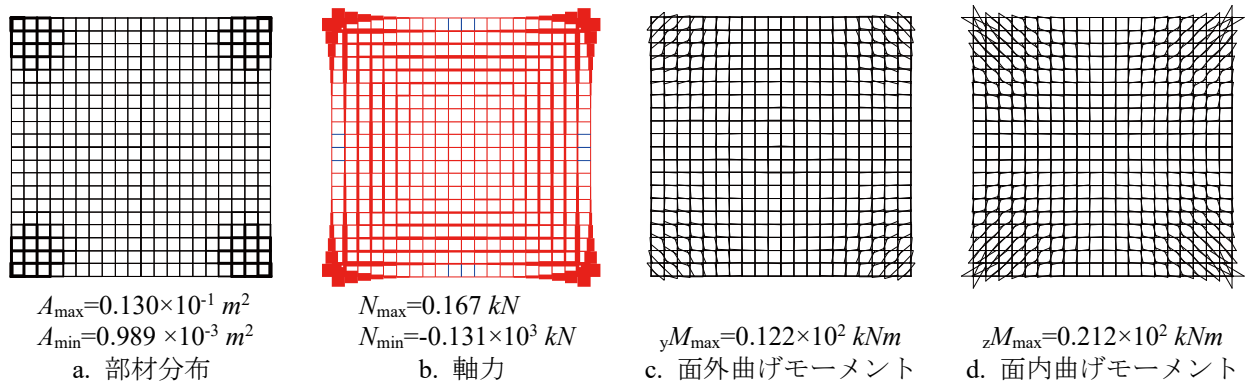

 図 5.118 優良解形態例 result-d13 ( $m_{uv}=4, r=10, H=0.01$ )


図 5.119 form-D18 の力学性状



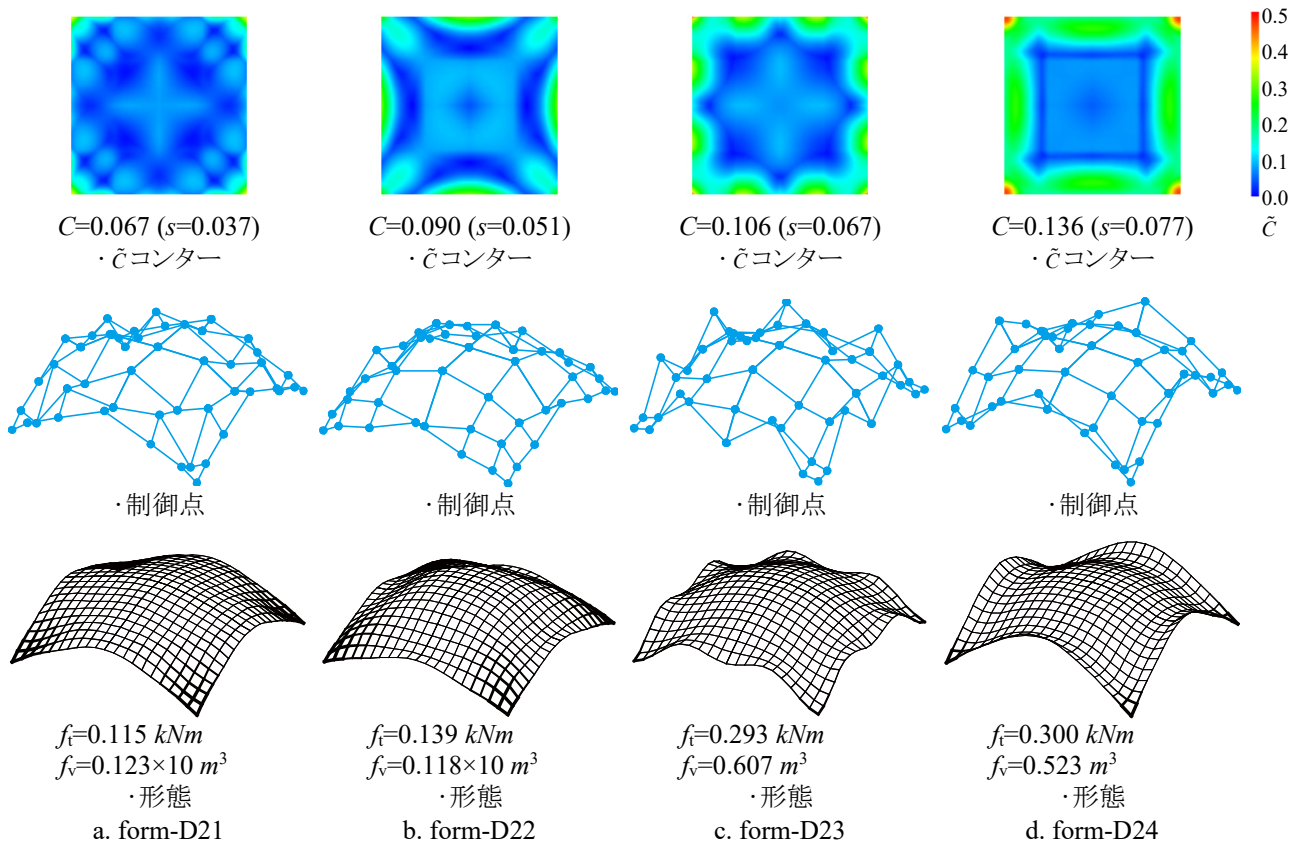


図 5.120 優良解形態例 result-d17 ( $m_{uv}=4, H=0.1$ )

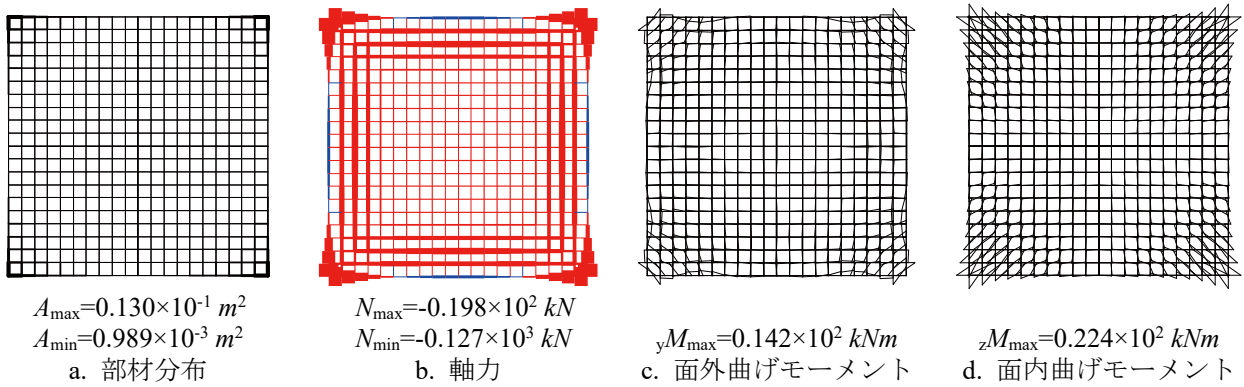
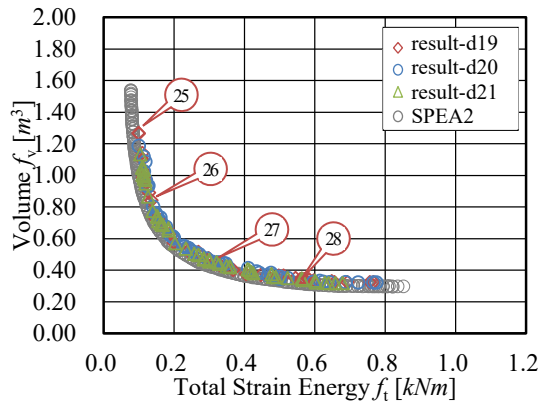


図 5.121 form-D23 の力学性状





a. 目的関数空間の記憶細胞個体

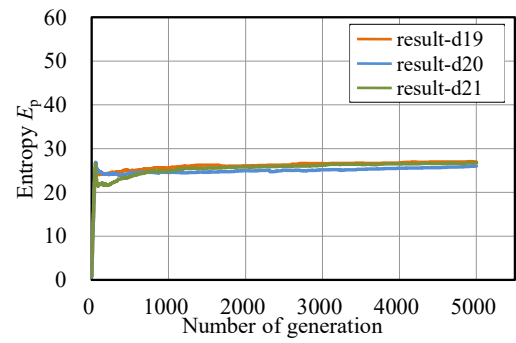
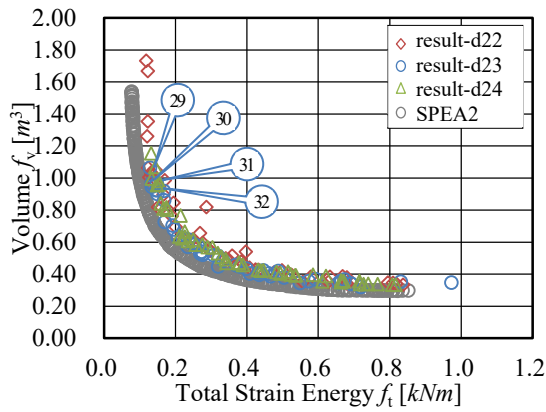

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.122 数値結果  $m_{uv}=5, H=0.01$ 


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

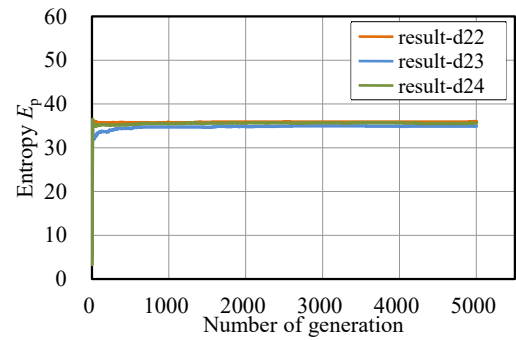

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.123 数値結果  $m_{uv}=5, H=0.10$

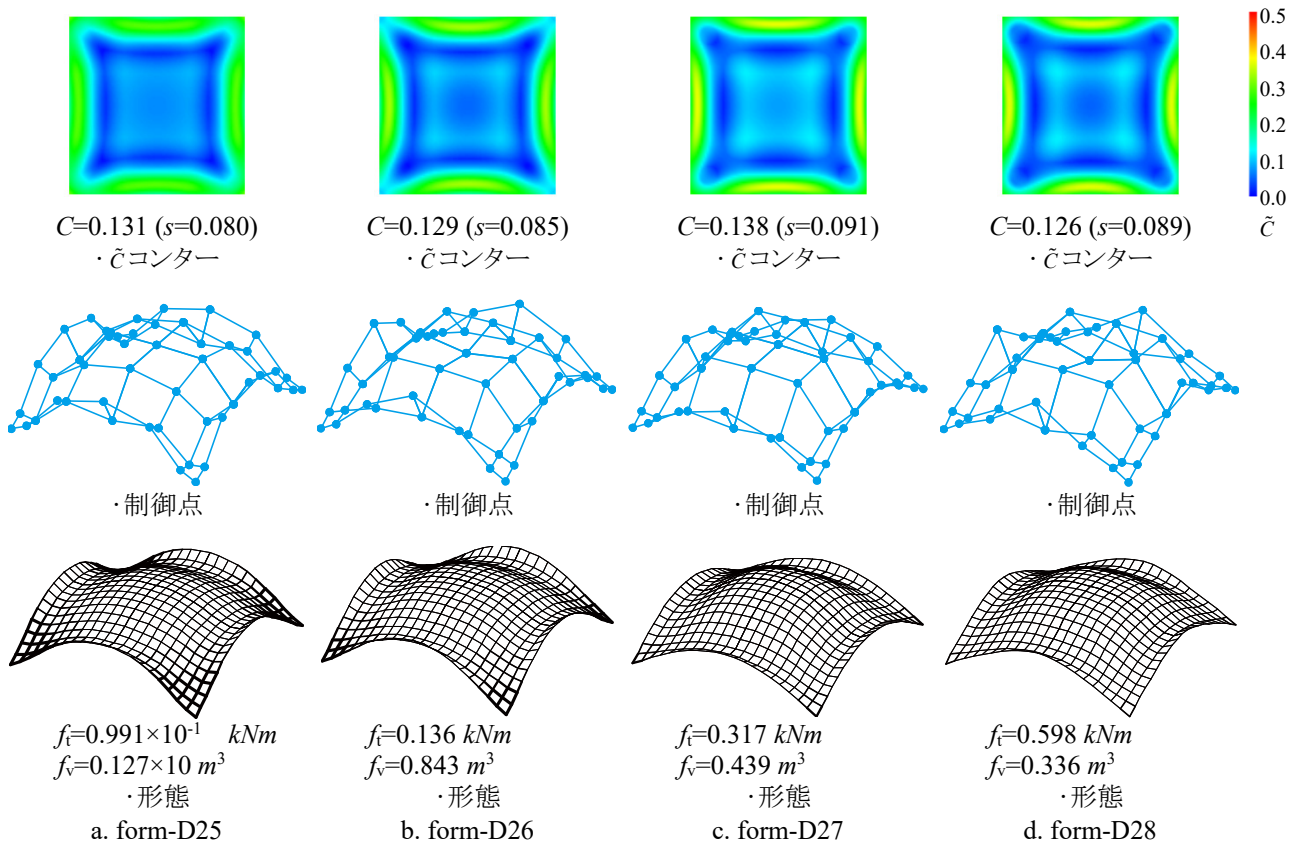


図 5.124 優良解形態例 result-d19 ( $m_{uv}=5, H=0.01$ )

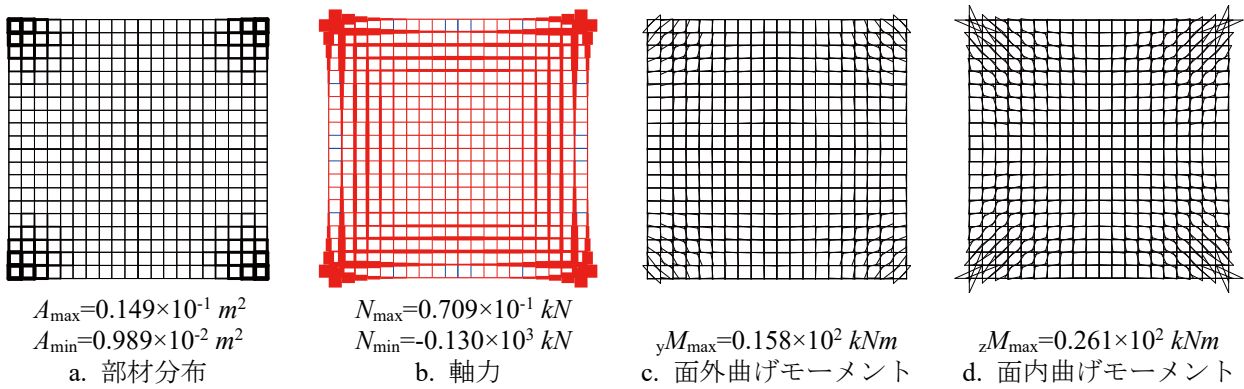


図 5.125 form-D26 の力学性状

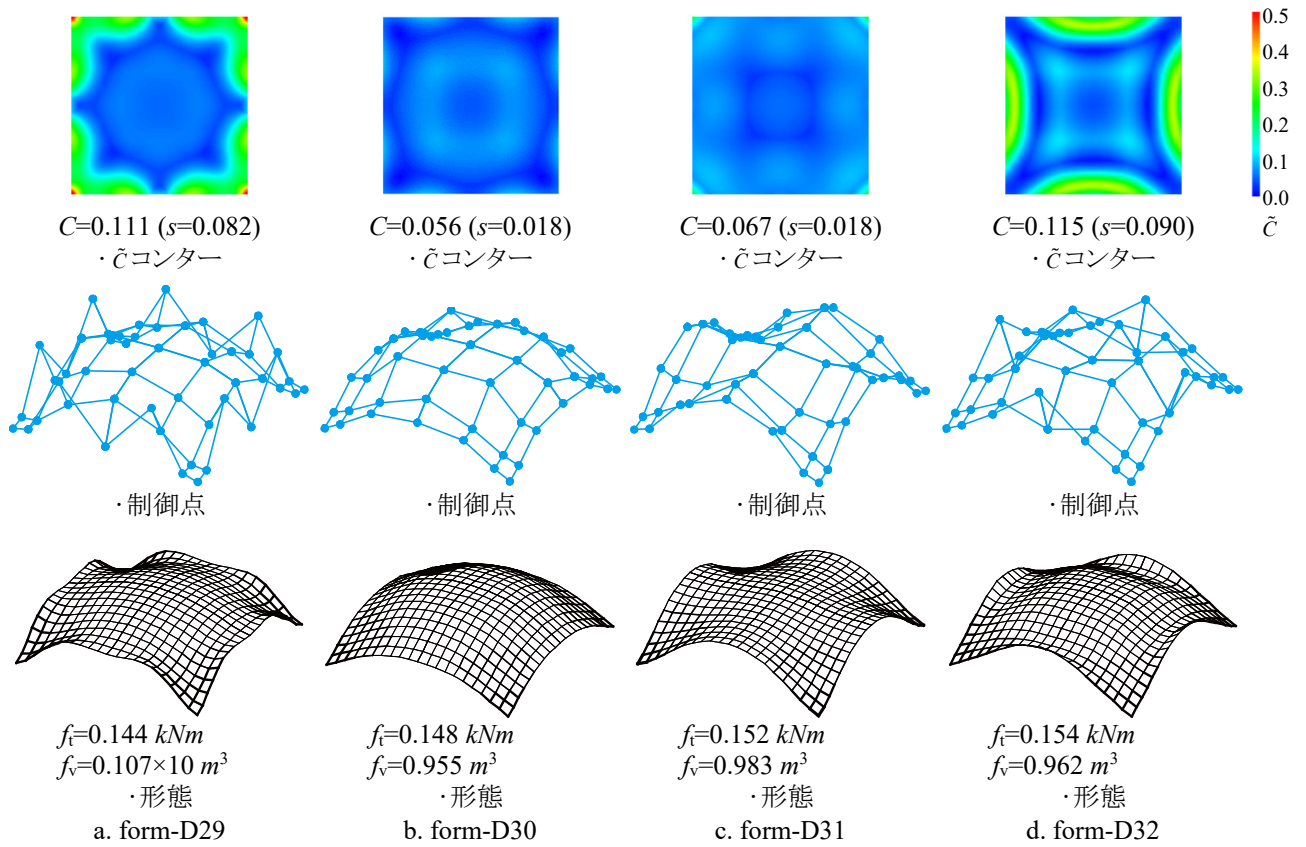
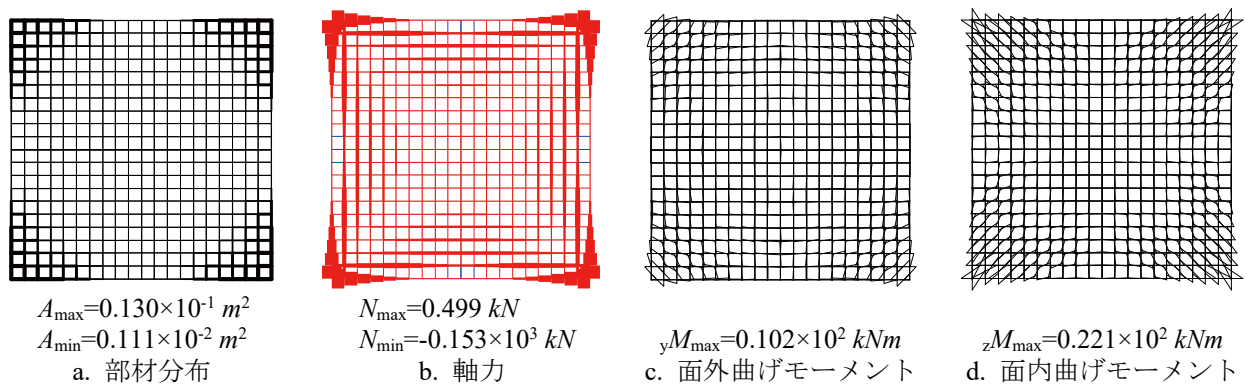
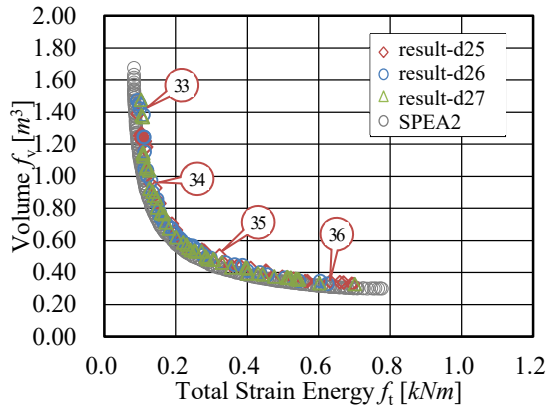
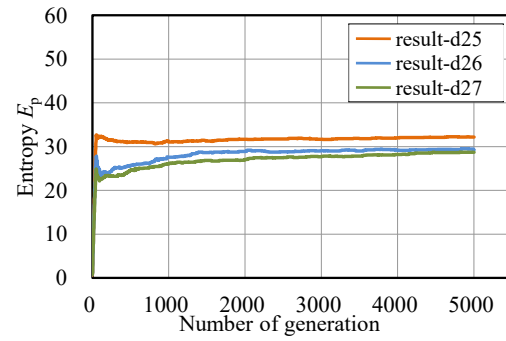

 図 5.126 優良解形態例 result-d24 ( $m_{uv}=5, H=0.1$ )


図 5.127 form-D32 の力学性状

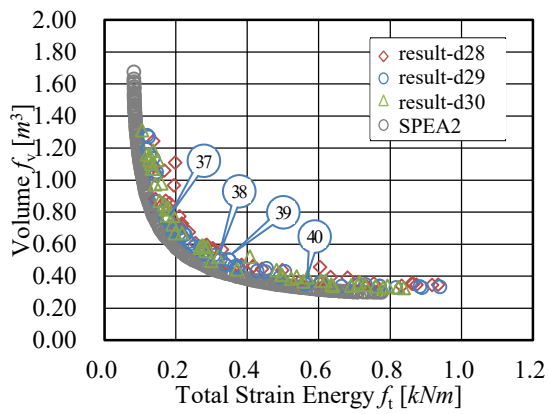


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

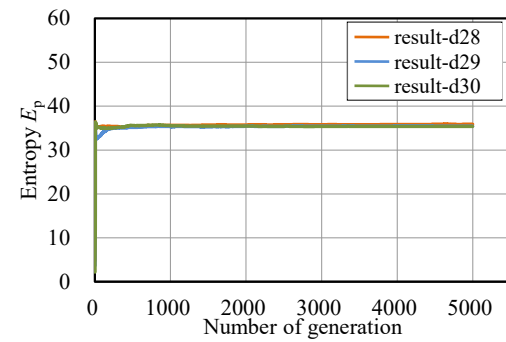


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.128 数値結果  $m_{uv}=6, H=0.01$



a. 目的関数空間の記憶細胞個体



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.129 数値結果  $m_{uv}=6, H=0.10$

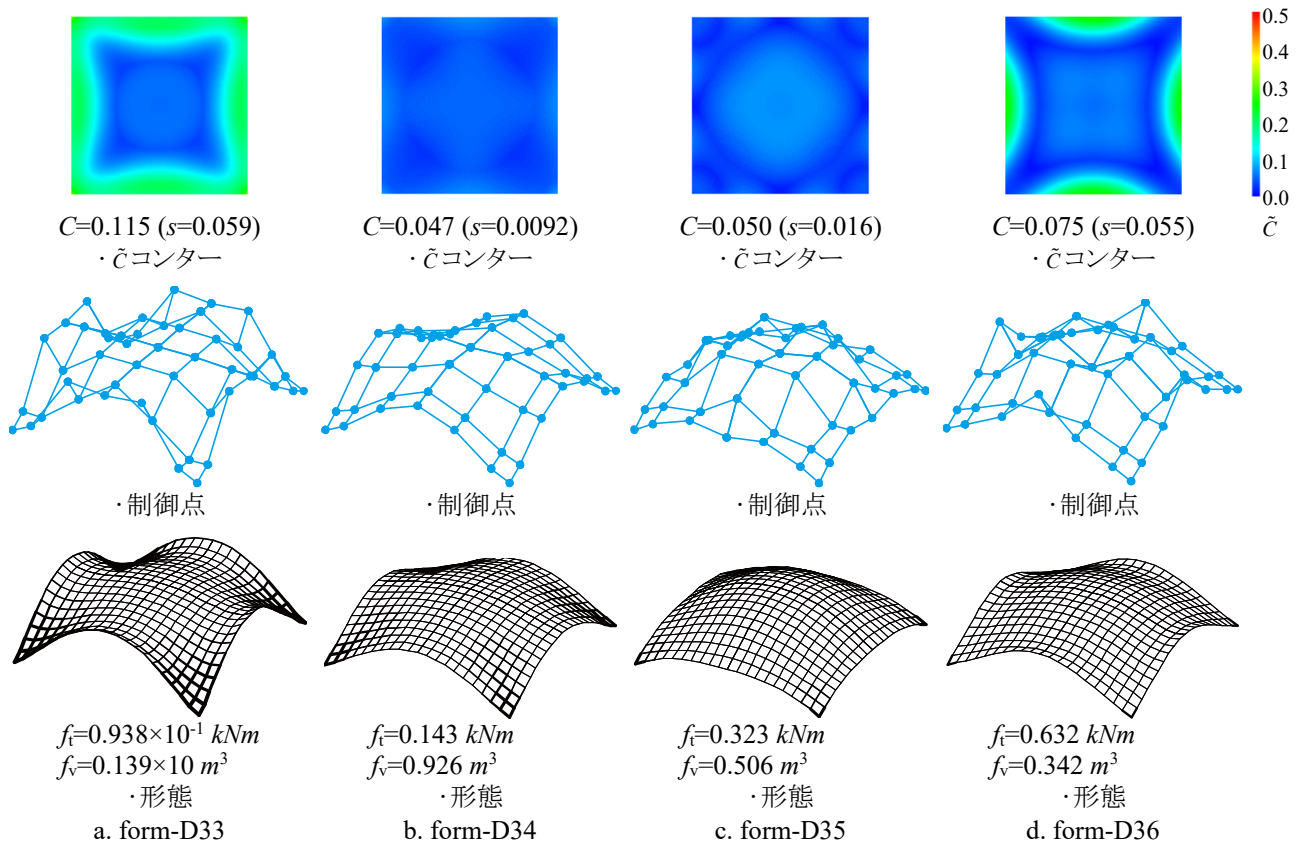
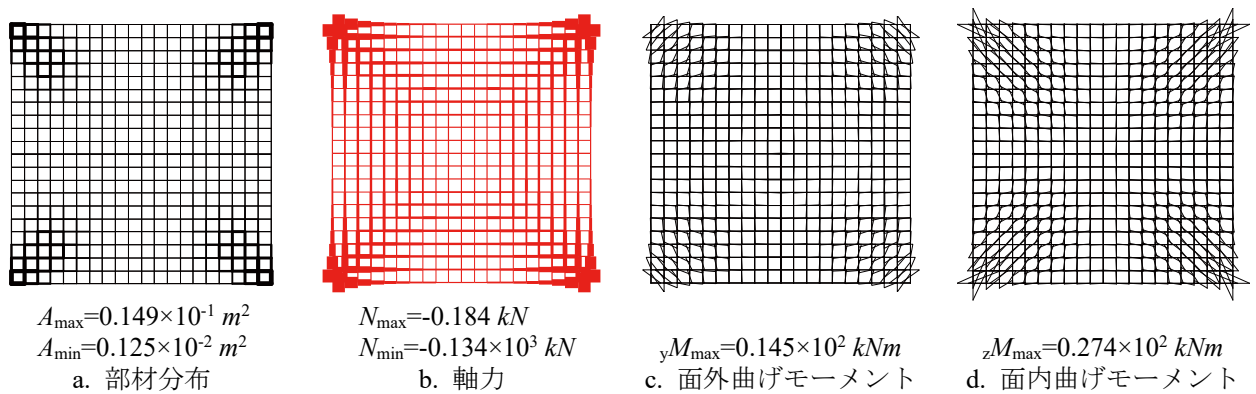

 図 5.130 優良解形態例 result-d25 ( $m_{uv}=6, H=0.01$ )


図 5.131 form-D34 の力学性状

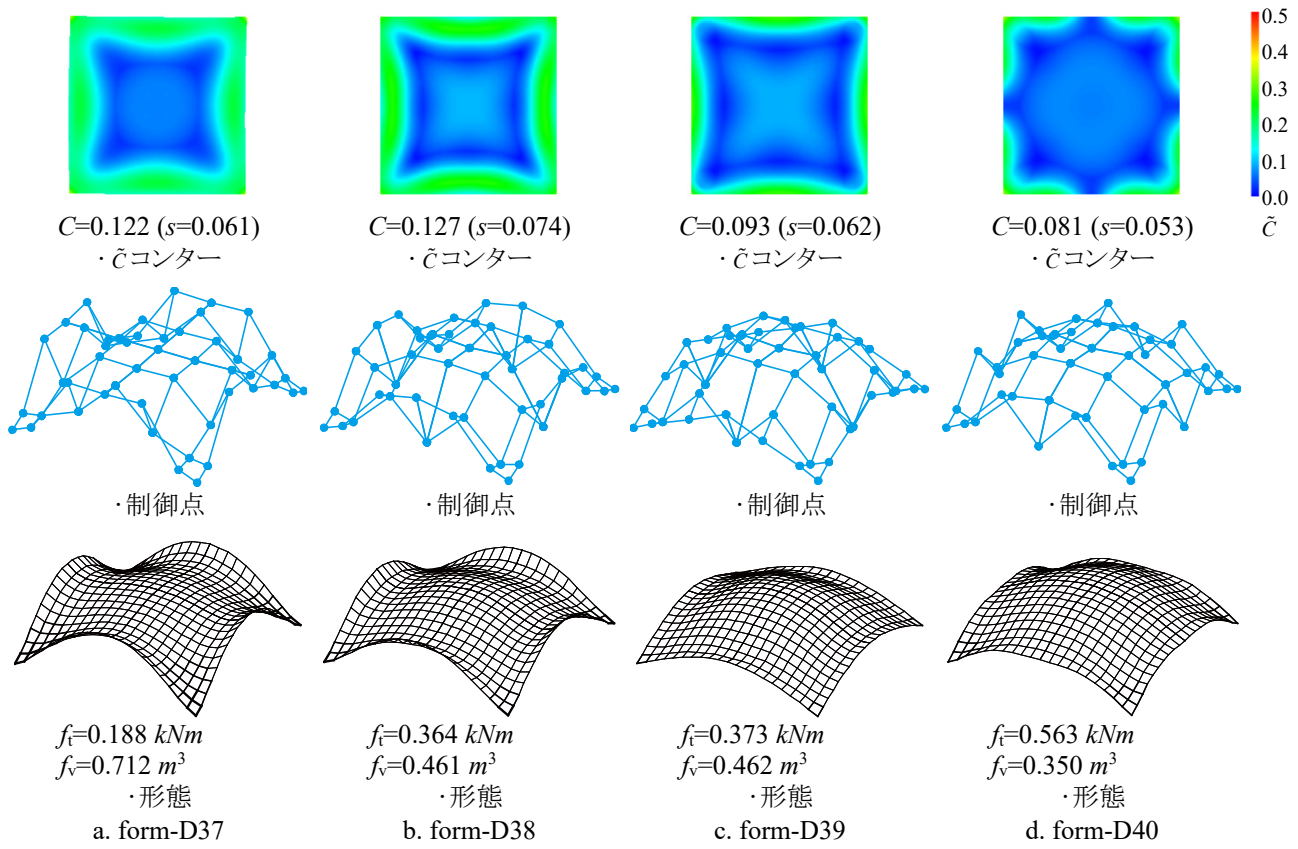


図 5.132 優良解形態例 result-d29 ( $m_{uv}=6, H=0.1$ )

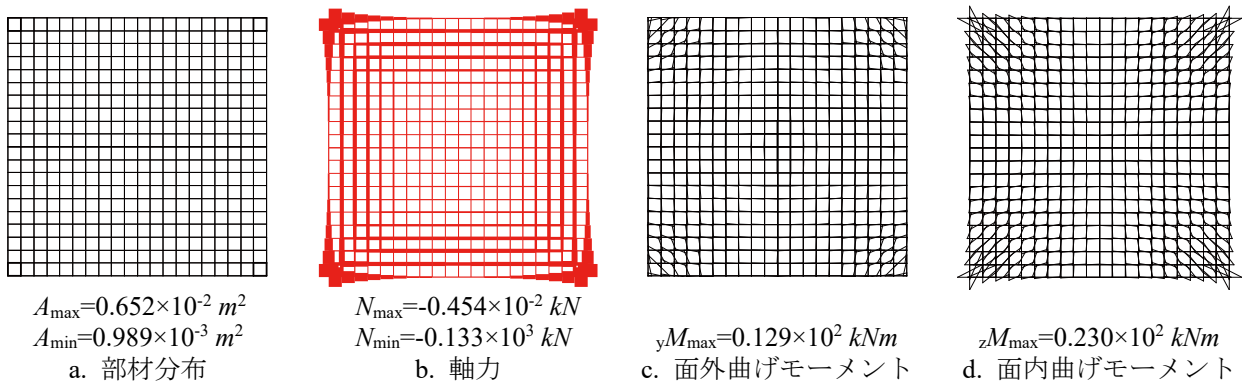
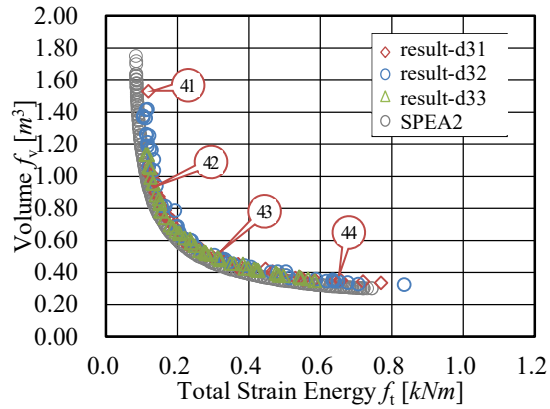


図 5.133 form-D39 の力学性状



a. 目的関数空間の記憶細胞個体

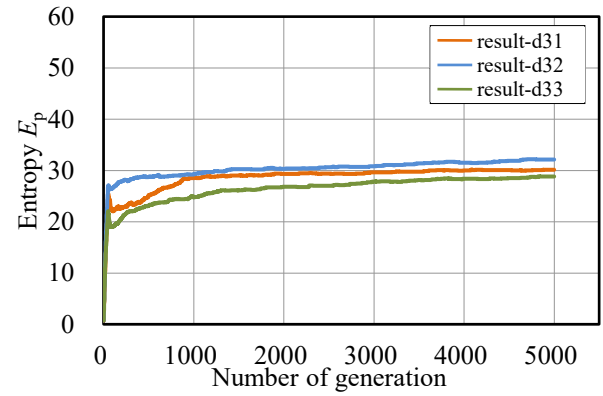
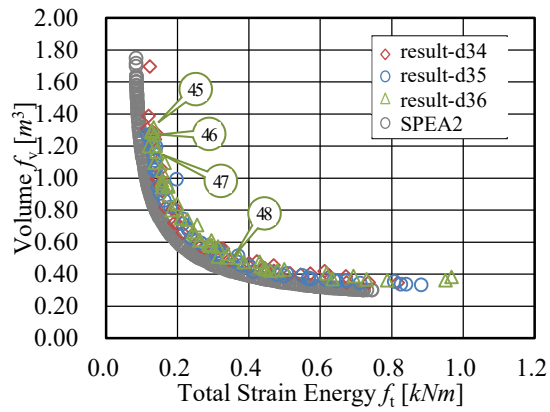

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.134 数値結果  $m_{uv}=7, H=0.01$ 


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

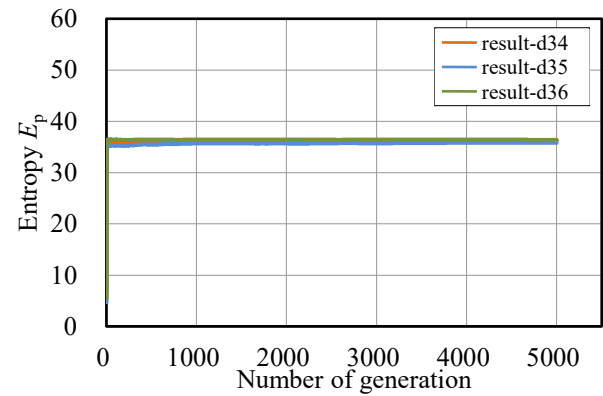

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.135 数値結果  $m_{uv}=7, H=0.10$



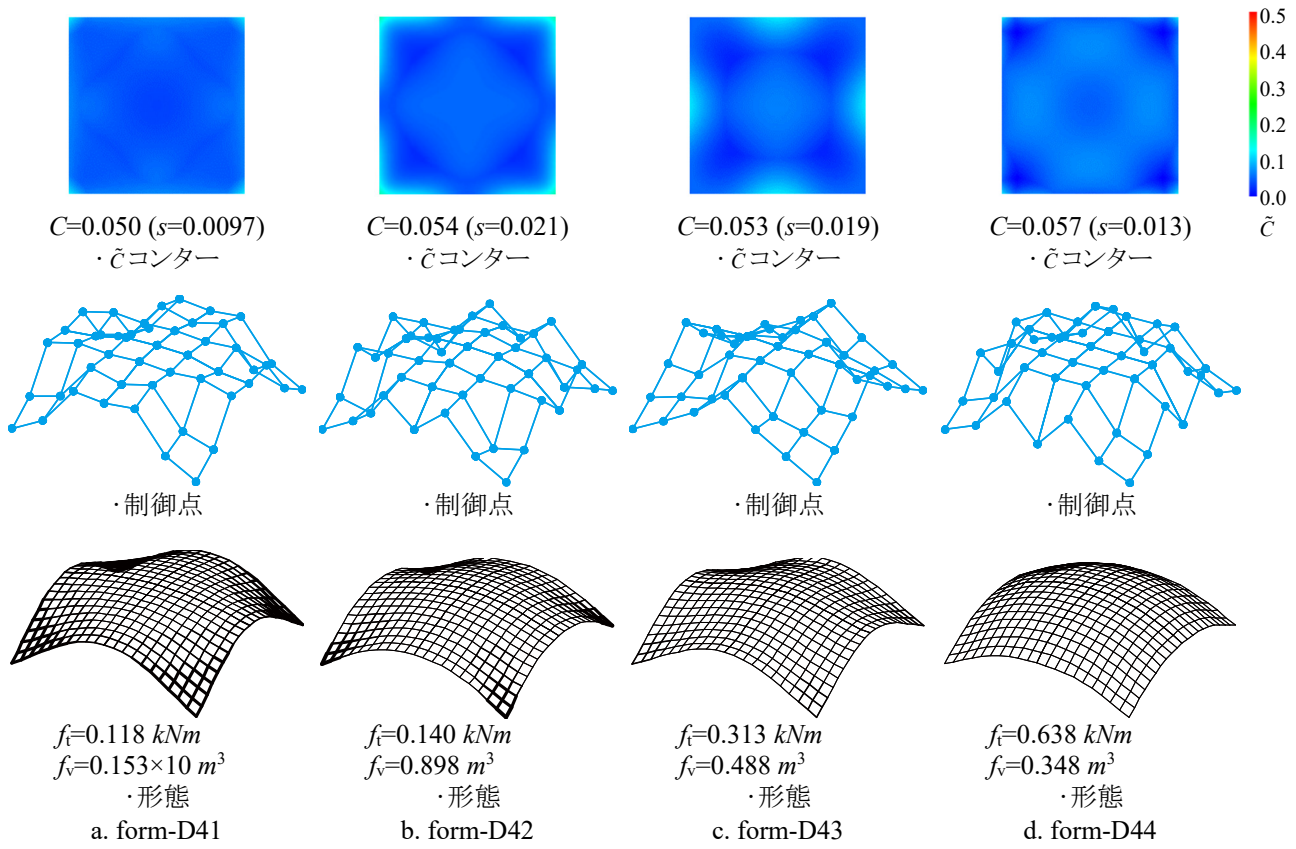


図 5.136 優良解形態例 result-d31 ( $m_{uv}=7$ ,  $H=0.01$ )

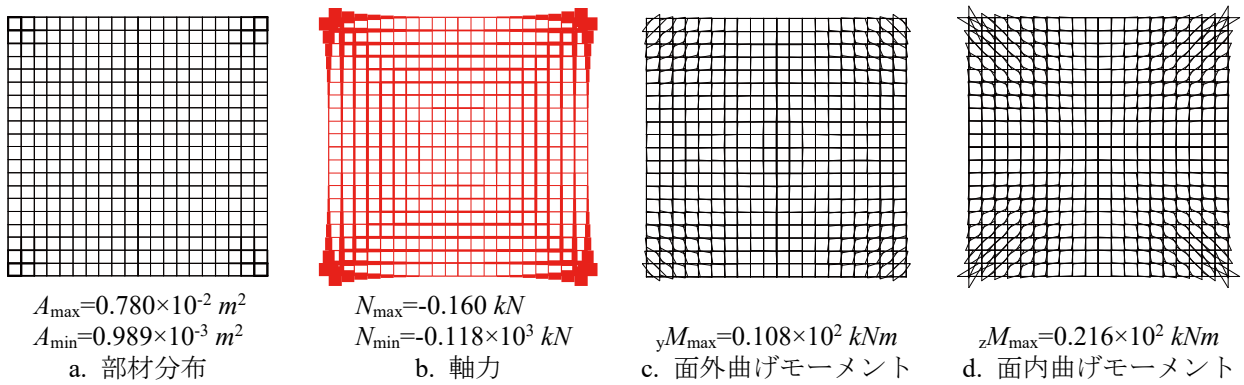


図 5.137 form-D43 の力学性状



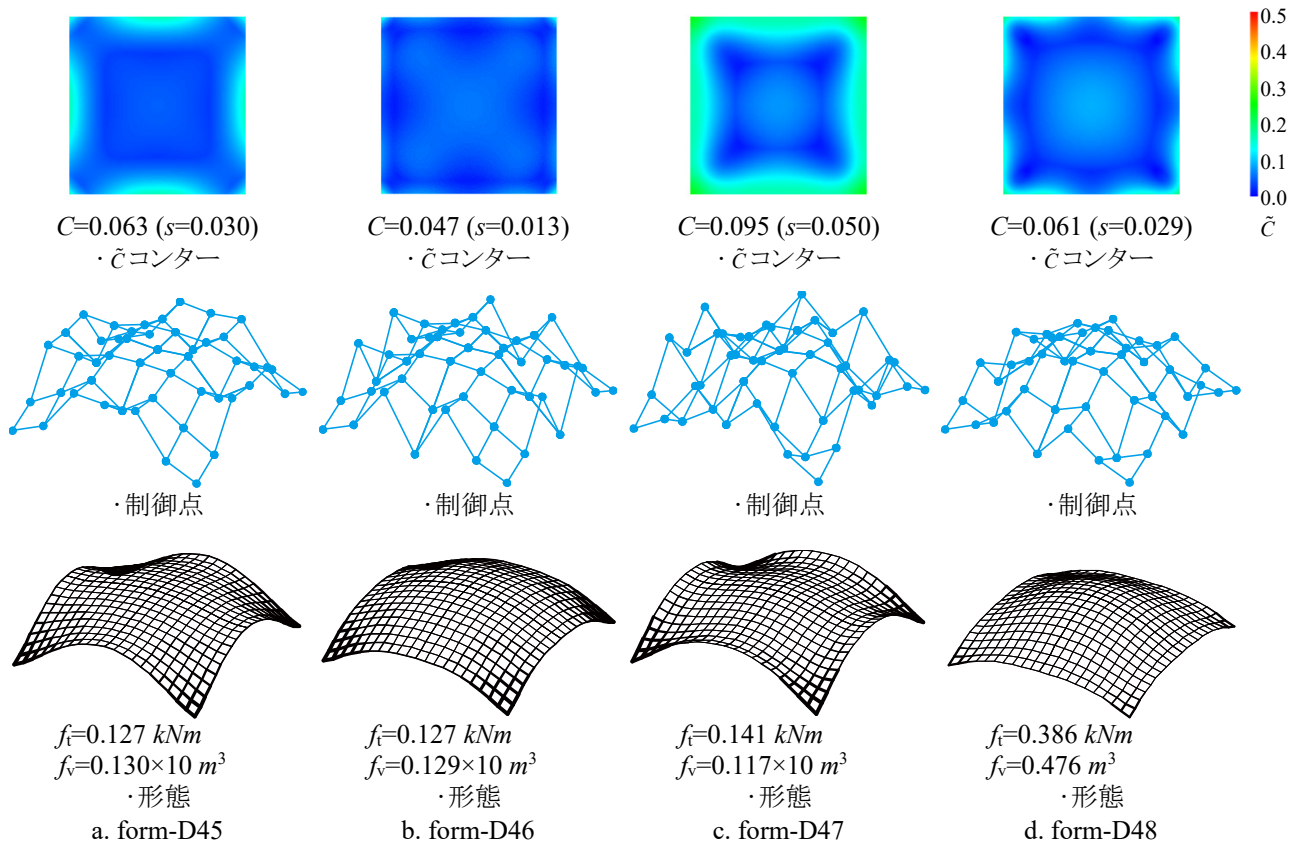
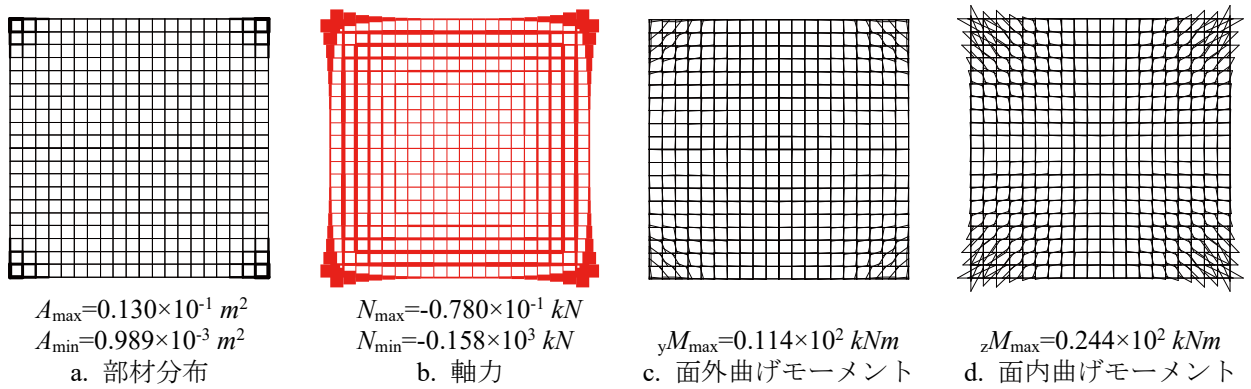

 図 5.138 優良解形態例 result-d36 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )


図 5.139 form-D48 の力学性状

#### 5.4.4 考察

$m_{uv}$  設定値にかかわらず、 $H = 0.1$  と大きく設定すると多様度指数  $D_p$  は大きな値に収束する。その結果、多様性を重視した探索が行われ、得られるパレート解がばらつく。 $m_{uv}$  の設定は、パレート解のばらつく幅を変化させ、大きく設定するほどばらつき方が低減する傾向である。これは、局所制御性にかかわる  $m_{uv}$  設定値が形状表現の自由度に影響し、設計変数空間および目的関数空間の両空間の探索範囲に影響するためである。多様性を重視しない設定の  $H = 0.01$  とした結果のうち、result-d13, -d25 では同一パレート解でも形状が異なっている。これは ISGA が設計変数空間の距離に基づいたクラスタリング後に相対評価を行う評価方法を採用しているため、複数のパレートフロントを同時に探索した結果である。SPEA2 ではこのような結果を得ることは困難である。

form-D21,- D22 (図 5.120 a, b), form-D23,- D24 (図 5.120 c, d), form-D29-D30 (図 5.126 a, b), form-D31-D32 (図 5.126 c, d), form-D38, -D39 (図 5.132 b, c) のように、目的関数空間上の同程度の位置において全く異なる解を ISGA は得ており、設計変数空間の多様性が高い結果を得た。強く湾曲する形状が優良解に含まれているが、単一目的最適化と比較して獲得される割合が少ない。 $f_i$  および  $f_v$  が共に大きくなりやすい形態であることから、相対的な評価が悪くなるためと考える。また、クラスタリングによって設計変数空間の多様性を重視しなければ最終世代に残らない解形態と考える。

単一目的最適化と同様に多目的最適化においても、 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなる。力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。

## 5.5 凸形状を有する非対称モデルのひずみエネルギー最小化(Model-E)

本節では、凸形状を有する鉄骨グリッドシェル全体のひずみエネルギー最小化を目標とした単一目的最適化問題を扱う。1m 間隔に部材配置したグリッドシェルに、座標を指定した凸形状の制約を与えたモデルを対象とする。

### 5.5.1 解析モデル

解析モデルは、図 5.140 に示す、隅角部ピン支持とした一辺が 20 m の正方形平板(節点数: 441, 要素数: 840)を基準形状とする。载荷条件は長期に自重  $78.5 \text{ kN/m}^3$  と等分布荷重  $1.0 \text{ kN/m}^2$  を設定する。グリッドシェルの材料は、表 3.1 に示す 20 種類の一般構造用炭素鋼管(STK400)とする。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (5-18)$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (5-19)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (5-20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (5-21)$$

$${}_z \tilde{r}_{22} = 9.0 \text{ m} \quad (5-22)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル( $= [A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル( $= [R_k]$ ),  $f$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $\mathbf{d}$ : 節点変位ベクトル,  $\mathbf{K}$ : 剛性マトリクス,  $R_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0 \text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $A_j^U = 20.0 \text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(5-21)は長期荷重に対する許容応力度設計による応力制約条件であり、鋼材の基準強度は  $235 \text{ N/mm}^2$ 、ヤング係数は  $2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ 、せん断弾性係数は  $7.8 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$  である。式(5-22)は「3.8.2 任意点座標指定」に示す、凸形状を得るために曲面の節点座標を指定する制約条件である。解析パラメータは表 5.5 のように設定する。

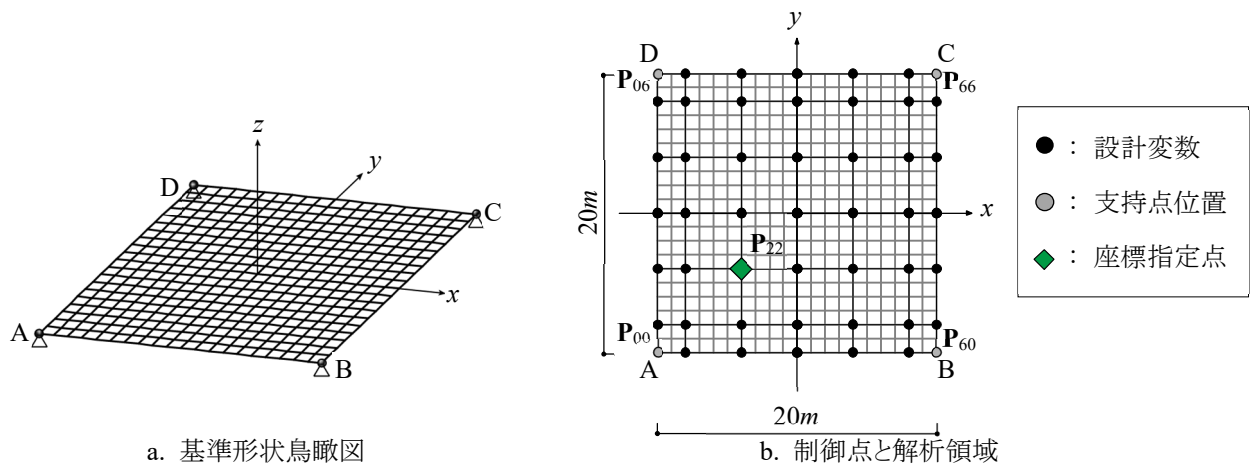


図 5.140 解析モデル

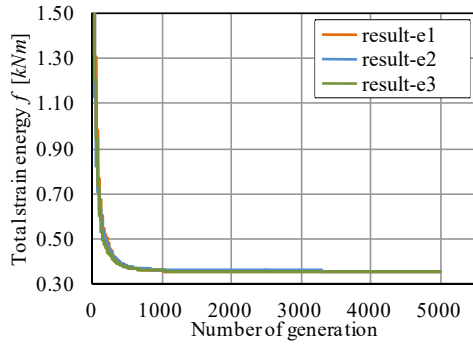
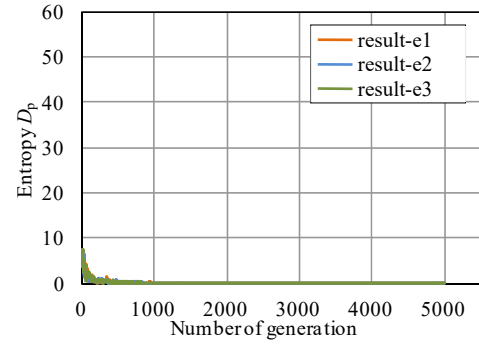
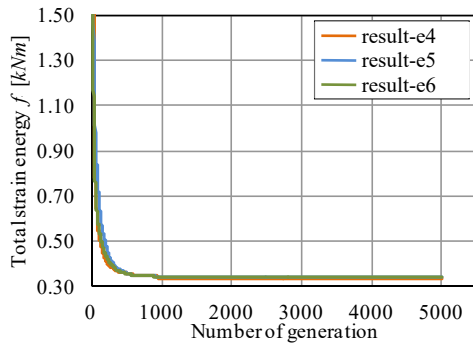
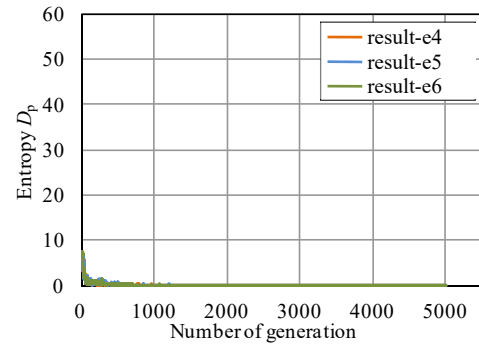
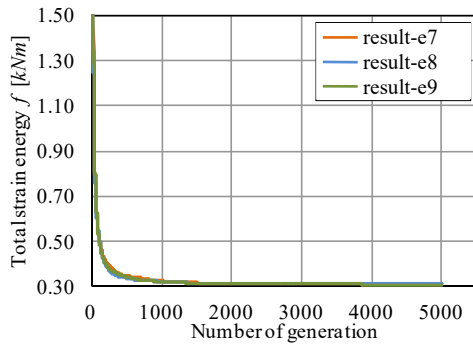
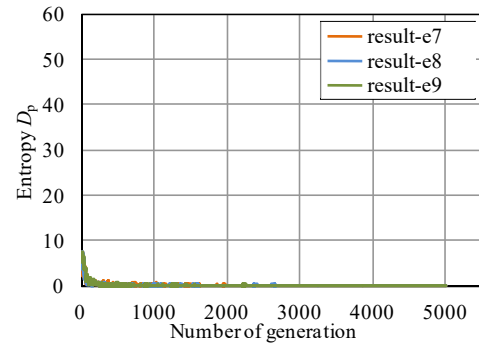
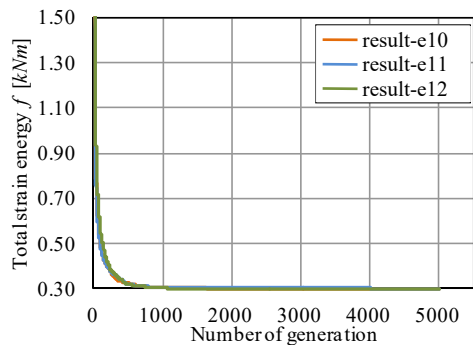
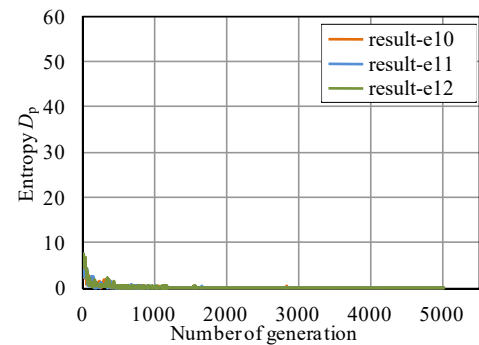
表 5.5 GA パラメータ (ISGA, SGA)

世代数	5000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.7 \times 10^{-3}$
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
<b>A</b> の遺伝子長	$49 \times 16 \text{ bit}$
<b>R</b> の遺伝子長	$44 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

### 5.5.2 SGA による数値結果

SGA による数値結果を図 5.141 - 5.149 に示す。図 5.141 - 5.144 は、SGA により得られた各階数設定 3 試行における解の収束状況であり、横軸が世代数、縦軸が **a**: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , **b**: 多様度指数  $D_p$  である。図 5.145 は、各試行で得られた解形態の  $\tilde{c}$  コンター図、制御点と座標指定点 (青色: 制御点, 緑色: 座標指定点), 形態鳥瞰図を示す。得られた解形態の力学性状を図 5.146 - 5.149 に示す (**a**: 部材分布, **b**: 軸力 (青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), **c**: 面外 ( $y$  軸まわり) 曲げモーメント, **d**: 面内 ( $z$  軸まわり) 曲げモーメント)。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\tilde{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力 (正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  $yM_{\max} \cdot zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメントである。

図 5.141 - 5.144 より、SGA は各  $m_{uv}$  設定値で試行回数によらずほぼ同じ解形態を捉える。目的関数値は 200 世代程度で収束し、その後大きな変化がない。したがって、得られた解は大域的最適解と判断する。図 5.145 より、得られた大域的最適解形態の  $\tilde{c}$  コンター図は  $m_{uv}$  設定値で異なり、目的関数値は  $m_{uv}$  が大きい方が小さい。これは、 $m_{uv}$  が小さい場合、局所的な形状の変化を与える制約であるため、凸形状の制約が与える影響が異なるためと考える。制約点位置のライズは、 $m_{uv}$  にかかわらず同値である。図 5.146 - 5.149 より、部材は各応力に従った分布となっており、面内抵抗型の力学特性を有している。

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.141 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=4$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.142 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=5$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.143 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=6$ )a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.144 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=7$ )

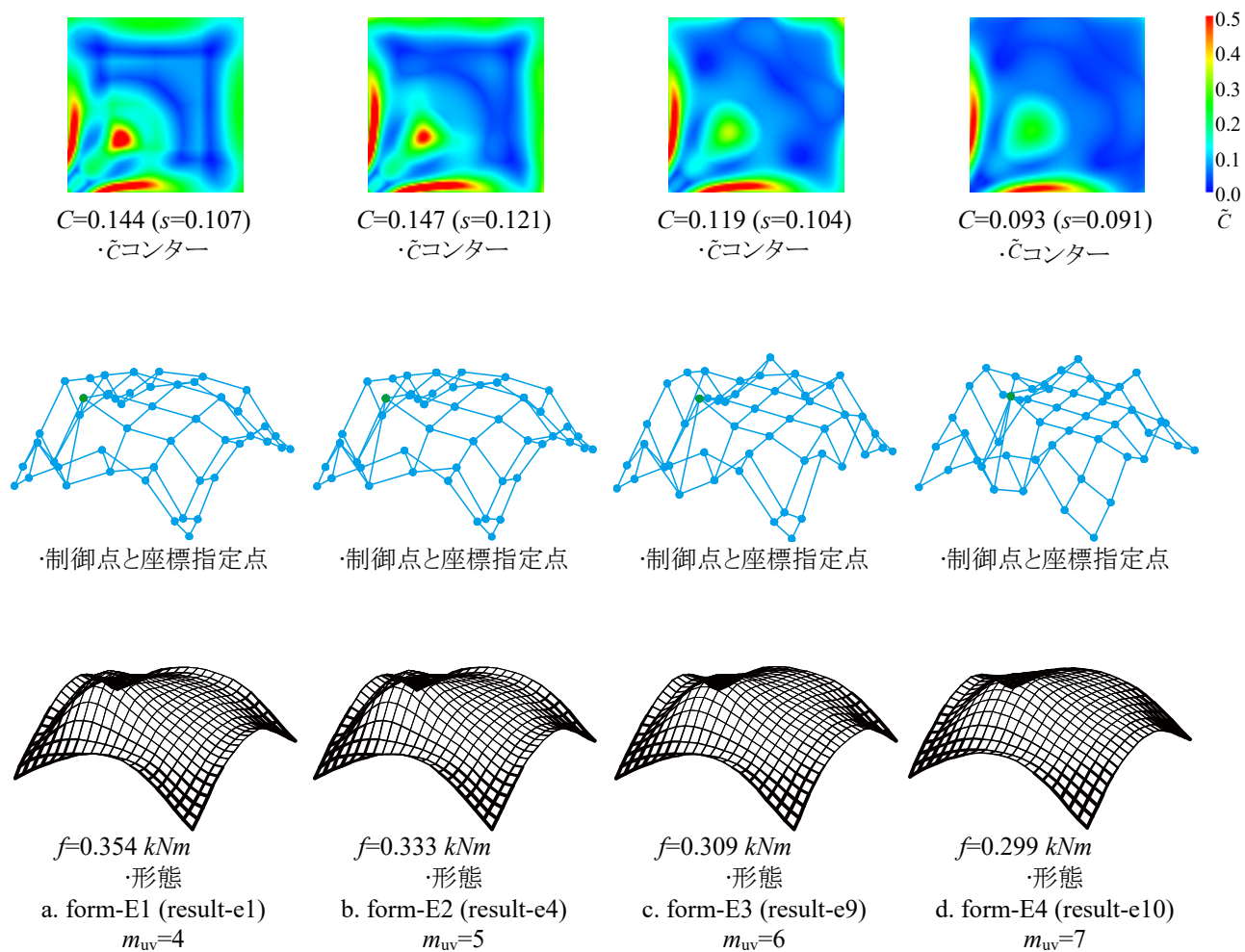
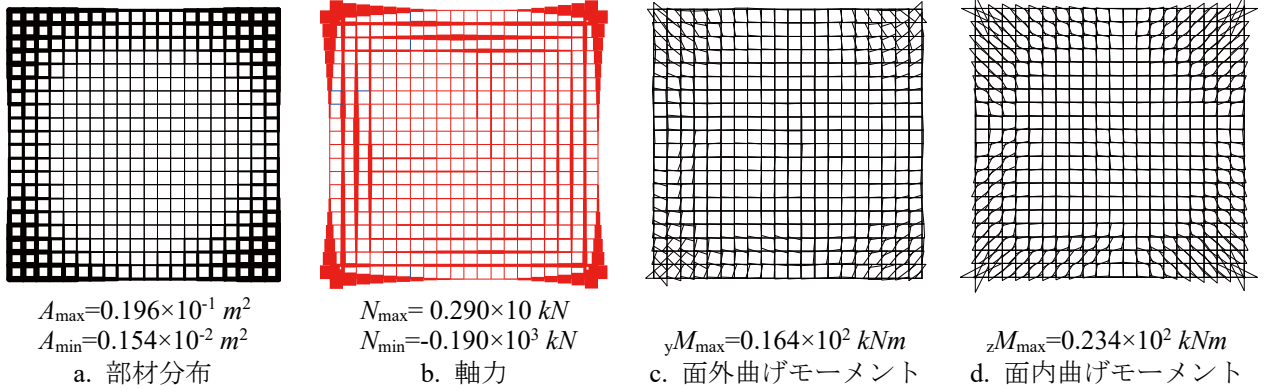
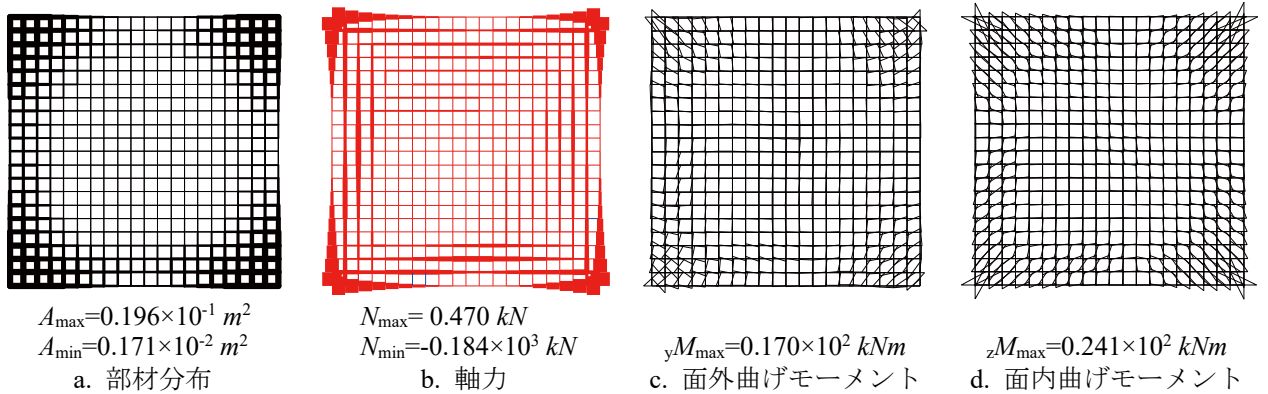
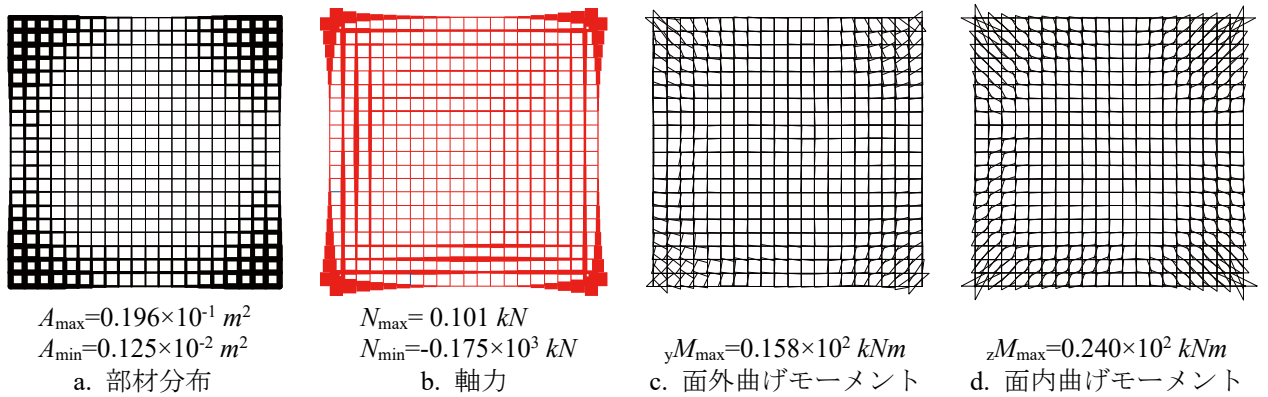
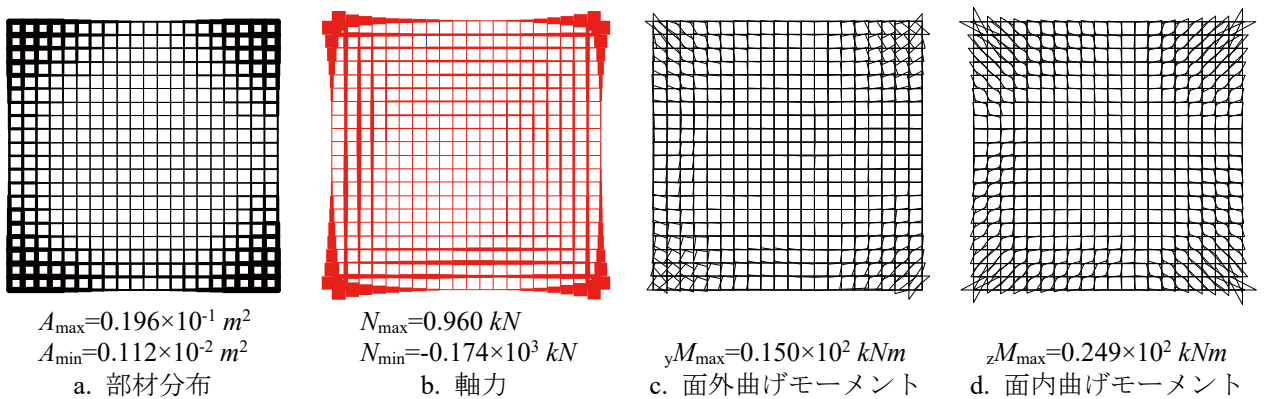


図 5.145 SGA の解形態例


図 5.146 form-E1 の力学性状 ( $m_{uv}=4$ )

図 5.147 form-E2 の力学性状 ( $m_{uv}=5$ )

図 5.148 form-E3 の力学性状 ( $m_{uv}=6$ )

図 5.149 form-E4 の力学性状 ( $m_{uv}=7$ )

### 5.5.3 ISGA による数値結果

図 5.150 - 5.173 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果の解の収束状況を図 5.150, 5.151 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.156, 5.157 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.162, 5.163 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.168, 5.169 ( $m_{uv} = 7$ ) に示し、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\tilde{c}$  コンター図、制御点と座標指定点 (青色: 制御点, 緑色: 座標指定点), 形態鳥瞰図を図 5.152, 5.154 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.158, 5.160 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.164, 5.166 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.170, 5.172 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。各々得られた記憶細胞内の適応度上位 10 個体から抜粋して示す。得られた優良解形態の力学性状 (a: 部材分布, b: 軸力 (青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外 ( $y$  軸まわり) 曲げモーメント, d: 面内 ( $z$  軸まわり) 曲げモーメント) を図 5.153, 5.155 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 5.159, 5.161 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 5.165, 5.167 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 5.171, 5.173 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\tilde{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力 (正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。

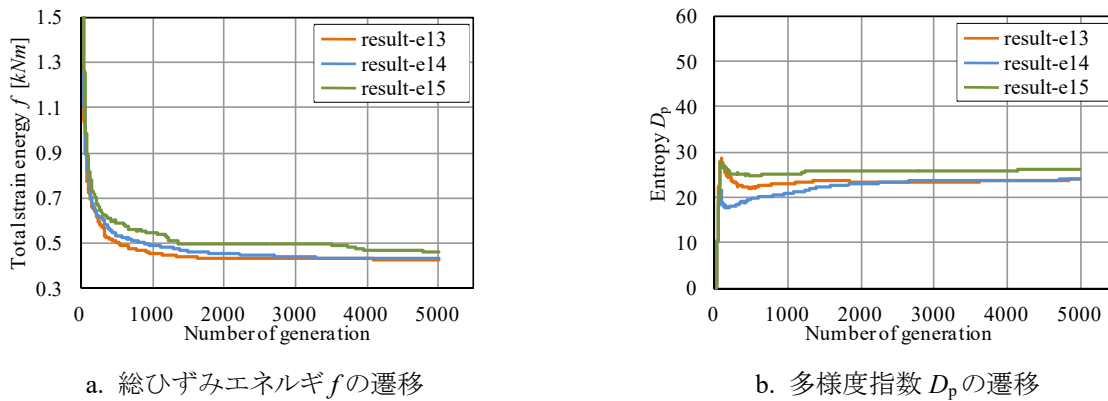


図 5.150 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.01$

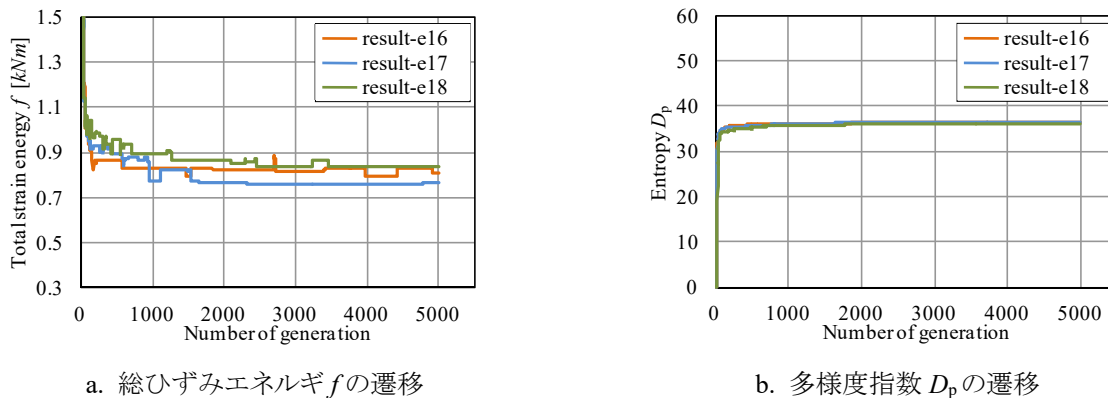


図 5.151 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.1$



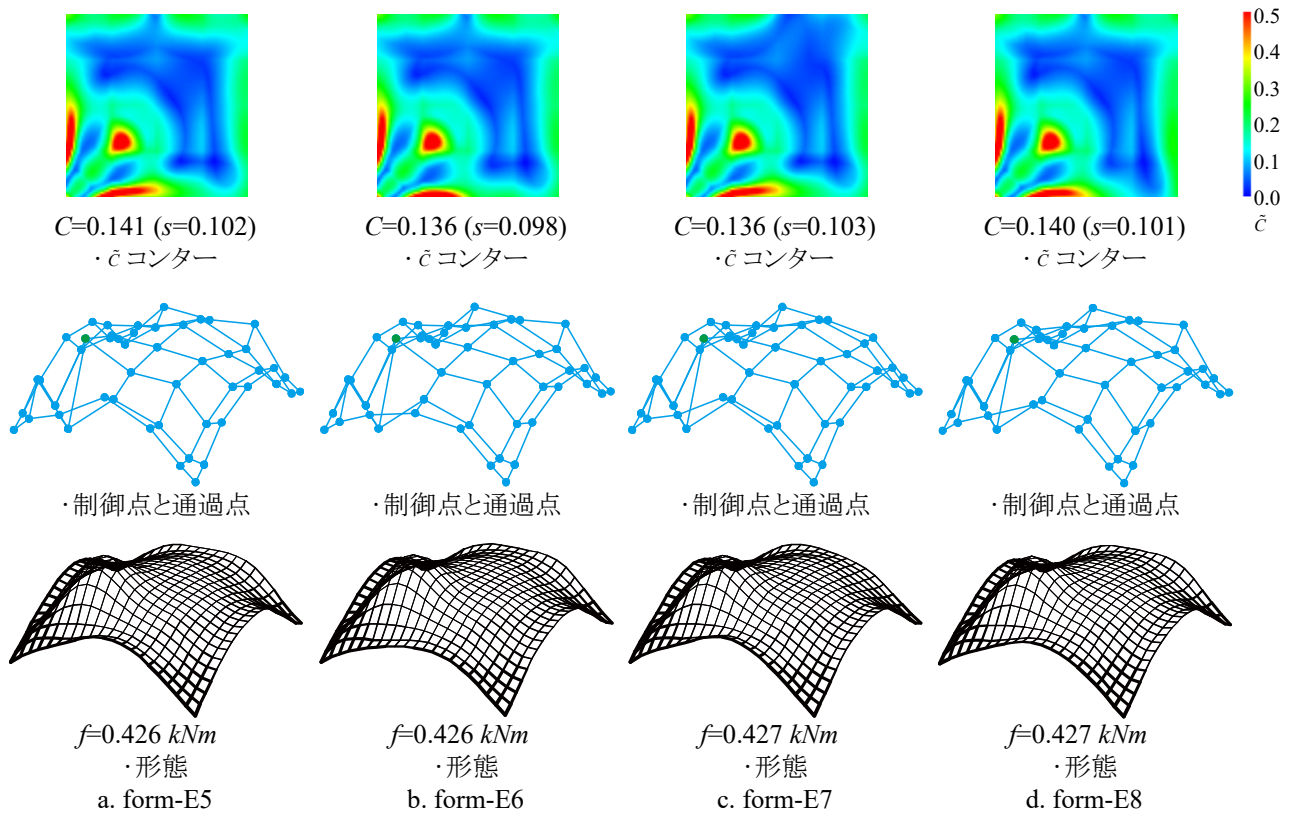


図 5.152 優良解形態例 result-e15 ( $m_{uv}=4$ ,  $H=0.01$ )

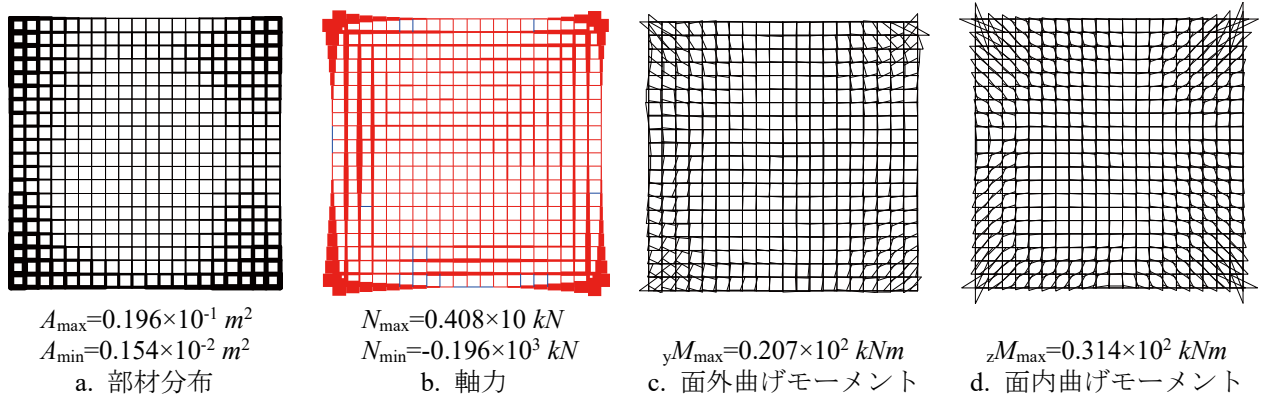


図 5.153 form-E5 の力学性状

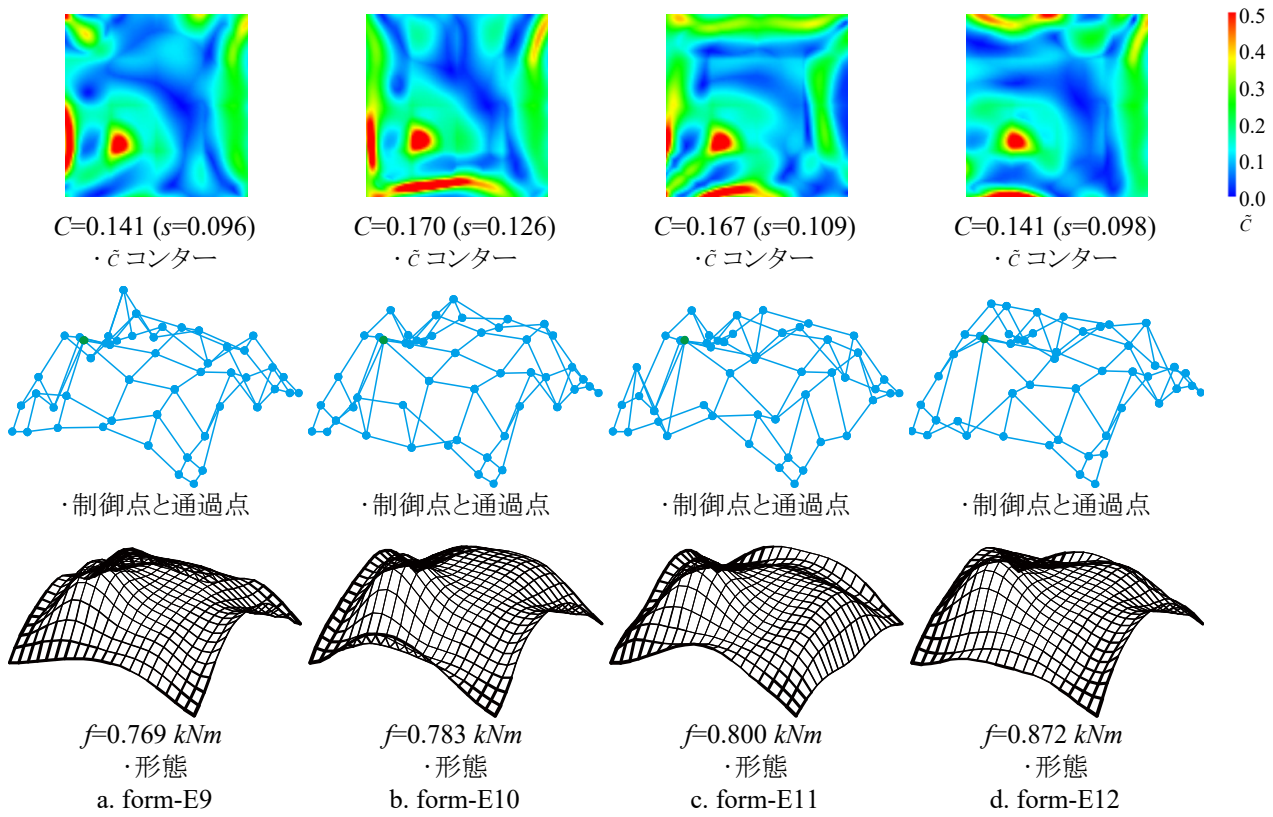


図 5.154 優良解形態例 result-e16 ( $m_{uv}=4, H=0.1$ )

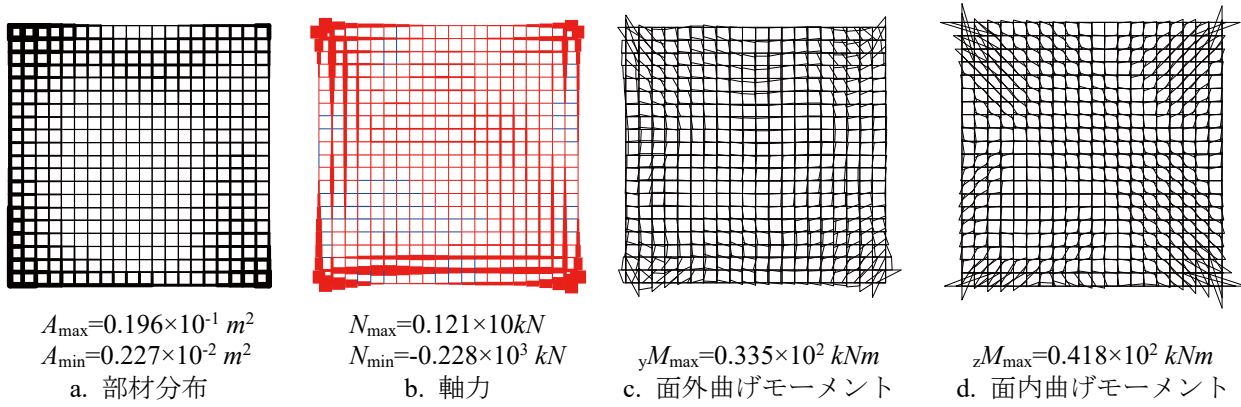
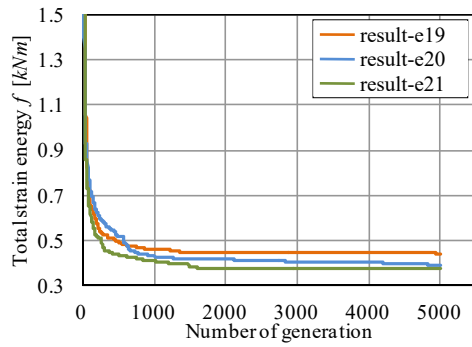
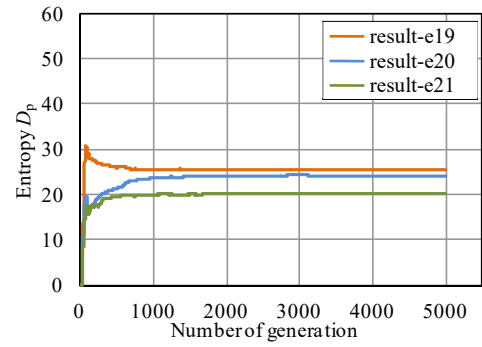
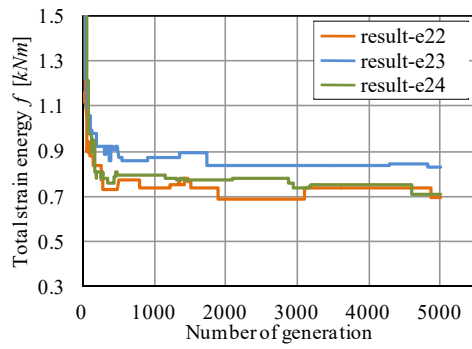
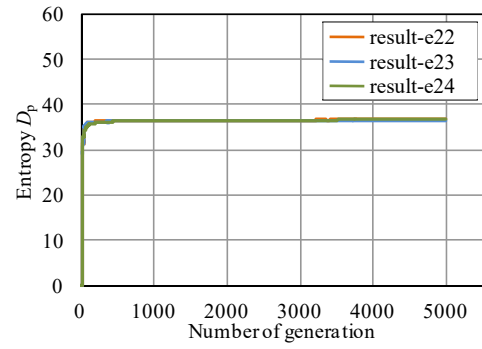


図 5.155 form-E10 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.156 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.157 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.1$

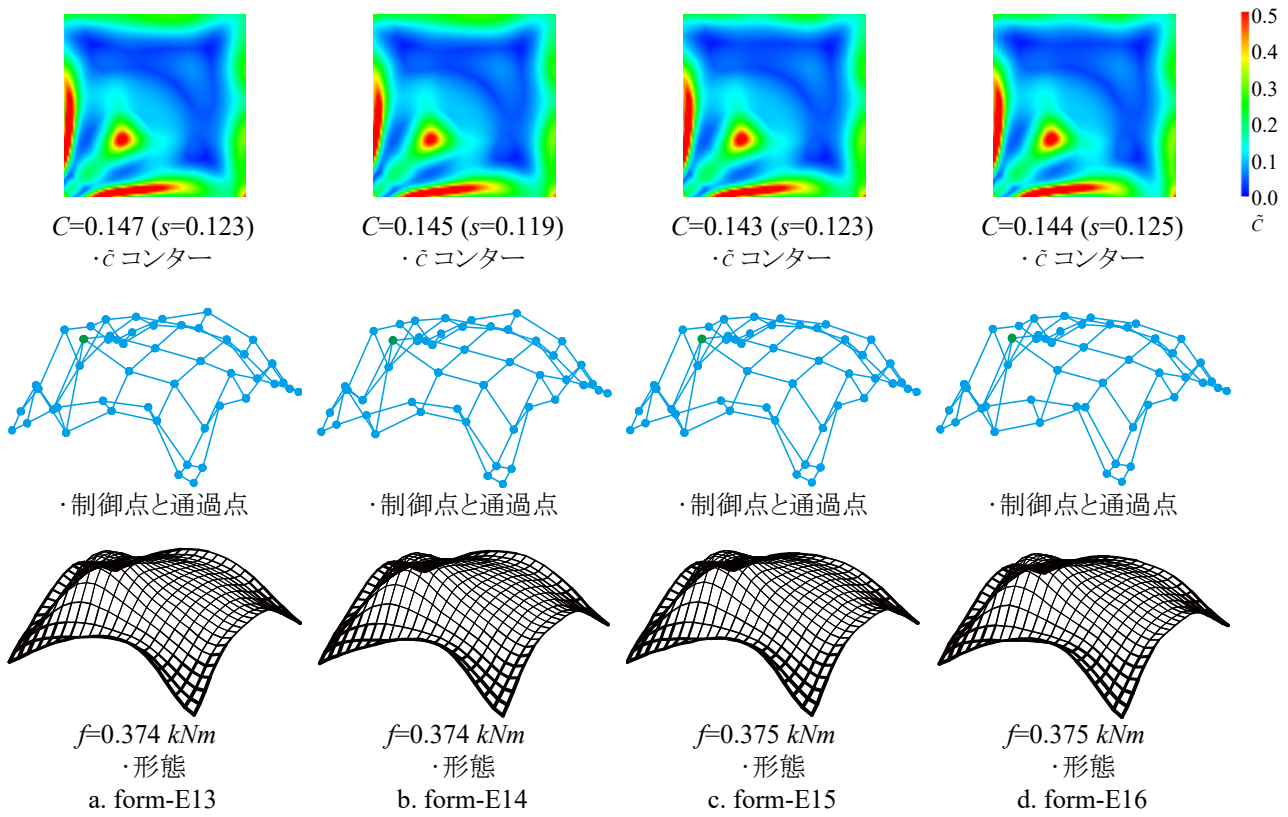


図 5.158 優良解形態例 result-e21 ( $m_{uv}=5, H=0.01$ )

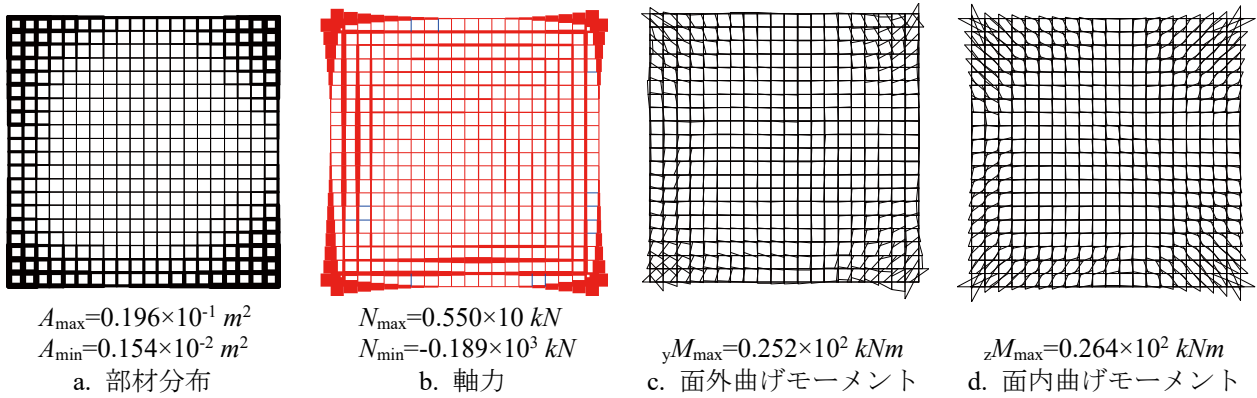


図 5.159 form-E13 の力学性状

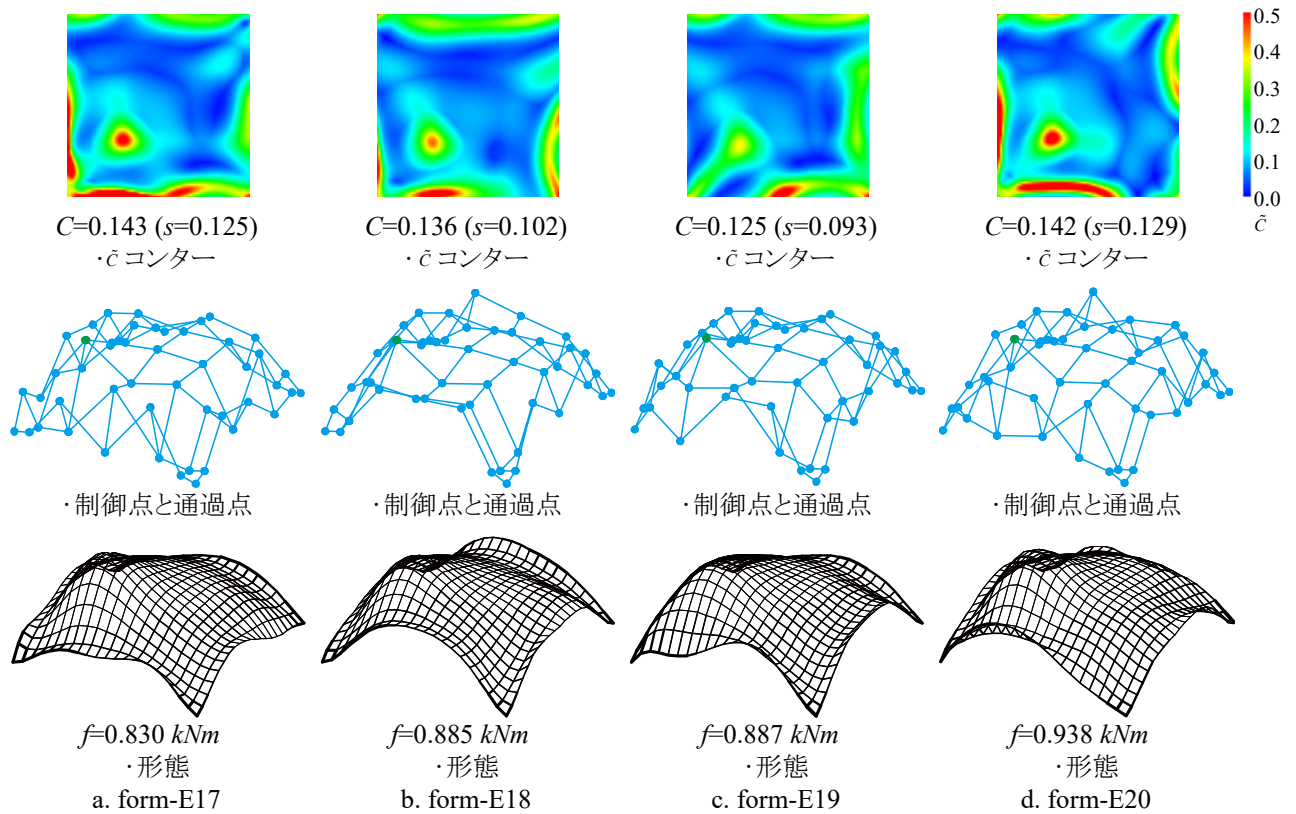


図 5.160 優良解形態例 result-e23 ( $m_{uv}=5, H=0.1$ )

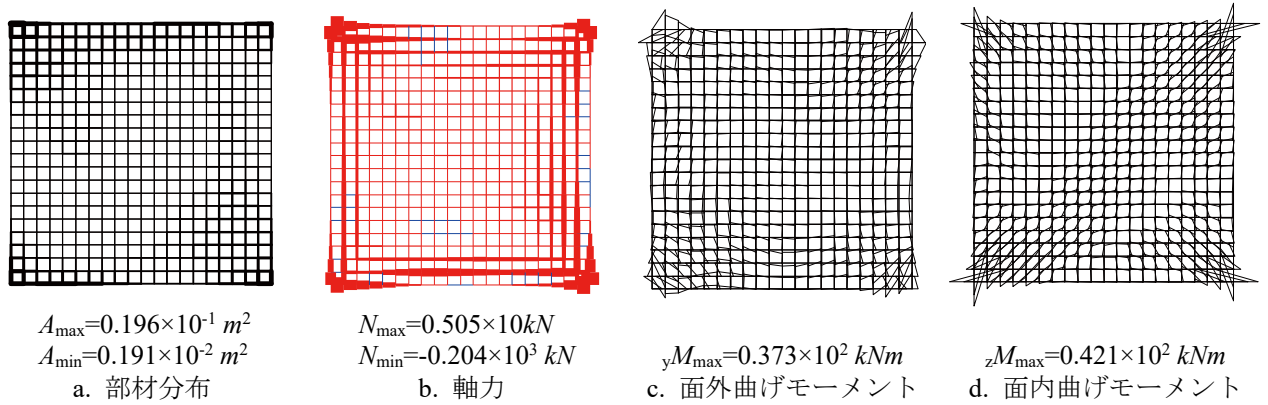
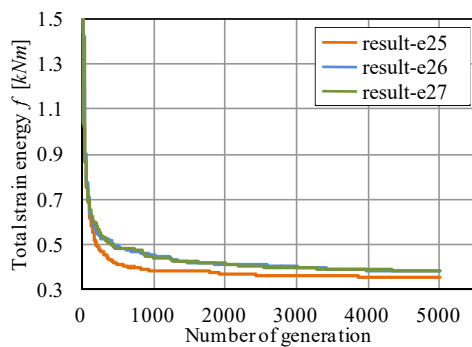
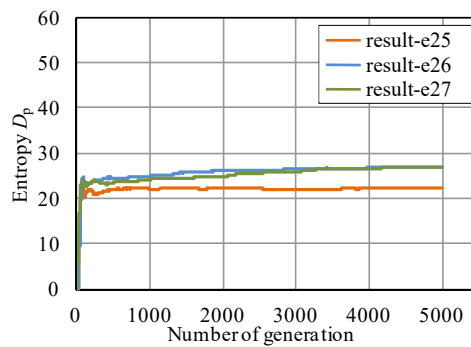


図 5.161 form-E17 の力学性状

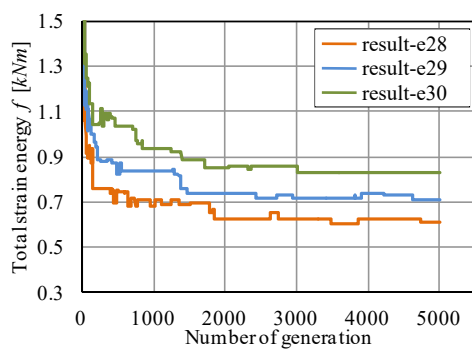


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

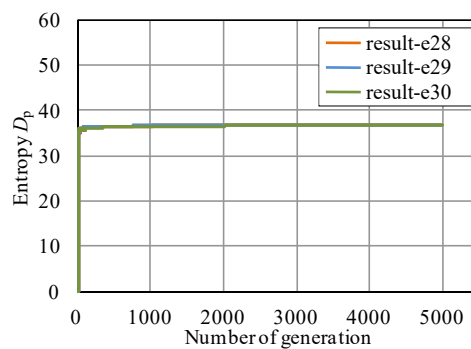


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.162 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.01$



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 5.163 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.1$

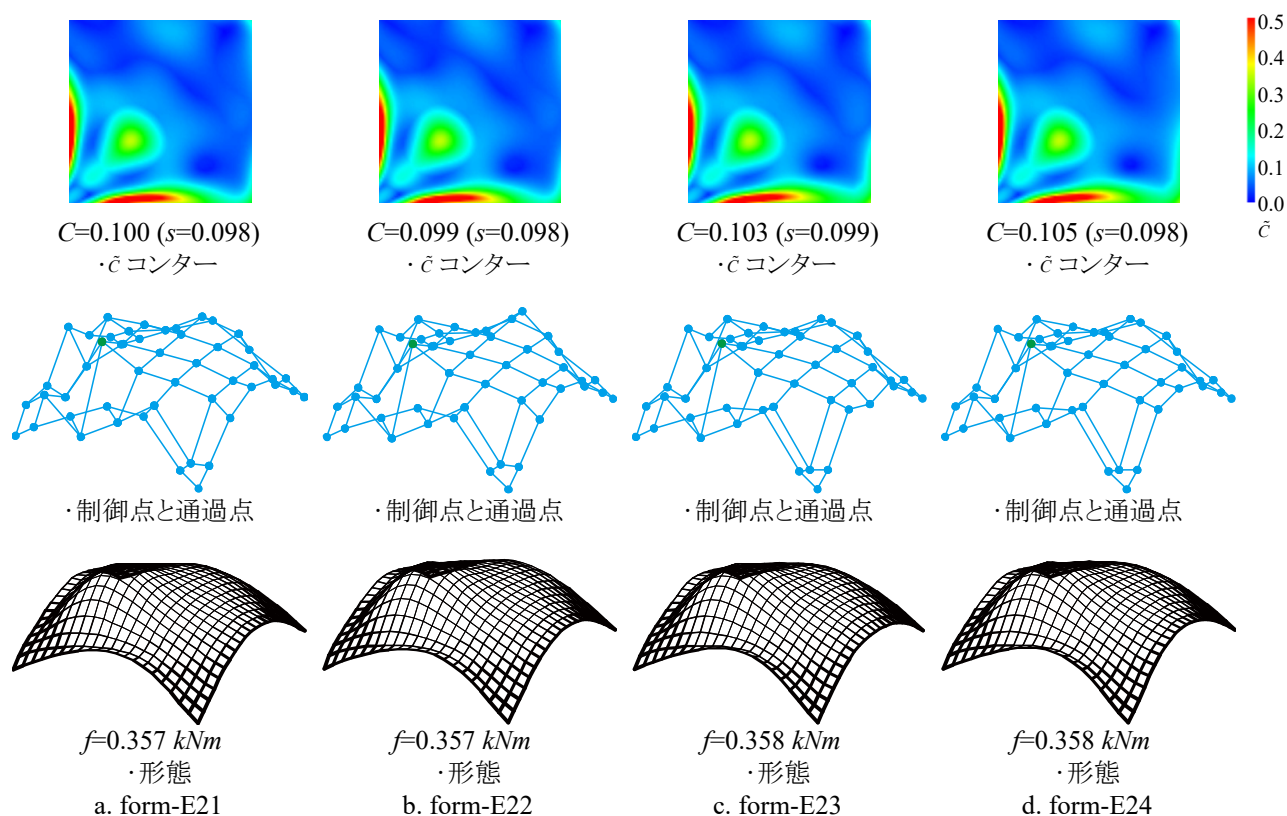
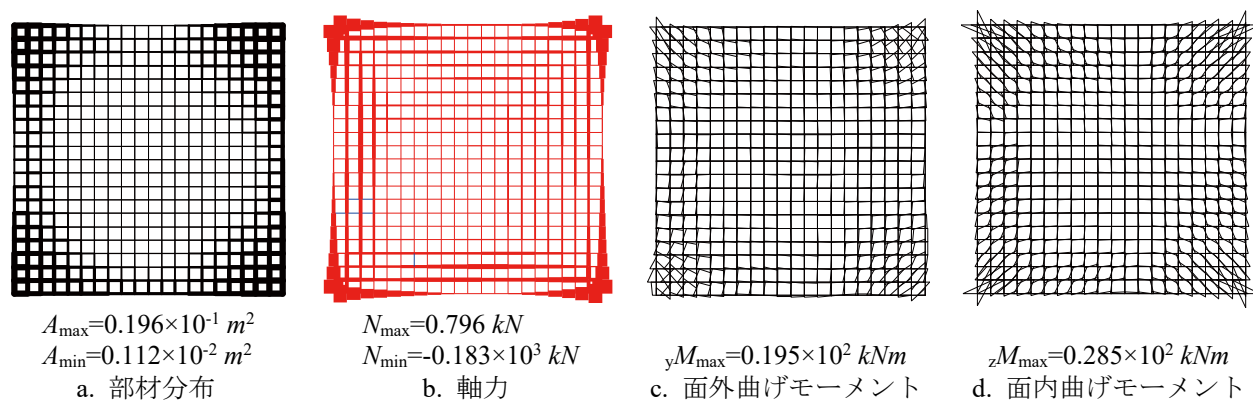
図 5.164 優良解形態例 result-e25 ( $m_{uv}=6$ ,  $H=0.01$ )

図 5.165 form-E21 の力学性状



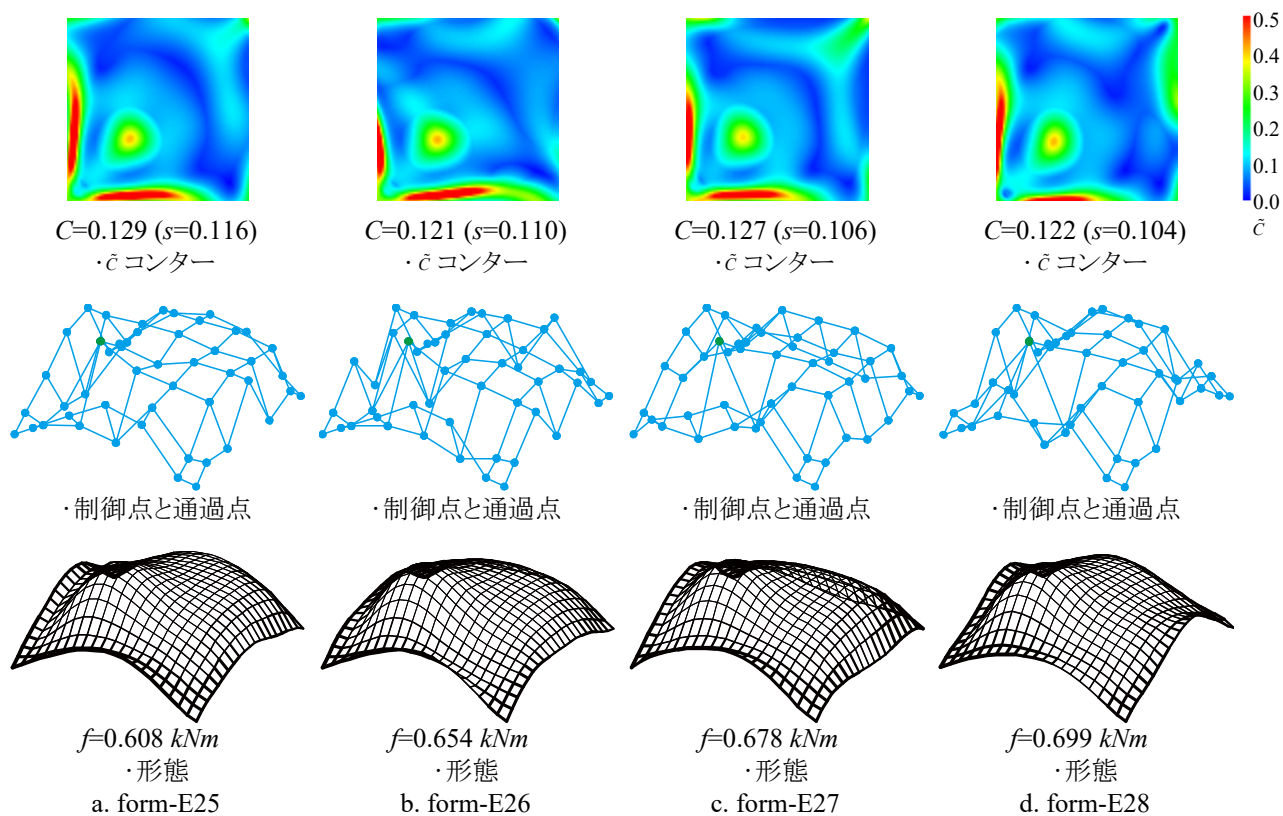


図 5.166 優良解形態例 result-e28 ( $m_{uv}=6, H=0.1$ )

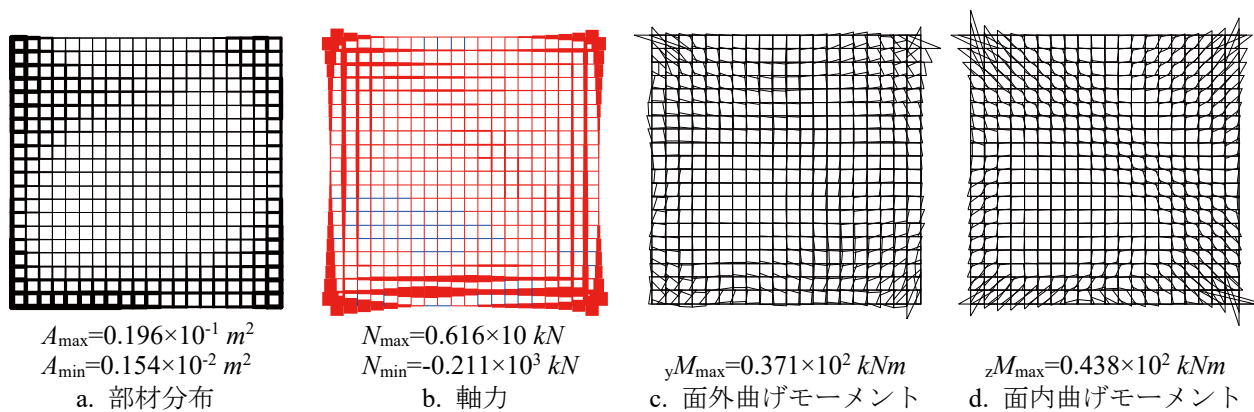
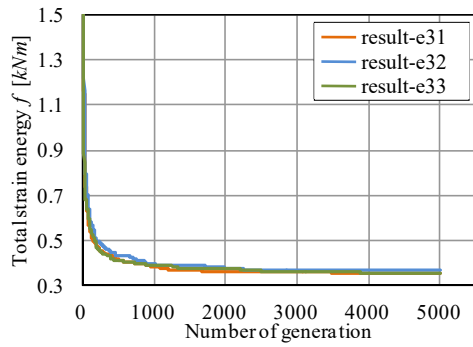
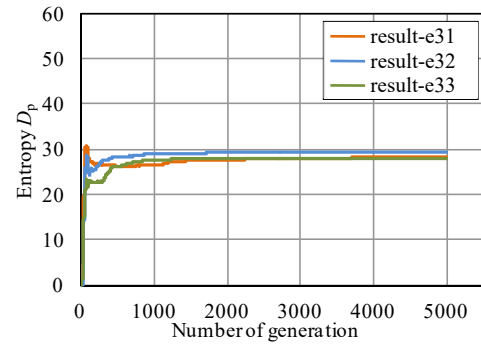
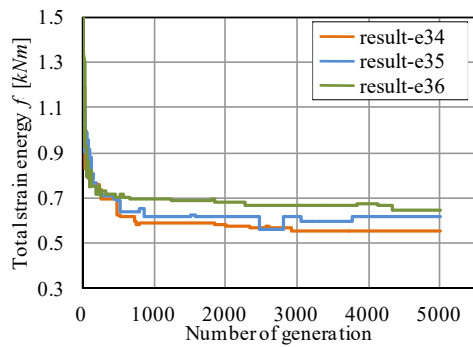
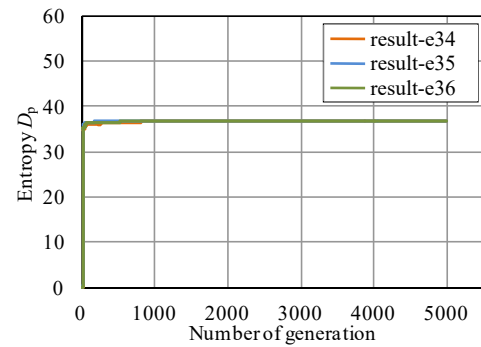


図 5.167 form-E26 の力学性状



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.168 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 5.169 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.1$

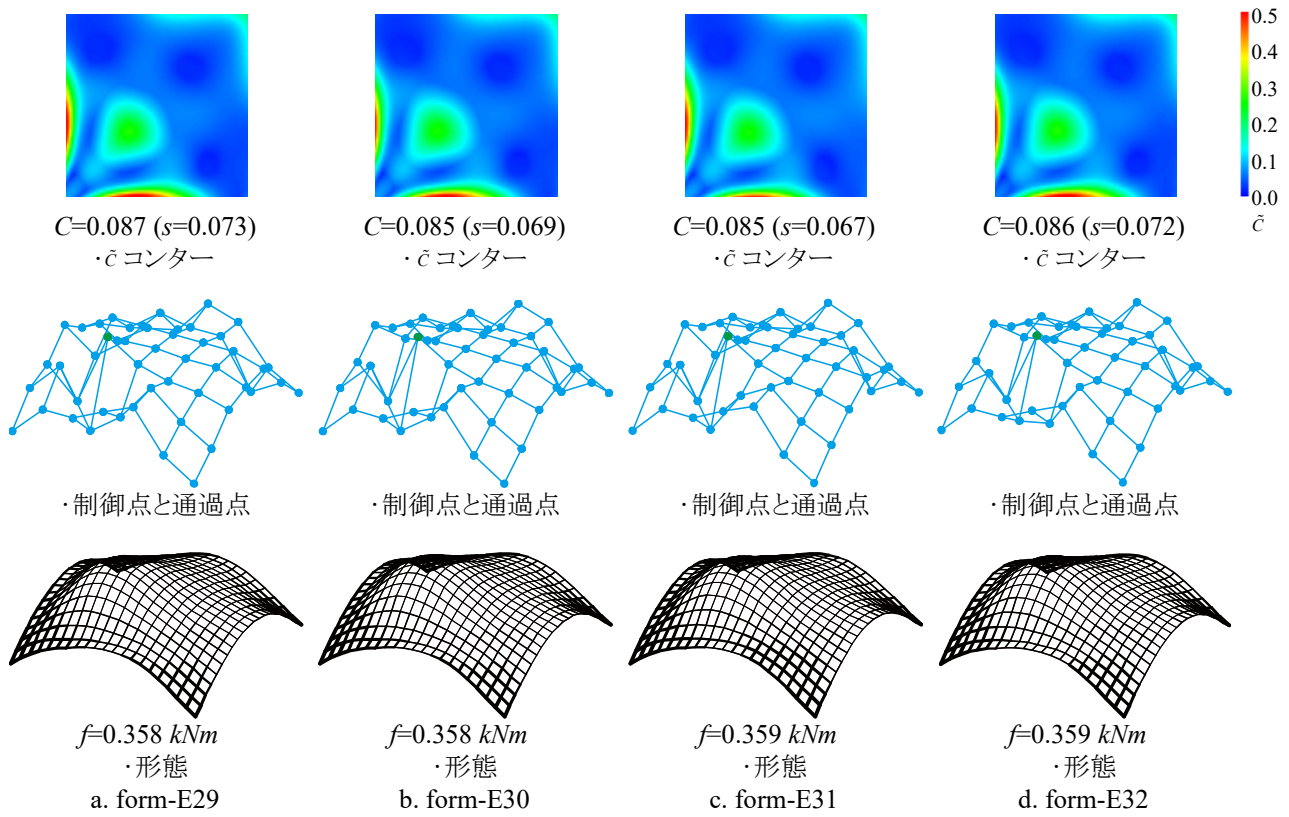


図 5.170 優良解形態例 result-e31 ( $m_{uv}=7, H=0.01$ )

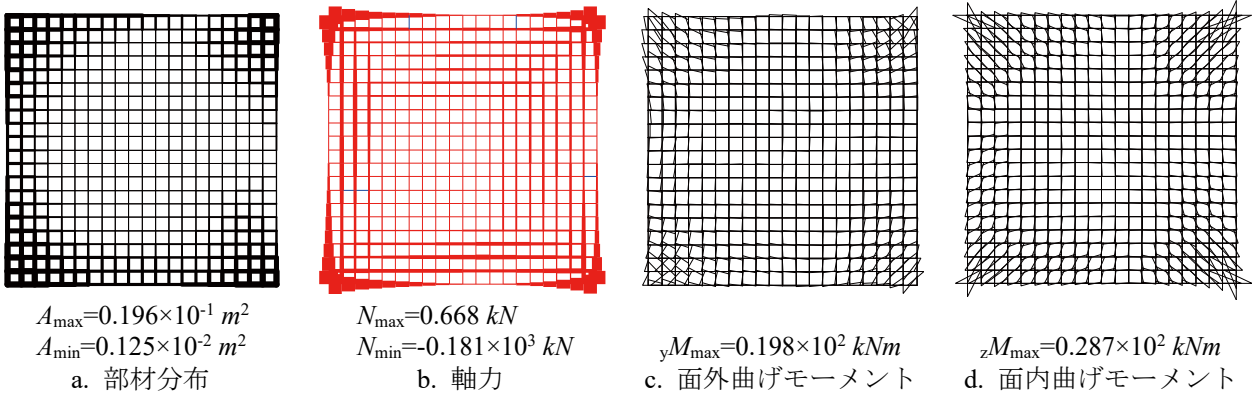


図 5.171 form-E29 の力学性状

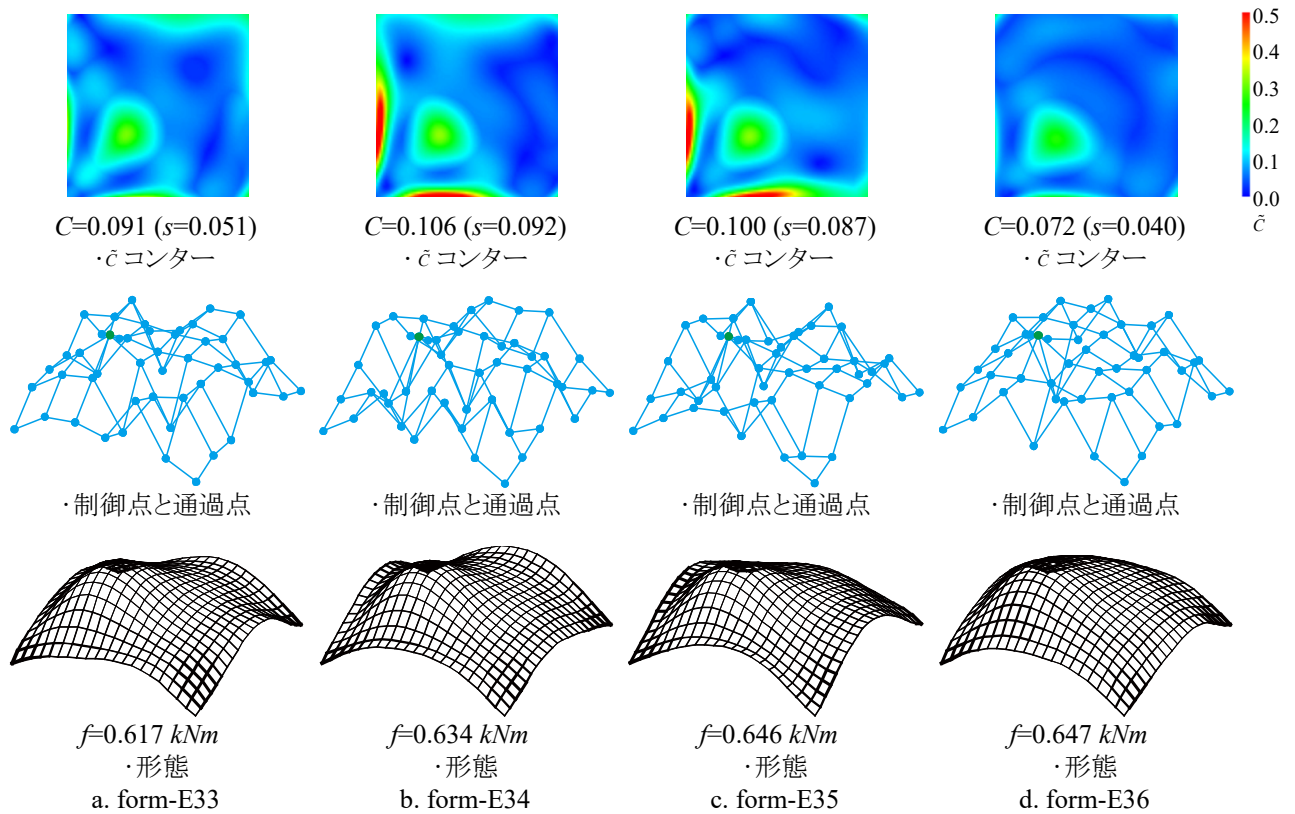


図 5.172 優良解形態例 result-e34 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )

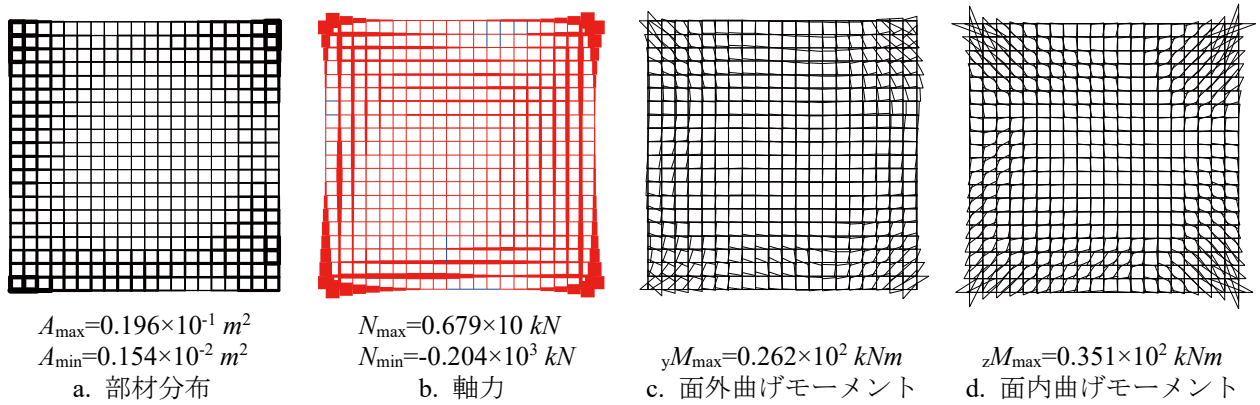


図 5.173 form-E34 の力学性状

### 5.5.4 考察

$H=0.01$  のとき目的関数値の収束状況と得られる解形態は SGA におおむね対応する。1000 世代にはほぼ収束値に達し、その後は収束値を維持する。 $H=0.01$  の設定における多様度指数  $D_p$  は、 $H=0.1$  と比較して低い値で変動が少なく、多様性を重視しない探索が行われる。記憶細胞内個体の解形態は多様性が低く、大域的最適解を含むその付近の解を探索した結果である。 $H=0.1$  とすると目的関数値が探索中に変動し、収束値にばらつきが生じる。また、 $D_p$  の値は試行ごとで比較的大きな値に安定して収束する。これは ISGA がエリート戦略を採っておらず、解の多様性に従って記憶細胞を更新するためである。

制約点を座標指定点として扱うことで、制約点位置が 9.0 m の凸形状曲面を複数得た。NURBS は  $m_{uv}$  設定値によって局所制御性が変化する特性を持つため、制約点位置の曲率が  $m_{uv}$  設定によって異なる。 $m_{uv}=4$  の場合、局所的な凸形状が表現される。 $m_{uv}=7$  は制約点の影響が曲面全体にわたるため、大きな凸形状が表現される。そのため、 $m_{uv}=7$  は制約点に形状が比較的強く制限される。ただし、大域的最適解の  $f$  は  $m_{uv}$  のを小さく設定するにつれて大きくなる。これは、 $m_{uv}$  が小さな設定では凸形状制約が局所的に影響し、制約による形状変化の影響が強いためと考える。得られた優良解には、form-E18, -E19 (図 5.160 a, b), form-E35, -E36 (図 5.172 c, d) のように、一度の試行で目的関数値がほぼ同値であるにもかかわらず形状が大きく異なる解を得た。これは ISGA が設計変数空間の多様性を維持した結果である。

NURBS の階数  $m_{uv}=4, 5, 6$  で多様性を重視しない結果( $H=0.01$ )において、凸形状に近い外周部分にめくれ上がる形状がみられる。これは、凸形状の制約に対し目的関数を低減させる形状を探索した結果と考える。どの階数設定においても、凸形状に近い外周部分に  $\tilde{C}$  が比較的大きな領域が存在しているが、 $m_{uv}=7$  では局所制御性が低いため、めくれ上がる形状が表現できない。多様性を重視した結果( $H=0.1$ )において、 $m_{uv}=4, 5$  に設定した優良解には form-E11 ( $m_{uv}=4$ )および form-E17, -E19 ( $m_{uv}=5$ )のように強く湾曲する形状、または form-E10 ( $m_{uv}=4$ ), form-E20 ( $m_{uv}=5$ )のように境界部がめくれ上がる形状が含まれる。 $m_{uv}=4, 5$  に設定することで形状のバリエーションに富んだ結果を得た。 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなり、特に、 $m_{uv}=7$  で  $C \geq 0.11$  の形態はほとんど得られない。これは、階数を大きく設定することで各制御点の影響力が弱まり、影響範囲が広がるためである。つまり、局所制御性が低い形状表現の自由度が抑制される

力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。この結果は、ISGA の探索において形状の設計変数のみ多様性を考慮し、部材選択に関する設計変数の多様性を考慮していない結果である。

## 5.6 まとめ

本章では、自由曲面グリッドシェルを対象に、総ひずみエネルギー最小化の単一目的最適化問題、および総ひずみエネルギーと部材体積の同時最小化の多目的最適化問題に ISGA を適用した。グリッドシェルの部材配置を、1m 間隔格子状配置、2m 間隔格子状配置、対角状配置の 3 種を扱い、多目的最適化は 1m 間隔格子状配置を対象とした。さらに、1m 間隔格子状配置のモデルにおいて座標値を指定した凸形状の制約を与えた非対称形状モデルの単一目的最適化問題も扱った。各々、自由曲面形状を記述する NURBS の階数を変化させ、得られる優良解形態を示した。得られた知見を以下に示す。

- 1) 大域的最適解形状は階数設定によって異なり、対称形状モデルでは階数設定値が小さいほど評価の高い解が得られる傾向がある。
- 2) 階数設定値を小さくすることで制御点の局所制御性が高まり、多様性を重視した優良解探索を行った場合、強く湾曲する形状や境界部付近がめくれ上がる形状が得られる。
- 3) 優良解は、NURBS の局所制御性の影響により、階数設定値を小さくした方がバリエーションが多い。階数設定値が大きい場合、滑らかな形状の優良解が得られる。
- 4) 軸力抵抗機構の形成特性が部材配置方向および密度に依存するため、優良解の傾向が異なる。
- 5) 部材配置方向・密度、および NURBS の階数設定値に関わらず、応力状況に従って効率的な部材分布の解が得られる。
- 6) 総ひずみエネルギーおよび部材体積の同時最小化において、強く湾曲する形態は、両目的関数値とも大きくなりやすいが、設計変数空間における多様性を重視することにより獲得できる。
- 7) 座標値を指定した形状制約を与えることで、階数に応じた凸形状を有する多様な形態が得られる。

以上より、本章では自由曲面グリッドシェルの形態の ISGA による優良解と NURBS の階数の関係を示した。ISGA はここで示した種々の条件に対し、階数に応じて異なる優良解形態を獲得する。



## 第6章 RC シェル構造の形態創生

---

### *Chapter 6: Structural Morphogenesis for RC Shell*





## 第6章 RC シェル構造の形態創生

本章では、RC シェルの構造形態創生問題における数値計算例を示す。

### 6.1 解析モデル

RC シェルの解析モデルは、図 6.1 に示す、隅角部 3 節点ピン支持とした一辺が  $20\text{ m}$  の正方形平板を基準形状とする。図 6.1b のハッチ部に示す対称性を考慮した 1/4 領域を解析対象とする(節点数: 289, 要素数: 256)。載荷条件は長期に自重  $24.0\text{ kN/m}^3$  と等分布荷重  $1.0\text{ kN/m}^2$  を設定する。材料は普通コンクリート Fc30、鉄筋は D16@150 ダブル配筋(SD295A)とする(図 6.1)。引張鉄筋重心位置は応力方向に依らず  $d_t=70\text{ mm}$  とする。部材条件を表 6.1 に示す。

表 6.1 RC 部材条件

自重	$24.0\text{ kN/m}^3$
ヤング係数	$2.1862 \times 10^7\text{ kN/m}^2$
ポアソン比	0.2
配筋	D16@150 ダブル(SD295)
鉄筋許容引張応力度	$195\text{ N/mm}^2$
コンクリート許容圧縮応力度	$10\text{ N/mm}^2$

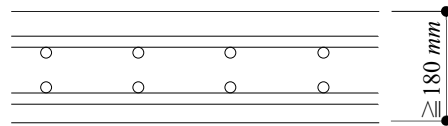


図 6.1 鉄筋の想定

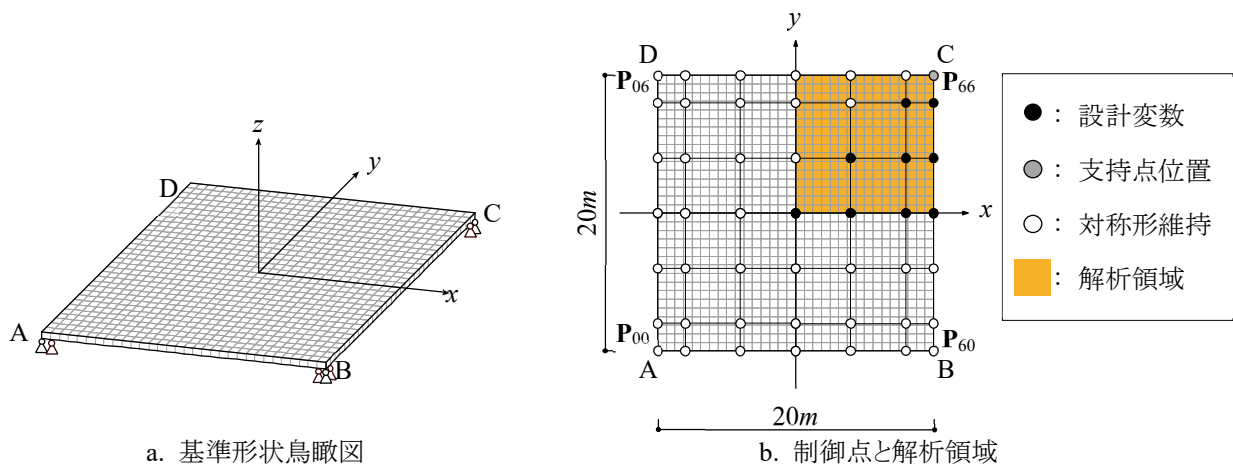


図 6.2 解析モデル

## 6.2 鉄筋の許容応力度を考慮したひずみエネルギー最小化 (Model-F)

本節では応力制約に許容緑圧縮応力と鉄筋の許容応力度を考慮した許容曲げモーメントを適用した RC シェルの総ひずみエネルギー最小化の単一目的最適化問題を扱う。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (6-1)$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (6-2)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (6-3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (6-4)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル(=  $[A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル(=  $[R_k]$ ),  $f$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $\mathbf{d}$ : 節点変位ベクトル,  $\mathbf{K}$ : 剛性マトリクス,  $R_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0 \text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.18 \text{ m}$ ,  $A_j^U = 0.30 \text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(6-4)は式(2-125)に示す許容圧縮応力度と、式(2-126)に示す鉄筋の許容応力度を考慮した曲げモーメントによる応力制約条件である。応力検定は、面外力の最大・最小方向、ならびに面内力の最大・最小方向の計4方向に対し、長期許容応力度設計として行う。解析パラメータは表 6.2 のように設定する。

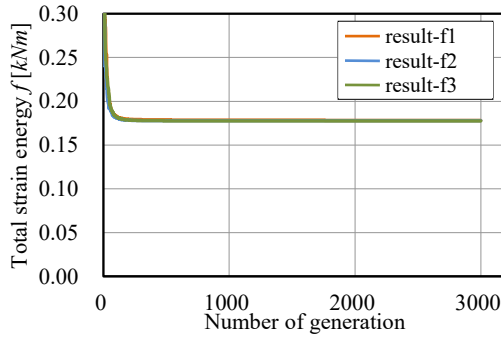
表 6.2 GA パラメータ (ISGA, SGA)

世代数	3000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$
交叉方式	2点交叉
選択方式	トーナメント
$\mathbf{A}$ の遺伝子長	$10 \times 16 \text{ bit}$
$\mathbf{R}$ の遺伝子長	$9 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

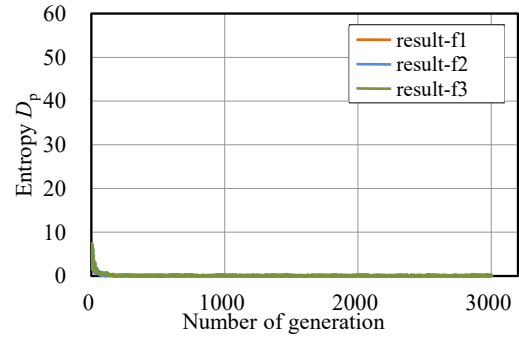
### 6.2.1 SGA による数値結果

SGA による数値結果を図 6.3 - 6.11 に示す。図 6.3 - 5.144 は、SGA により得られた各階数設定 3 試行における解の収束状況であり、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。図 6.7 は、各試行で得られた解形態の  $\bar{c}$  コンター図、制御点、形態鳥瞰図を示す。得られた解形態の力学性状を図 6.8 - 6.11 に示す (a: 板厚分布, b: 主応力, c: 曲げモーメント)。板厚分布図の実線太さは板厚の比率、主応力図の実線長さは主応力の比率 (赤色: 圧縮、青色: 引張)、曲げモーメント分布図の円の大きさは曲げモーメントの比率 (赤丸: 下に凸、青丸: 上に凸) を示す。結果数値情報は、 $E_b$ : 曲げひずみエネルギー,  $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\bar{c}$  の標準偏差,  $t_{\max} \cdot t_{\min}$ : 最大・最小板厚,  $\sigma_{\max} \cdot \sigma_{\min}$ : 最大・最小主応力 (正值: 引張, 負値: 圧縮),  $M_{\max}$ : 最大曲げモーメント である。

図 6.3 - 5.144 より、SGA は各  $m_{uv}$  設定値で試行回数によらずほぼ同じ解形態を捉える。目的関数値は 200 世代程度で収束し、その後大きな変化がない。したがって、得られた解は大域的最適解と判断する。得られた形態は既往研究で報告されている最適形態 (カタナリー曲面) に対応している。図 6.7 より、得られた大域的最適解形態の  $\bar{c}$  コンター図は  $m_{uv}$  設定値で異なる。目的関数値は、 $m_{uv}$  設定値が小さいほど評価が高い。図 6.8 - 6.11 より、部材は各応力に従った分布となっており、面内抵抗型の力学特性を有している。曲げモーメント分布図より、 $m_{uv}$  設定値を小さくするにつれて中央および外周アーチ中央付近の曲げモーメントが小さくなる。これらの結果は、 $m_{uv}$  設定値が低いほど局所的制御性が高まることから、形態全体の平均的な曲げモーメントが小さくなる形態を探索することができたためと考える。

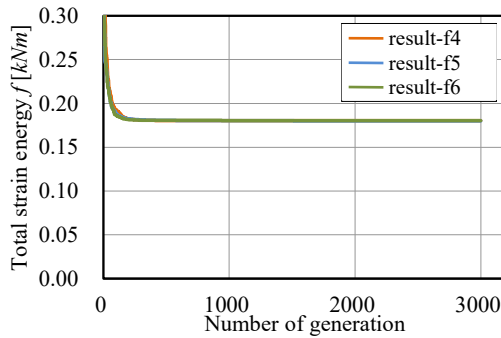


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

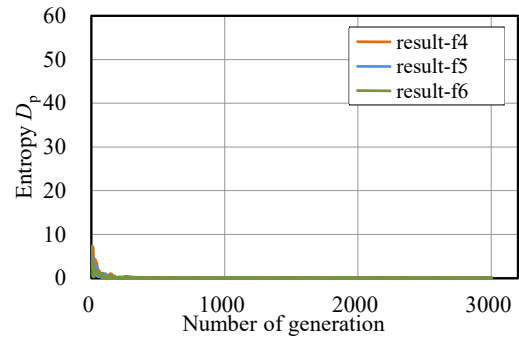


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.3 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=4$ )

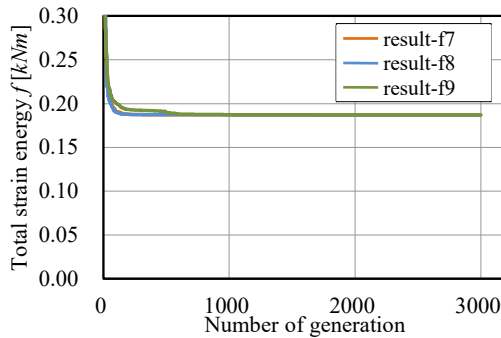


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

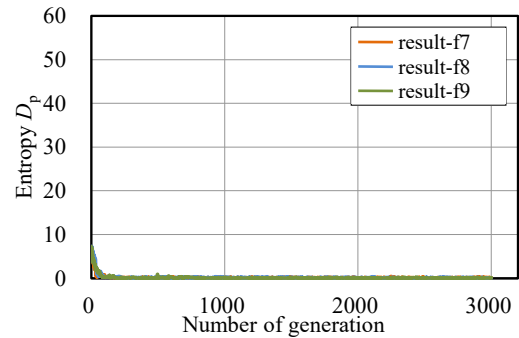


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.4 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=5$ )

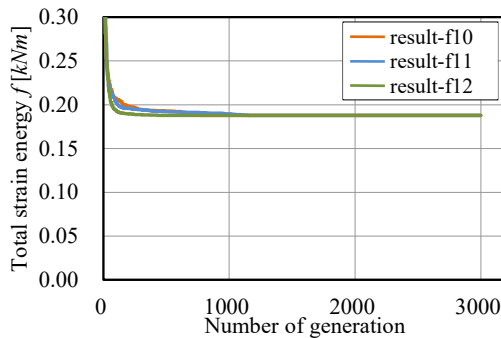


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

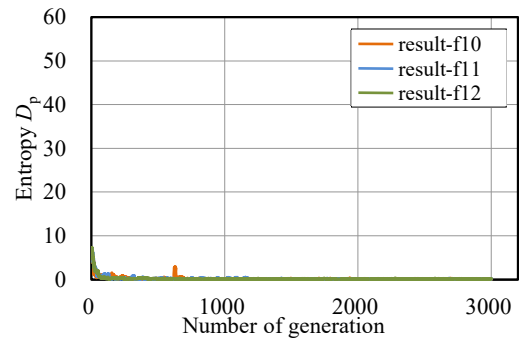


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.5 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=6$ )



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.6 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=7$ )

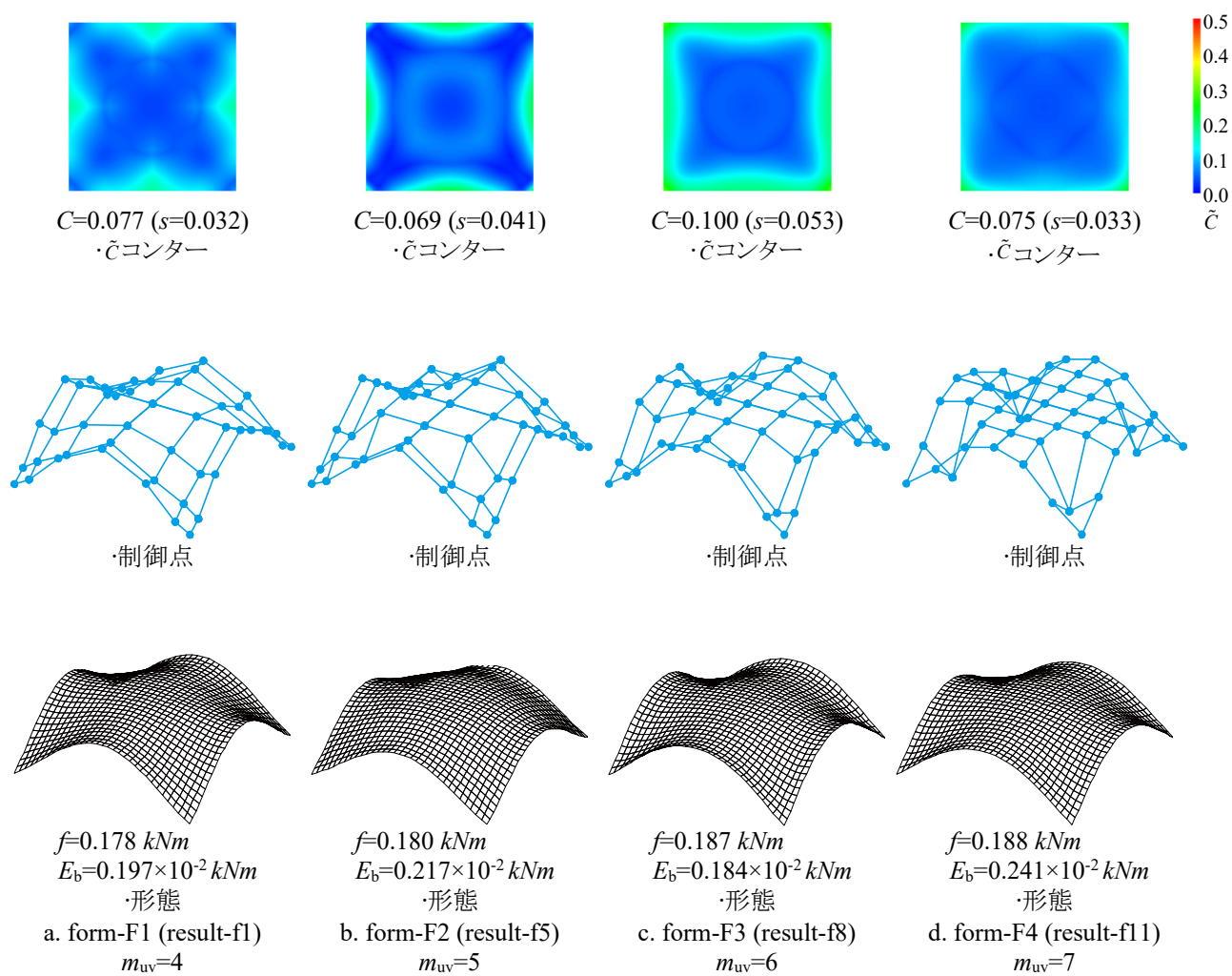
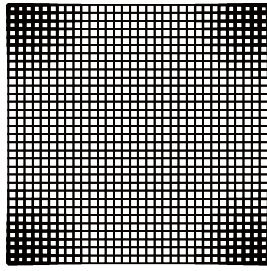
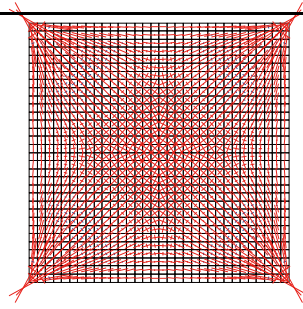


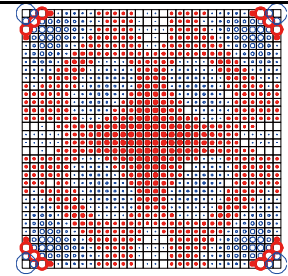
図 6.7 SGA の解形態例



$t_{\max}=0.297\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

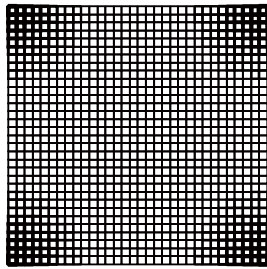


$\sigma_{\max}=0.651 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.231 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

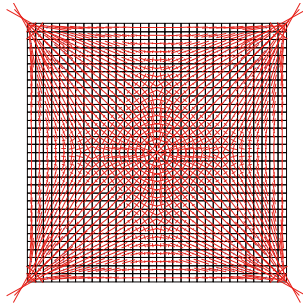


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.599 \times 10\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

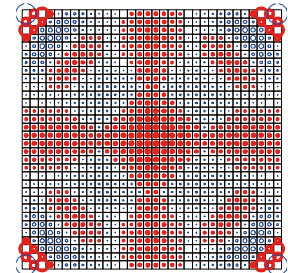
図 6.8 form-F1 の力学性状 ( $m_{uv}=4$ )



$t_{\max}=0.297\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

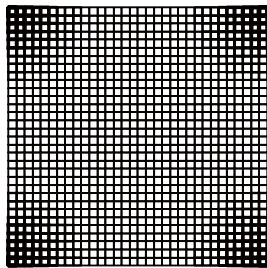


$\sigma_{\max}=0.395 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.233 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

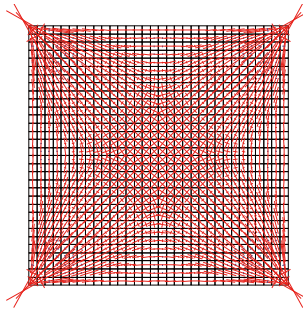


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.605 \times 10\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

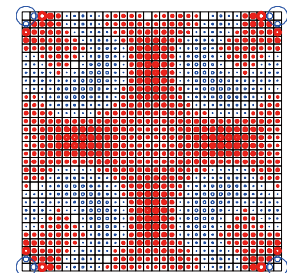
図 6.9 form-F2 の力学性状 ( $m_{uv}=5$ )



$t_{\max}=0.297\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

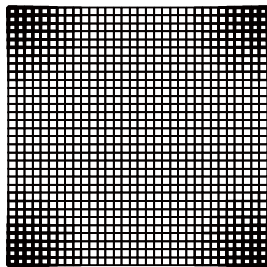


$\sigma_{\max}=0.504 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.241 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

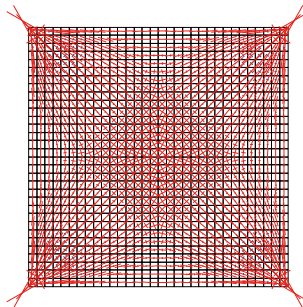


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.599 \times 10\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

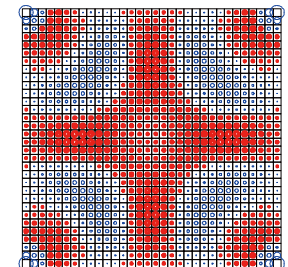
図 6.10 form-F3 の力学性状 ( $m_{uv}=6$ )



$t_{\max}=0.297\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布



$\sigma_{\max}=0.721 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.240 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

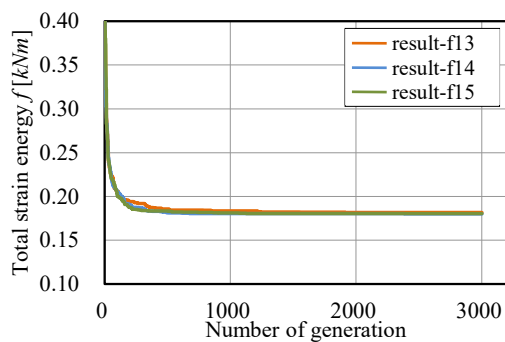


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.442 \times 10\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

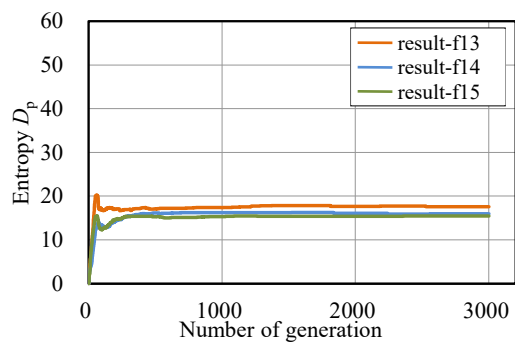
図 6.11 form-F4 の力学性状 ( $m_{uv}=7$ )

## 6.2.2 ISGA による数値結果

図 6.12 - 5.173 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果における目的関数空間の記憶細胞個体(横軸: 総ひずみエネルギー  $f_t$ , 縦軸: 部材体積  $f_v$ )と多様度指数  $D_p$  の遷移(横軸: 世代数, 縦軸: 多様度指数  $D_p$ )を図 6.12, 6.13 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.18, 6.19 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.24, 6.25 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.30, 6.31 ( $m_{uv} = 7$ )に示す。ここで、優良解選択率  $S_d = 0.5$  とし、SPEA2 で得られた解を白抜き円○でプロットする。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\tilde{c}$  コンター図, 制御点, 形態鳥瞰図を図 6.14, 6.16 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.20, 6.22 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.26, 6.28 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.32, 6.34 ( $m_{uv} = 7$ )に示し、形態の記号数字は目的関数空間のアーカイブ個体の数字に対応する。吹き出しの色は図中個体プロットの色に対応させている。得られた優良解形態の力学性状(a: 部材分布, b: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外(y 軸まわり)曲げモーメント, d: 面内(z 軸まわり)曲げモーメント)を図 6.15, 6.17 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.21, 6.23 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.27, 6.29 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.33, 5.173 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\tilde{C}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。

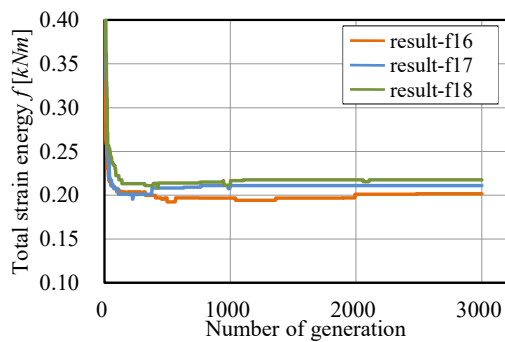


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

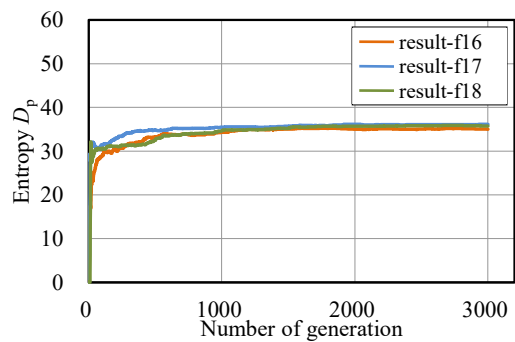


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.12 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.01$



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.13 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.1$



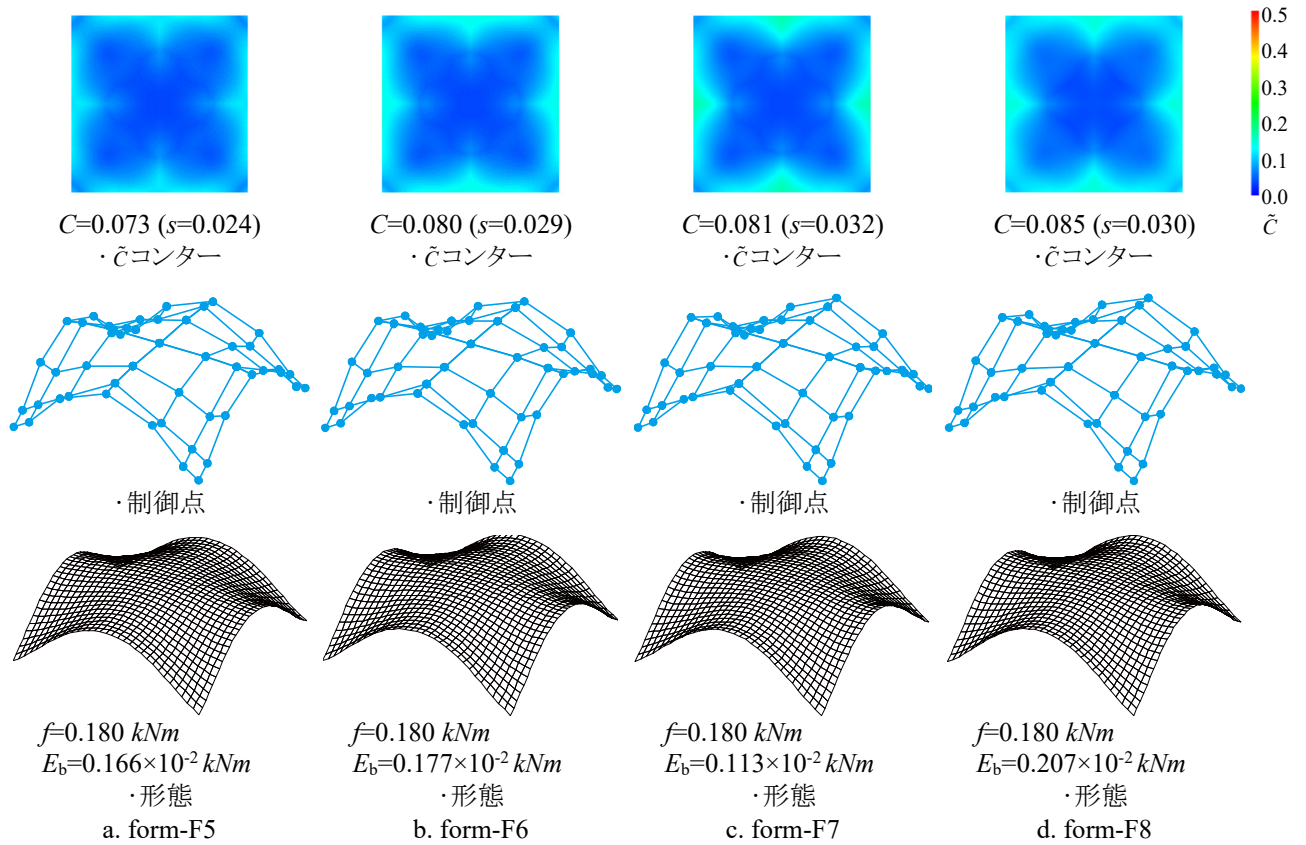
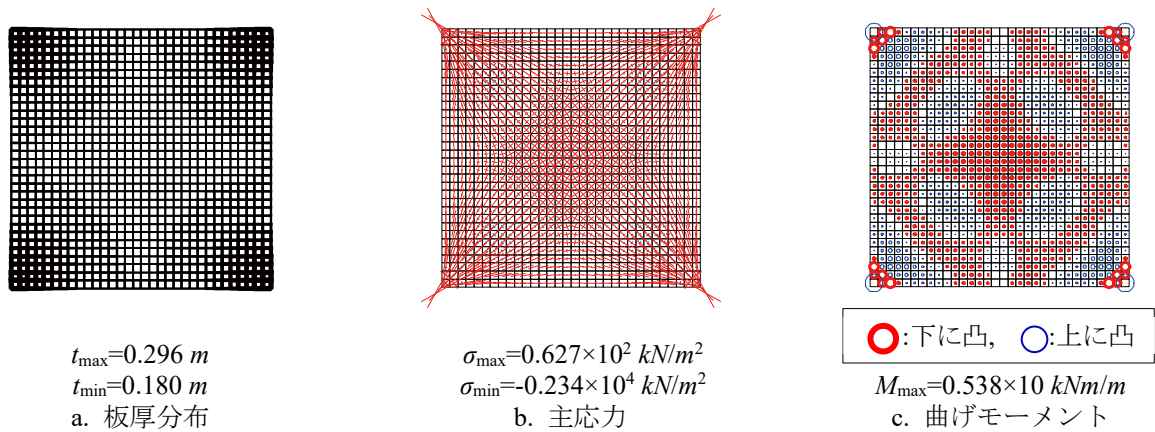
図 6.14 優良解形態例 result-f15 ( $m_{uv}=4$ ,  $H=0.01$ )

図 6.15 form-F5 の力学性状

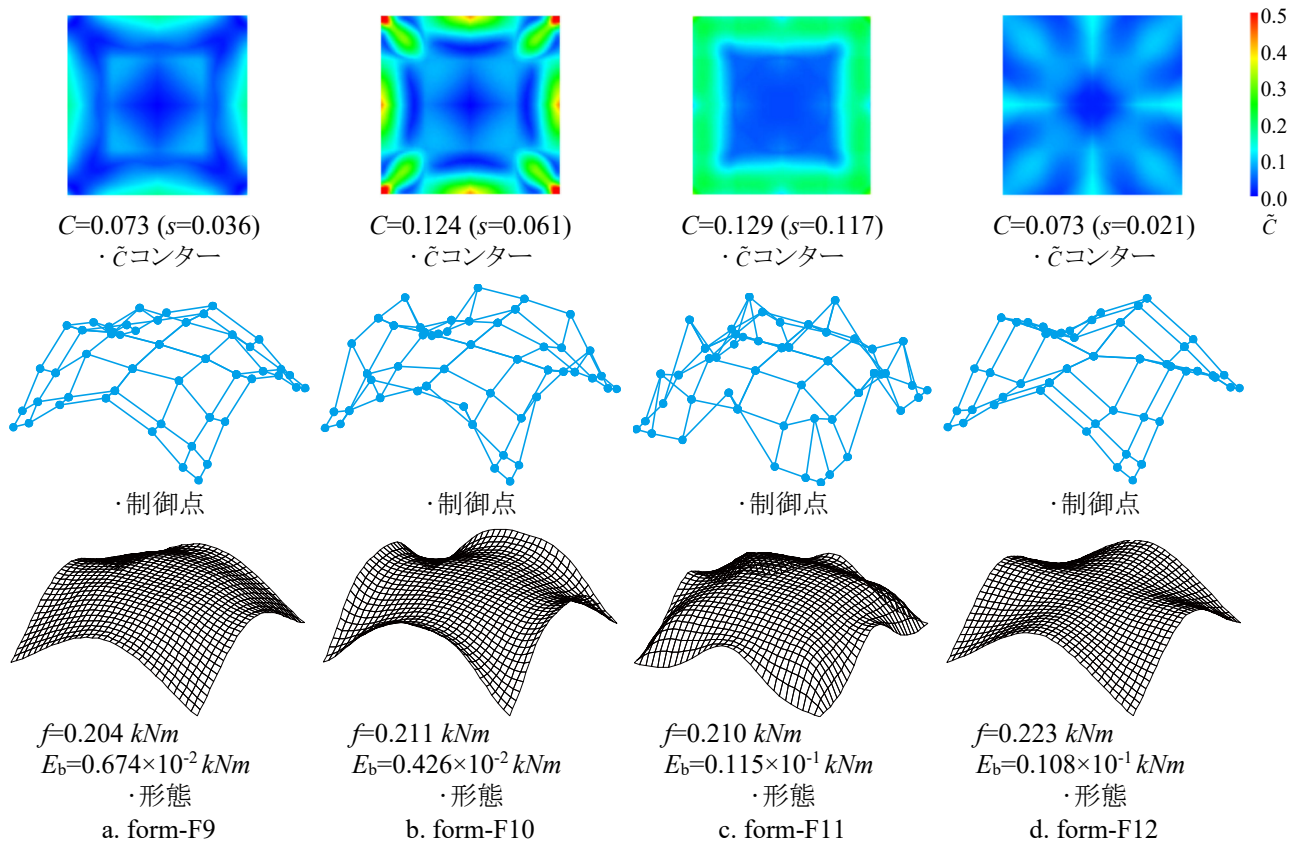


図 6.16 優良解形態例 result-fl6 ( $m_{uv}=4, H=0.1$ )

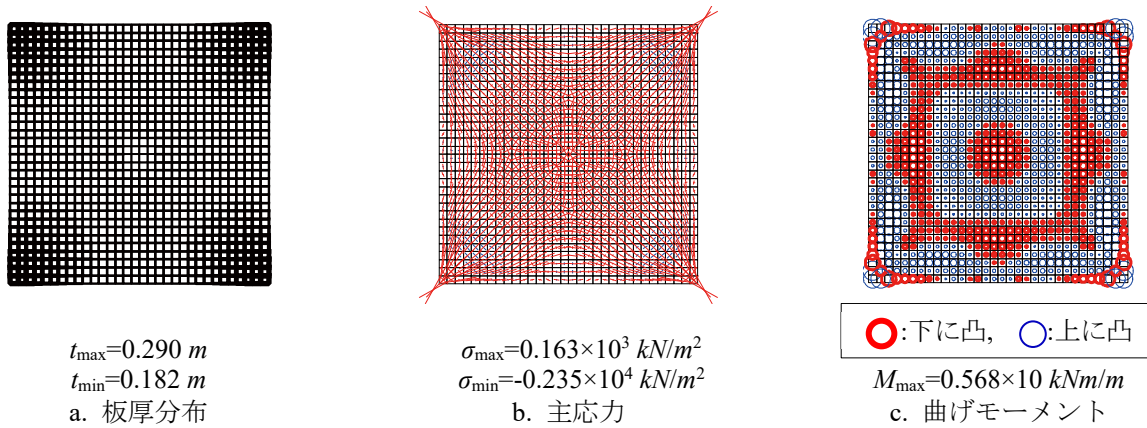
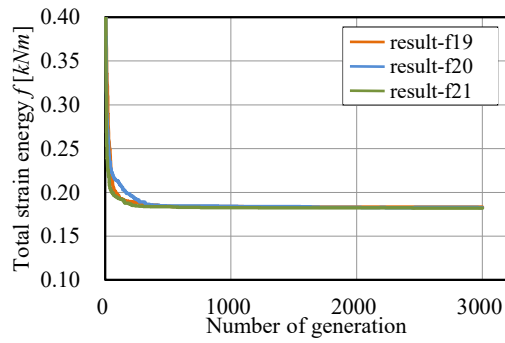
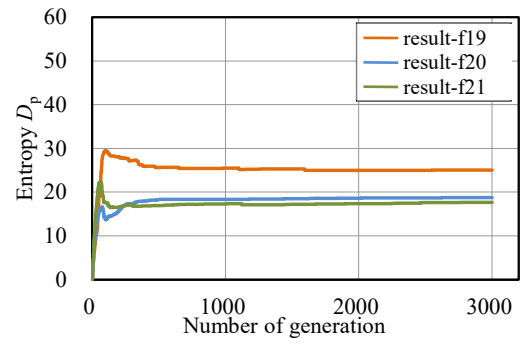
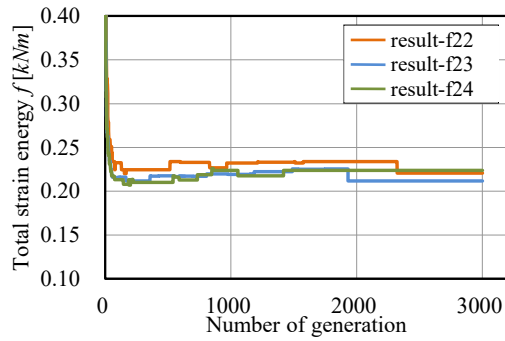
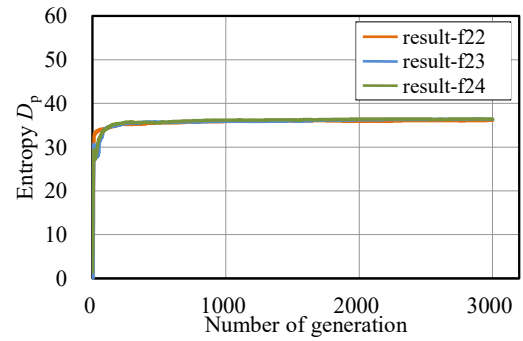


図 6.17 form-F11 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.18 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.19 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.1$

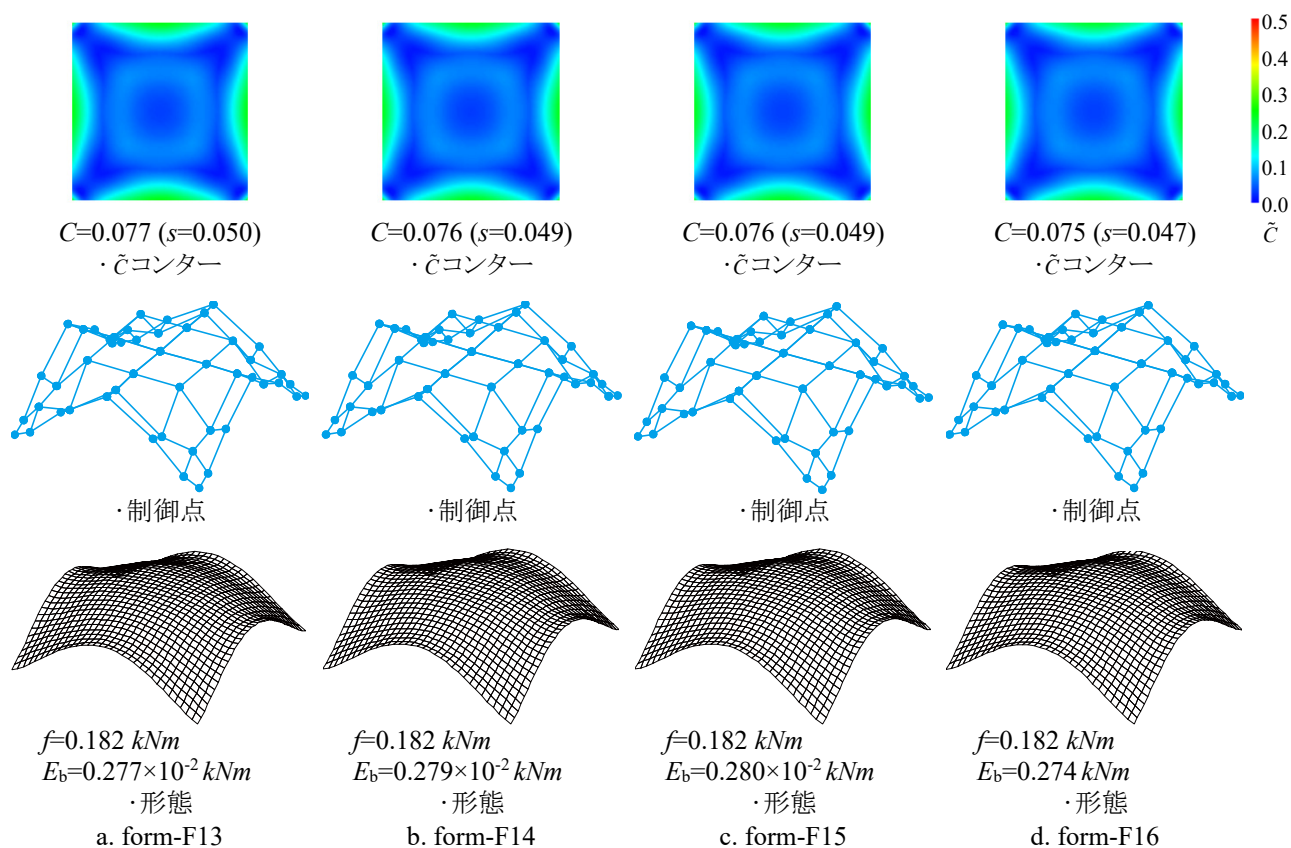


図 6.20 優良解形態例 result-f15 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.01$ )

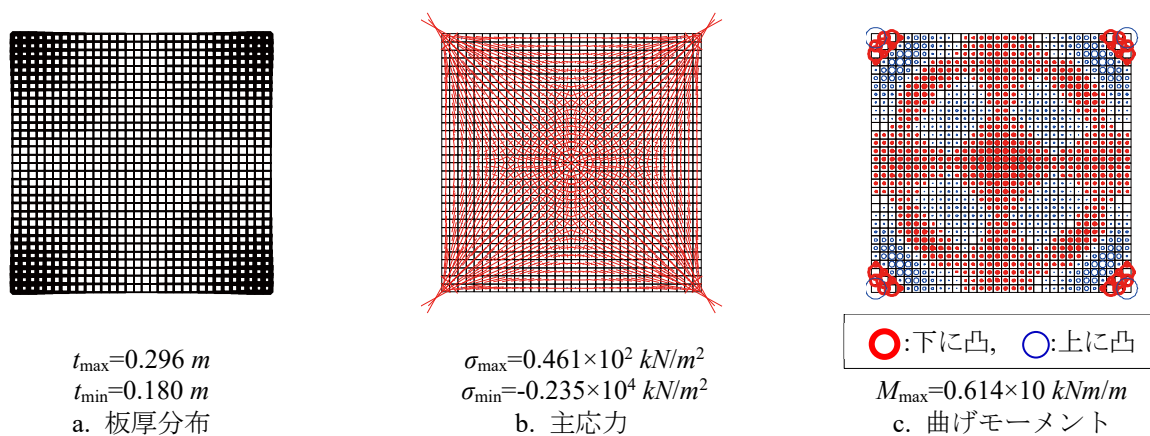


図 6.21 form-F13 の力学性状

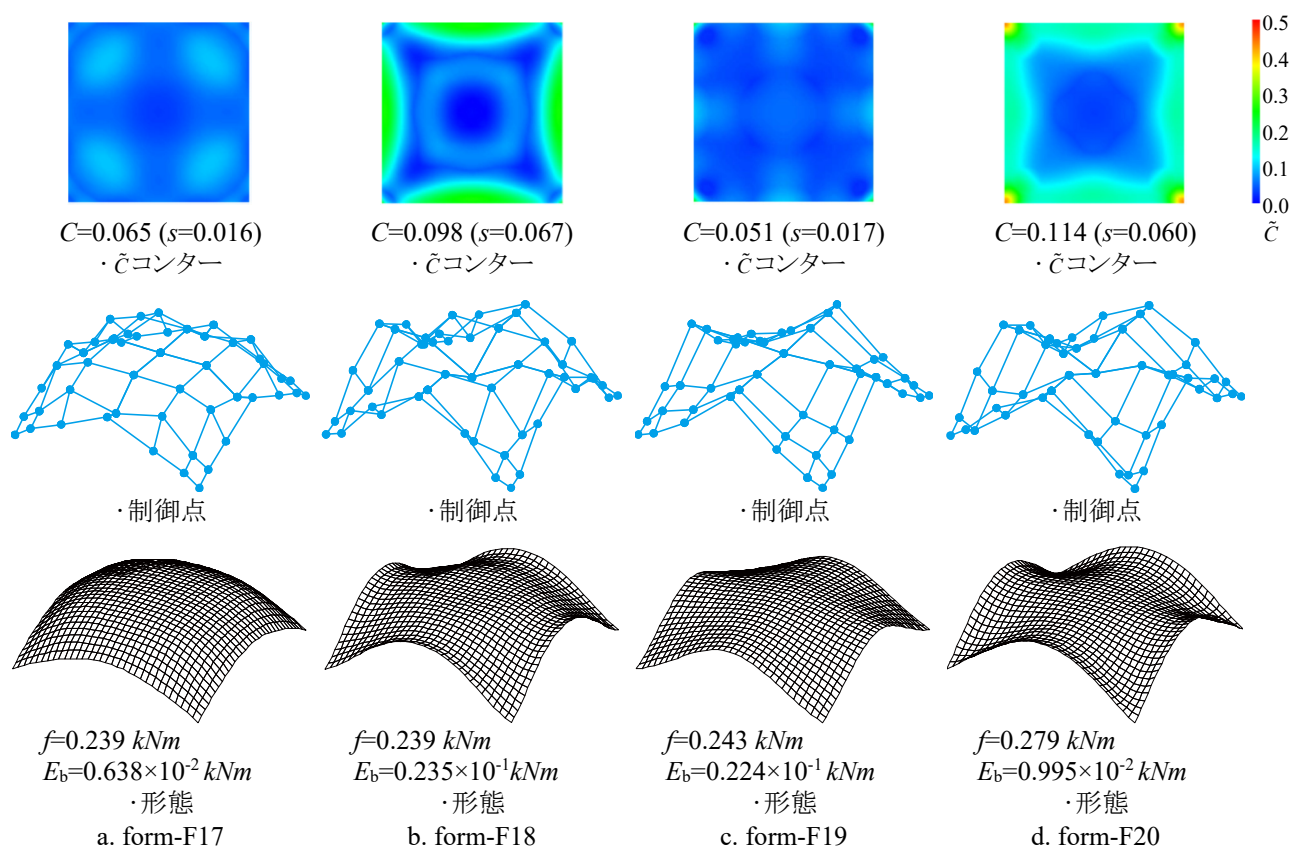
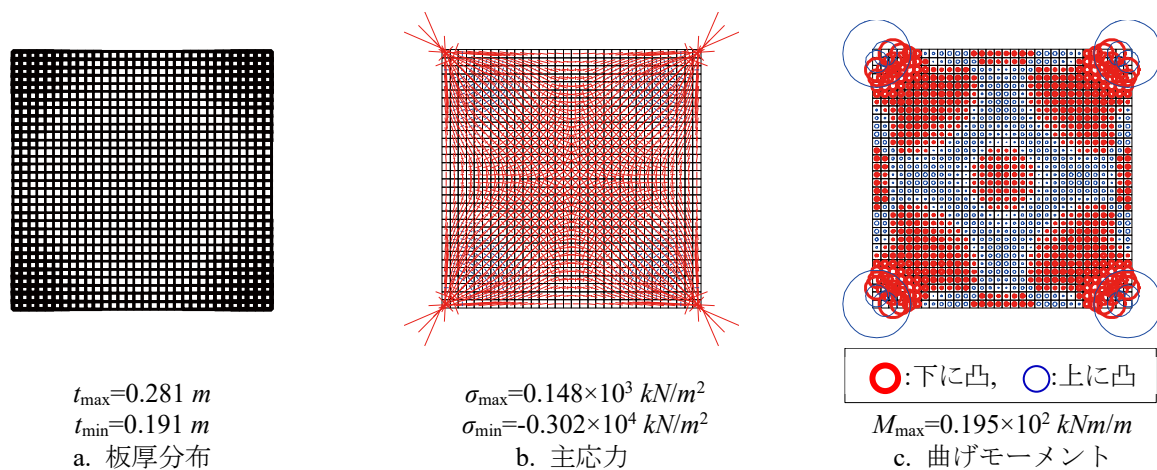
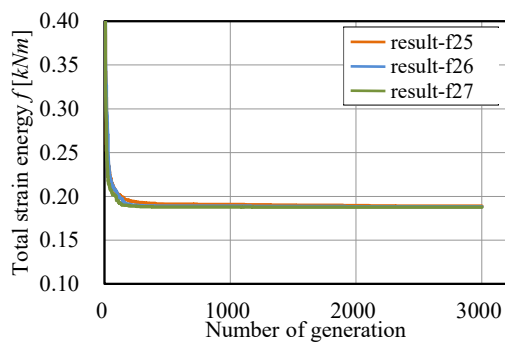
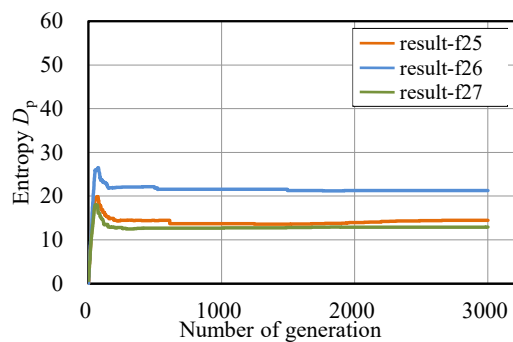
図 6.22 優良解形態例 result-fl6 ( $m_{uv}=5, H=0.1$ )

図 6.23 form-F20 の力学性状

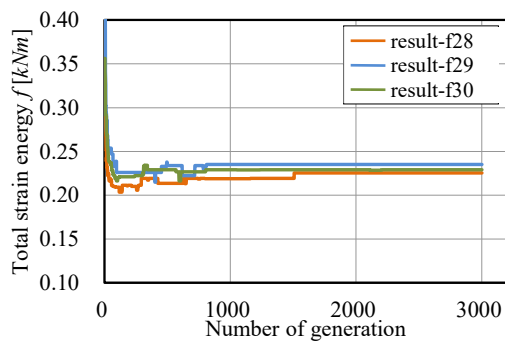


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

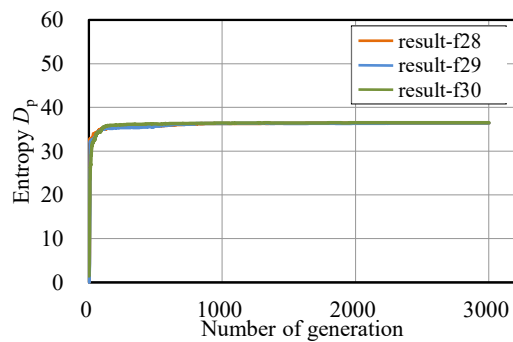


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.24 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.01$



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.25 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.1$



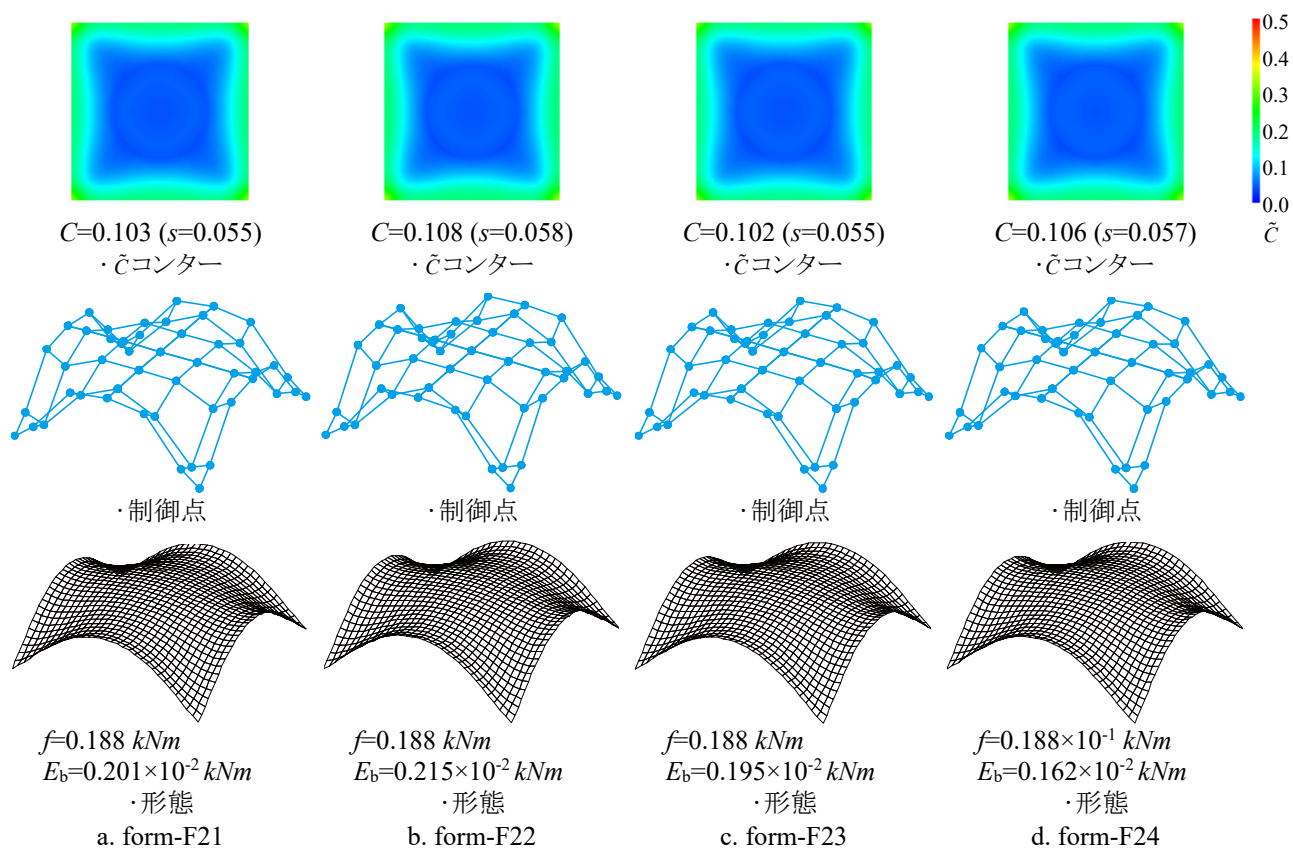
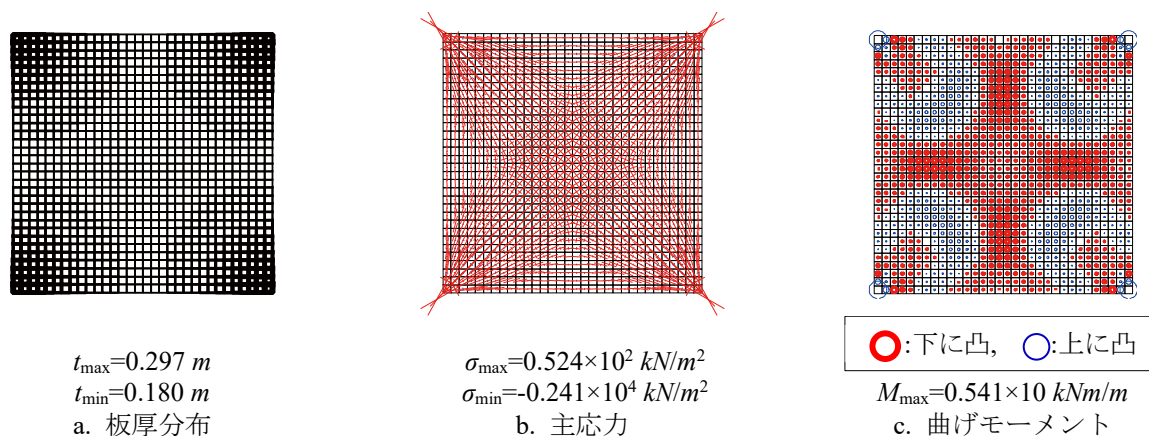
図 6.26 優良解形態例 result-f15 ( $m_{uv}=6, H=0.01$ )

図 6.27 form-F5 の力学性状

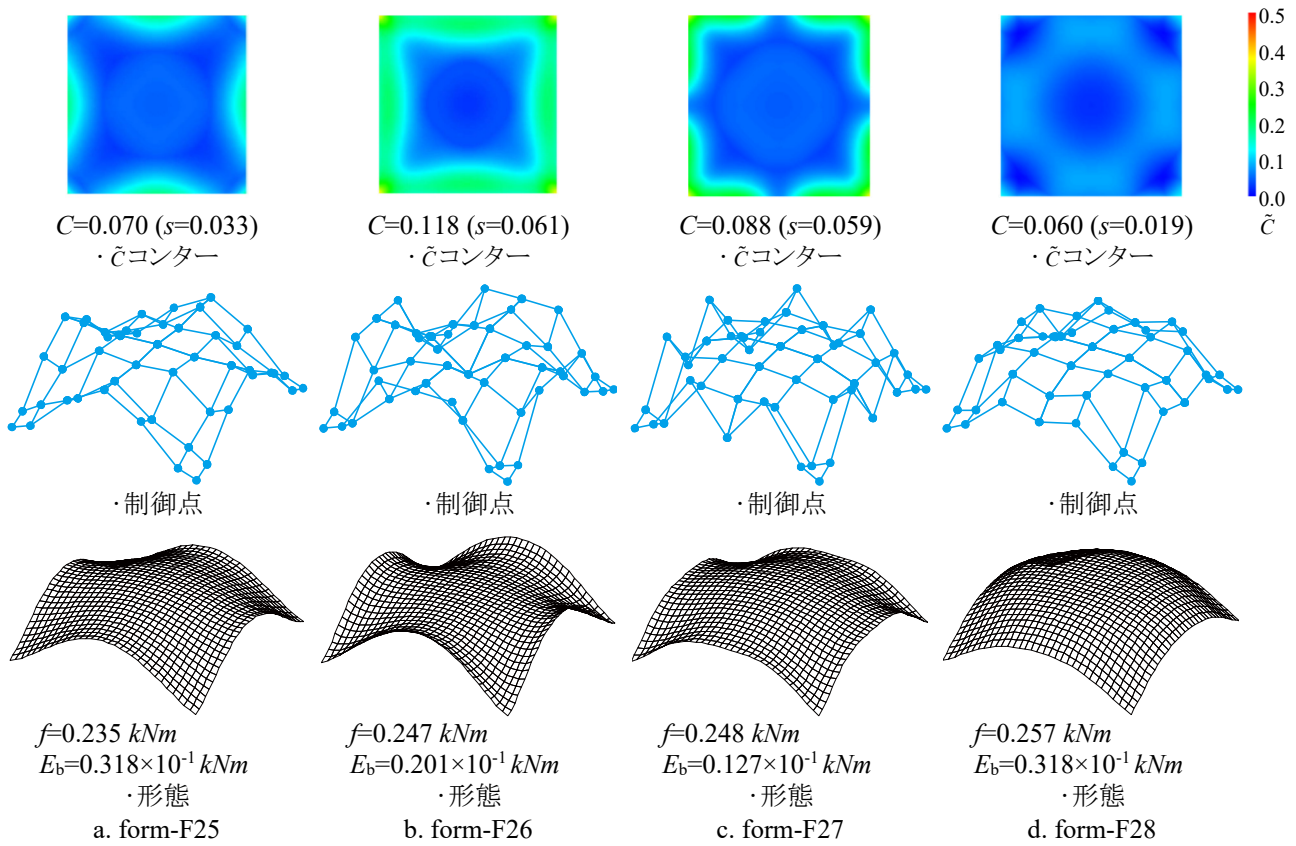


図 6.28 優良解形態例 result-fl6 ( $m_{uv}=6$ ,  $H=0.1$ )

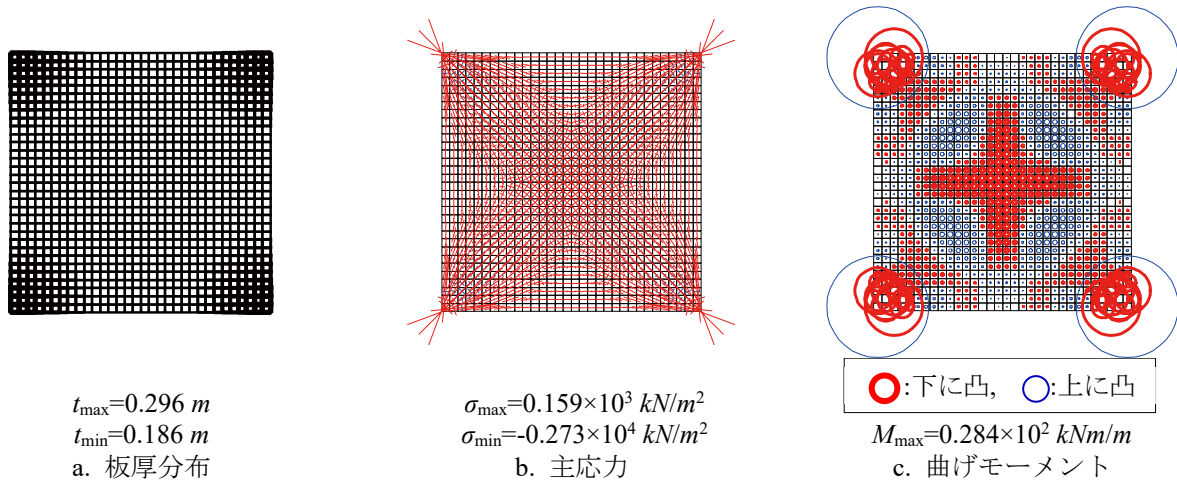
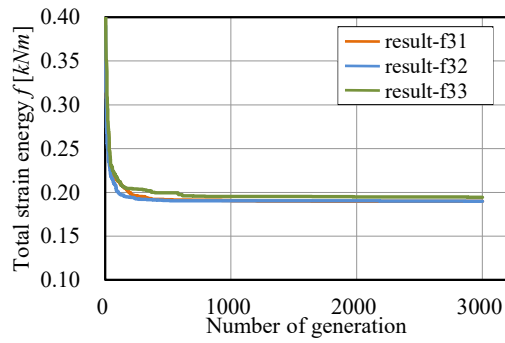
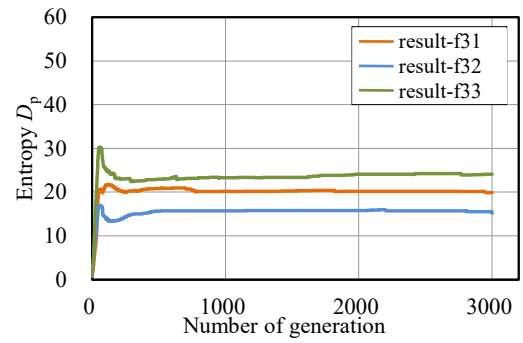
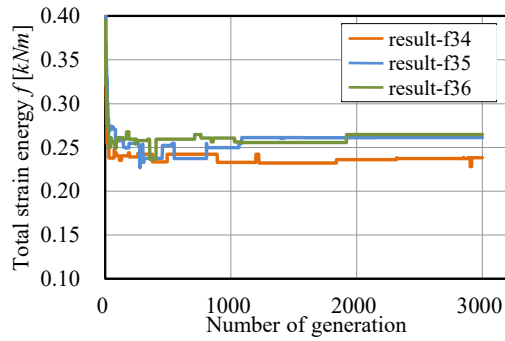
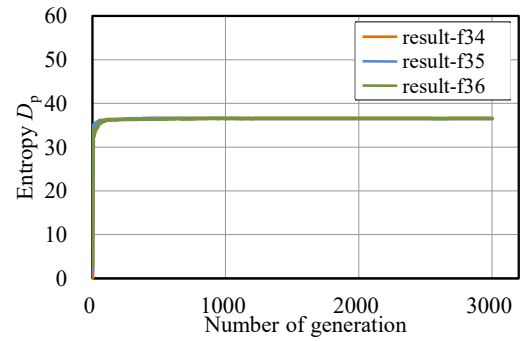


図 6.29 form-F26 の力学性状



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.30 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.31 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.1$

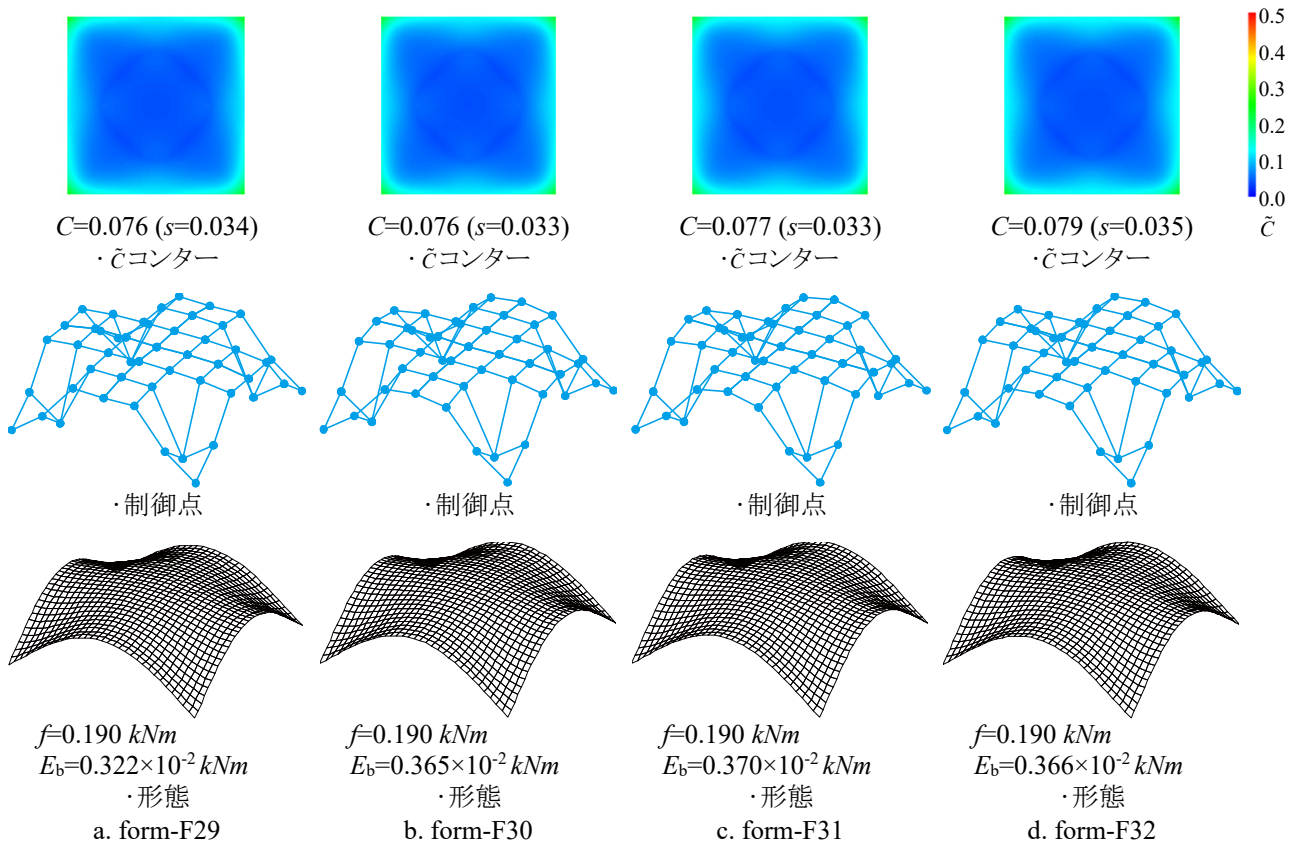


図 6.32 優良解形態例 result-f15 ( $m_{uv}=7, H=0.01$ )

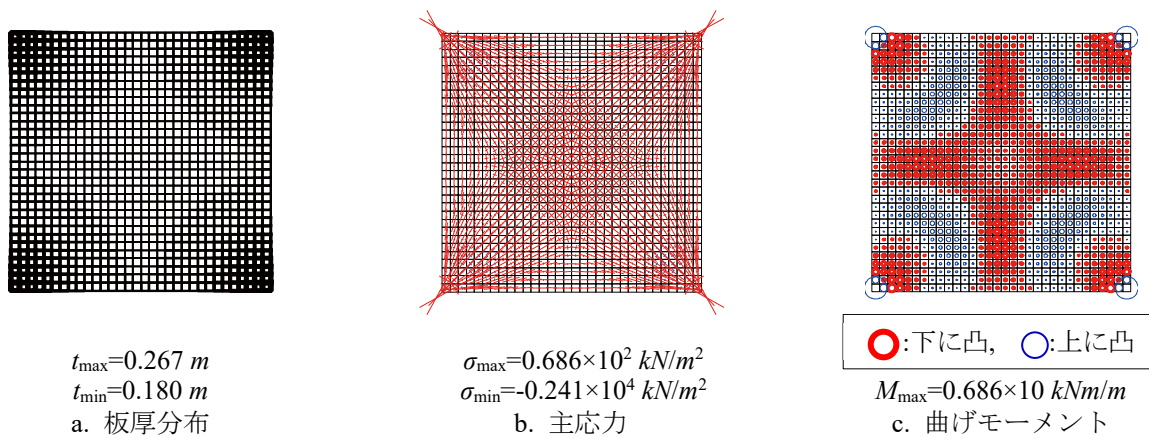


図 6.33 form-F29 の力学性状

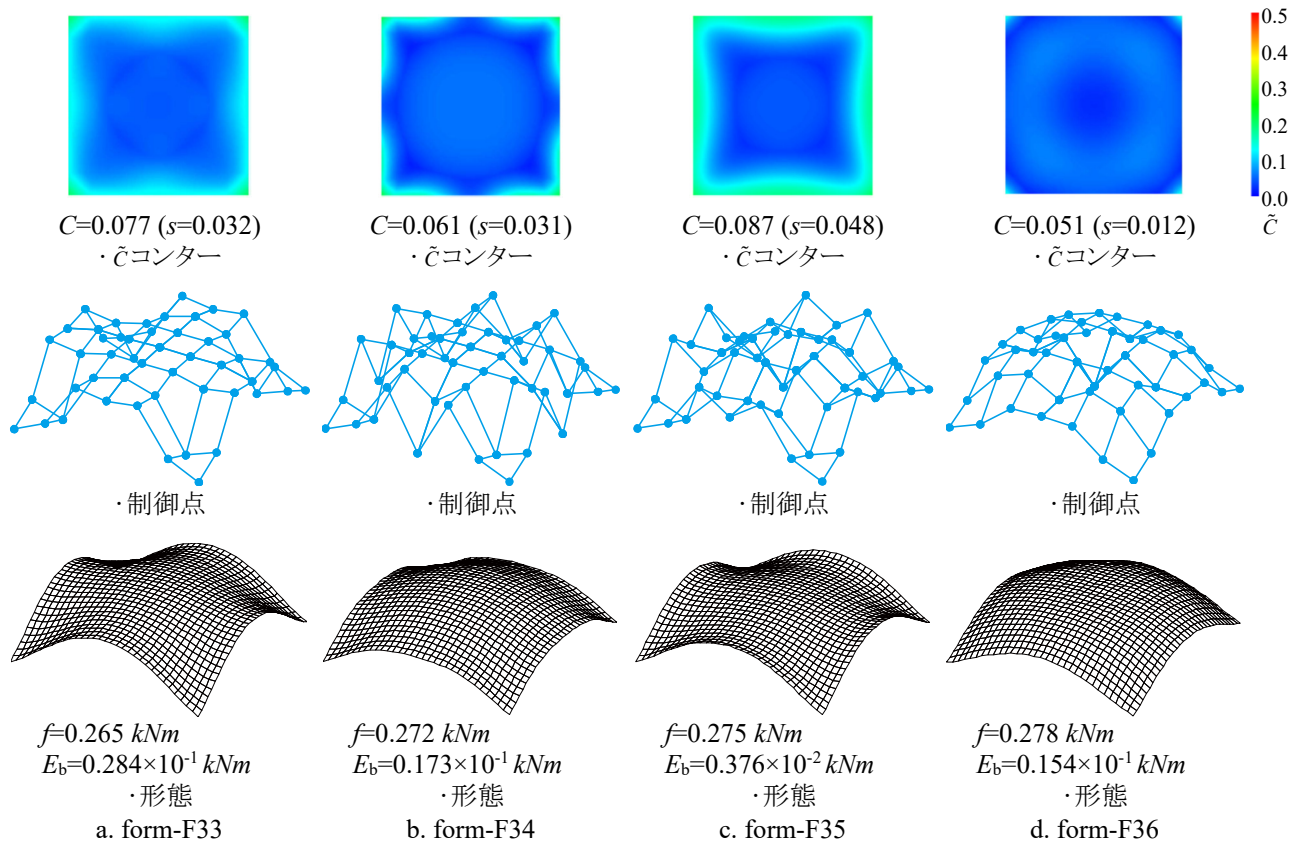
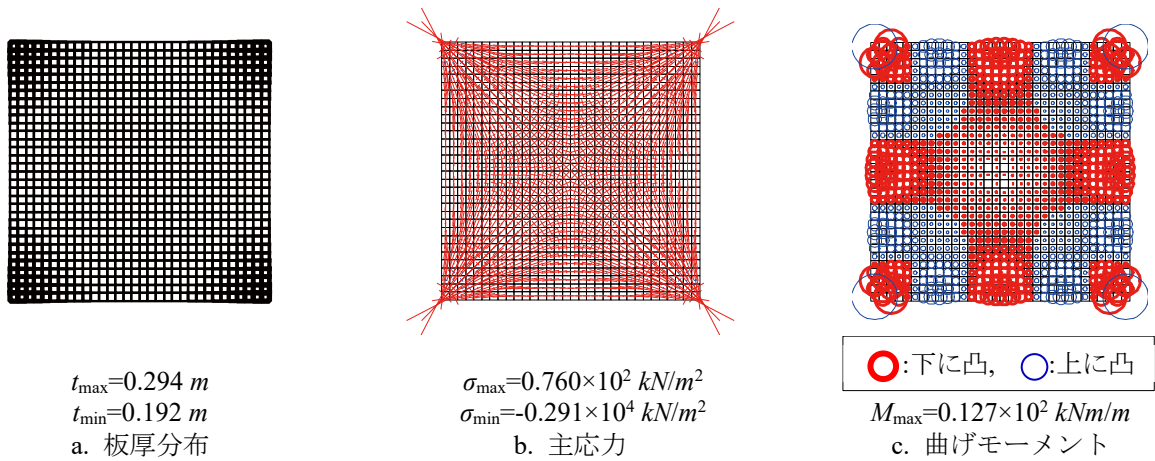
図 6.34 優良解形態例 result-fl6 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )

図 6.35 form-F34 の力学性状

### 6.2.3 考察

$H = 0.01$  のとき目的関数値の収束状況と得られる解形態は SGA に対応する。1000 世代にはほぼ収束値に達する。 $H = 0.01$  の設定における多様度指数  $D_p$  は、約 200 世代までに上昇した後、低下し、低い値で変動が少ない。探索初期は探索範囲を広げ、十分評価が高い解をとらえた後は多様性を重視しない局所的な探索が行われたためである。最終世代の記憶細胞内個体の解形態は多様性が低く、大域的最適解を含むその付近の解が得られている。 $H = 0.1$  とすると目的関数値が探索中に変動し、収束値にばらつきが生じる。また、 $D_p$  の値は試行ごとに比較的大きな値に安定して収束する。これは ISGA がエリート戦略を採っておらず、解の多様性に従って記憶細胞を更新するためである。 $H = 0.1$  のとき、どの  $m_{uv}$  においても目的関数値の変動が大きいことから、本モデルの総ひずみエネルギー最小化は、峰の数が少ない解空間を有していると考えられる。得られた優良解には、form-F10, -F11 (図 6.16 b, c), form-F17, -F18 (図 6.22 a, b), form-F26, -F27 (図 6.28 b, c) のように、一度の試行で目的関数値がほぼ同値であるにもかかわらず形状が大きく異なる解を得た。これは ISGA が設計変数空間の多様性を維持した結果である。

多様性を重視した結果( $H = 0.1$ )において、 $m_{uv} = 4$  に設定した優良解には form-F11 のように外周部が湾曲する形状が含まれる。このような形状の  $C$  は比較的大きく、0.12 を超えている。また、強く湾曲する形状と同時に form-F9, -F12 のような  $C = 0.073$  である滑らかな形状も含まれ、 $m_{uv} = 4, 5$  に設定することで形状のバリエーションに富んだ結果を得た。一方  $m_{uv} = 6, 7$  に設定すると強く湾曲する形態を得ることがなく、特に、 $m_{uv} = 7$  で  $C \geq 0.10$  の形態はほとんど得られない。 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなる。さらに形状のバリエーションは  $m_{uv} = 4, 5$  の結果と比較すると少ない。これは、階数を大きく設定することで各制御点の影響力が弱まり、影響範囲が広がるためである。つまり、局所制御性が低いいため形状表現の自由度が抑制される。例えば、 $m_{uv} = 6$  で得られた form-F34 (図 6.35c)における制御点は、乱雑な配置であるにもかかわらず、 $C=0.061$  の滑らかな形状である。

力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。この結果は、ISGA の探索において形状の設計変数のみ多様性を考慮し、部材選択に関する設計変数の多様性を考慮していない結果である。

### 6.3 ひび割れ曲げモーメントを考慮したひずみエネルギー最小化 (Model-G)

本節では応力制約に許容縁圧縮応力とひび割れ曲げモーメントを適用した RC シェルの総ひずみエネルギー最小化の単一目的最適化問題を扱う。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (6-5)$$

$$\text{to minimize} \quad f(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (6-6)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (6-7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (6-8)$$

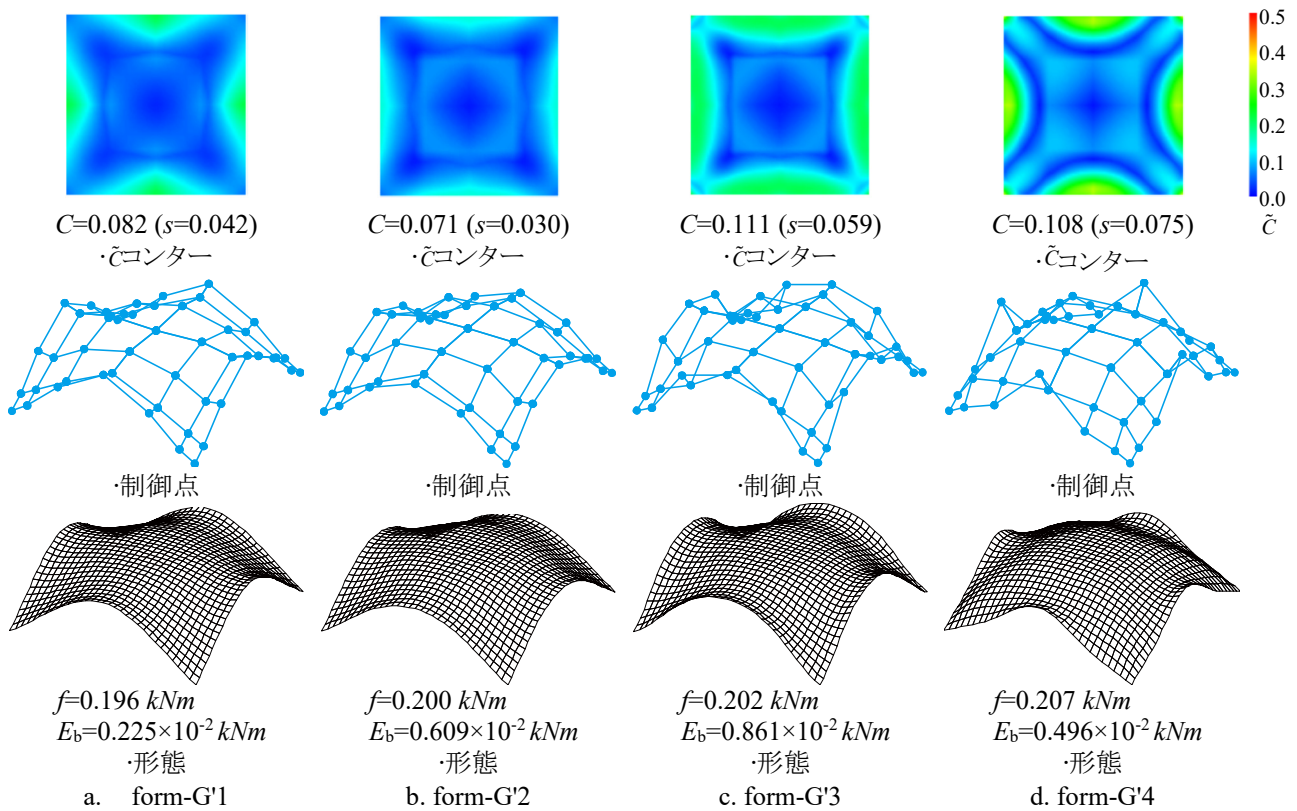
ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル(=  $[A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル(=  $[R_k]$ ),  $f$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $\mathbf{d}$ : 節点変位ベクトル,  $\mathbf{K}$ : 剛性マトリクス,  $R_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0 \text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.18 \text{ m}$ ,  $A_j^U = 0.50 \text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(6-8)は式(2-125)に示す長期許容圧縮応力度と、式(2-127)に示すひび割れ曲げモーメントによる応力制約条件である。応力検定は、面外力の最大・最小方向、ならびに面内力の最大・最小方向の計 4 方向に対して行う。解析パラメータは表 6.3 のように設定する。

表 6.3 GA パラメータ (ISGA, SGA)

世代数	3000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
$\mathbf{A}$ の遺伝子長	$10 \times 16 \text{ bit}$
$\mathbf{R}$ の遺伝子長	$9 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

## 6.3.1 板厚の設定について

Model-G の側面制約条件は、Model-F とは異なり、 $0.18 \sim 0.50 \text{ m}$  としている。Model-F と同様に板厚の側面制約条件を  $0.18 \sim 0.30 \text{ m}$  としたうえでひび割れ曲げモーメントの応力制約条件を導入した場合を Model-G' とし、優良解形態を  $m_{uv}=4$  を例に図 6.36 に、form-G'4 の力学性状を図 6.37 に示す。応力制約条件が厳しいため多様性の保持が難しく、Model-F と比較して極端に多様性が低減する。form-G'4 は外周部が湾曲する形態であるが、Model-F で得られた形態程強く湾曲した形態は Model-G' では得られず、いずれの解も  $E_b$  の値が  $0.1 \times 10^{-1}$  を下回る結果であった。したがって、大きな面外ひずみを許容しない制約条件であると判断する。図 6.37 に示す通り、引張力と曲げ応力が共に小さくなければ許容解にならないためと考える。したがって、Model-G では、厳しい応力制約条件への対応として、板厚の側面制約条件を  $0.18 \sim 0.50 \text{ m}$  とした。

図 6.36 Model-G' の優良解形態例 ( $m_{uv}=4, H=0.1$ )

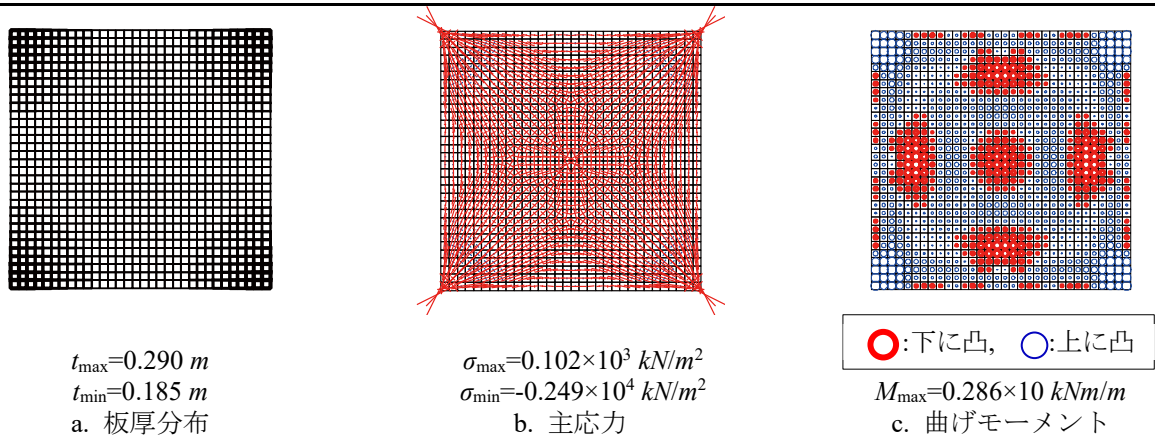


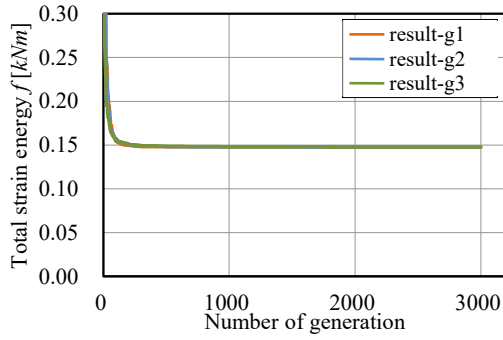
図 6.37 form-G'4 の力学性状

### 6.3.2 SGA による数値結果

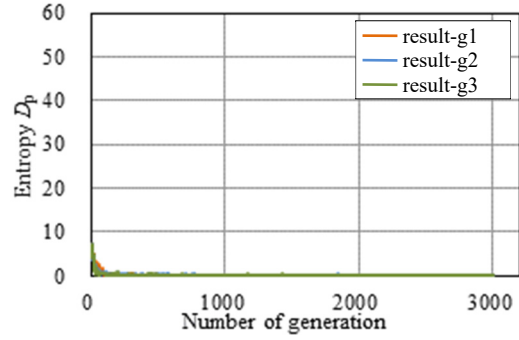
SGA による数値結果を図 6.38 - 6.46 に示す。図 6.38 - 6.41 は、SGA により得られた各階数設定 3 試行における解の収束状況であり、横軸が世代数、縦軸が a: エリート解のひずみエネルギー  $f$ , b: 多様度指数  $D_p$  である。図 6.42 は、各試行で得られた解形態の  $\bar{c}$  コンター図、制御点、形態鳥瞰図を示す。得られた解形態の力学性状を図 6.43 - 6.46 に示す (a: 板厚分布, b: 主応力, c: 曲げモーメント)。板厚分布図の実線太さは板厚の比率、主応力図の実線長さは主応力の比率 (赤色: 圧縮、青色: 引張)、曲げモーメント分布図の円の大きさは曲げモーメントの比率 (赤丸: 下に凸, 青丸: 上に凸) を示す。結果数値情報は、 $E_b$ : 曲げひずみエネルギー,  $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\bar{c}$  の標準偏差,  $t_{\max} \cdot t_{\min}$ : 最大・最小板厚,  $\sigma_{\max} \cdot \sigma_{\min}$ : 最大・最小主応力 (正值: 引張, 負値: 圧縮),  $M_{\max}$ : 最大曲げモーメント である。

図 6.38 - 6.41 より、SGA は各  $m_{uv}$  設定値で試行回数によらずほぼ同じ解形態を捉える。目的関数値は 200 世代程度で収束し、その後大きな変化がない。したがって、得られた解は大域的最適解と判断する。得られた形態は既往研究で報告されている最適形態 (カタナリー曲面) に対応している。図 6.42 より、得られた大域的最適解形態の  $\bar{c}$  コンター図は  $m_{uv}$  設定値で異なる。目的関数値は、 $m_{uv}$  設定値が小さいほど評価が高い。図 6.43 - 6.46 より、部材は各応力に従った分布となっており、面内抵抗型の力学特性を有している。曲げモーメント分布図より、 $m_{uv}$  設定値を小さくするにつれて中央および外周アーチ中央付近の曲げモーメントが小さくなる。これらの結果は、 $m_{uv}$  設定値が低いほど局所的制御性が高まることから、形態全体の平均的な曲げモーメントが小さくなる形態を探索することができたためと考える。解形態等、これらの傾向は Model-F と同一であった。



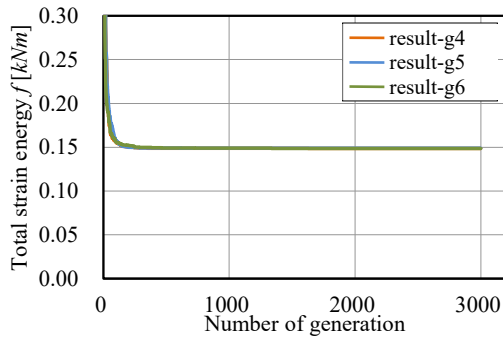


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

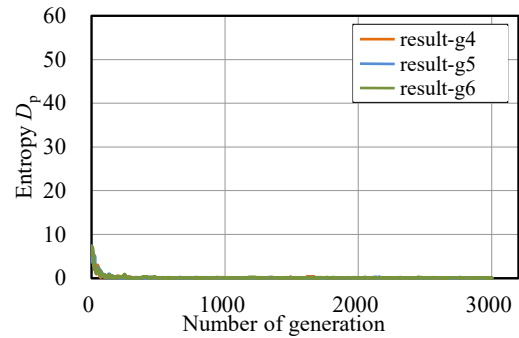


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.38 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=4$ )

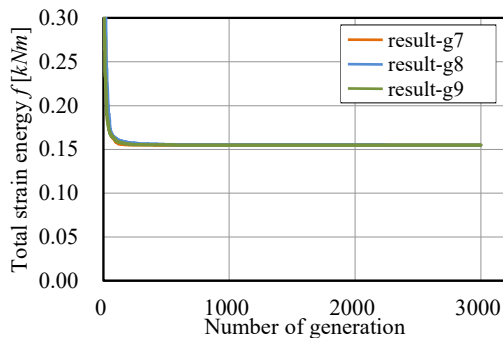


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

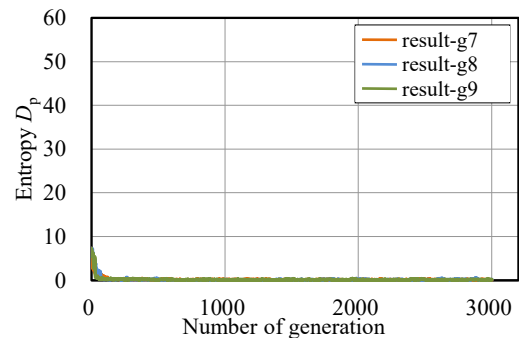


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.39 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=5$ )

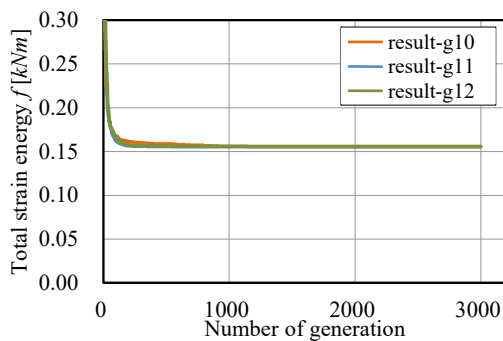


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

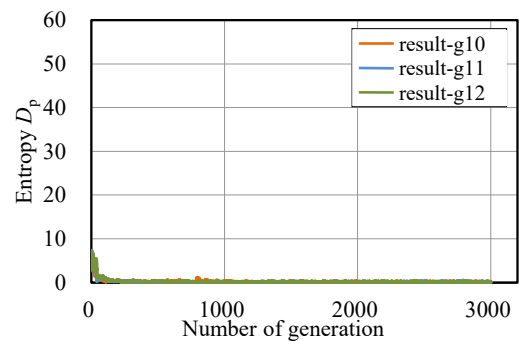


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.40 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=6$ )



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.41 SGA 解の収束状況 ( $m_{uv}=7$ )



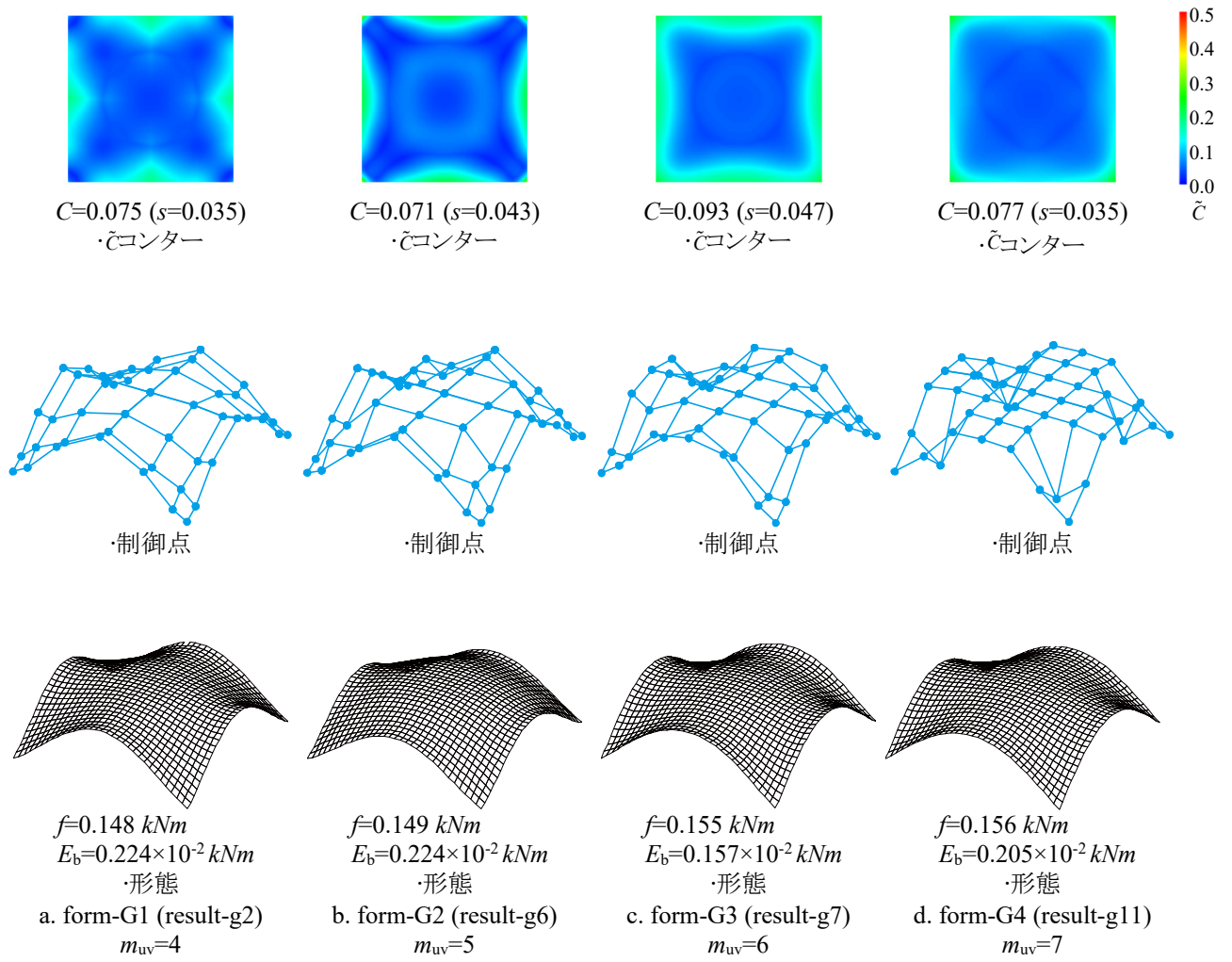
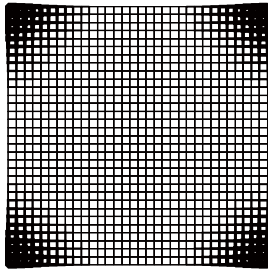
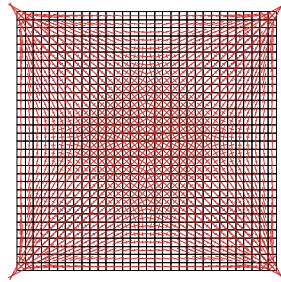


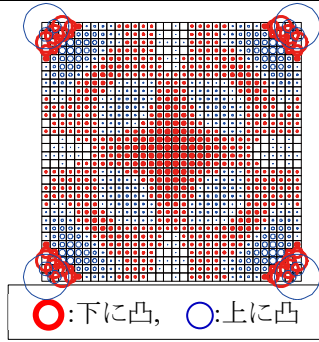
図 6.42 SGA の解形態例



$t_{\max}=0.489\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

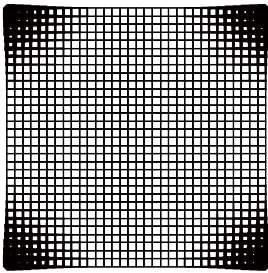


$\sigma_{\max}=0.526 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.151 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

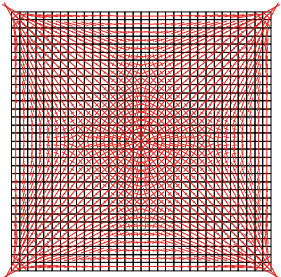


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.137 \times 10^2\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

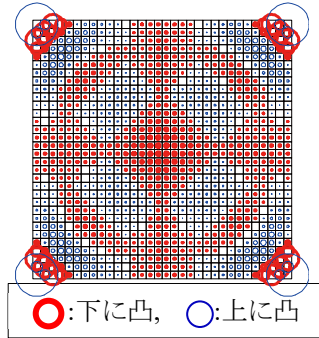
図 6.43 form-G1 の力学性状 ( $m_{uv}=4$ )



$t_{\max}=0.489\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

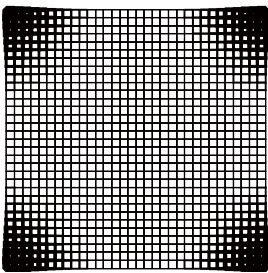


$\sigma_{\max}=0.370 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.152 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

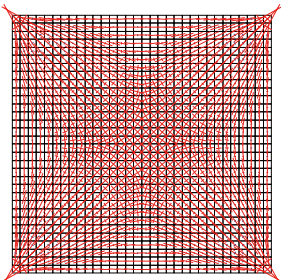


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.127 \times 10^2\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

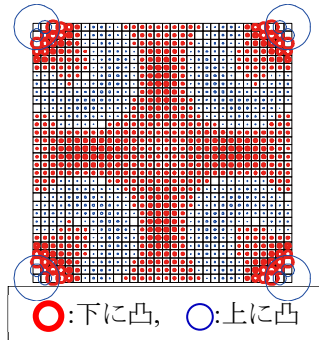
図 6.44 form-G2 の力学性状 ( $m_{uv}=5$ )



$t_{\max}=0.491\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

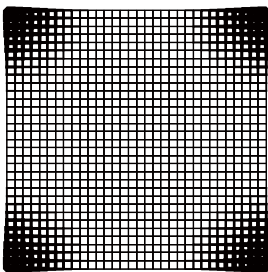


$\sigma_{\max}=0.435 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.159 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

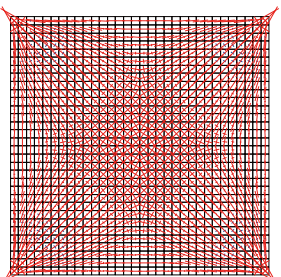


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.139 \times 10^2\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

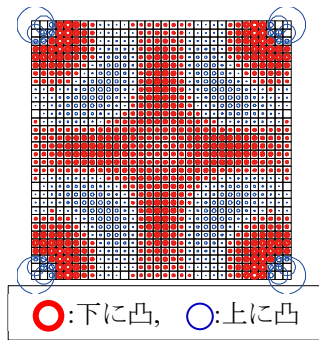
図 6.45 form-G3 の力学性状 ( $m_{uv}=6$ )



$t_{\max}=0.491\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布



$\sigma_{\max}=0.689 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.158 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

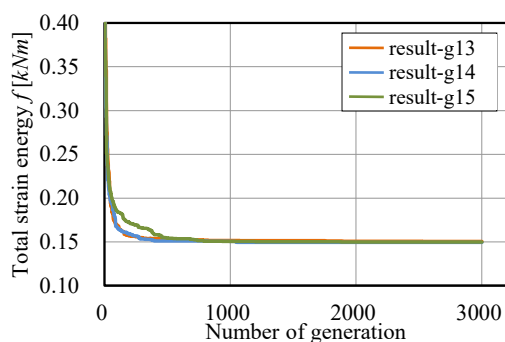


○:下に凸, ○:上に凸  
 $M_{\max}=0.117 \times 10^2\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

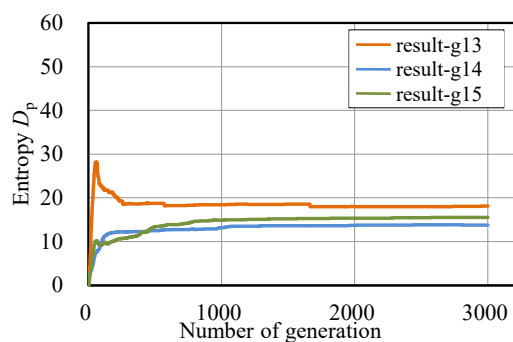
図 6.46 form-G4 の力学性状 ( $m_{uv}=7$ )

### 6.3.3 ISGA による数値結果

図 6.47 - 6.70 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果における目的関数空間の記憶細胞個体(横軸: 総ひずみエネルギー  $f_e$ , 縦軸: 部材体積  $f_v$ )と多様度指数  $D_p$  の遷移(横軸: 世代数, 縦軸: 多様度指数  $D_p$ )を図 6.47, 6.48 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.53, 6.54 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.59, 6.60 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.65, 6.66 ( $m_{uv} = 7$ )に示す。ここで、優良解選択率  $S_d = 0.5$  とし、SPEA2 で得られた解を白抜き円○でプロットする。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\bar{c}$  コンター図, 制御点, 形態鳥瞰図を図 6.49, 6.51 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.55, 6.57 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.61, 6.63 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.67, 6.69 ( $m_{uv} = 7$ )に示し、形態の記号数字は目的関数空間のアーカイブ個体の数字に対応する。吹き出しの色は図中個体プロットの色に対応させている。得られた優良解形態の力学性状(a: 部材分布, b: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外(y 軸まわり)曲げモーメント, d: 面内(z 軸まわり)曲げモーメント)を図 6.50, 6.52 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.56, 6.58 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.62, 6.64 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.68, 6.70 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\bar{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_y M_{\max} \cdot {}_z M_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。

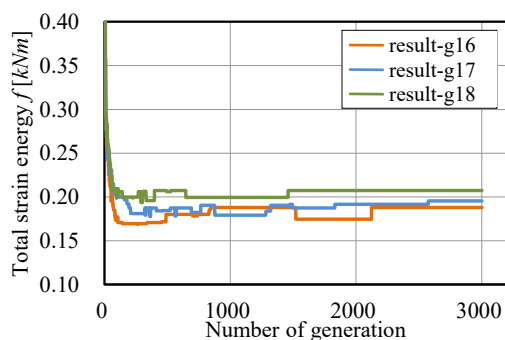


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

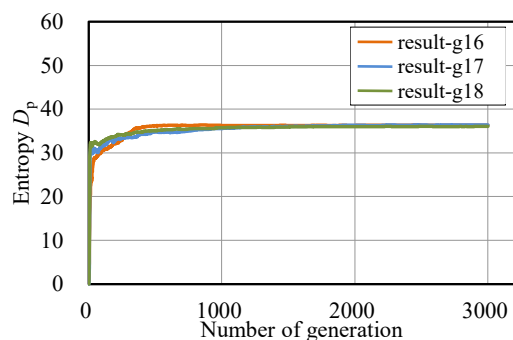


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.47 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.01$



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.48 解の収束状況  $m_{uv}=4, H=0.1$

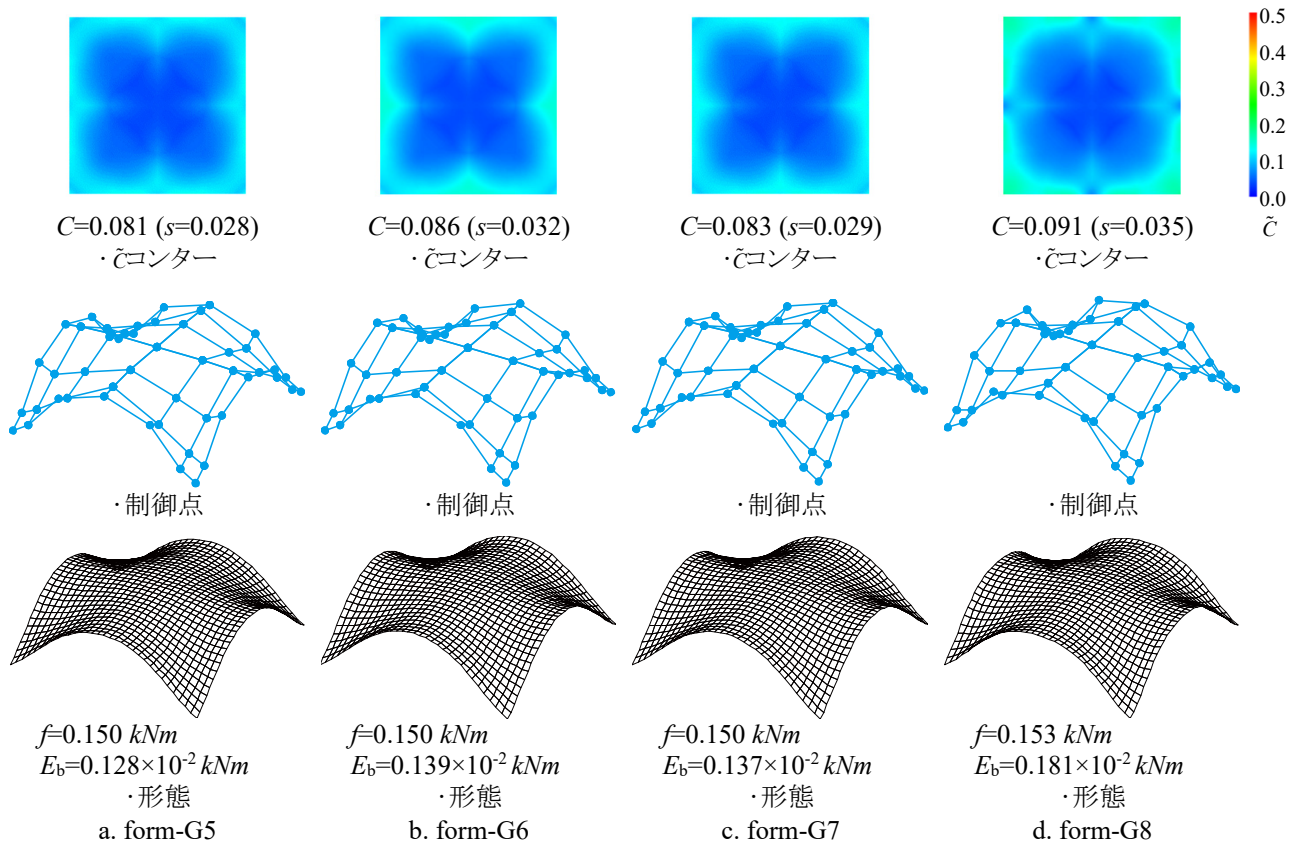
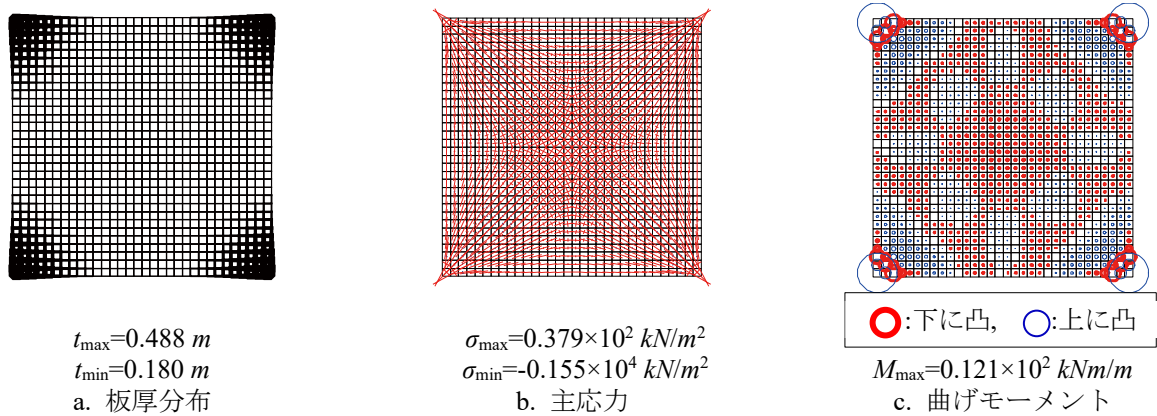

図 6.49 優良解形態例 result-g15 ( $m_{uv}=4, H=0.01$ )


図 6.50 form-G5 の力学性状

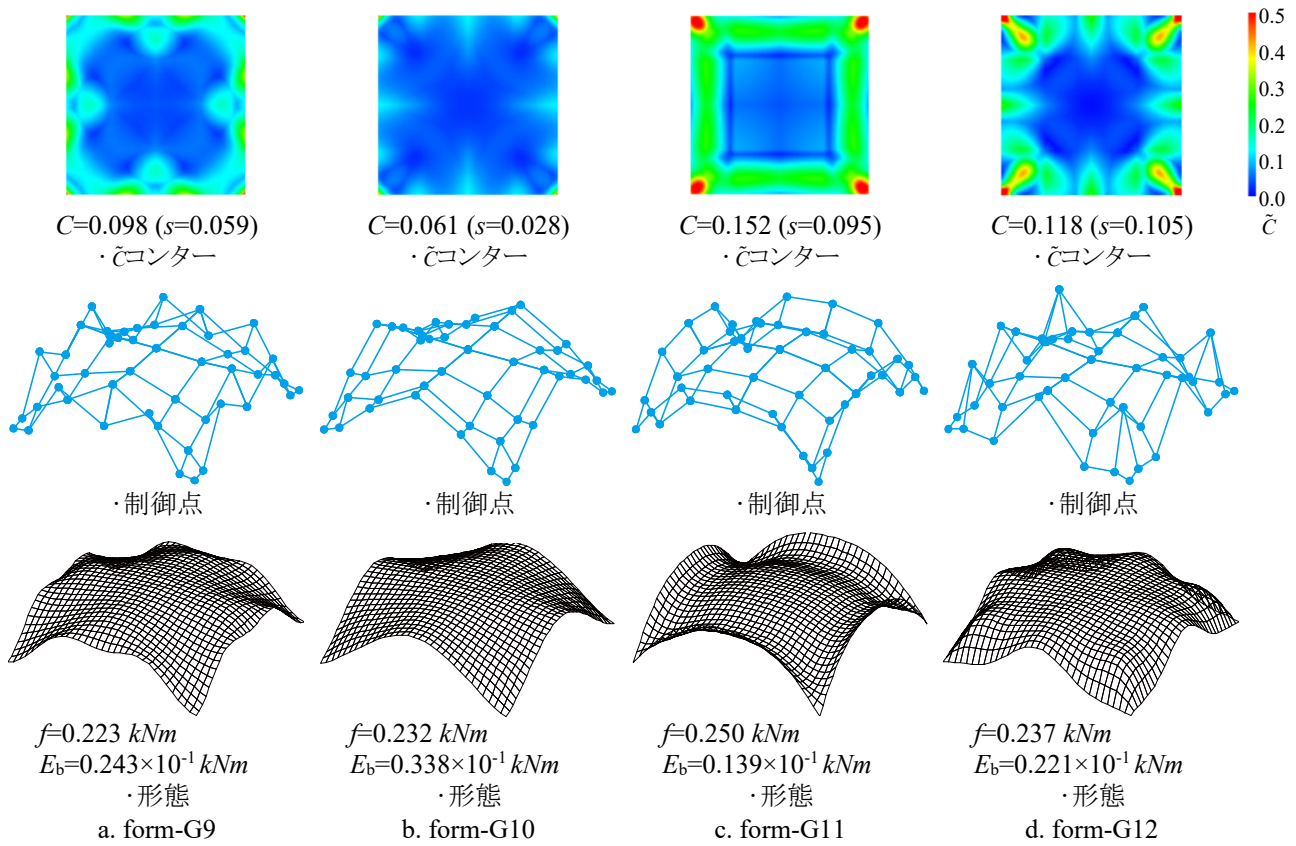


図 6.51 優良解形態例 result-g17 ( $m_{uv}=4$ ,  $H=0.1$ )

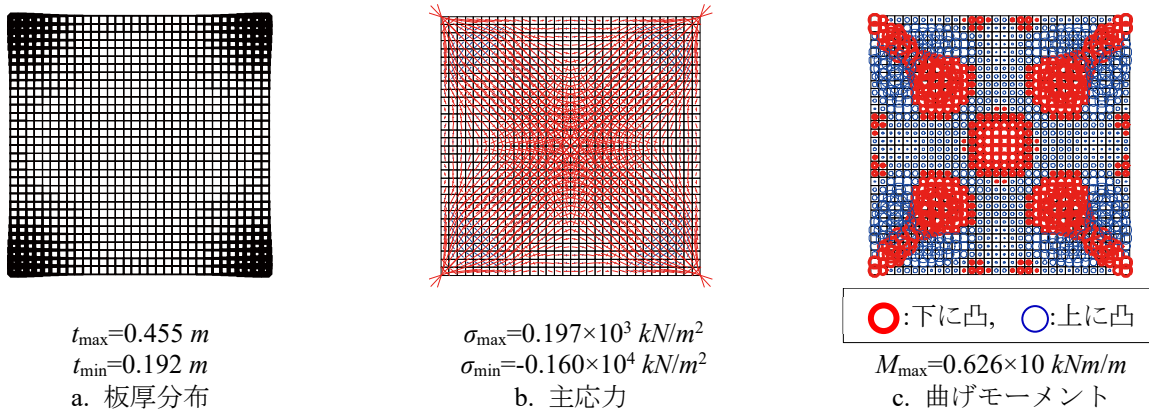
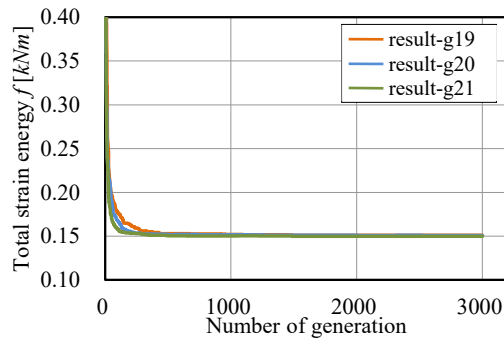
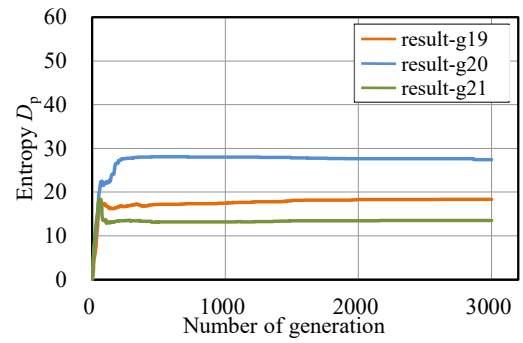
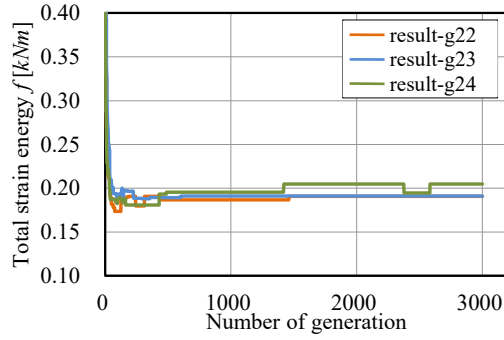
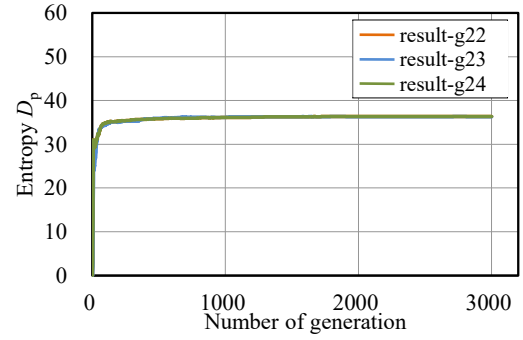


図 6.52 form-G12 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.53 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.54 解の収束状況  $m_{uv}=5, H=0.1$



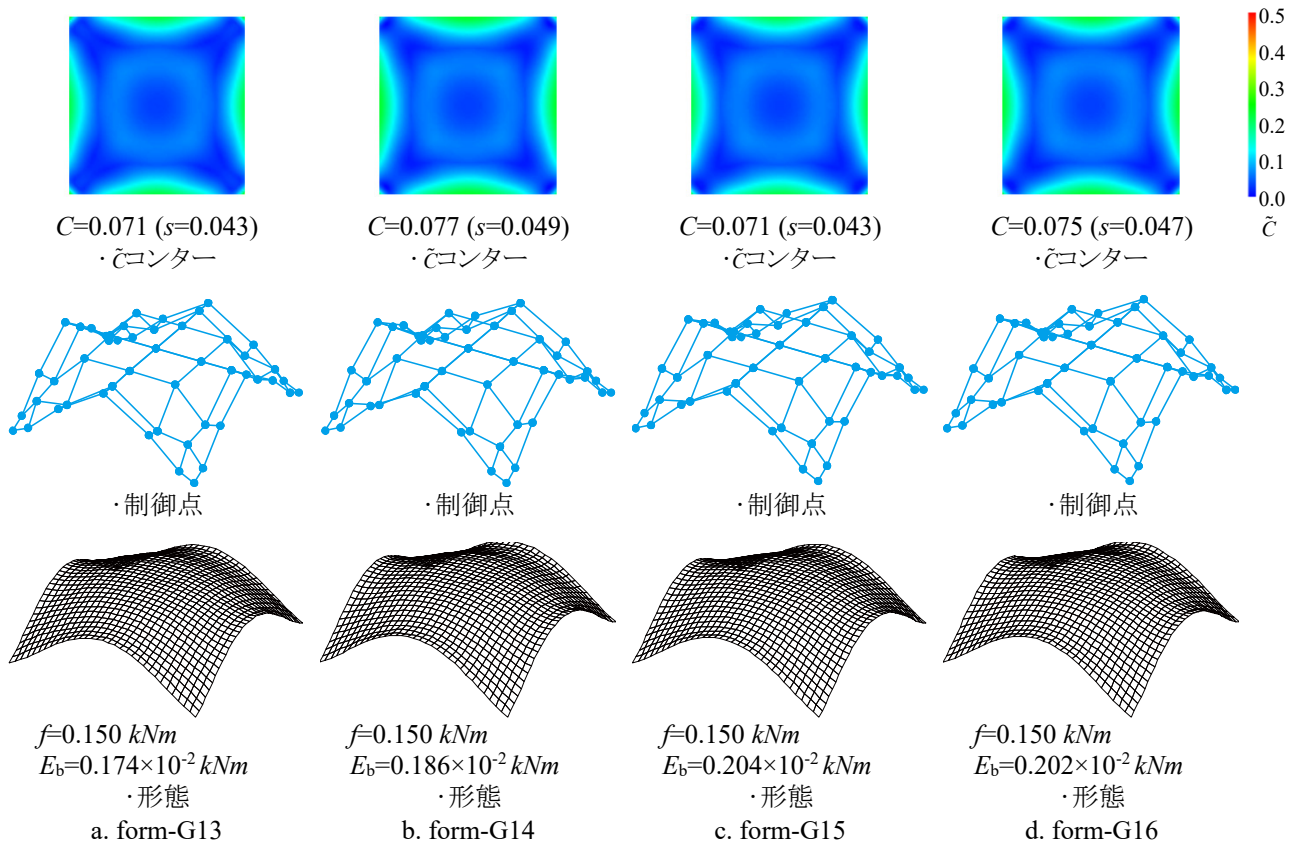


図 6.55 優良解形態例 result-g15 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.01$ )

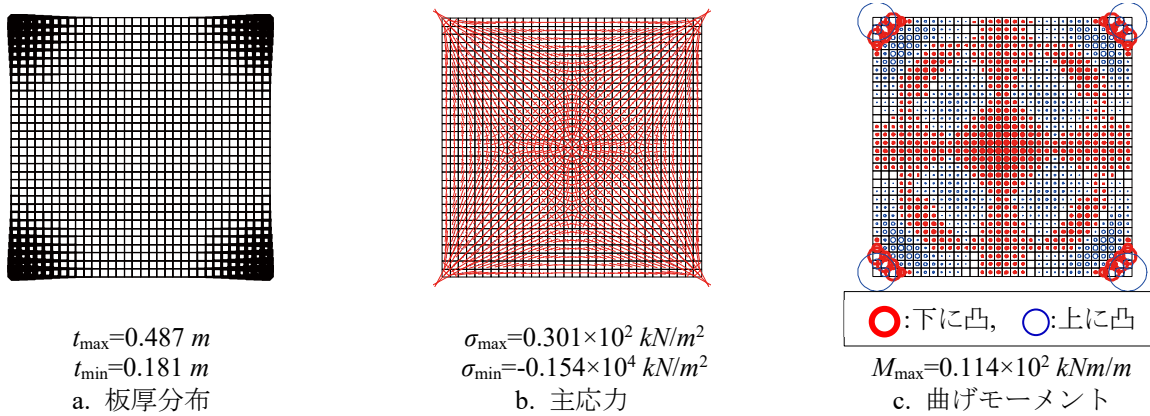


図 6.56 form-G13 の力学性状



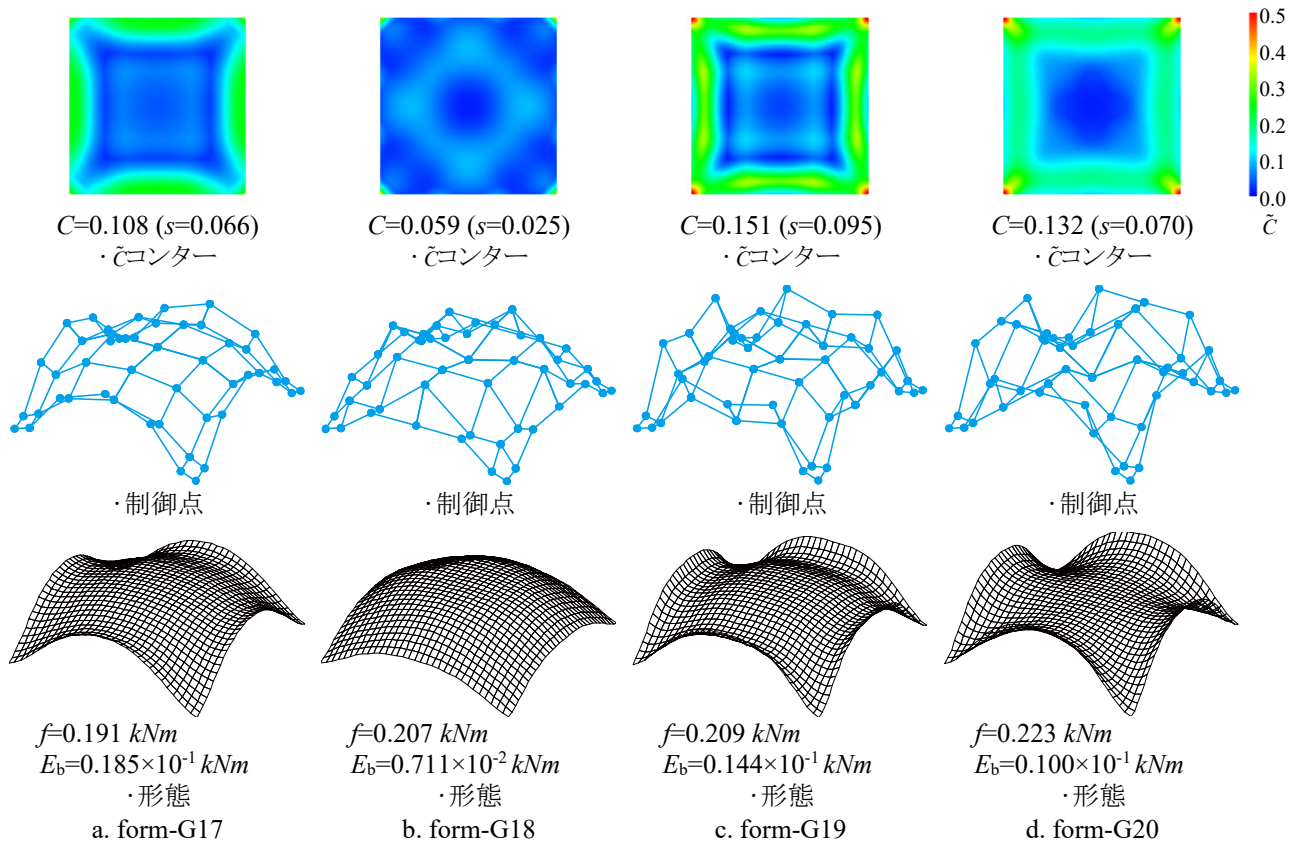
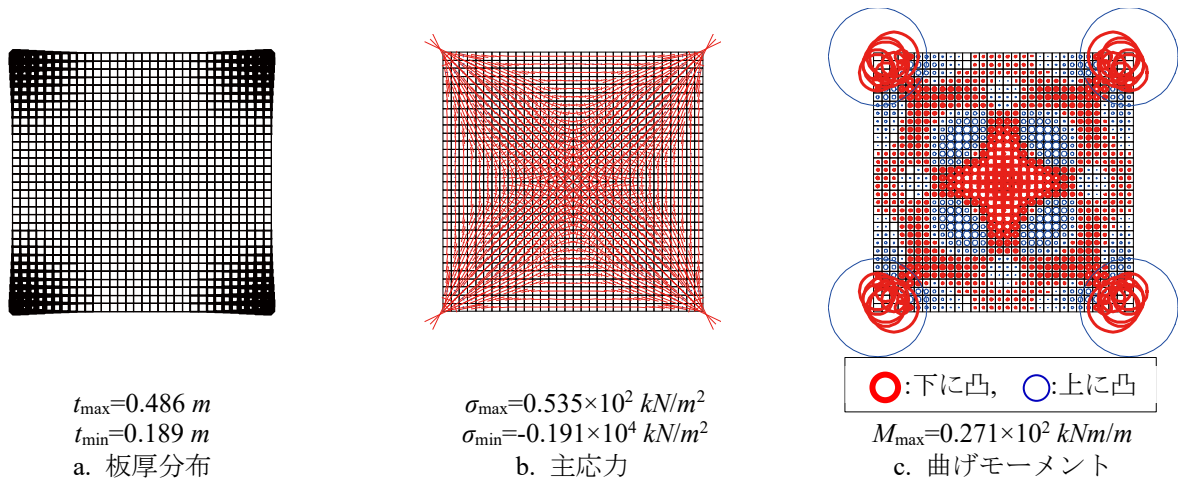
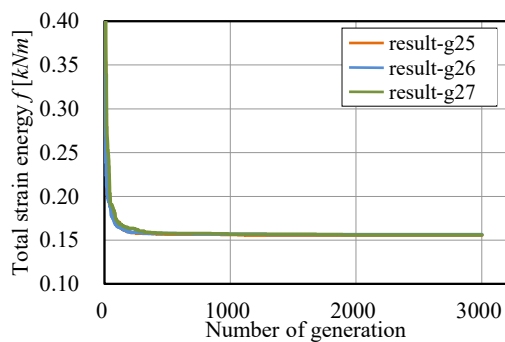
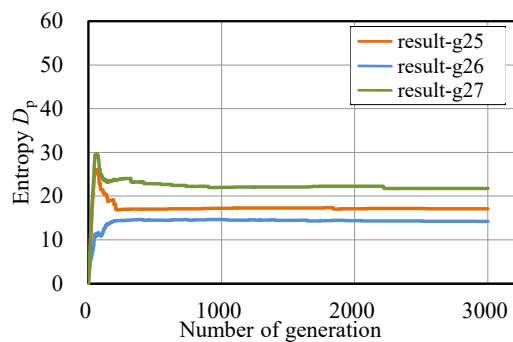

図 6.57 優良解形態例 result-g16 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.1$ )


図 6.58 form-G20 の力学性状

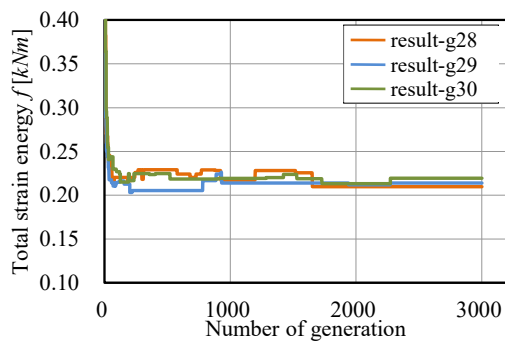


a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移

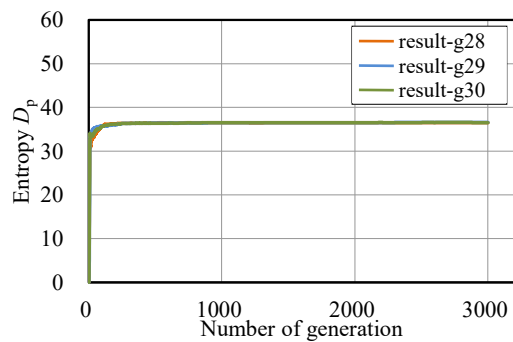


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.59 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.01$



a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.60 解の収束状況  $m_{uv}=6, H=0.1$

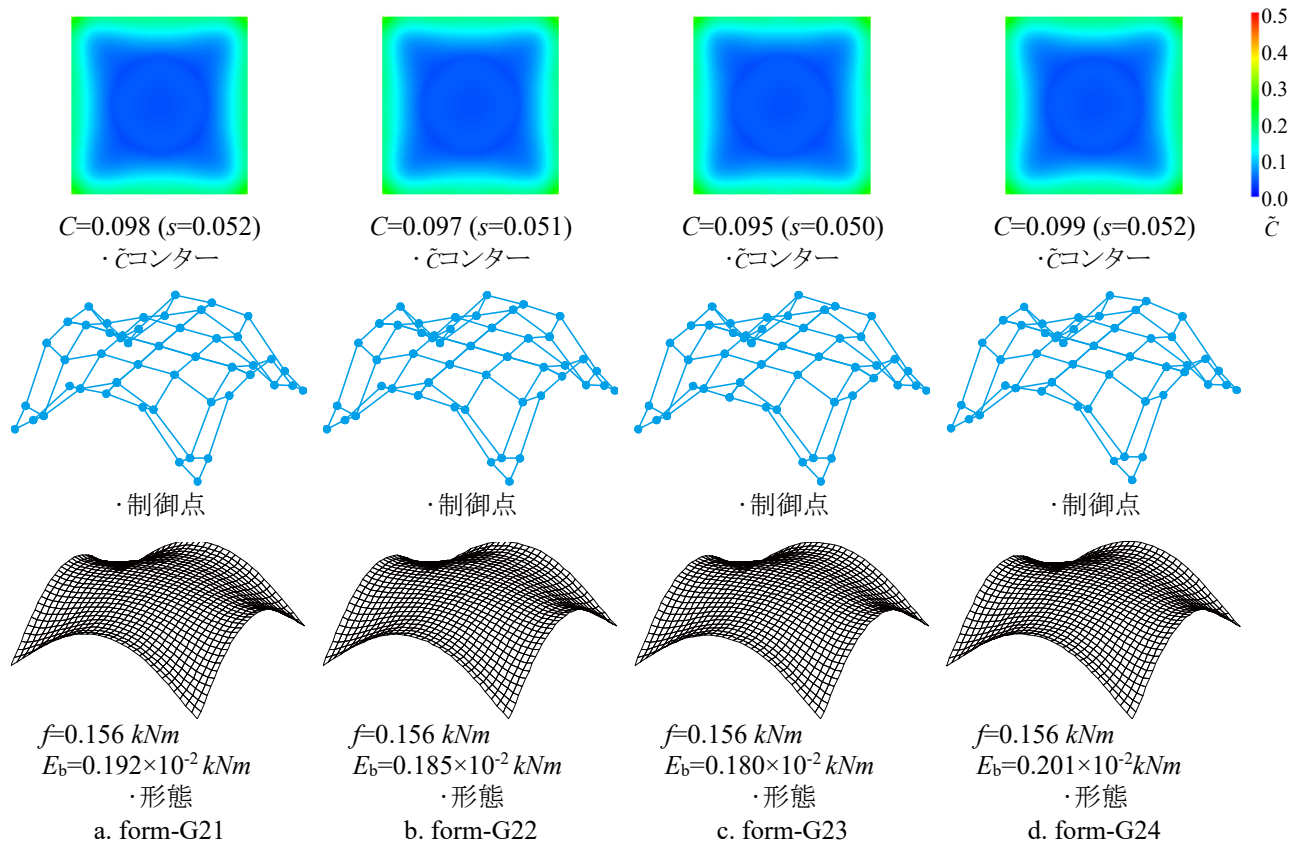


図 6.61 優良解形態例 result-g15 ( $m_{uv}=6, H=0.01$ )

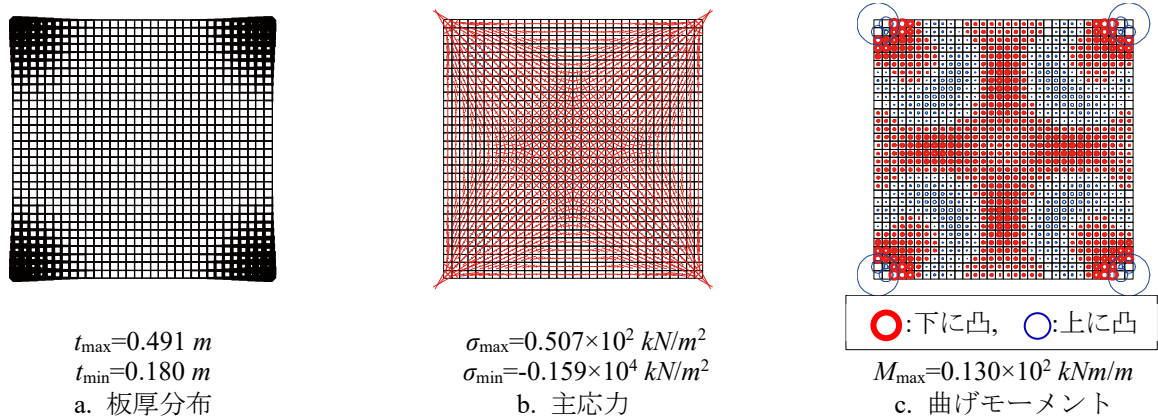


図 6.62 form-G21 の力学性状

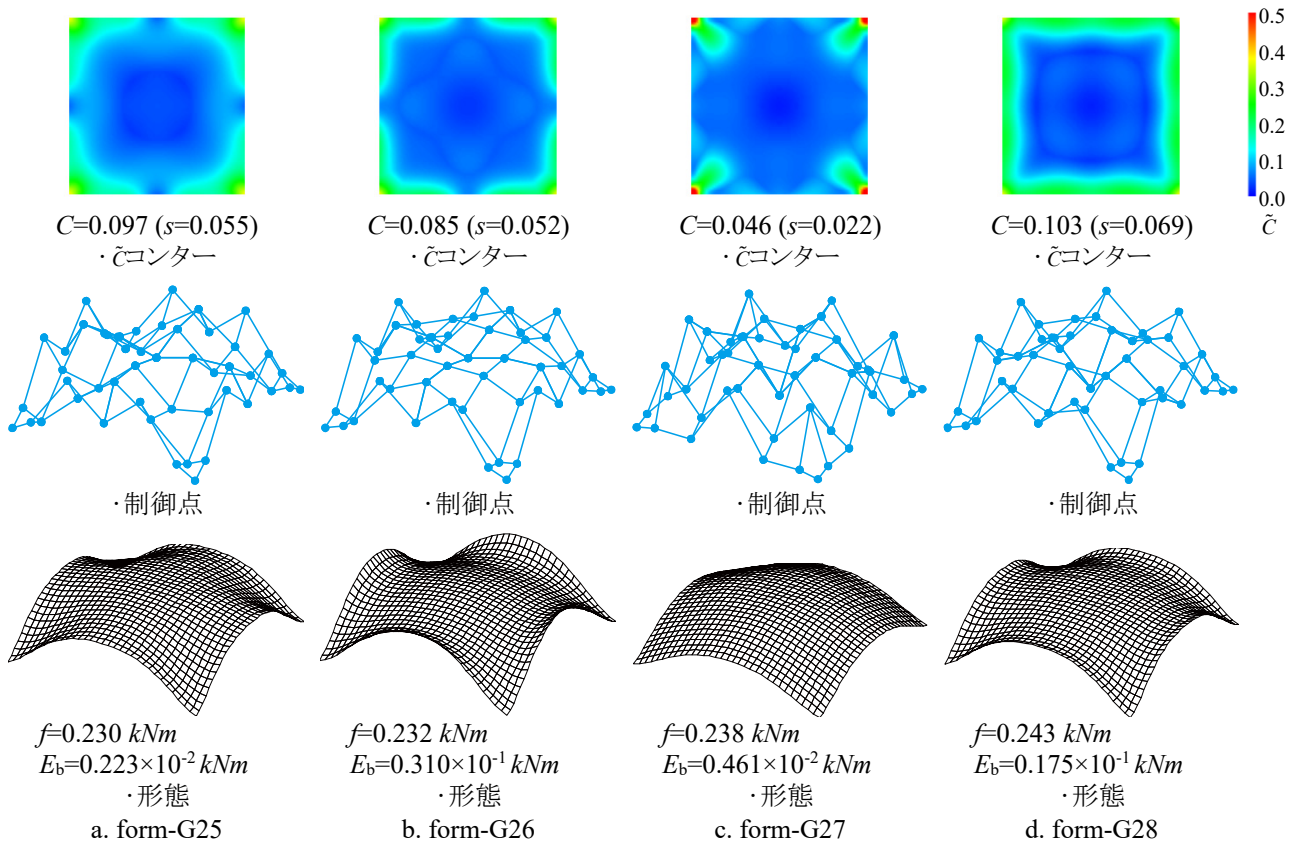


図 6.63 優良解形態例 result-g28 ( $m_{uv}=6, H=0.1$ )

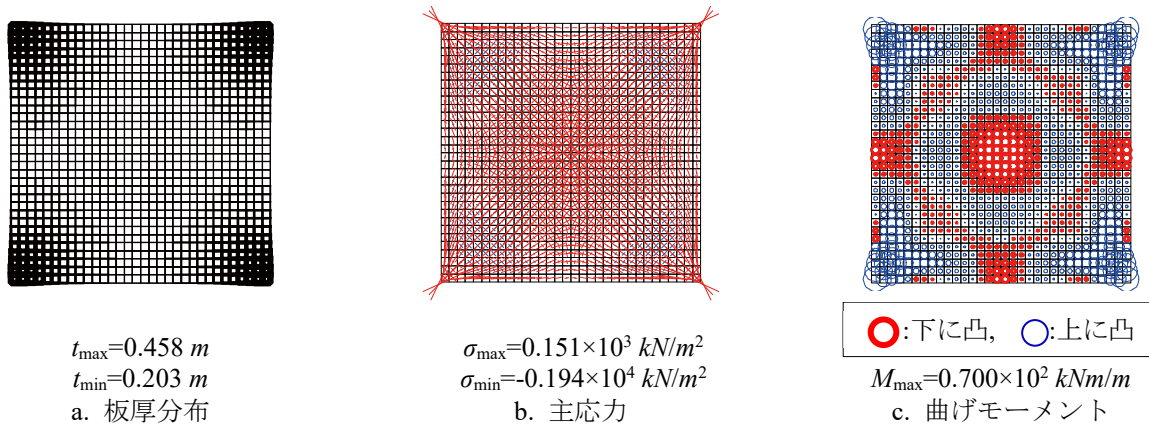
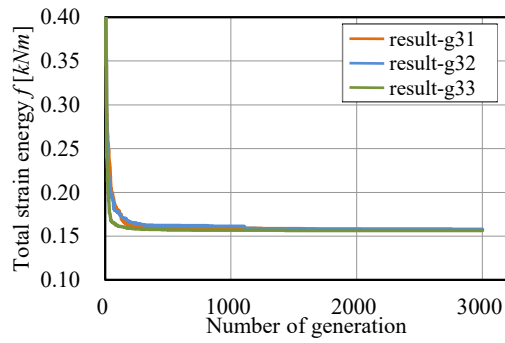
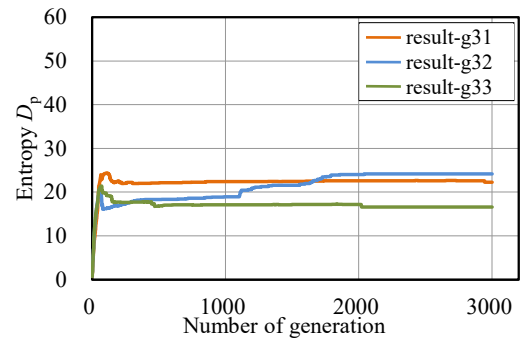
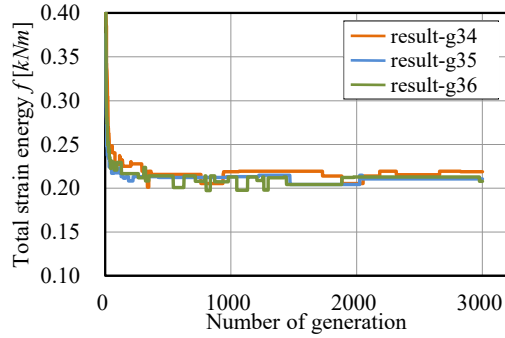
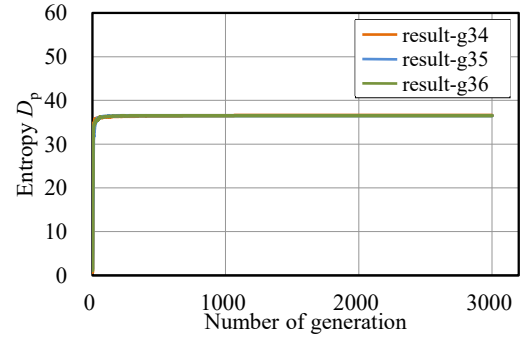


図 6.64 form-G27 の力学性状

a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.65 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.01$ a. 総ひずみエネルギー  $f$  の遷移b. 多様度指数  $D_p$  の遷移図 6.66 解の収束状況  $m_{uv}=7, H=0.1$

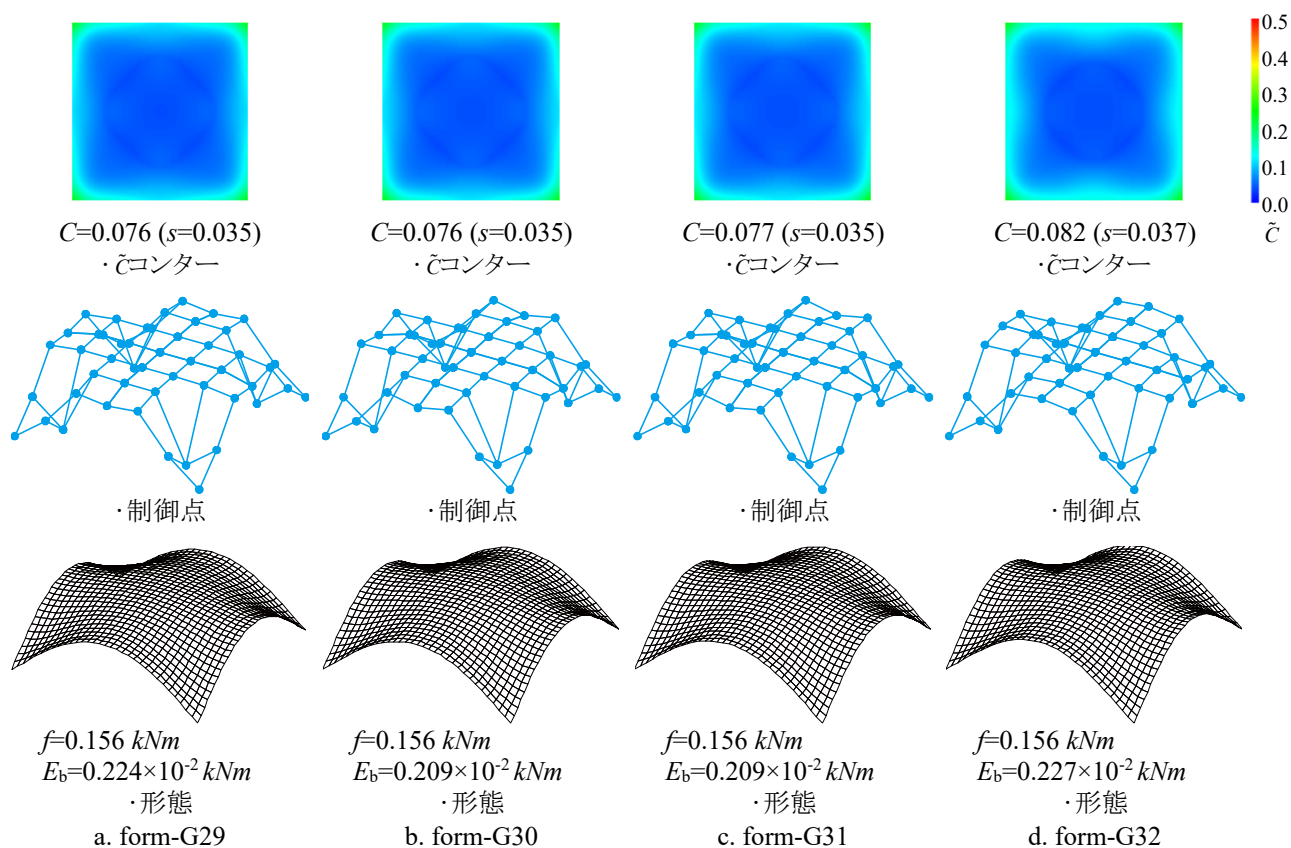


図 6.67 優良解形態例 result-g15 ( $m_{uv}=7, H=0.01$ )

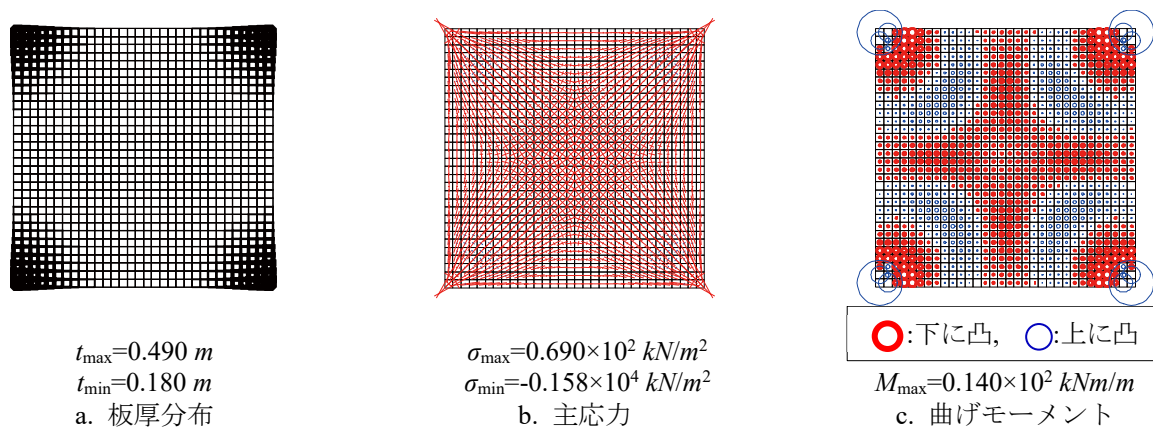


図 6.68 form-G29 の力学性状



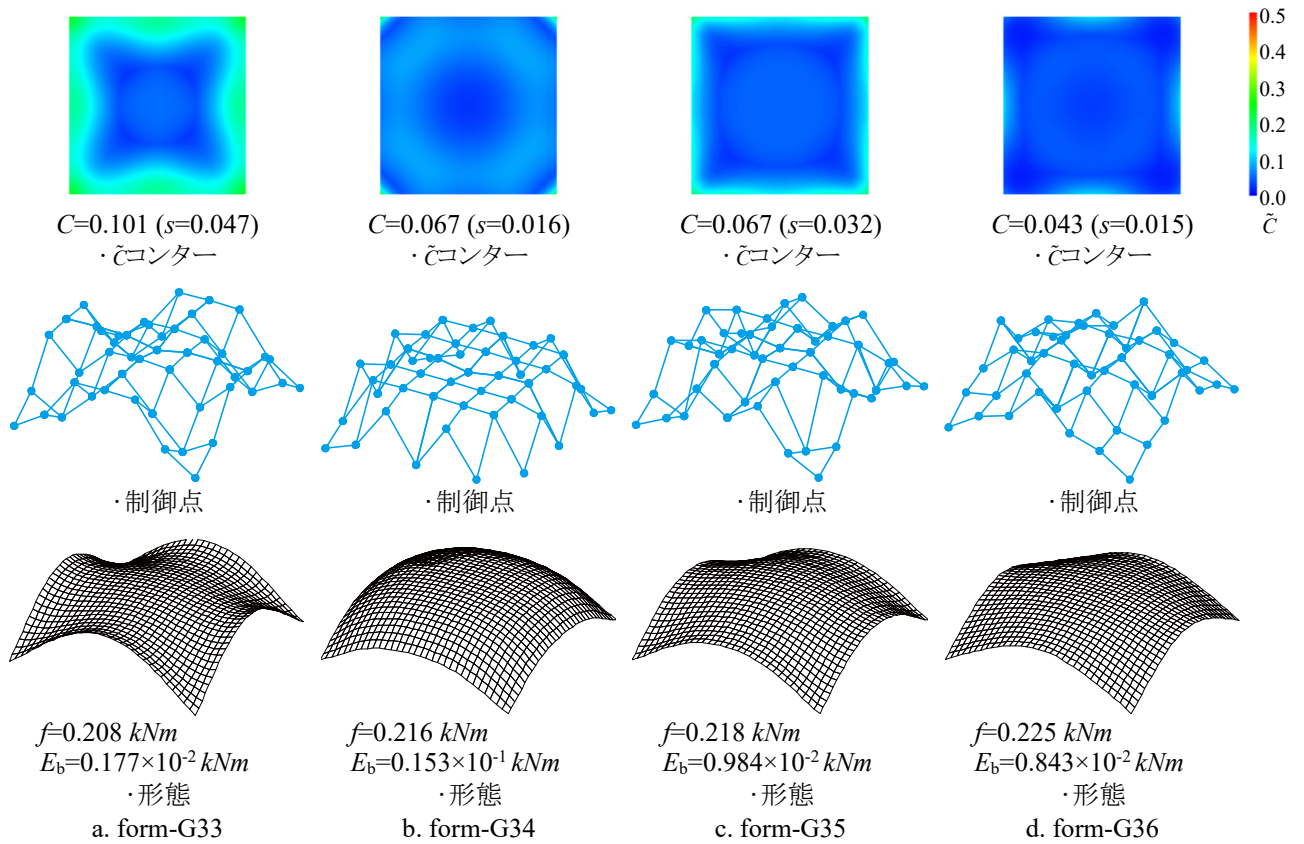
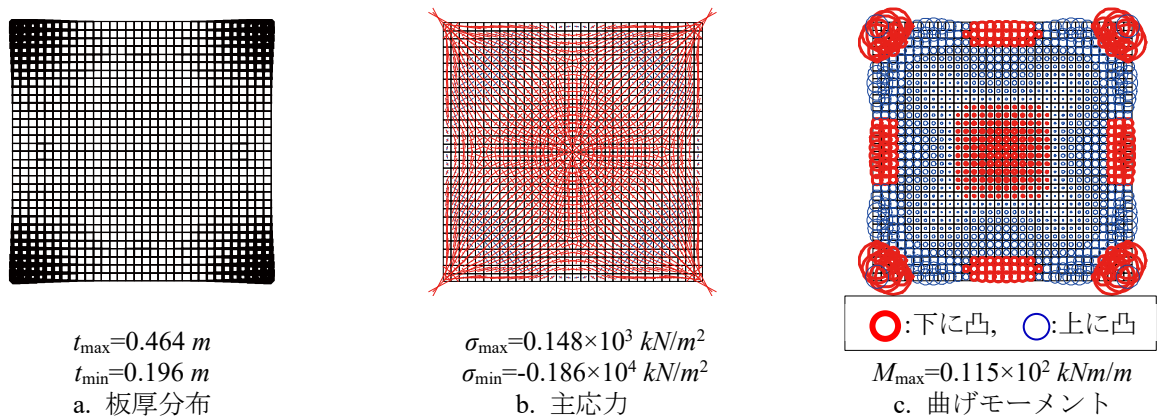

図 6.69 優良解形態例 result-g17 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )


図 6.70 form-G34 の力学性状

### 6.3.4 考察

$H = 0.01$  のとき目的関数値の収束状況と得られる解形態は SGA に対応する。1000 世代にはほぼ収束値に達する。 $H = 0.01$  の設定における多様度指数  $D_p$  は、約 500 世代以降は低い値で変動が少なく、多様性を重視しない局所的な探索が行われている。その結果、最終世代の記憶細胞内個体の解形態は多様性が低く、大域的最適解を含むその付近の解が得られている。 $H = 0.1$  とすると目的関数値が探索中に変動し、収束値にばらつきが生じる。また、 $D_p$  の値は試行ごとで比較的大きな値に安定して収束する。これは ISGA がエリート戦略を採っておらず、解の多様性に従って記憶細胞を更新するためである。 $H = 0.1$  のとき、どの  $m_{uv}$  においても目的関数値の変動が大きいことから、本モデルの総ひずみエネルギー最小化は、峰の数が少ない解空間を有していると考えられる。得られた優良解には、form-G10 -G12 (図 6.51 b, d), form-G18, -G19 (図 6.57 b, c), form-G25, -G26 (図 6.63 a, b), form-G34, -G35 (図 6.69 b, c) のように、一度の試行で目的関数値がほぼ同値であるにもかかわらず形状が大きく異なる解を得た。これは ISGA が設計変数空間の多様性を維持した結果である。

多様性を重視した結果( $H = 0.1$ )において、 $m_{uv} = 4$  に設定した優良解には form-G9, -G12 ( $m_{uv} = 4$ ) のように外周部が湾曲する形状、または form-G11 ( $m_{uv} = 4$ ) および form-G19, -G20 ( $m_{uv} = 5$ ) のように境界部がめくれ上がる形状が含まれる。このような形状の  $C$  は比較的大きく、ほとんどが 0.10 を超えている。また、強く湾曲する形状と同時に form-G10, G18 のような  $C = 0.060$  程度の滑らかな形状も含まれ、 $m_{uv} = 4, 5$  に設定することで形状のバリエーションに富んだ結果を得た。 $m_{uv} = 6, 7$  に設定すると強く湾曲する形態が獲得されず、特に、 $m_{uv} = 7$  で  $C \geq 0.10$  の形態は少なく、 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなる。さらに形状のバリエーションは  $m_{uv} = 4, 5$  の結果と比較すると少ない。これは、階数を大きく設定することで各制御点の影響力が弱まり、影響範囲が広がるためである。つまり、局所制御性が低いいため形状表現の自由度が抑制される。例えば、 $m_{uv} = 4$  で得られた強く湾曲する形状の form-G12 (図 6.51 d) と  $m_{uv} = 7$  で得られた form-G27 (図 6.63 c) における外周部制御点は比較的類似しているが、記述される形状は全く異なっており、 $C$  は 39% である。

力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。この結果は、ISGA の探索において形状の設計変数のみ多様性を考慮し、部材選択に関する設計変数の多様性を考慮していない結果である。



## 6.4 ひび割れ曲げモーメントを考慮したひずみエネルギーと部材総重量の同時最小化 (Model-H)

本節では対角状に部材を配置したグリッドシェルの総ひずみエネルギー最小化を目標とした単一目的最適化問題を扱う。最適化問題の定式化は次式で示される。

$$\text{Find} \quad \mathbf{A}, \mathbf{R} \quad (6-9)$$

$$\text{to minimize} \quad f_t(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (6-10)$$

$$f_v(\mathbf{A}, \mathbf{R}) = \gamma \mathbf{S}(\mathbf{R})^T \mathbf{A} \quad (6-11)$$

$$\text{subject to} \quad \mathbf{A}^L \leq \mathbf{A} \leq \mathbf{A}^U \quad \mathbf{R}^L \leq \mathbf{R} \leq \mathbf{R}^U \quad (6-12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \leq \boldsymbol{\sigma}_a \quad (6-13)$$

ここで、 $\mathbf{A}$ : 部材特性ベクトル(=  $[A_j]$ ),  $\mathbf{R}$ : 節点情報ベクトル(=  $[R_k]$ ),  $f_t$ : 目的関数(総ひずみエネルギー),  $\mathbf{d}$ : 節点変位ベクトル,  $\mathbf{K}$ : 剛性マトリクス,  $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ : 表面積ベクトル,  $R_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $R_j^U = 7.0 \text{ m}$ ,  $A_j^L = 0.0 \text{ m}$ ,  $A_j^U = 0.05 \text{ m}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ : 部材応力度ベクトル,  $\boldsymbol{\sigma}_a$ : 許容応力度ベクトル である。式(6-13)は式(2-125)に示す許容圧縮応力度と、式(2-127)に示すひび割れ曲げモーメントによる長期応力制約条件である。応力検定は、面外力の最大・最小方向、ならびに面内力の最大・最小方向の計 4 方向に対して行う。解析パラメータは表 6.4 のように設定する。

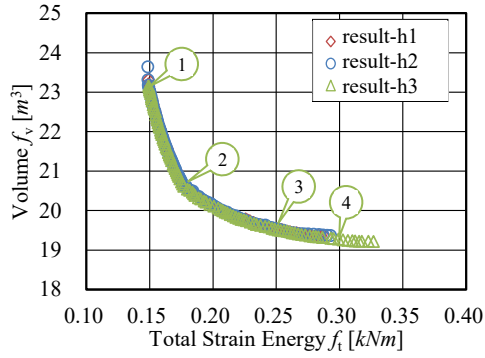
表 6.4 GA パラメータ (ISGA, SPEA2)

世代数	3000
個体数	200
世代交代率	0.9
交叉率	0.7
突然変異率	$0.4 \times 10^{-2}$
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
$\mathbf{A}$ の遺伝子長	$10 \times 16 \text{ bit}$
$\mathbf{R}$ の遺伝子長	$9 \times 16 \text{ bit}$
コーディング	Gray code

### 6.4.1 SPEA2 による数値結果

SPEA2 による数値結果を図 6.71 - 6.82 に示す。図 6.71 - 6.74 は、SPEA2 により得られた各階数設定 3 試行における目的関数空間のアーカイブ個体 (横軸: 総ひずみエネルギー  $f_1$ , 縦軸: 部材体積  $f_v$ ) と多様度指数  $D_p$  の遷移 (横軸: 世代数, 縦軸: 多様度指数  $D_p$ ) である。図 6.75 - 6.78 は、解形態の  $\bar{c}$  コンター図, 制御点, 形態鳥瞰図を示し、形態の記号数字は目的関数空間のアーカイブ個体 (図 6.71 - 6.74) の数字に対応する。吹き出しの色は図中個体プロットの色に対応させている。得られた解形態の力学性状を図 6.79 - 6.82 に示す (a: 板厚分布, b: 主応力, c: 曲げモーメント)。板厚分布図の実線太さは板厚の比率、主応力図の実線長さは主応力の比率 (赤色: 圧縮、青色: 引張)、曲げモーメント分布図の円の大きさは曲げモーメントの比率 (赤丸: 下に凸, 青丸: 上に凸) を示す。結果数値情報は、 $E_b$ : 曲げひずみエネルギー,  $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\bar{c}_i$  の標準偏差,  $t_{\max} \cdot t_{\min}$ : 最大・最小板厚,  $\sigma_{\max} \cdot \sigma_{\min}$ : 最大・最小主応力 (正值: 引張, 負値: 圧縮),  $M_{\max}$ : 最大曲げモーメント である。

図 6.71 - 6.74 より、各試行ではほぼ同じ位置にパレートフロントを形成し、 $f_1 = 0.18$  あたりにパレートフロントが折れ曲がる点が存在している。パレートフロント上の解形状は類似しているが、その点を境に、 $f_1 < 0.18$  の範囲では板厚が変化し、 $f_1 > 0.18$  の範囲ではライズが変化する。図 6.79 - 6.82 より、ライズが小さくなるにつれて主応力が大きくなるが、いずれも制約条件を満たす許容解である。板厚分布が同一の場合は扁平な形状の方が  $f_v$  が小さいため、応力制約を満たす範囲で  $f_v$  が小さい解を探索した結果である。



a. 目的関数空間のアーカイブ個体

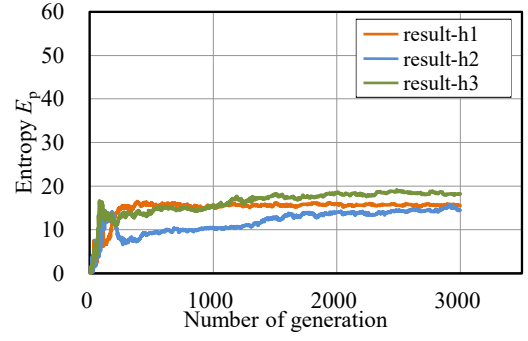
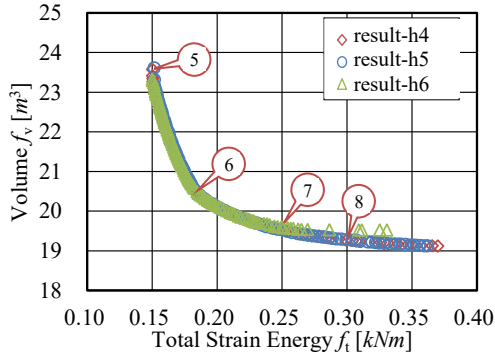

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.71 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=4$ )


a. 目的関数空間のアーカイブ個体

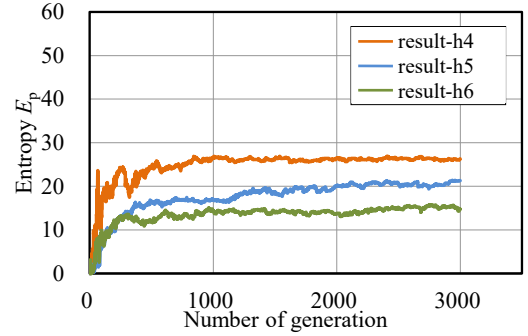
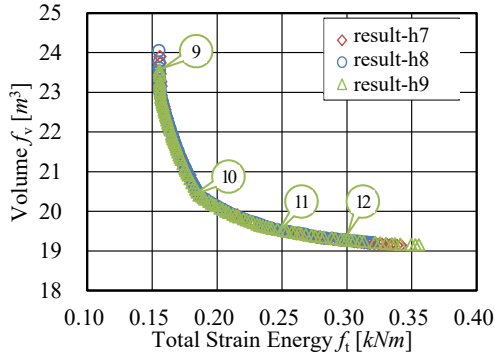

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.72 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=5$ )


a. 目的関数空間のアーカイブ個体

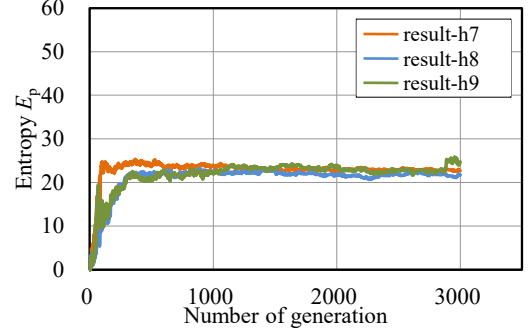
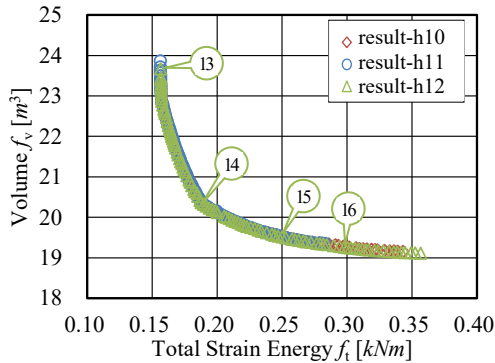

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.73 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=6$ )


a. 目的関数空間のアーカイブ個体

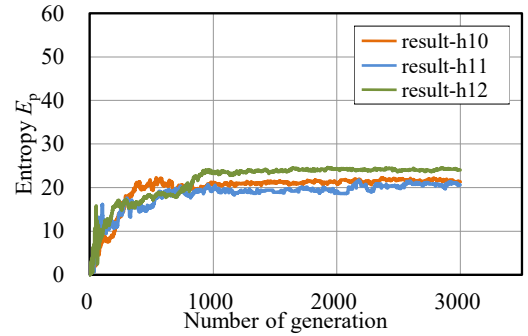

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.74 SPEA2 数値結果 ( $m_{uv}=7$ )

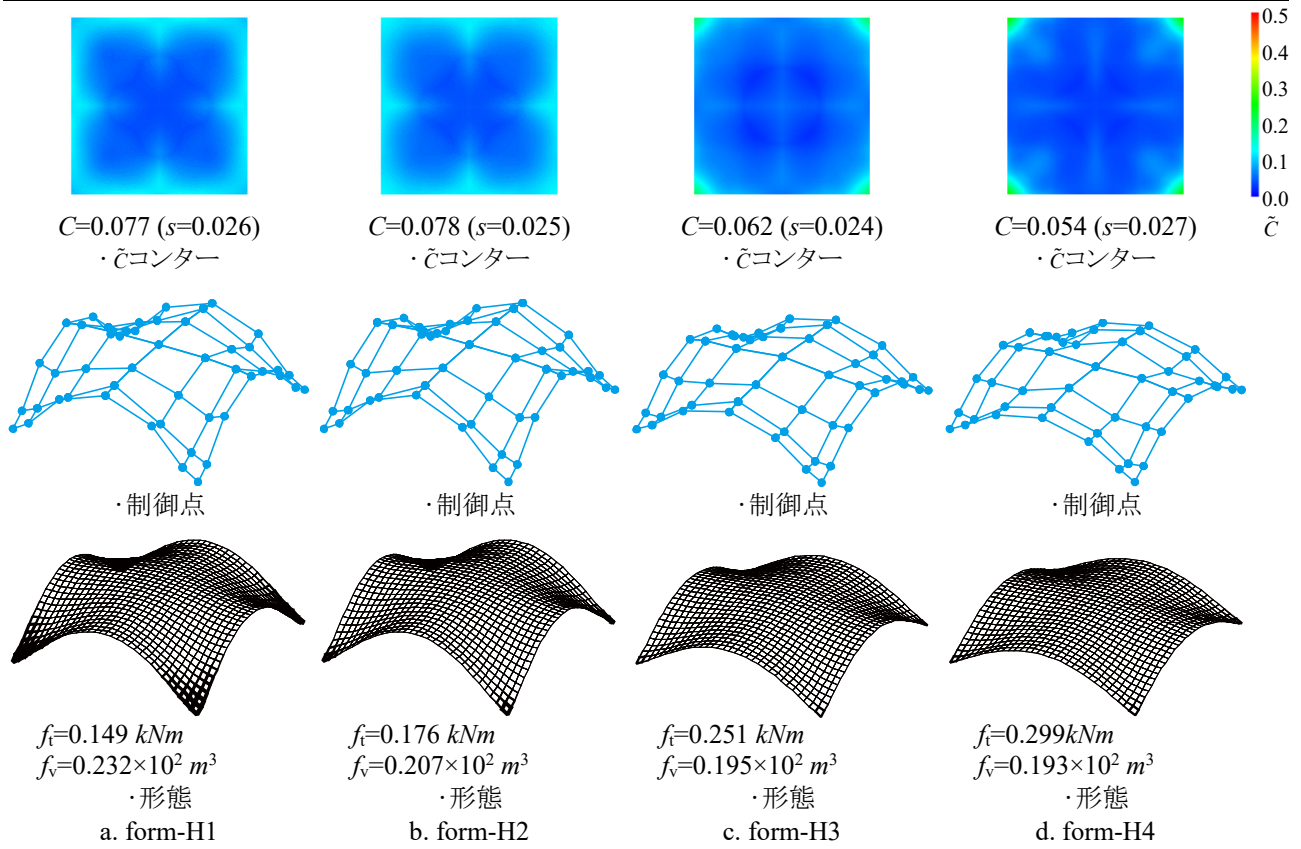


図 6.75 SPEA2 形態例 result-h3 ( $m_{uv}=4$ )

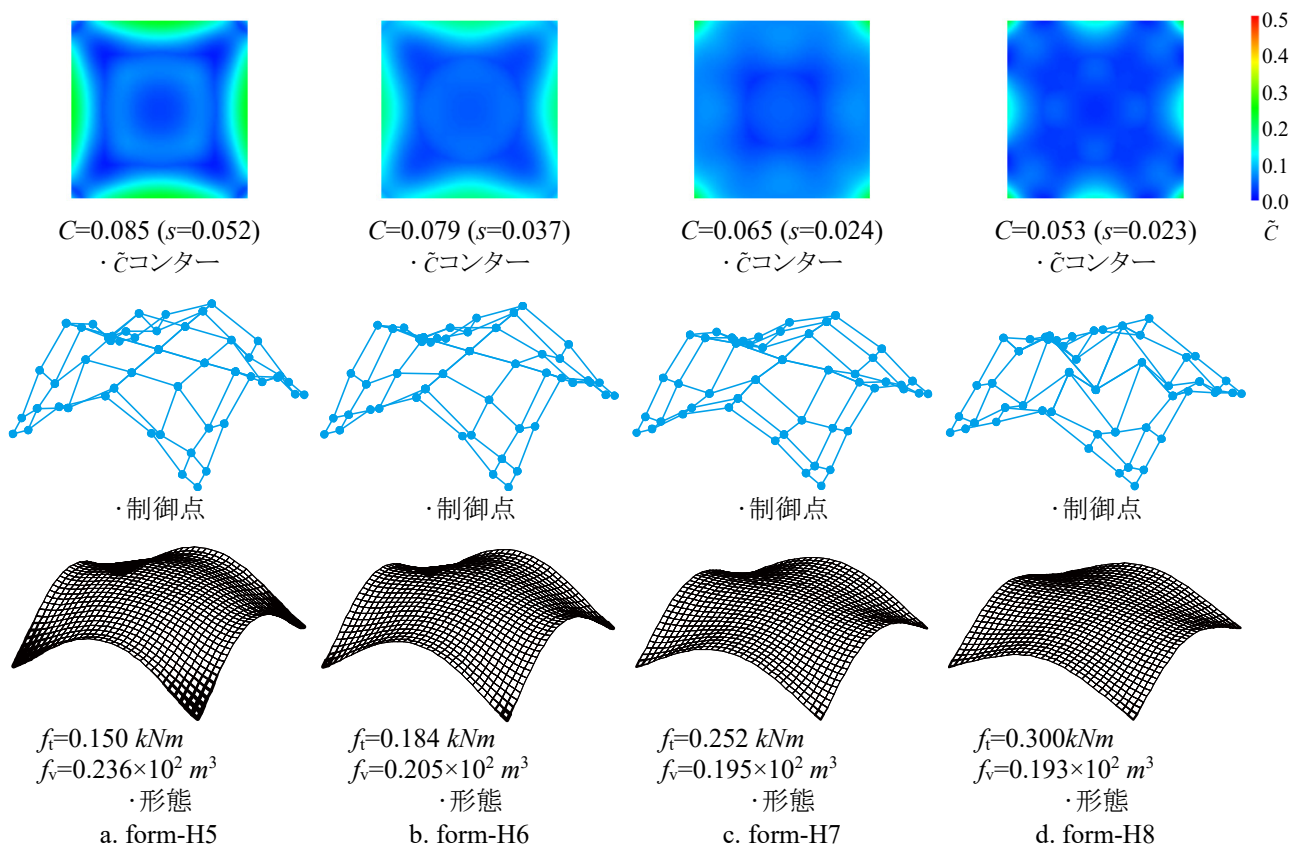


図 6.76 SPEA2 形態例 result-h6 ( $m_{uv}=5$ )

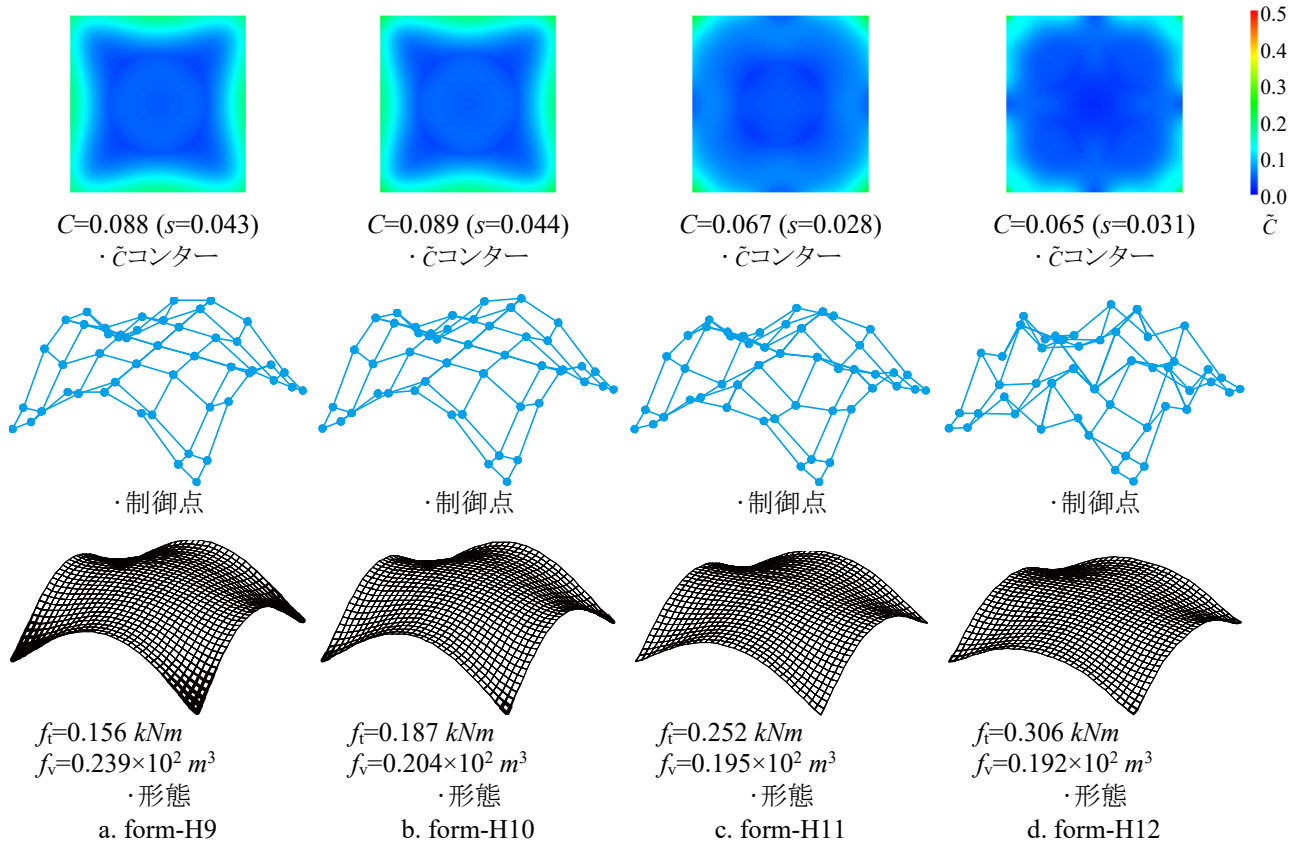


図 6.77 SPEA2 形態例 result-h7 ( $m_{uv}=6$ )

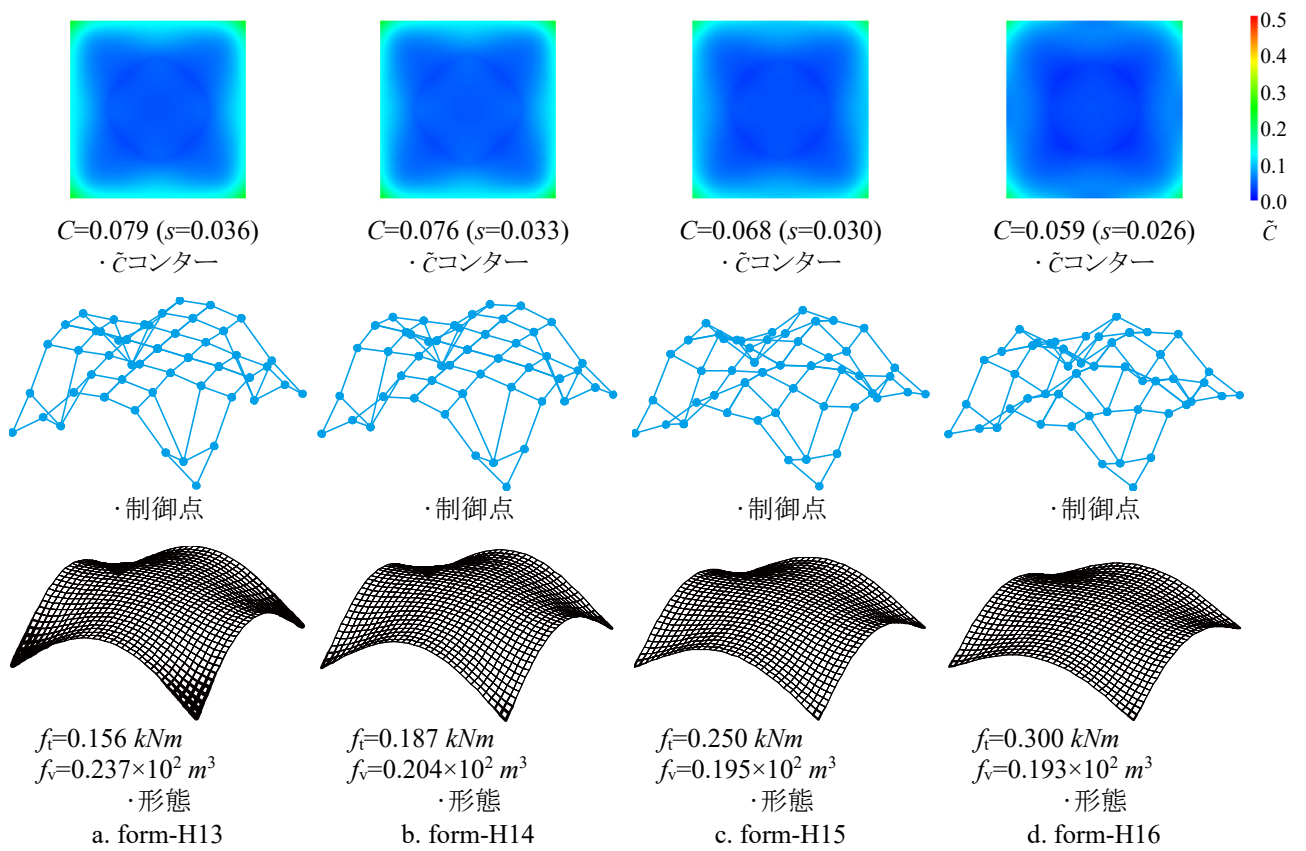
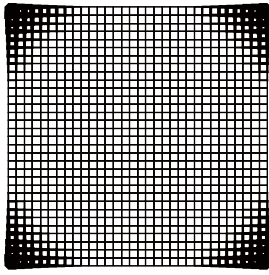
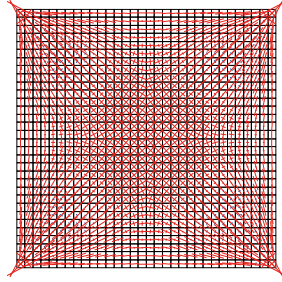


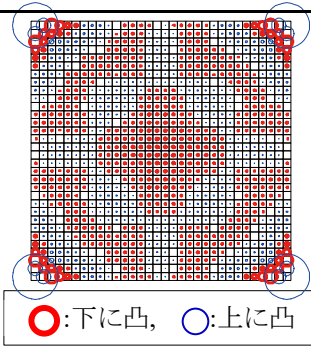
図 6.78 SPEA2 形態例 result-h11 ( $m_{uv}=7$ )



$t_{\max}=0.485\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

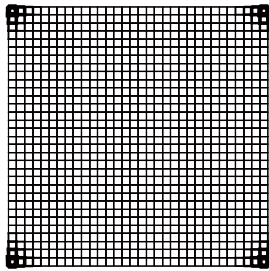


$\sigma_{\max}=0.517 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.152 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

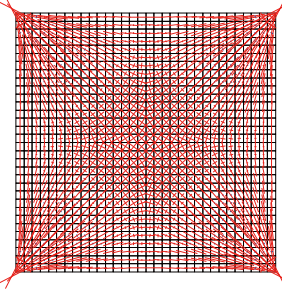


$M_{\max}=0.138 \times 10^2\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

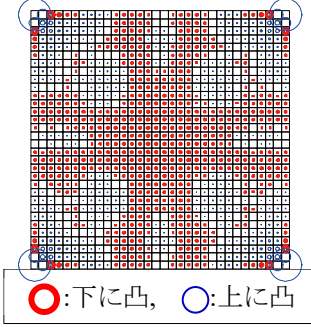
図 6.79 form-H1 の力学性状



$t_{\max}=0.405\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

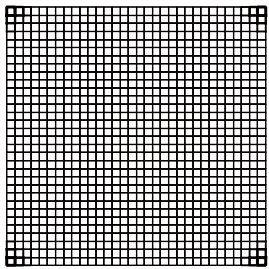


$\sigma_{\max}=0.483 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.198 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

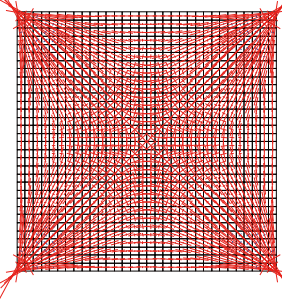


$M_{\max}=0.981 \times 10\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

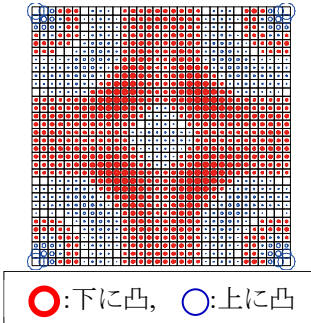
図 6.80 form-H2 の力学性状



$t_{\max}=0.311\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布

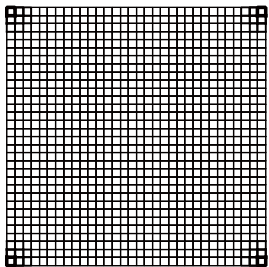


$\sigma_{\max}=0.849 \times 10^2\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.285 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力

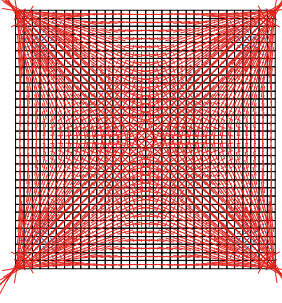


$M_{\max}=0.478 \times 10\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

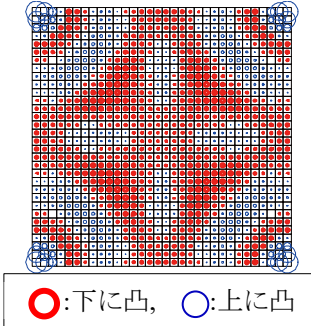
図 6.81 form-H3 の力学性状



$t_{\max}=0.333\text{ m}$   
 $t_{\min}=0.180\text{ m}$   
 a. 板厚分布



$\sigma_{\max}=0.135 \times 10^3\text{ kN/m}^2$   
 $\sigma_{\min}=-0.298 \times 10^4\text{ kN/m}^2$   
 b. 主応力



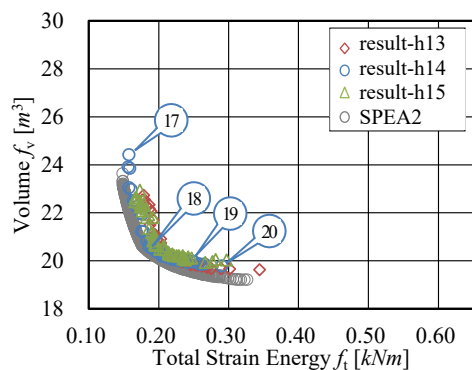
$M_{\max}=0.590 \times 10\text{ kNm/m}$   
 c. 曲げモーメント

図 6.82 form-H4 の力学性状

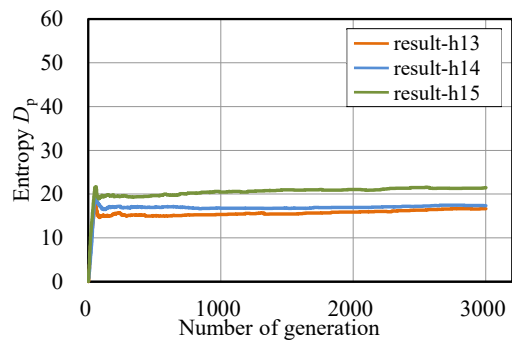
## 6.4.2 ISGA による数値結果

図 6.83 - 6.106 に ISGA による数値結果を示す。ISGA の各パラメータにつき 3 試行結果における目的関数空間の記憶細胞個体(横軸: 総ひずみエネルギー  $f_e$ , 縦軸: 部材体積  $f_v$ )と多様度指数  $D_p$  の遷移(横軸: 世代数, 縦軸: 多様度指数  $D_p$ )を図 6.83, 6.84 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.89, 6.90 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.95, 6.96 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.101, 6.102 ( $m_{uv} = 7$ )に示す。ここで、優良解選択率  $S_d = 0.5$  とし、SPEA2 で得られた解を白抜き円○でプロットする。得られた特徴的な試行結果における 4 形態の  $\bar{c}$  コンター図, 制御点, 形態鳥瞰図を図 6.85, 6.87 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.91, 6.93 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.97, 6.99 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.103, 6.105 ( $m_{uv} = 7$ )に示し、形態の記号数字は目的関数空間のアーカイブ個体の数字に対応する。吹き出しの色は図中個体プロットの色に対応させている。得られた優良解形態の力学性状(a: 部材分布, b: 軸力(青線: 引張力, 赤線: 圧縮力), c: 面外( $y$  軸まわり)曲げモーメント, d: 面内( $z$  軸まわり)曲げモーメント)を図 6.86, 6.88 ( $m_{uv} = 4$ ), 図 6.92, 6.94 ( $m_{uv} = 5$ ), 図 6.98, 6.100 ( $m_{uv} = 6$ ), 図 6.104, 6.106 ( $m_{uv} = 7$ ) に示す。部材分布図と軸力図における実線太さは、各々部材断面積と軸力に比例させて示す。結果数値情報は、 $C$ : 式(3-57)の形状特徴指標,  $s$ : 曲面上  $\bar{c}_i$  の標準偏差,  $A_{\max} \cdot A_{\min}$ : 最大・最小断面積,  $N_{\max} \cdot N_{\min}$ : 最大・最小軸力(正值: 引張力, 負値: 圧縮力),  ${}_yM_{\max} \cdot {}_zM_{\max}$ : 面外・面内最大曲げモーメント である。



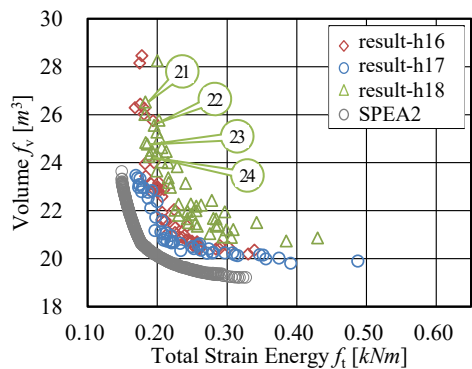


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

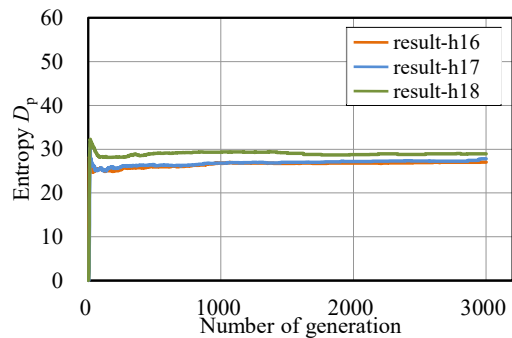


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.83 数値結果  $m_{uv}=4, H=0.01$



a. 目的関数空間の記憶細胞個体



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.84 数値結果  $m_{uv}=4, H=0.10$



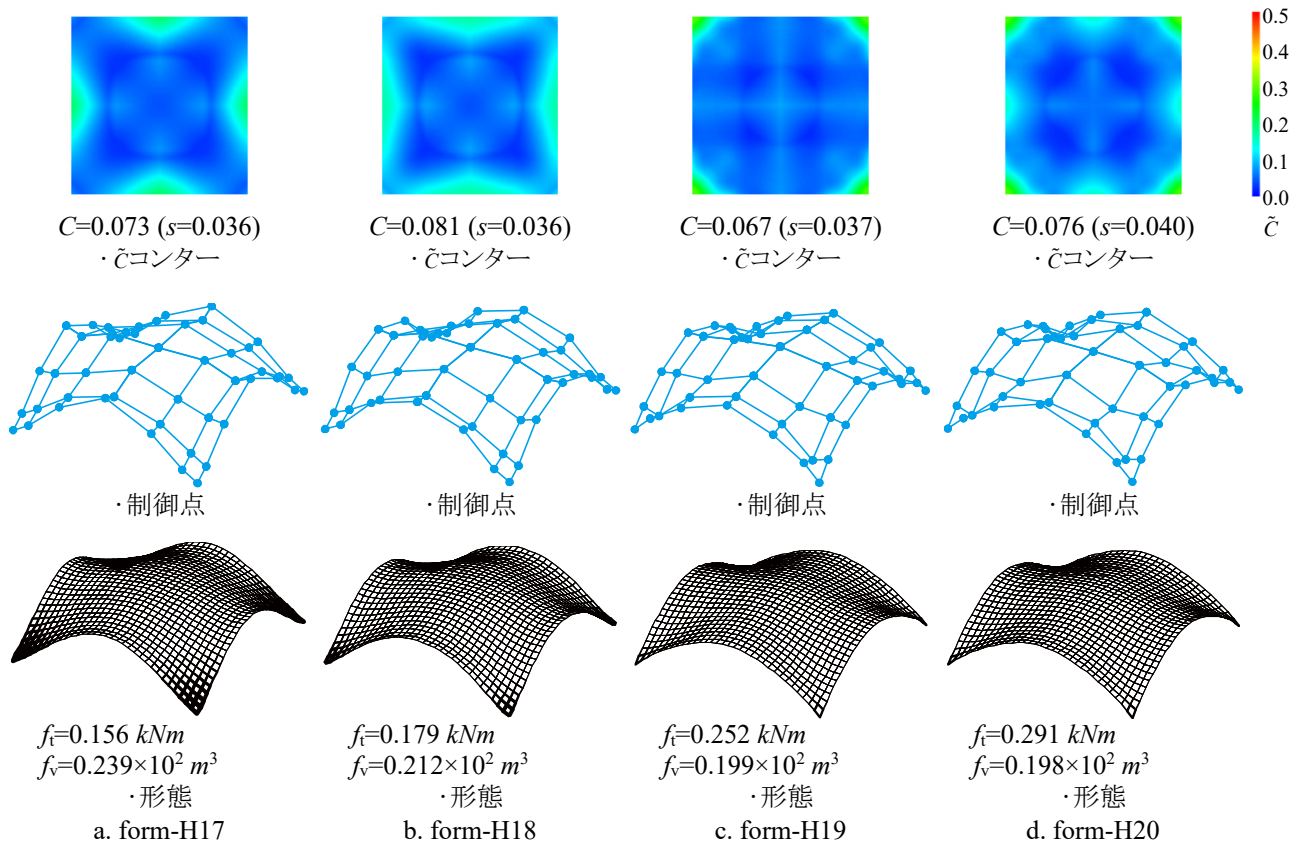
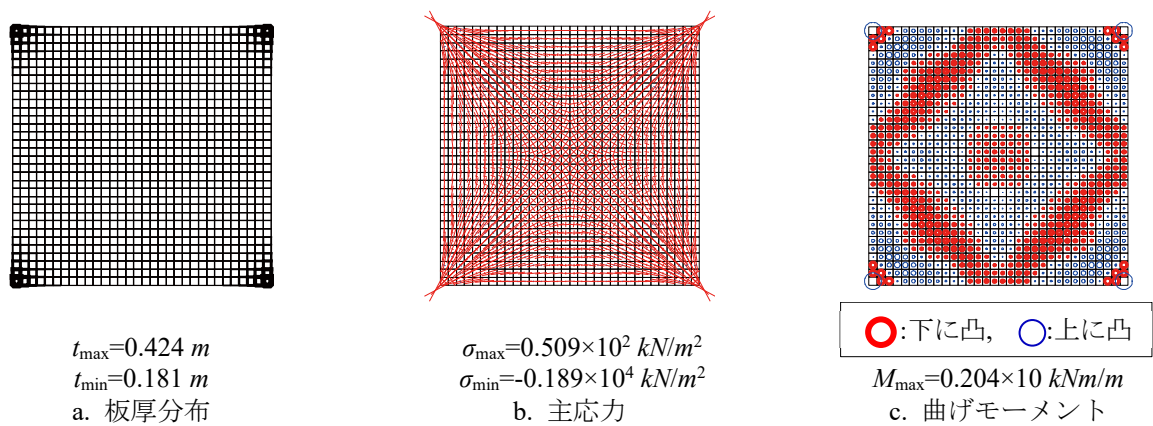

図 6.85 優良解形態例 result-h14 ( $m_{uv}=4, H=0.01$ )


図 6.86 form-H18 の力学性状

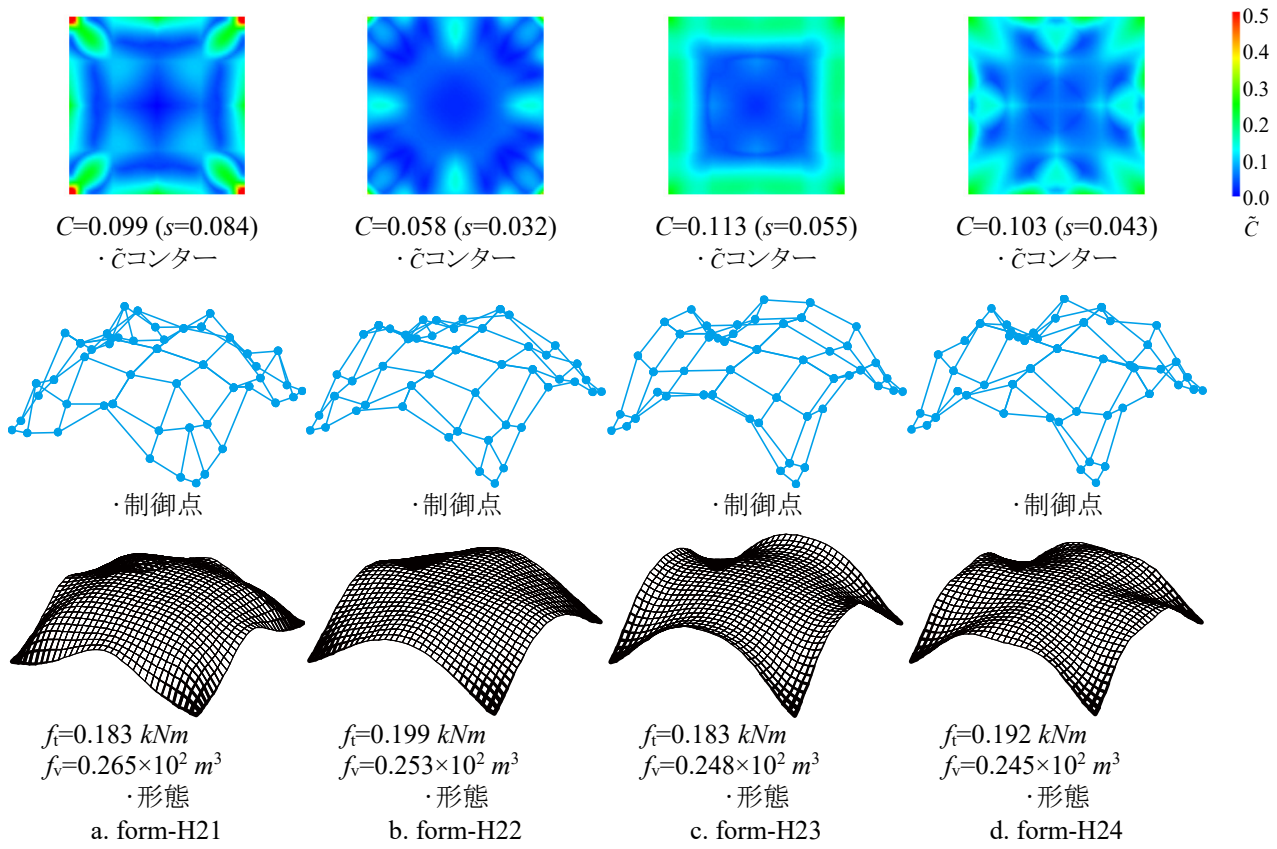


図 6.87 優良解形態例 result-h18 ( $m_{uv}=4, H=0.1$ )

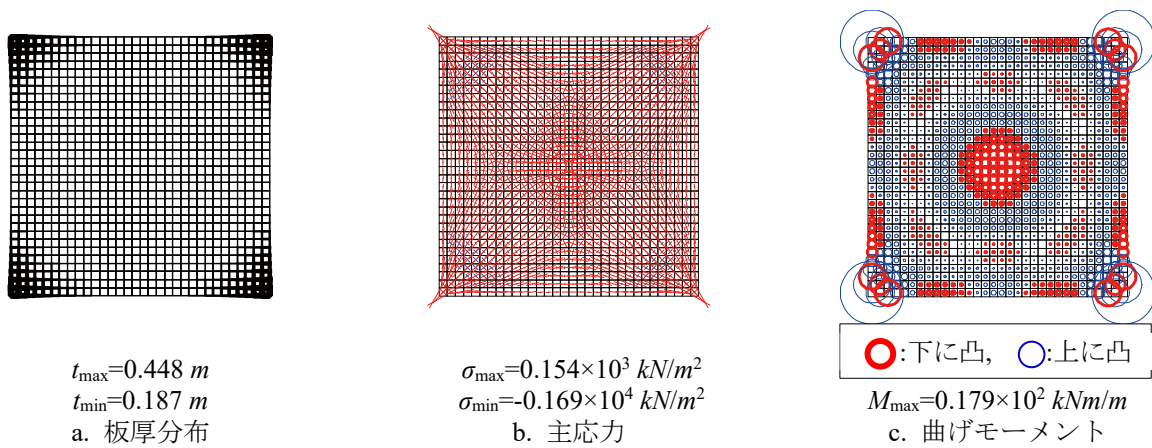
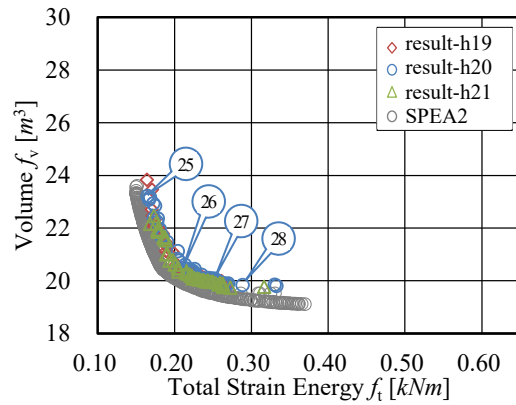


図 6.88 form-H21 の力学性状



a. 目的関数空間の記憶細胞個体

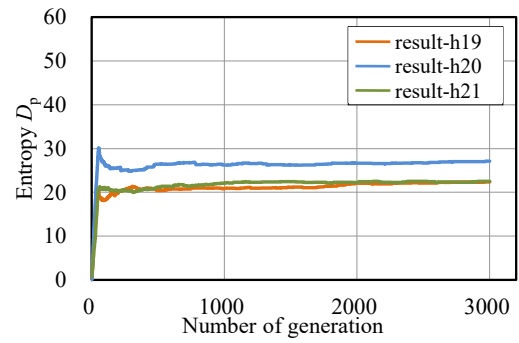
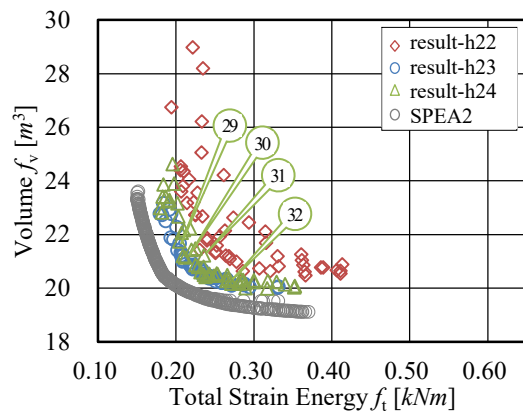

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.89 数値結果  $m_{uv}=5, H=0.01$ 


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

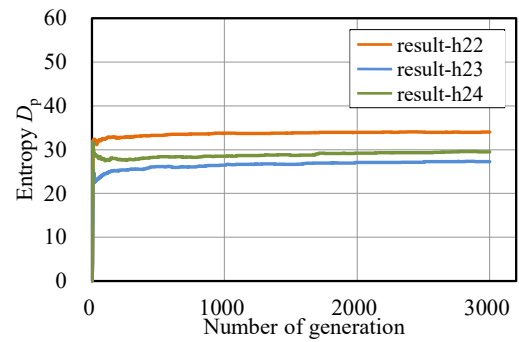

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.90 数値結果  $m_{uv}=5, H=0.10$

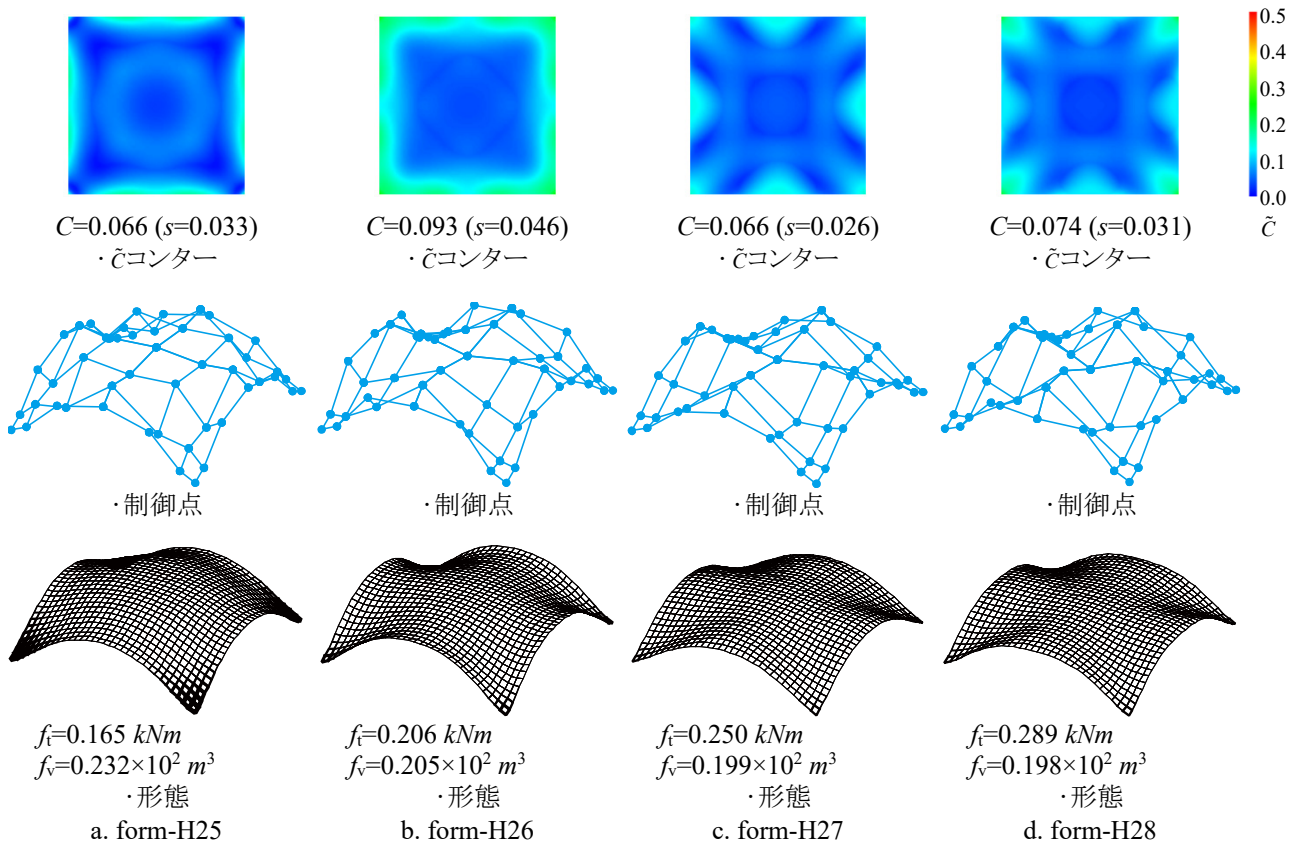


図 6.91 優良解形態例 result-h20 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.01$ )

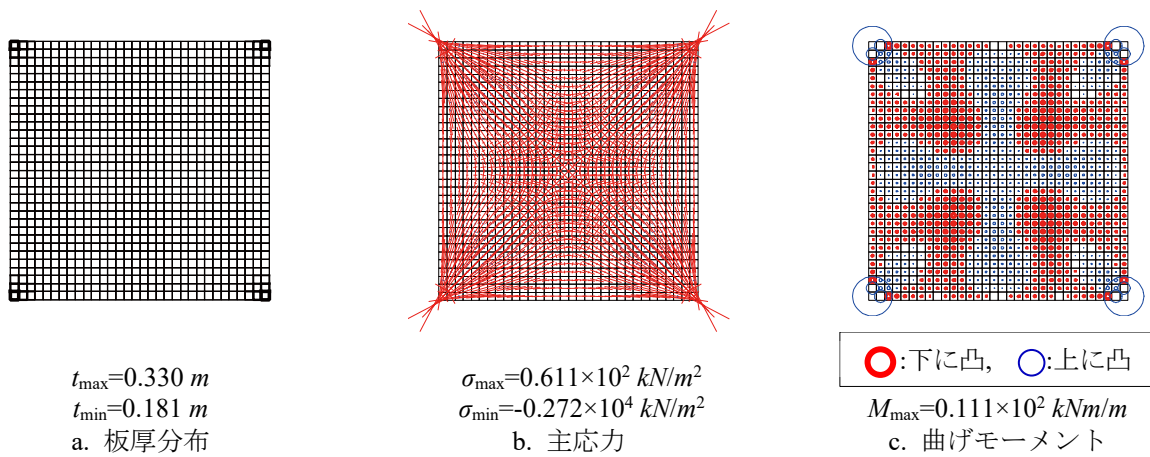


図 6.92 form-H27 の力学性状

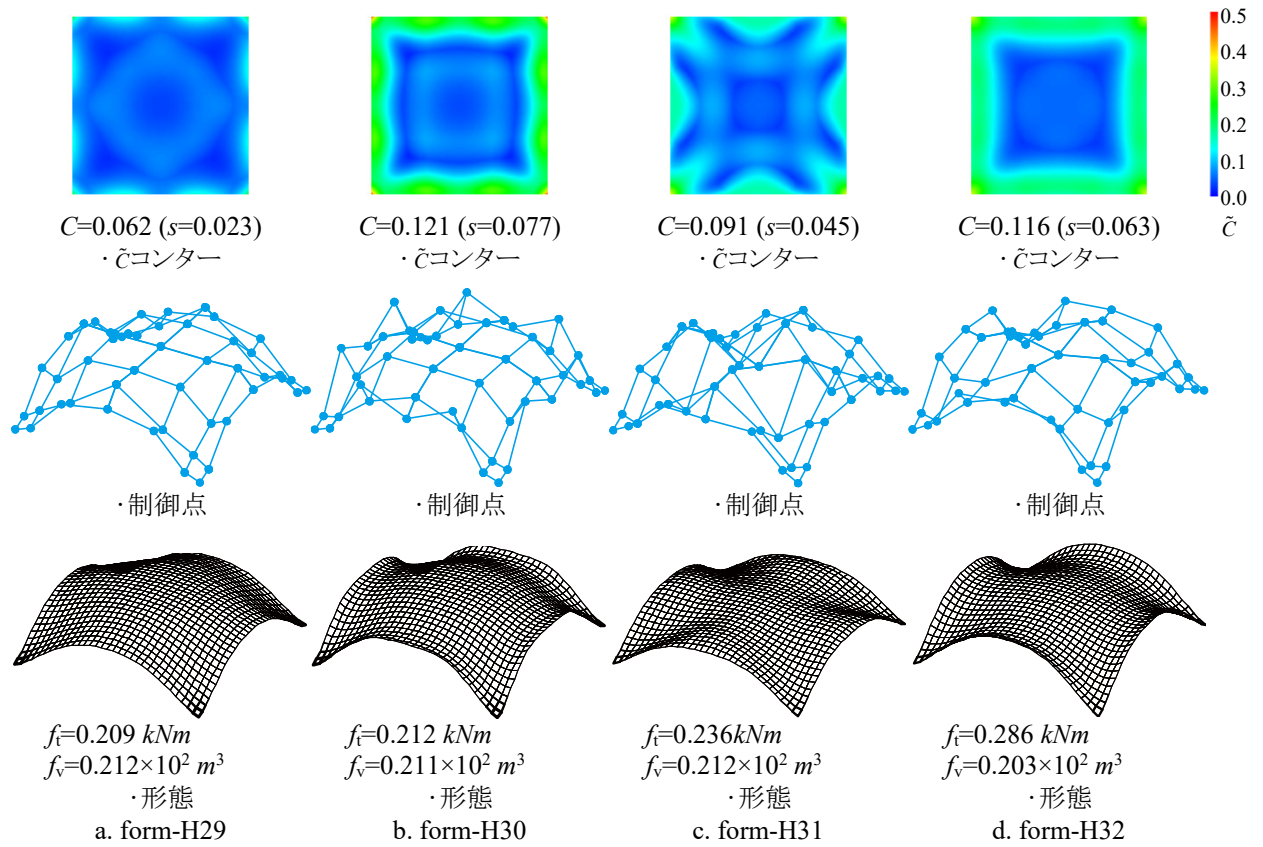
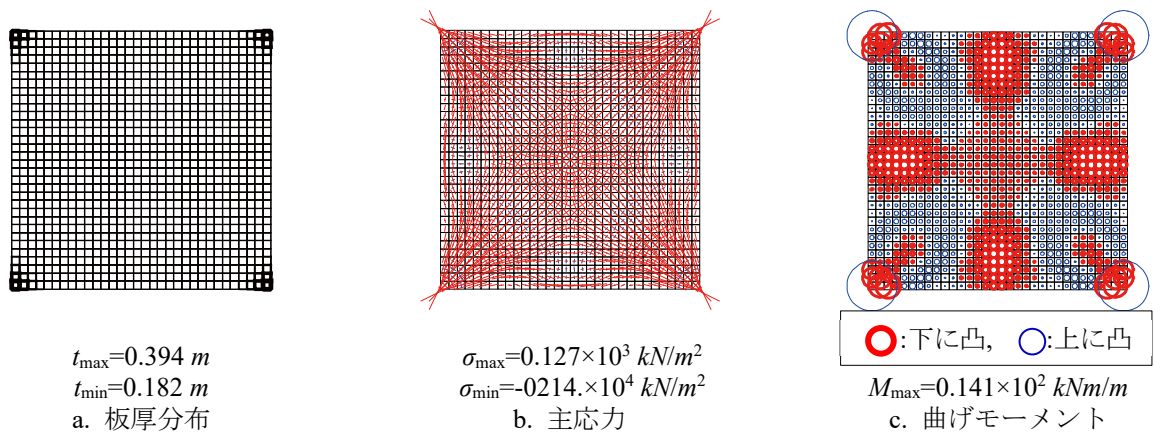
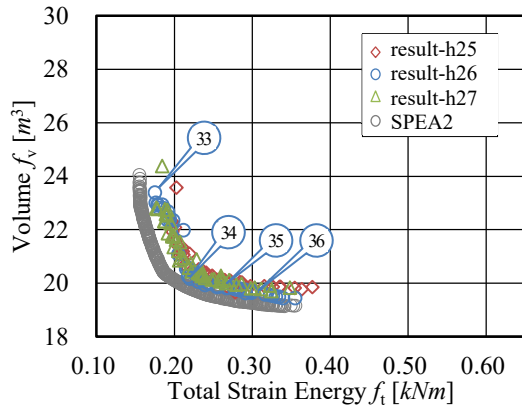
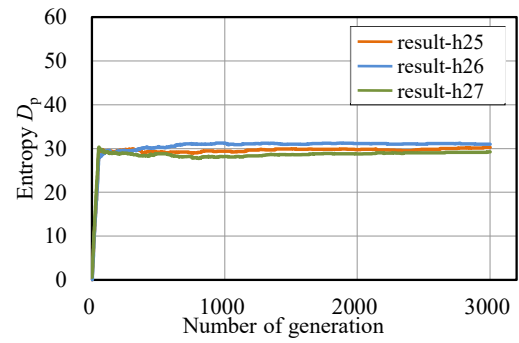

図 6.93 優良解形態例 result-h24 ( $m_{uv}=5$ ,  $H=0.1$ )


図 6.94 form-H30 の力学性状

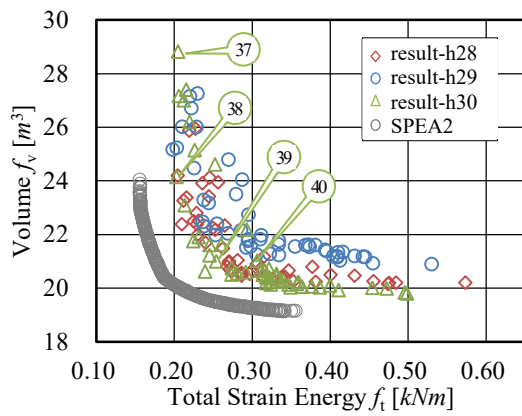


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

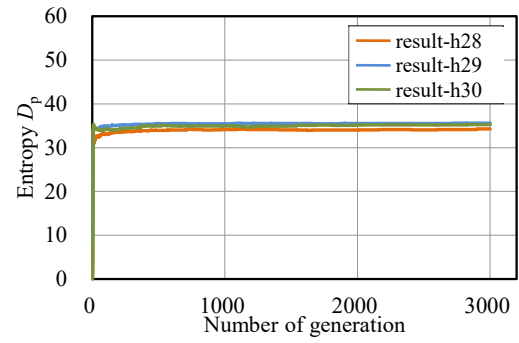


b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.95 数値結果  $m_{uv}=6, H=0.01$



a. 目的関数空間の記憶細胞個体



b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.96 数値結果  $m_{uv}=6, H=0.10$



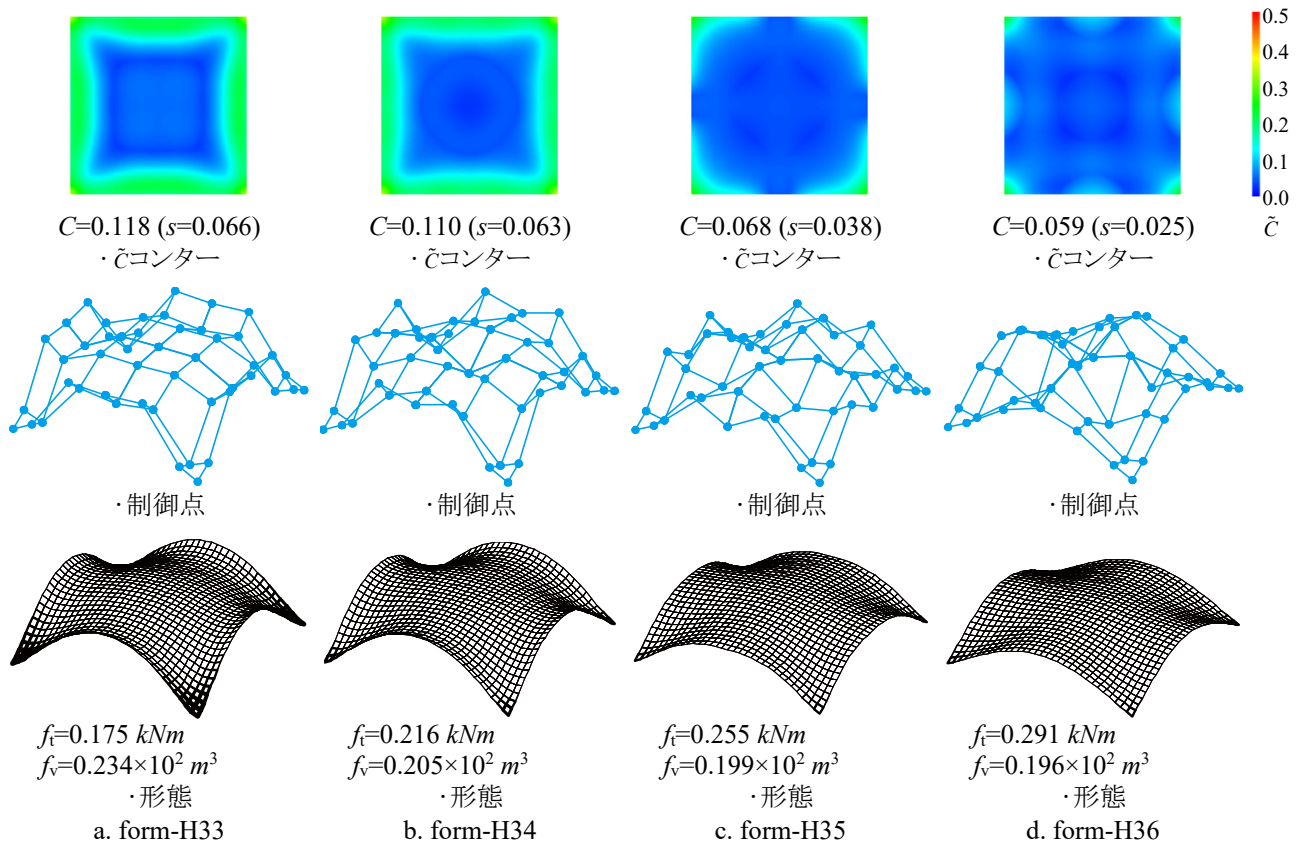


図 6.97 優良解形態例 result-h26 ( $m_{uv}=6, H=0.01$ )

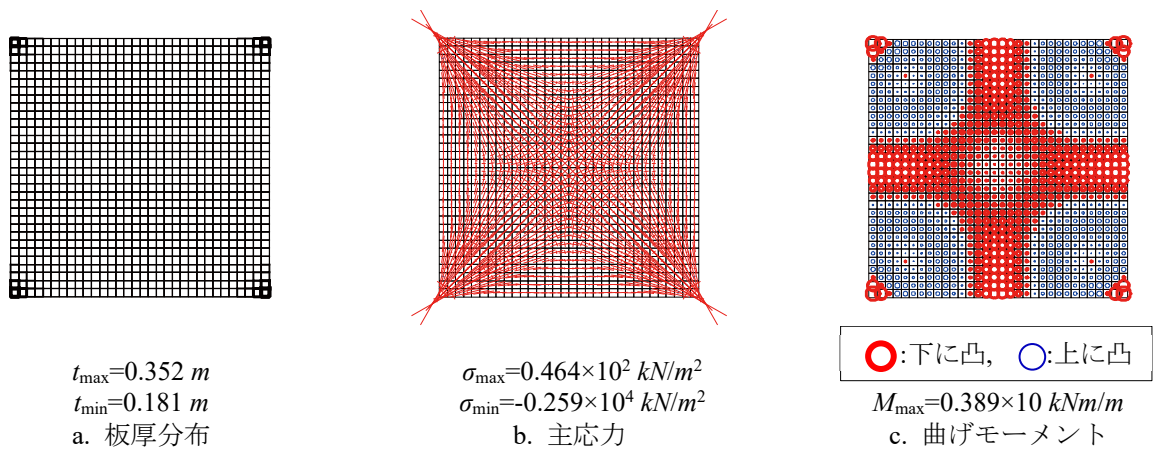


図 6.98 form-H35 の力学性状

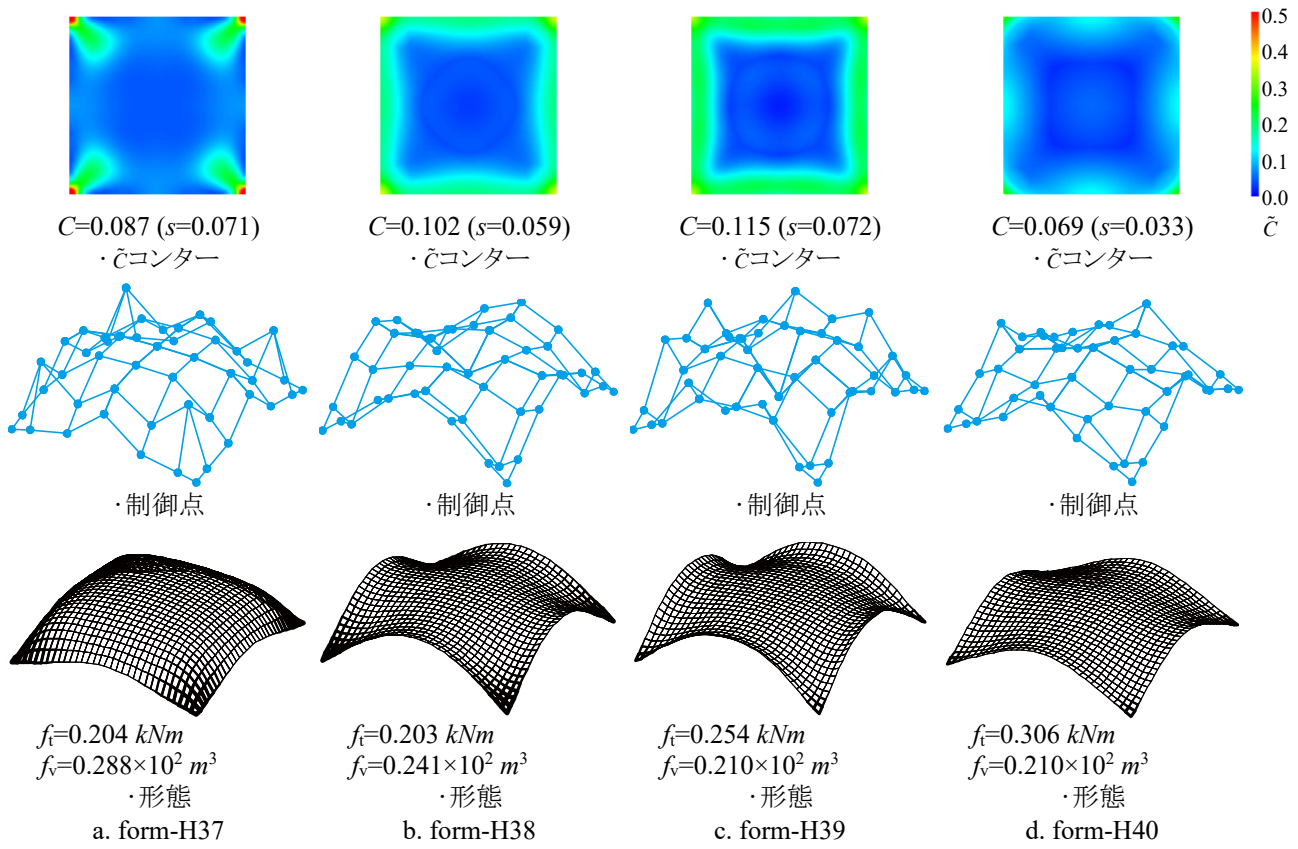


図 6.99 優良解形態例 result-h30 ( $m_{uv}=6, H=0.1$ )

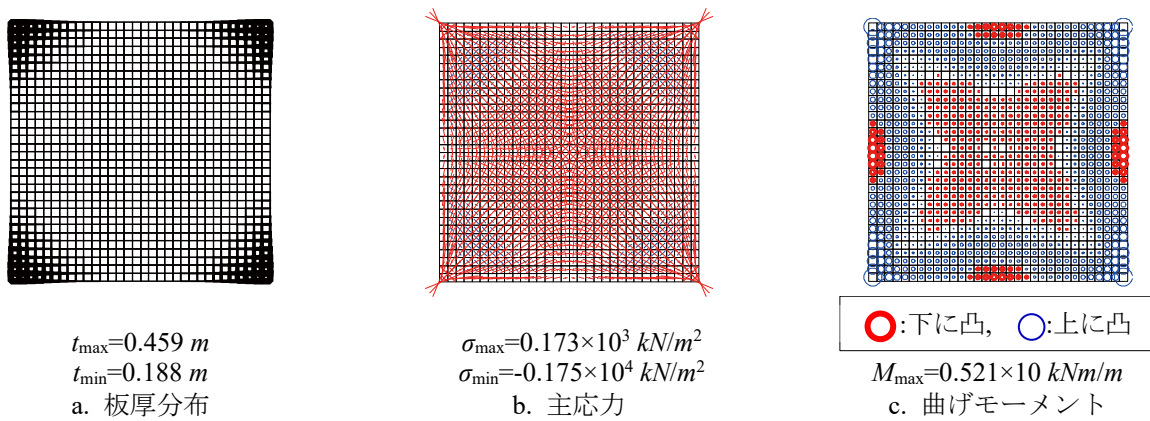
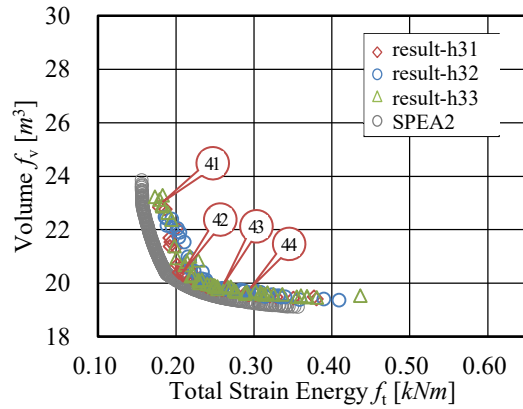


図 6.100 form-H37 の力学性状





a. 目的関数空間の記憶細胞個体

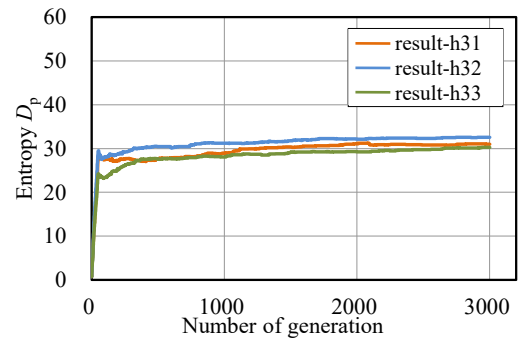
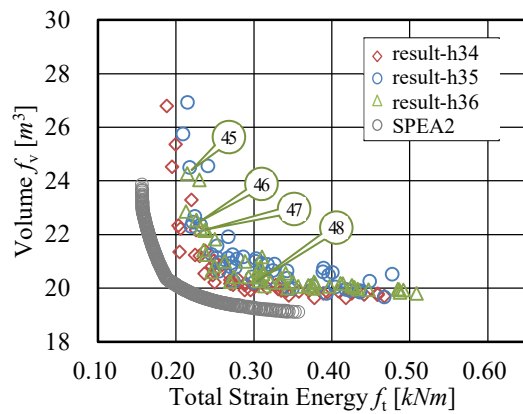

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.101 数値結果  $m_{uv}=7, H=0.01$ 


a. 目的関数空間の記憶細胞個体

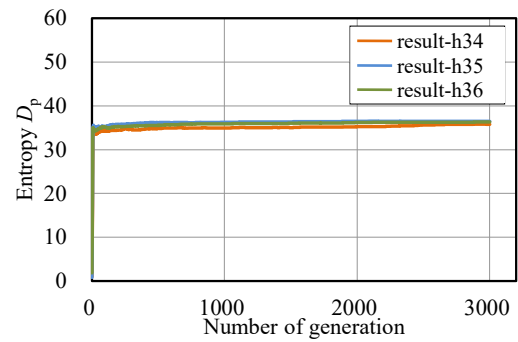

b. 多様度指数  $D_p$  の遷移

図 6.102 数値結果  $m_{uv}=7, H=0.10$

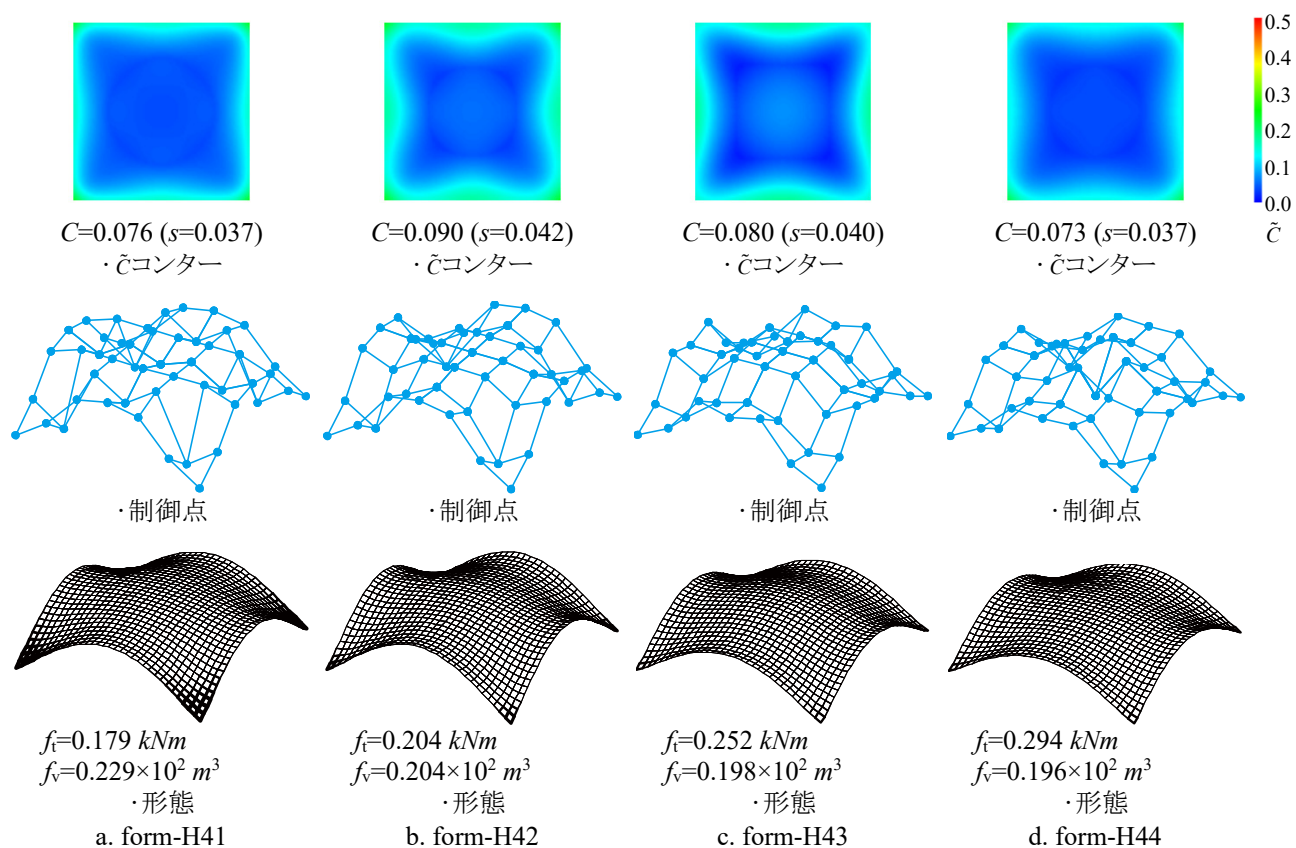


図 6.103 優良解形態例 result-h31 ( $m_{uv}=7$ ,  $H=0.01$ )

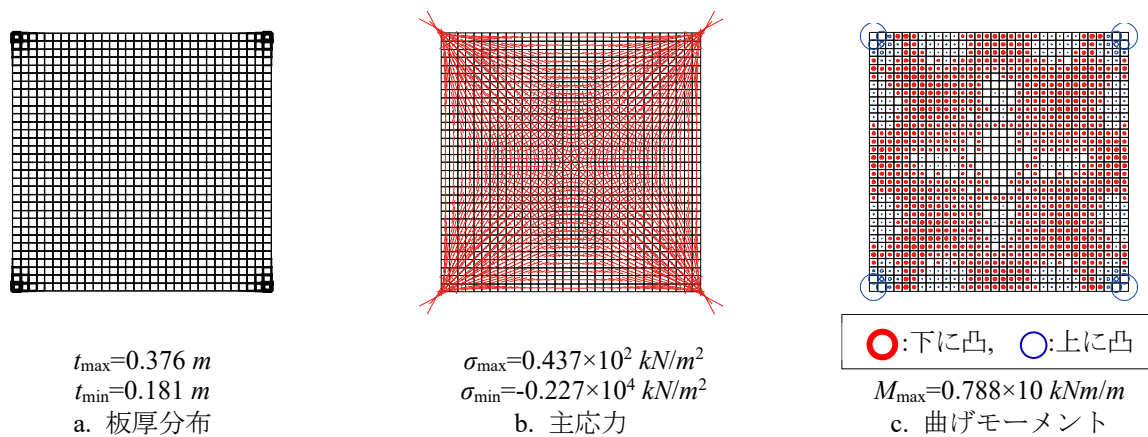


図 6.104 form-H42 の力学性状

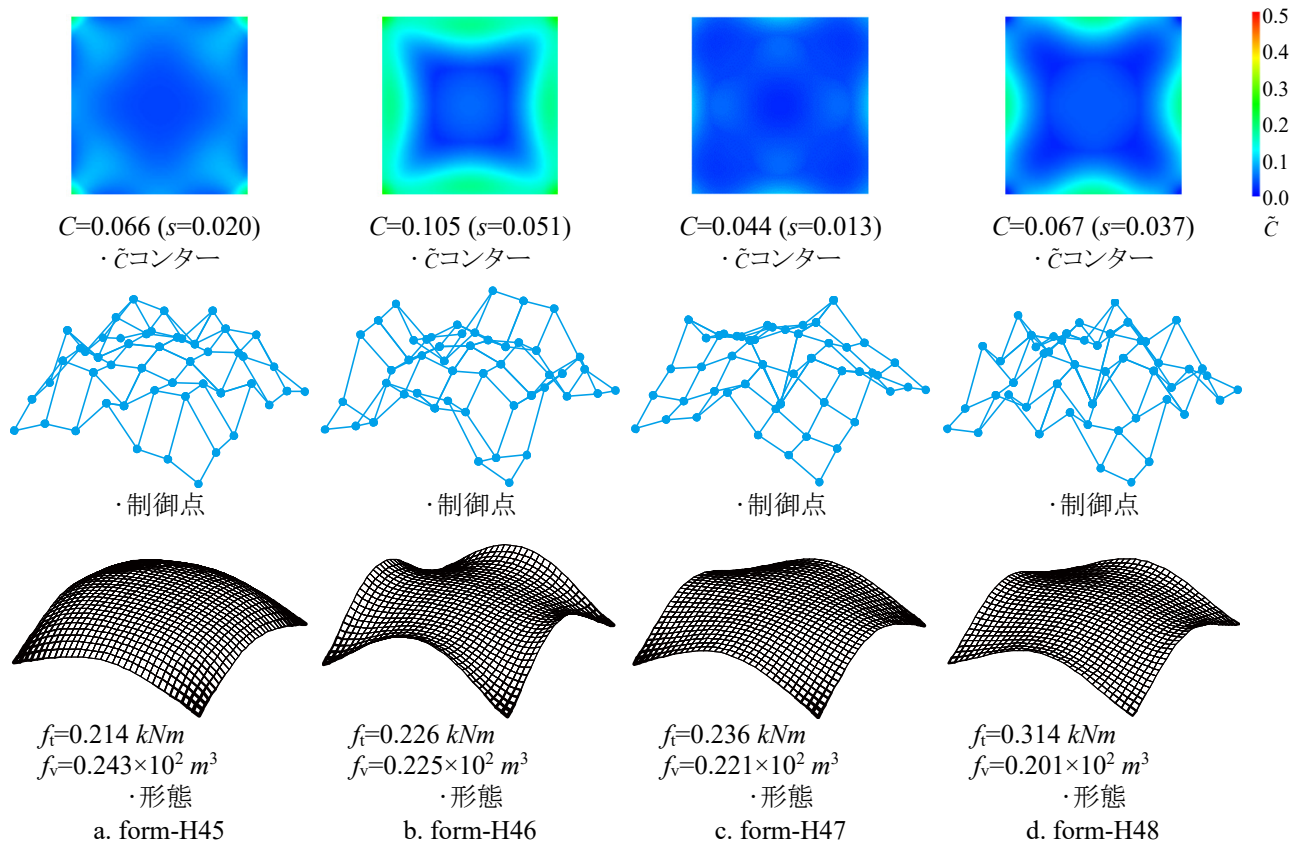
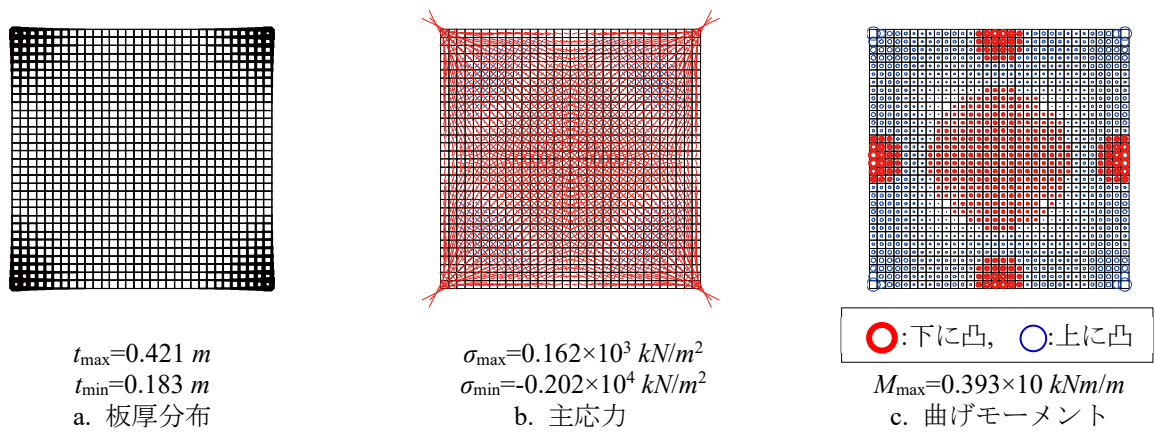

図 6.105 優良解形態例 result-h36 ( $m_{uv}=7, H=0.1$ )


図 6.106 form-H45 の力学性状

### 6.4.3 考察

$m_{uv}$  設定値にかかわらず、 $H = 0.1$  と大きく設定すると多様度指数  $D_p$  は大きな値に収束する。その結果、多様性を重視した探索が行われ、得られるパレート解がばらつく。多様性を重視しない設定の  $H = 0.01$  とした結果のうち、result-g20, -g26 では同一パレート解でも形状が異なっている。これは ISGA が設計変数空間の距離に基づいたクラスタリング後に相対評価を行う評価方法を採用しているため、複数のパレートフロントを同時に探索した結果である。SPEA2 ではこのような結果を得ることは困難である。

form-H23,- H24 (図 6.87 c, d), form-H30,- H31 (図 6.93 b, c), form-H46,- H47 (図 6.105 c, d) のように、目的関数空間上の同程度の位置において全く異なる解を ISGA は得ており、設計変数空間の多様性が高い結果を得た。単一目的最適化と同様に多目的最適化においても、 $m_{uv}$  を大きく設定するにつれて  $C$  の平均的な値が小さくなる。力学性状より、応力に従って大断面の部材が選択されており、外力に対して効率的に抵抗する部材分布となっている。

## 6.5 まとめ

本章では、自由曲面 RC シェルを対象に、総ひずみエネルギー最小化の単一目的最適化問題、および総ひずみエネルギーと部材体積の同時最小化の多目的最適化問題に ISGA を適用した。自由曲面形状を記述する NURBS の階数を変化させ、得られる優良解形態を示した。得られた知見を以下に示す。

- 1) 大域的最適解形状は階数設定によって異なり、階数設定値が小さいほど評価の高い解が得られる傾向がある。
- 2) 階数設定値を小さくすることで制御点の局所制御性が高まり、多様性を重視した優良解探索を行った場合、強く湾曲する形状や境界部付近がめくれ上がる形状が得られる。
- 3) 優良解は、NURBS の局所制御性の影響により、階数設定値を小さくした方がバリエーションが多い。階数設定値が大きい場合、滑らかな形状の優良解が得られる。
- 4) 階数設定値に関わらず、応力状況に従って効率的な部材分布の解が得られる。
- 5) ひび割れ曲げモーメントの応力制約条件の導入により、大きな面外ひずみが発生する解が許容されない。厳しい応力制約条件は解の多様性を低減させるが、側面制約条件(板厚範囲)を力学的に有利な設定に変更することで、応力制約条件導入前と同等の多様な解形態が得られる。

以上より、本章では自由曲面 RC シェルの形態の ISGA による優良解と NURBS の階数の関係を示した。ISGA はここで示した種々の条件に対し、階数に応じて異なる優良解形態を獲得する。



## 第7章 考察

---

### *Chapter 7: Consideration of forms*

## 第7章 考察

第5章と第6章で得られた自由曲面シェルの優良解形態について、各単一目的最適化問題で得られた大域的最適解の形状比較と併せて考察する。

### 7.1 大域的最適解の形態比較

Model-A, -B, -C (鉄骨グリッドシェル), および Model-G (RC シェル) における SGA で得られた解形態のうち、階数設定  $m_{uv} = 4$  の結果を図 7.1 に抜粋して再掲する。大域的最適解形状は、特に  $\tilde{C}$  コンター図から、形状が異なっている。図 7.2 に示す断面線における形状比較を図 7.3 に示す。大域的最適解形状の中央部のライズ (O 点) は各モデルでほぼ同値であるが、その他の領域で差異がある。

form-A1 は O-E 断面の端部が反り上がる形状であり、グリッドシェルモデルの大域的最適解の中でこの特徴が得られたのは Model-A のみであった。部材密度が高いため応力伝達経路が部材配置に依存する傾向が小さくなるためと考える。RC シェルの結果である form-G1 は O-C 断面および E-C 断面ともにカタナリーであるとともに、O-E 断面は端部で反り上がる傾向がある。2 m 間隔で部材配置した form-B1 は、O-C 断面の支持部周囲が内側に凹む傾向であった。対角線上に部材を配置した form-C1 は、O-C 断面の形状が他のモデルと比較して外側に膨らむ傾向であった。格子状配置の Model-A, -B と異なり、対角状配置部材に応力を負担させる形態を探索した結果である。

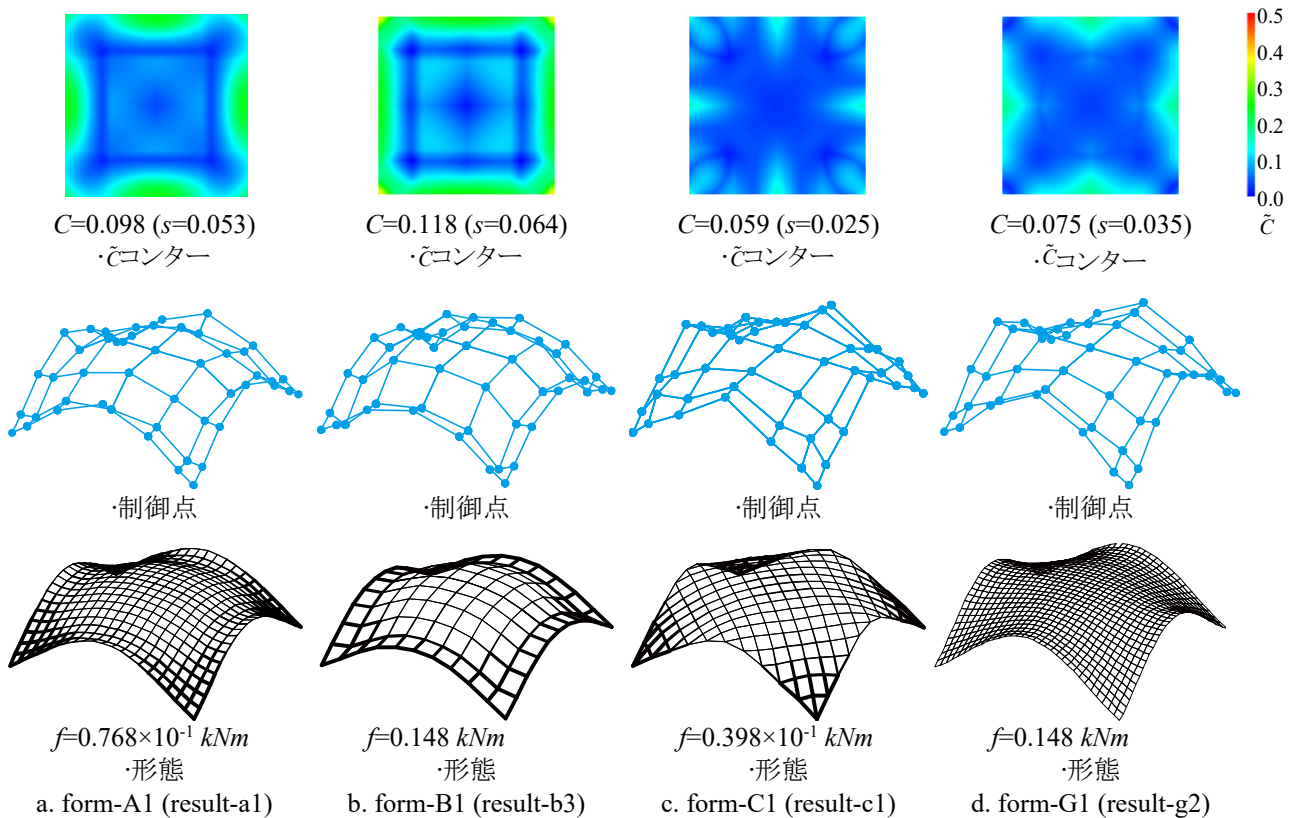


図 7.1 SGA の解形態( $m_{uv}=4$ ) (再掲)



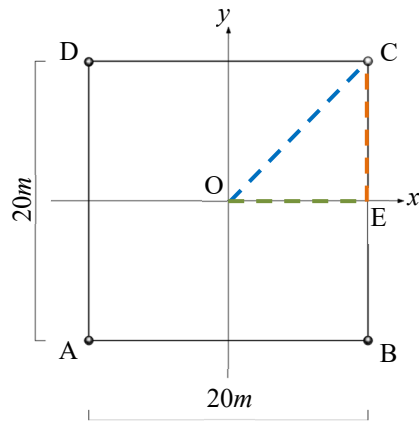
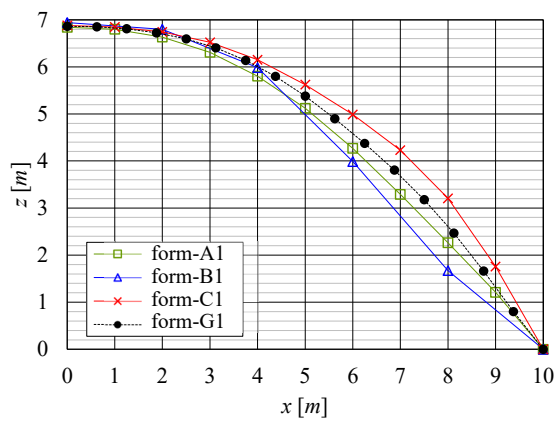
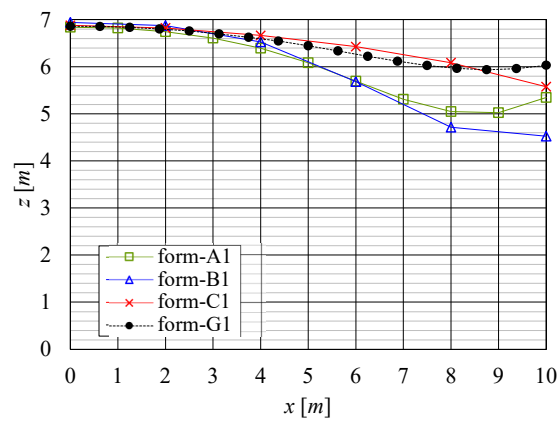


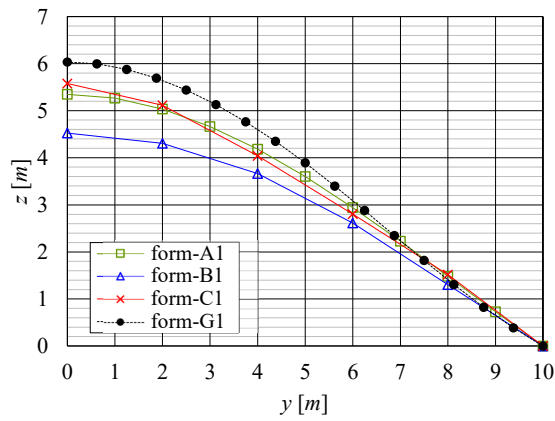
図 7.2 断面線



a. O-C 断面



b. O-E 断面



c. E-C 断面

図 7.3 形状比較

## 7.2 優良解形態の考察

構造形式による差異として、グリッドシェル form-A12 等（外縁部が湾曲し、中央ライズが低い形状）や、RC シェルの form-G12 等（支持部周囲が外側に膨らみ外縁部中央ライズが高い形状）のように、他方の構造形式モデルで比較的得られにくい特有の優良解形態が存在している（図 7.4）。

Model-C における対角線状の部材配置モデルの大域的最適解は、支持部周囲が外側に膨らむ形状（図 7.3 a）であり、格子状配置グリッドシェルモデルの優良解探索において比較的獲得されにくい特徴の一つである。この結果より、form-G12 のような RC シェル特有形態がグリッドシェルモデルで獲得されにくい理由は、力の流れが部材配置方向に依存し  $x \cdot y$  軸並行方向に優先的に形成されるためと考える。つまり、支持部から対角線方向へ力の流れを形成することが容易な構造形式の場合に form-G12 のような解が比較的評価の高い解として選択される。グリッドシェル特有形態である form-A12 は、外縁部から 1 列内側のアーチ部材で力の流れが形成されており（図 5.16 b）、主要な力の流れが大域的最適解と類似し、比較的評価の高い解として選択されると考える。

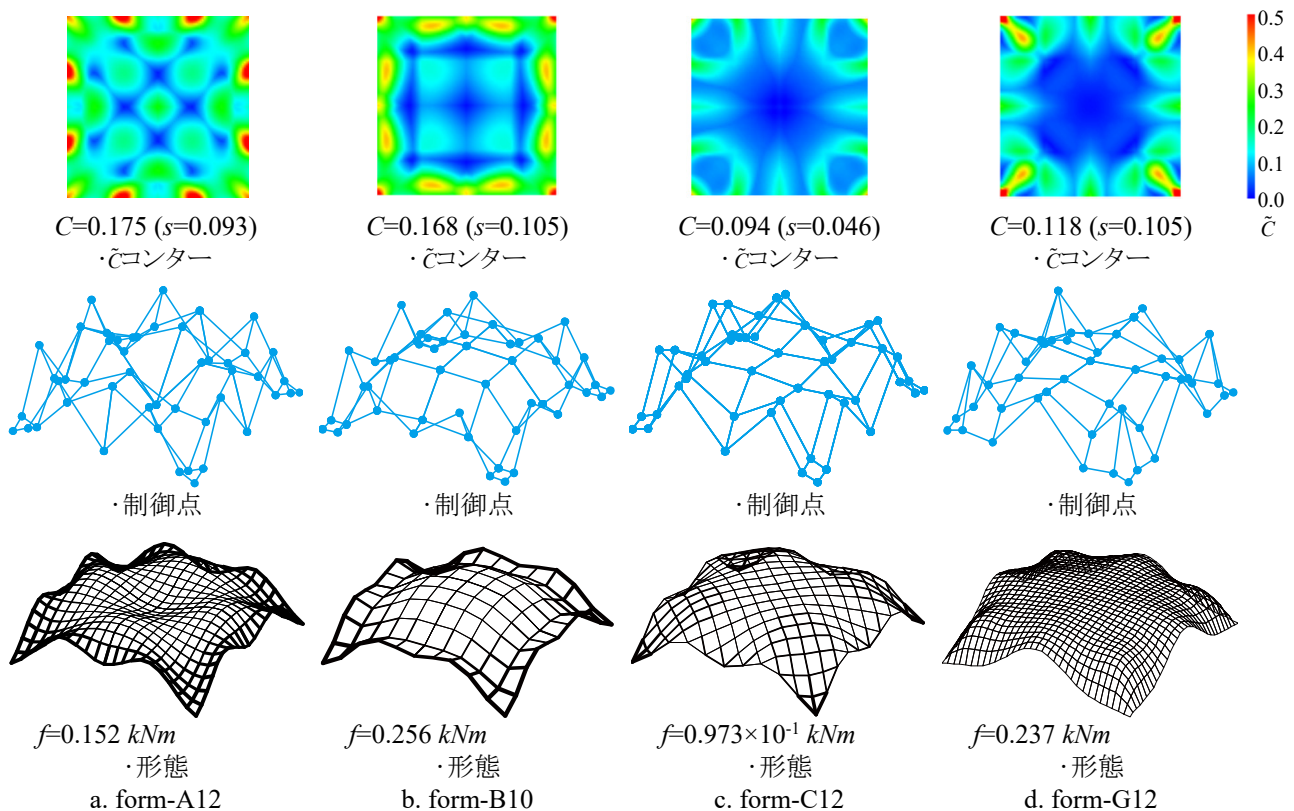


図 7.4 ISGA の優良解形態( $m_{uv}=4$ ) (再掲)

## 7.3 まとめ

部材配置の異なる 3 種類の鉄骨グリッドシェルと RC シェルモデルの大域的最適解の形状比較より、構造形式および部材配置が異なることで得られる優良解形態の差異について考察した。NURBS の階数設定は、自由曲面形状の特徴が比較的顕著に表れる  $m_{uv} = 4$  を抽出して示した。

各構造形式における結果比較より、他方の構造形式では比較的得られにくい特有の優良解形態が存在する。グリッドシェルモデルでは外縁部が湾曲し中央ライズが低い形状、RC シェルでは支持部周囲が外側に膨らみ外縁部中央ライズが高い形状である。

グリッドシェルの部材配置を変化させたモデルでは、対角状部材配置モデルの大域的最適解は支持部周囲が外側に膨らむ形状であり、この特徴は格子状部材配置モデルの優良解探索では比較的獲得されにくく、RC シェルモデルの優良解の特有形態として得られる傾向である。構造形式によって最適解形態の応力伝達経路が大きく異なることから、比較的評価の高い解として優良解に選択される形態には差異があり、各構造形式に対する特有形態が獲得される。以上、自由曲面の鉄骨グリッドシェルおよび RC シェルの各構造形式に対する優良解形態の特性を示した。



## 第8章 結論

---

### *Chapter 8: Conclusions*



## 第 8 章 結論

本研究は、構造形態創生において自由曲面シェルを対象とする際、得られる解形態は、対象とする構造形式に加え、採用するパラメトリック曲面とそのパラメータに依存する可能性を指摘し、解の多様性に重点を置いた設計発想支援という立場から、それらの特性が解形態に与える影響を明確にすることを目的とした。許容解のうち大域的最適解(パレート最適解)と局所最適解(局所パレート解)を含む比較的評価の高い解である優良解を積極的に利用する優良解探索において、パラメトリック曲面の特性と優良解の関係が重要であることを述べた。自由曲面の記述に非一様有理 B スプライン(non-uniform rational basis spline: NURBS)を取り上げ、そのパラメータである階数の設定値を変化させた自由曲面の鉄骨グリッドシェルおよび RC シェルの構造形態創生に優良解探索遺伝的アルゴリズム(genetic algorithms: GA)系解法 ISGA (GA with immune system)を適用し、階数設定値に応じた多種多様な優良解形態の獲得を示した。

第 1 章では、既往の研究と本研究で用いる解法の探索概念を説明し、構造形態創生における目的関数空間と設計変数空間の多様性の重要性を述べた。第 2 章では、数値解析に用いる自由曲面グリッドシェル構造および RC シェル構造の離散化と応力制約など、構造形態創生に必要な定式化を行った。第 3 章では、自由曲面を記述する NURBS の詳細と、他のパラメトリック曲面の特性について説明した。NURBS は、他のパラメトリック曲面よりもプログラムが比較的複雑であり、より多くのパラメータを設定する必要がある反面、形状表現の自由度が特に高い。また、階数の比較の際に用いる形状の特徴を表す曲率を用いた指標を定義した。さらに、NURBS の基底関数を基に、任意点の座標を指定できる形状制約手法について定義した。第 4 章では、本研究で用いる ISGA の詳細を述べた。第 5 章では、自由曲面鉄骨グリッドシェル構造の形態創生に、第 6 章では、自由曲面 RC シェル構造の形態創生に ISGA を適用し、各々 NURBS の階数を変化させた数値結果を示した。グリッドシェルモデルは部材配置の異なる 3 種のモデルを対象とし、また、対称形状だけでなく座標指定の凸形状を有する非対称の基準形状を扱った。RC シェルモデルは、鉄筋の許容応力度を考慮した制約と曲げひび割れモーメントによる制約の 2 種の応力制約条件を適用した。第 7 章では、グリッドシェルと RC シェルの解形態について、各大域的最適解の形状比較を示し、優良解の特性を考察した。以上より得られた知見を以下に示す。

- 1) ISGA は解の多様性に関するパラメータを変更することで、単一・多目的最適化に対する優良解が獲得可能である。
- 2) NURBS の階数は局所制御性を決定し、形状表現の自由度に影響する。そのため、大域的最適解形態は階数設定値によって異なり、パラメトリック曲面の特性に依存する。多くの場合、階数設定値が小さい方が評価値が高い大域的最適解が得られる。

- 3) NURBS の階数設定値を小さくし、ISGA の多様性を重視した設定とした場合、優良解には強く湾曲する形状が含まれ、多彩なバリエーションの解形状を獲得する。
- 4) 構造形式によって最適解形態の応力伝達機構が異なることから、大域的最適解形態が異なるだけでなく、比較的评价の高い解として優良解に選択される形態にも差異があり、各構造形式に対する特有形態が獲得される。
- 5) NURBS の基底関数を基に、任意点の座標を指定する条件から定式化した曲面表現手法を用いることで、意匠や機能性を直感的に制御可能な制約条件に適用することができ、NURBS の特性を最大限維持したまま局所的な形状を制御した構造形態創生が可能である。このような形状制御の制約を与えた非対称のグリッドシェルモデルにおいても ISGA は多様な解形態の獲得が可能である。
- 6) RC シェルの形態創生において、ひび割れ曲げモーメントの応力制約条件の導入により、大きな面外ひずみが発生する解が許容されず、多様性が低減する。厳しい応力制約条件は解の多様性を低減させるが、側面制約条件である板厚範囲の広げ、力学的に有利な設定に変更することで多様な解形態の獲得が可能となる。

以上、自由曲面形状表現に NURBS を利用した鉄骨グリッドシェルおよび RC シェルの優良解探索の解形態特性をまとめた。各構造形式に対し、NURBS の階数設定値に応じて異なる様相の優良解形態が獲得可能であり、発想・設計支援ツールとしての有効性が示せたと考えている。

本論文では基礎的な自由曲面シェルモデルに対する構造形態創生例であり、空間構造を構成するのに重要な施工性への配慮はなされていない。例えば、グリッドシェルにおいては接合部の収まりや、RC シェルにおいては、曲率がある程度大きい部分が鉄筋や型枠の加工に支障が生じる可能性がある。このような施工性に配慮した条件を導入した検討が重要と考える。また、単純矩形以外の任意境界形状モデルへの適用や短期荷重の考慮、ロバスト性の確認等、自由曲面シェルの設計に活用できる種々の最適化問題に適用したい。



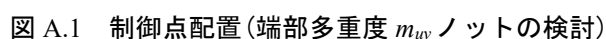
付録

---

*Appendix*

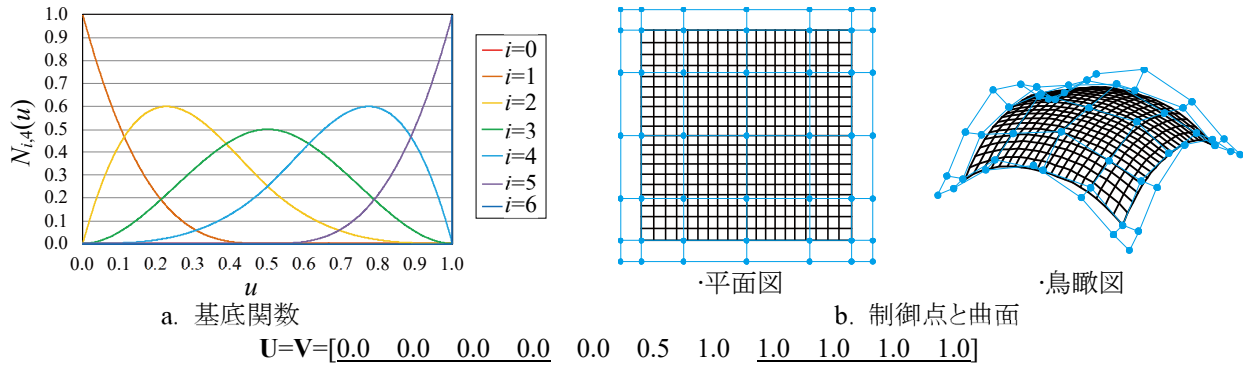
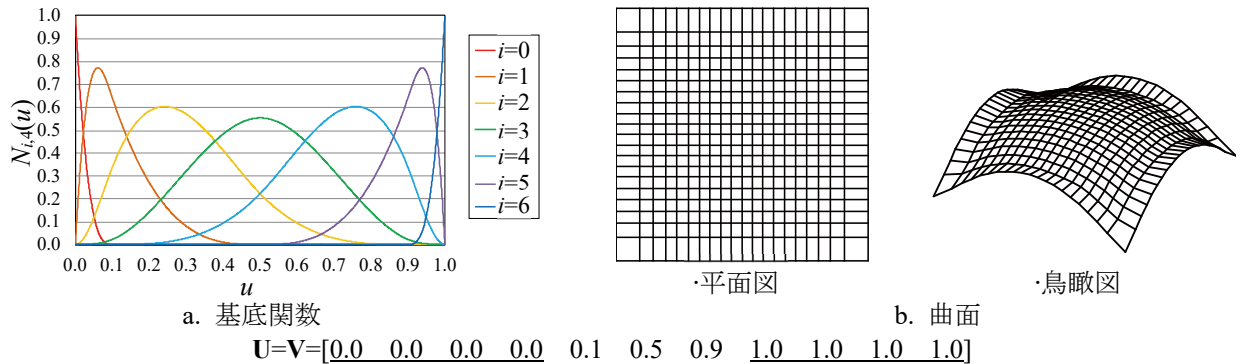
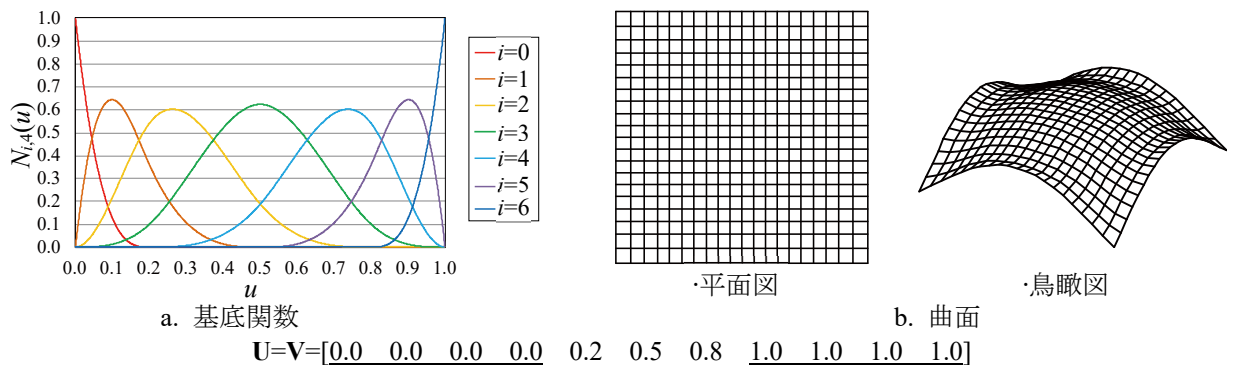
$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = [u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{m_{uv}+n_{uv}}] \quad (u_i \leq u_{i+1}) \quad u_i = \begin{cases} 0.0 & (i = 0, \dots, m_{uv} - 1) \\ 1.0 & (i = n_{uv}, \dots, m_{uv} + n_{uv}) \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

A.1 内部ノット対称	Case-1: 対称, 階数 4
	Case-2: 対称, 階数 5
A.2 内部ノット非対称	Case-3: 非対称, 階数 4
	Case-4: 非対称, 階数 5
	Case-5: 非対称, 階数 6
A.3 内部ノット多重	Case-6: 3 重ノット, 階数 4
	Case-7: 2 重ノット, 階数 4
	Case-8: 2 重ノット, 階数 5



## A.1 内部ノット対称

内部ノットを対称配置として変化させた NURBS の形状を比較する。ノットベクトルの端部を階数分重複させた設定は、 $m_{uv} = 6, 7$  は検討を行うことができない。そのためここでは  $m_{uv} = 4, 5$  のみを検討する。数値結果を図 A.2-A.15 に示す(a: 基底関数, b: 曲面形状)。図 A.2-A.8 は Case-1 (対称, 階数 4)、図 A.9-A.15 は Case-2 (対称, 階数 5)の結果である。結果図中において多重度  $m_{uv}$  とした端部のノットを下線で示した。

図 A.2 Case-1.1 ( $m_{uv} = 4$ )図 A.3 Case-1.2 ( $m_{uv} = 4$ )図 A.4 Case-1.3 ( $m_{uv} = 4$ )

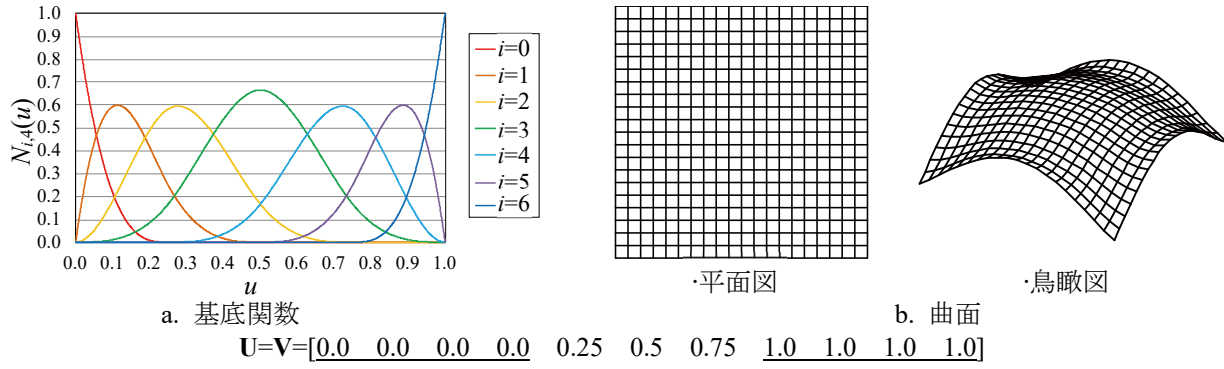


図 A.5 Case-1.4 ( $m_{uv} = 4$ , 開一様)

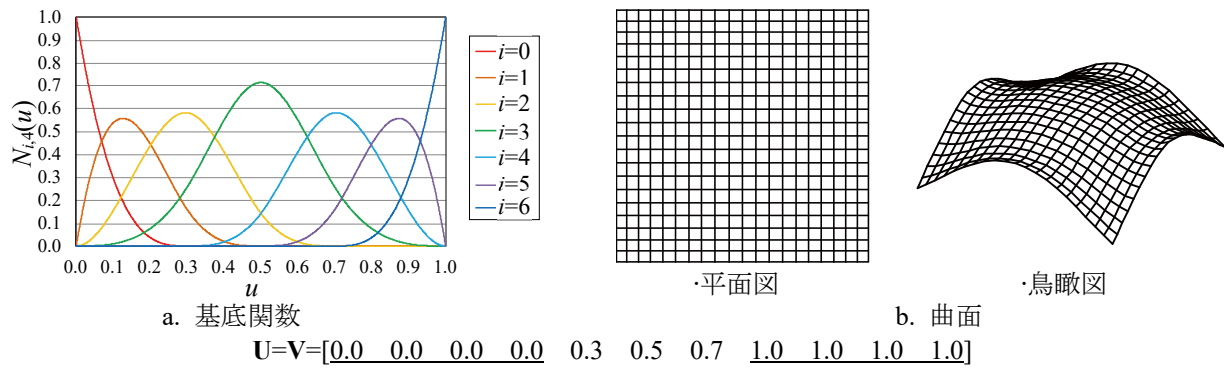


図 A.6 Case-1.5 ( $m_{uv} = 4$ )

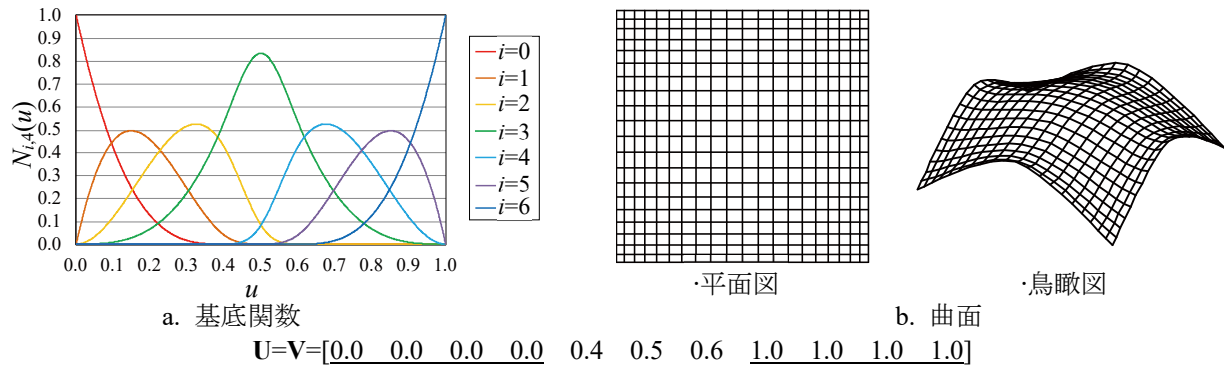


図 A.7 Case-1.6 ( $m_{uv} = 4$ )

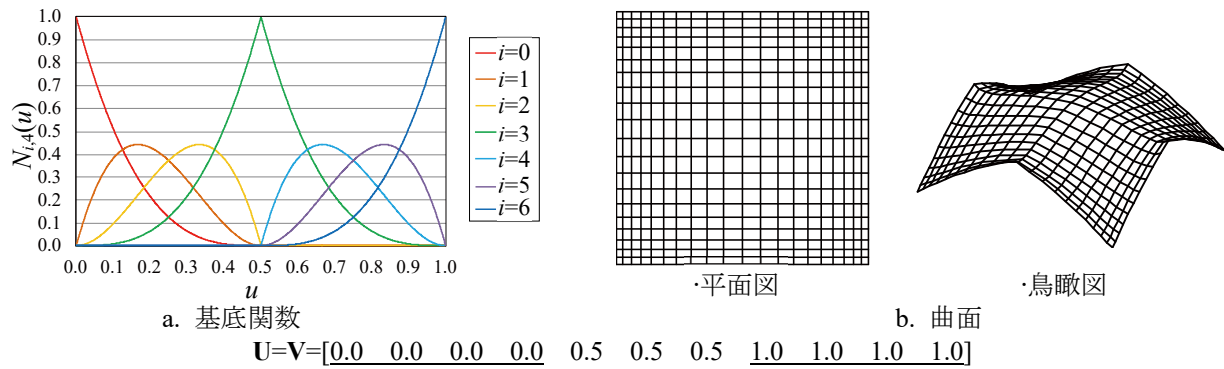
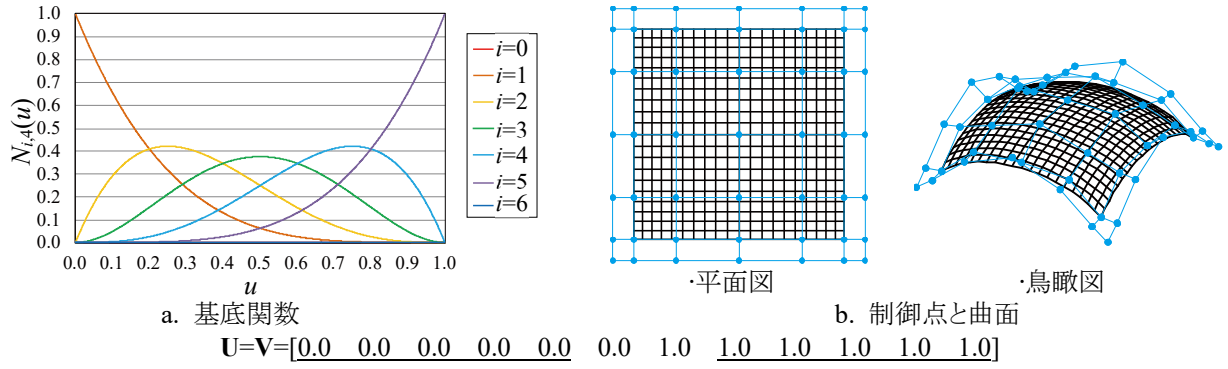
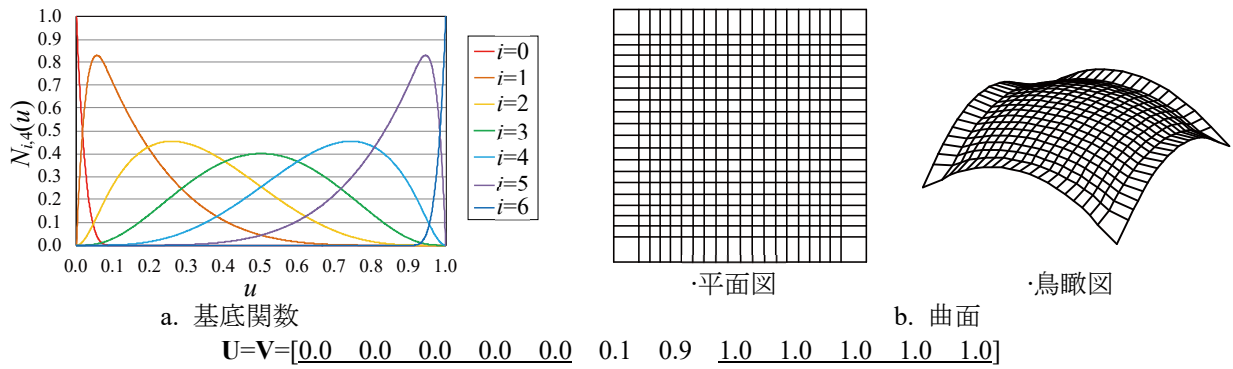
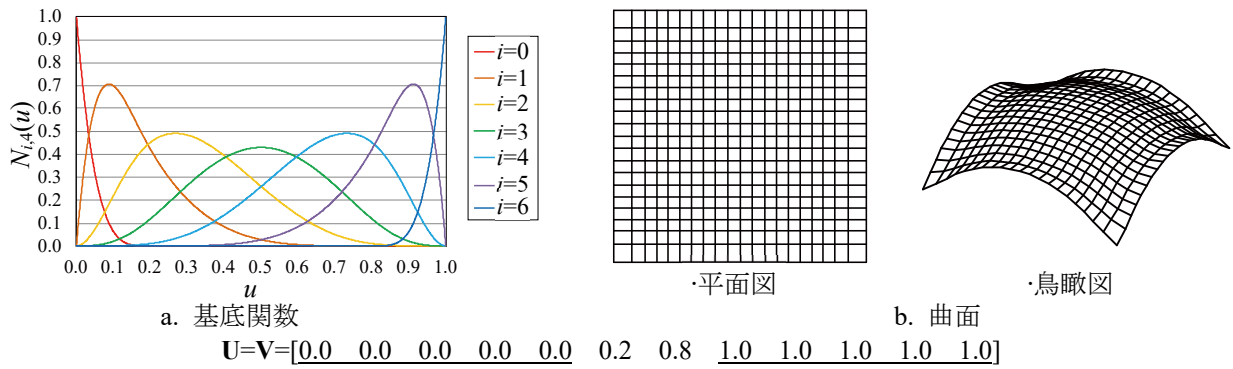
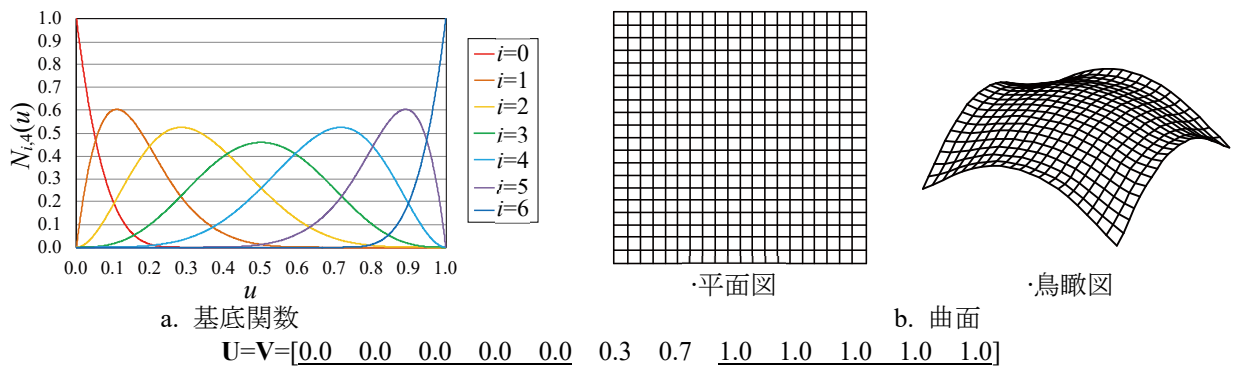


図 A.8 Case-1.7 ( $m_{uv} = 4$ )


 図 A.9 Case-2.1 ( $m_{uv} = 5$ )

 図 A.10 Case-2.2 ( $m_{uv} = 5$ )

 図 A.11 Case-2.3 ( $m_{uv} = 5$ )

 図 A.12 Case-2.4 ( $m_{uv} = 5$ )

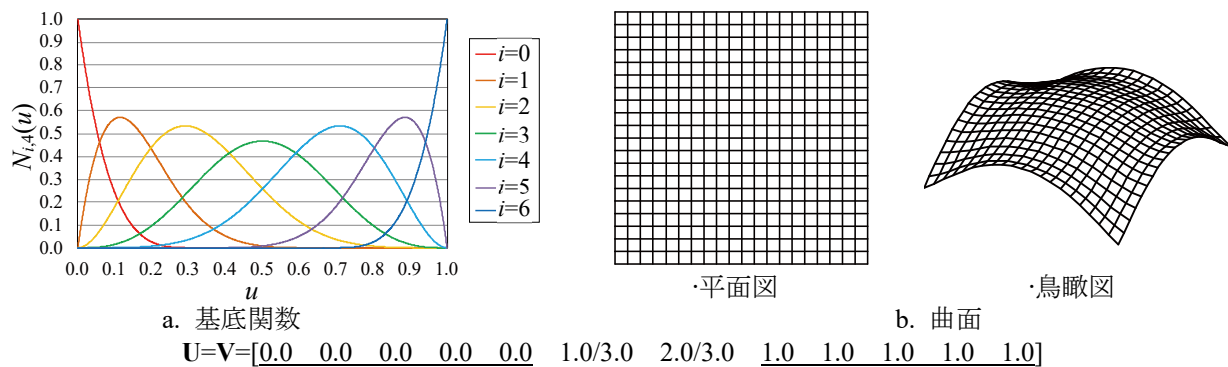


図 A.13 Case-2.5 ( $m_{uv} = 5$ , 開一様)

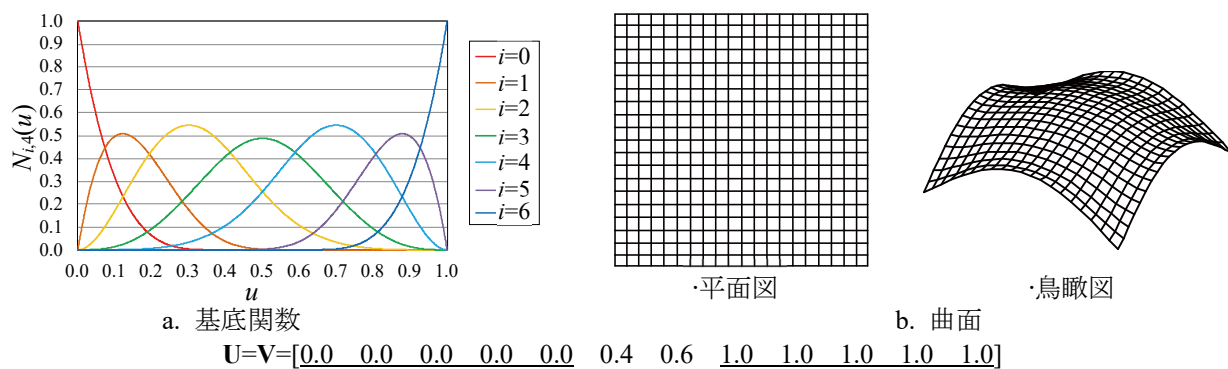


図 A.14 Case-2.6 ( $m_{uv} = 5$ )

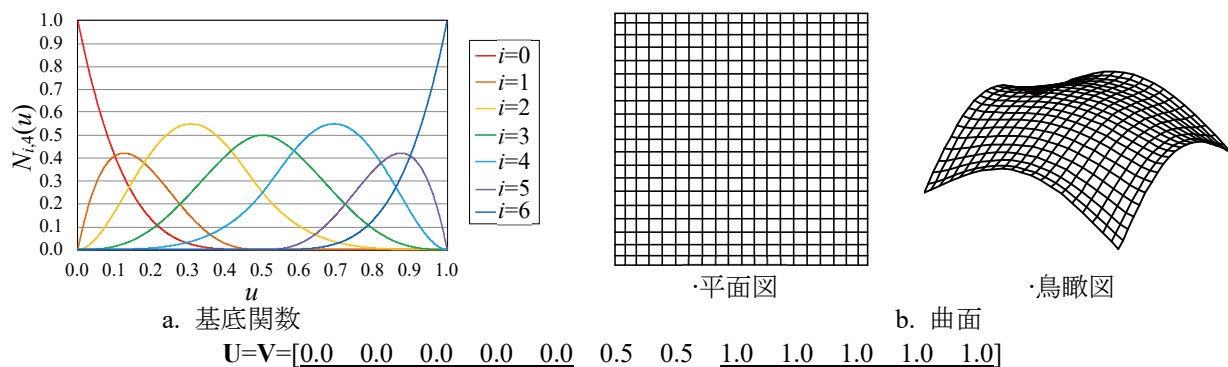


図 A.15 Case-2.7 ( $m_{uv} = 5$ )

## 考察

$u(m_{uv}) = 0.0$ ,  $u(m_{uv}+n_{uv}+1) = 1.0$  のノットを 0.0 に設定した Case-1.1 (図 A.2) と Case-2.1 (図 A.9) では、端部の多重度が  $m_{uv} + 1$  になり、端の基底関数の範囲がなくなる。そのため、Case-1.1 は  $m_{uv} = 4$ 、Case-2.1 は  $m_{uv} = 5$  に対応した  $n_{uv} = 5$ 、開一様ノットベクトル の表現と一致する。特に、 $m_{uv} = n_{uv}$  かつ開一様ノットベクトルのときにベジエと同一表現となる特性より、Case-2.1 はの 5 階ベジエ表現である。

Case-1.1 から-1.7 および Case-2.1 から-2.7 にノットベクトルを変化させるにつれて基底関数が増減し、曲面形状が変化する。特に  $m_{uv} = 4$  の Case-1 は形状が大きく異なる。

Case-1.7 (図 A.8) はノットベクトル中央で多重度  $m_{uv} - 1$  である。端部多重度  $m_{uv}$  かつ端部以外のノットベクトルが多重度  $m_{uv} - 1$  の設定はベジエ表現となる性質より、4 枚のベジエ( $n_{uv} = 4$ )をつなぎ合わせたかたちとなっている。

Case-1.4 (図 A.5) および Case-2.5 (図 A.13) は端部多重度  $m_{uv}$  かつ端部以外のノットベクトルを一様に配置した開一様ノットベクトルである。ここで設定した制御点配置は、開一様ノットベクトル設定時に階数に応じて節点座標が  $x$ - $y$  平面において均等配置となるようにしている。そのため、開一様ノットベクトル以外の設定では均等配置が崩れる。

## A.2 内部ノット非対称

内部ノットを非対称配置として前提に変化させた NURBS の形状を比較する。ここでは  $m_{uv} = 4, 5, 6$  を検討する。数値結果を図 A.16-A.54 に示す(a: 基底関数, b: 曲面形状)。図 A.16-A.35 は Case-3 (非対称, 階数 4)、図 A.36-A.45 は Case-4 (非対称, 階数 5)、図 A.46-A.54 は Case-5 (非対称, 階数 6)の結果である。結果図中において、多重度  $m_{uv}$  とした端部のノットを下線で示した。

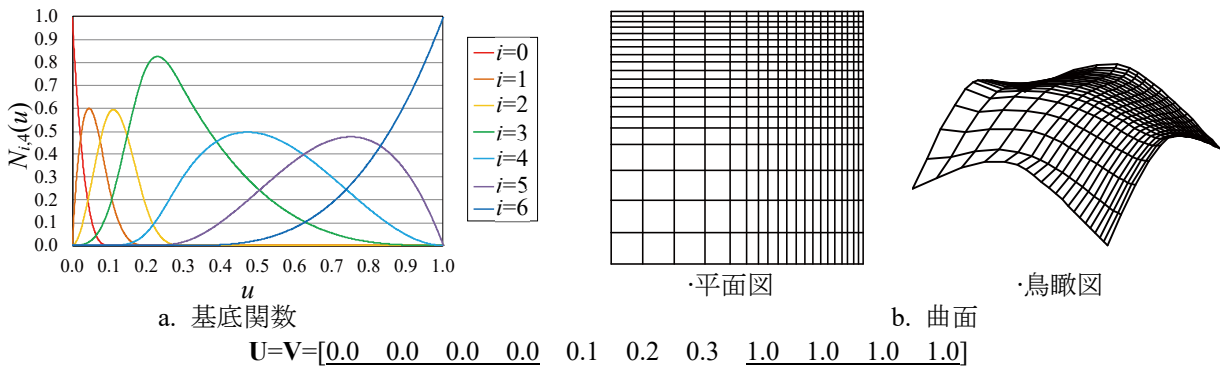


図 A.16 Case-3.1 ( $m_{uv} = 4$ )

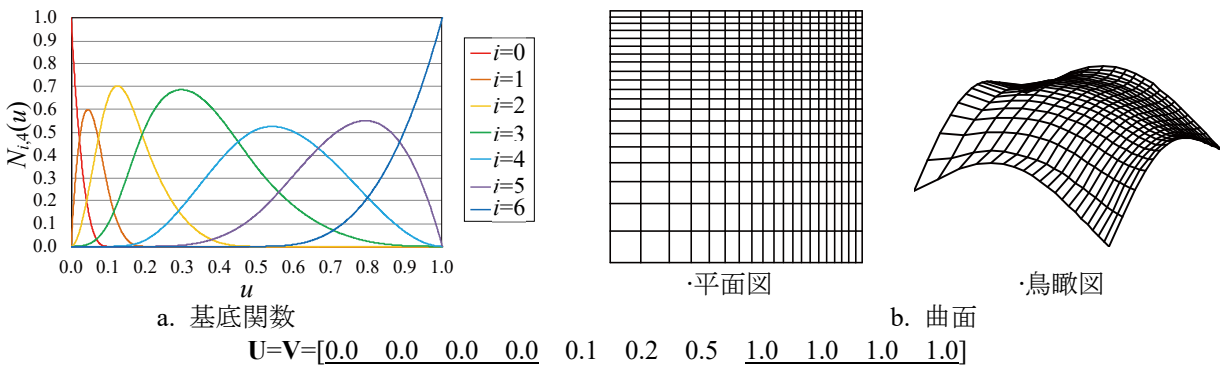


図 A.17 Case-3.2 ( $m_{uv} = 4$ )

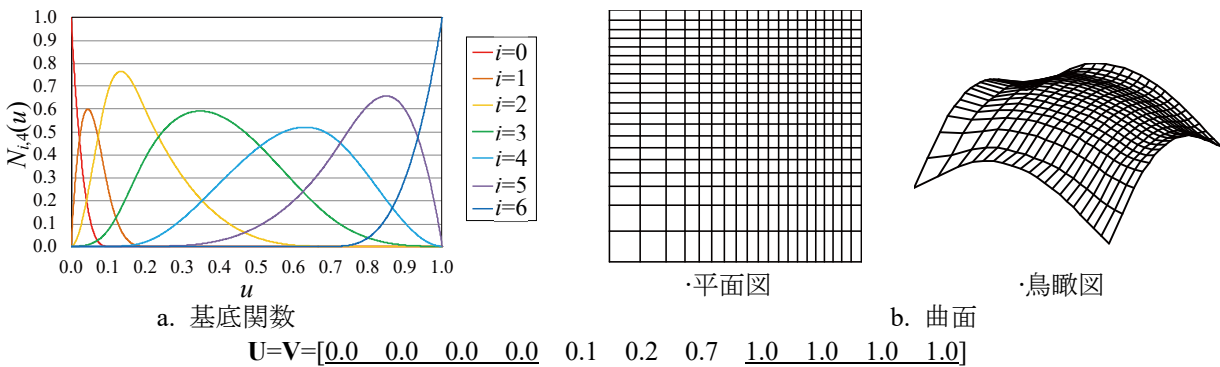
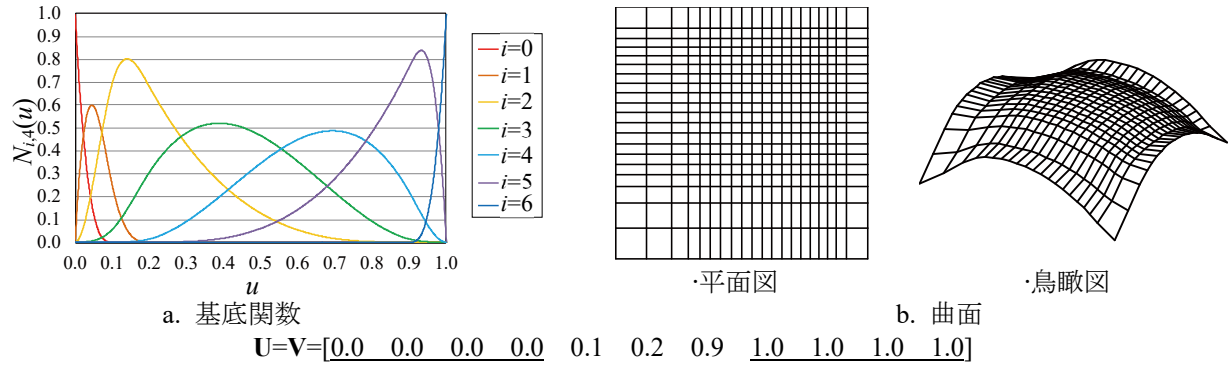
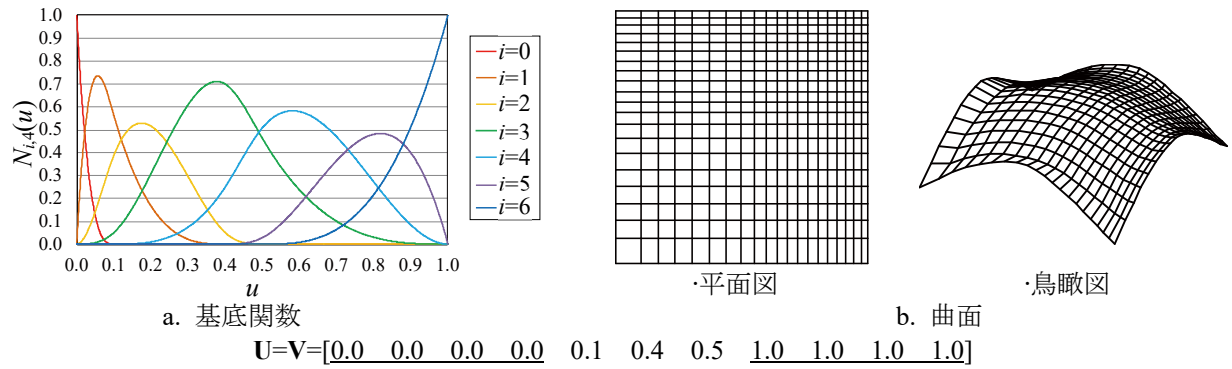
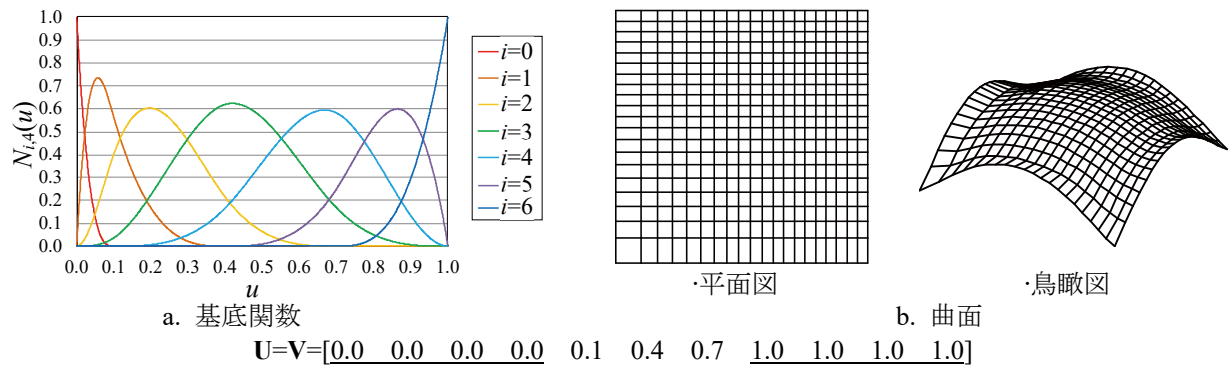
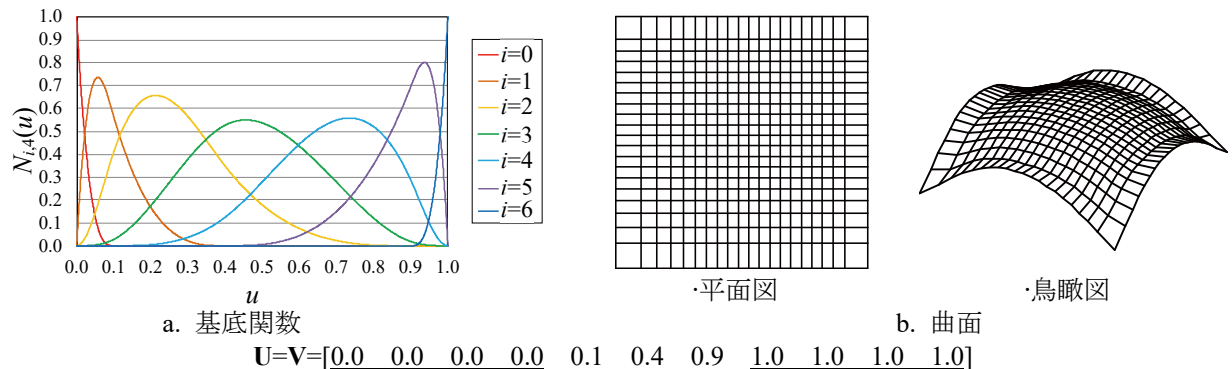


図 A.18 Case-3.3 ( $m_{uv} = 4$ )




 図 A.19 Case-3.4 ( $m_{uv} = 4$ )

 図 A.20 Case-3.5 ( $m_{uv} = 4$ )

 図 A.21 Case-3.6 ( $m_{uv} = 4$ )

 図 A.22 Case-3.7 ( $m_{uv} = 4$ )

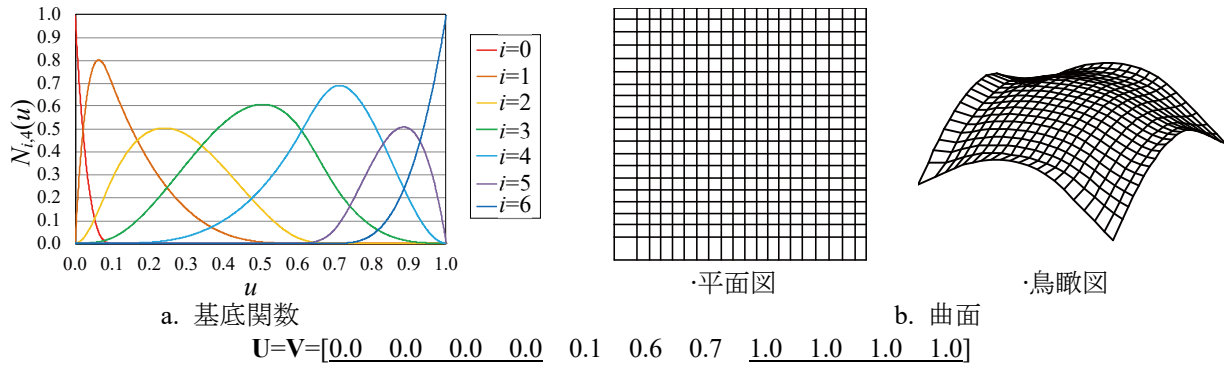


図 A.23 Case-3.8 ( $m_{uv} = 4$ )

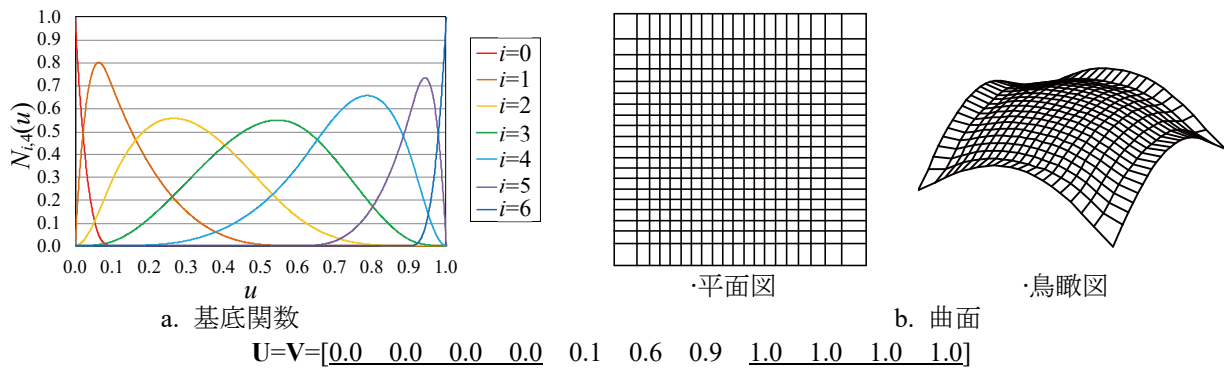


図 A.24 Case-3.9 ( $m_{uv} = 4$ )

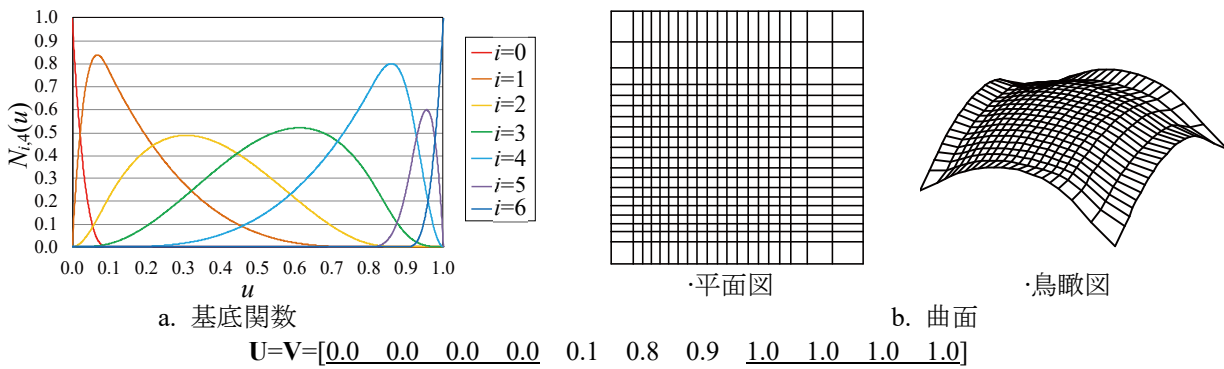


図 A.25 Case-3.10 ( $m_{uv} = 4$ )

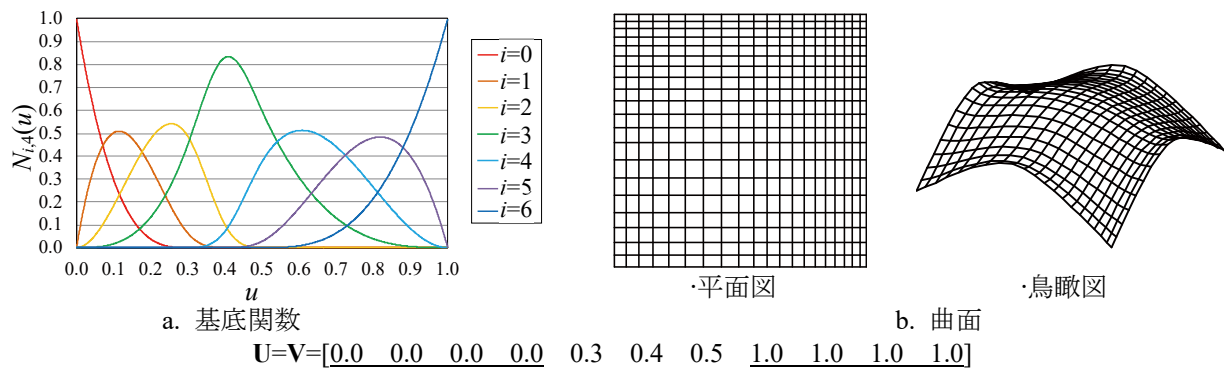
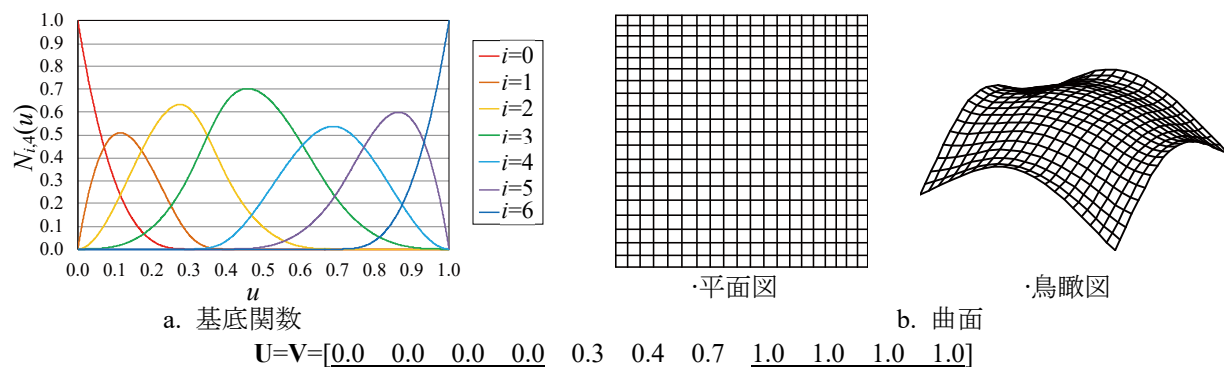
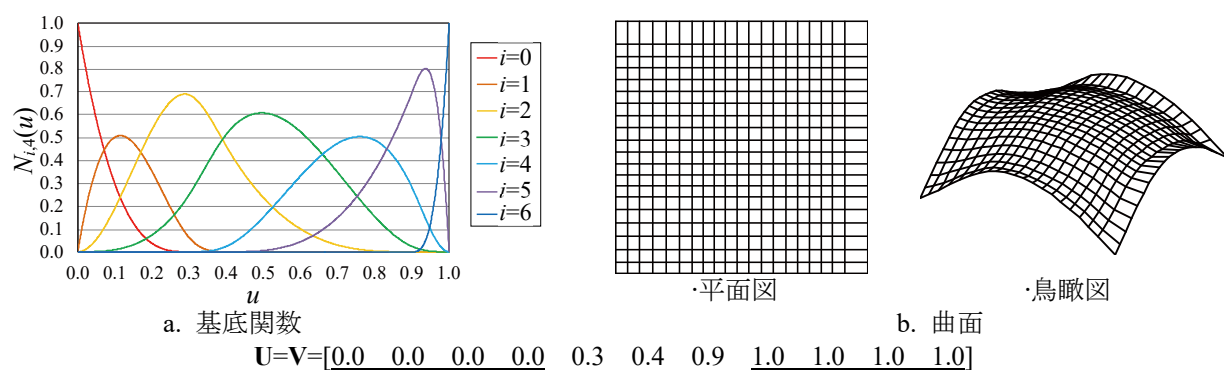
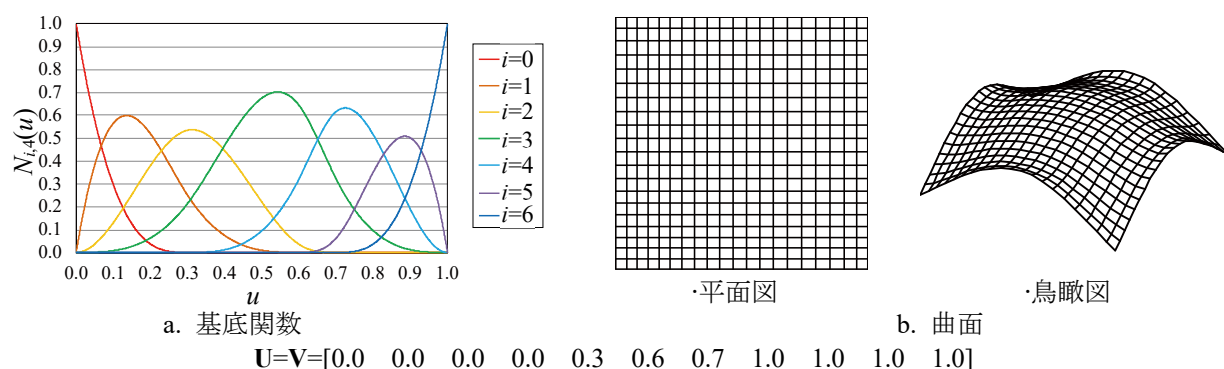
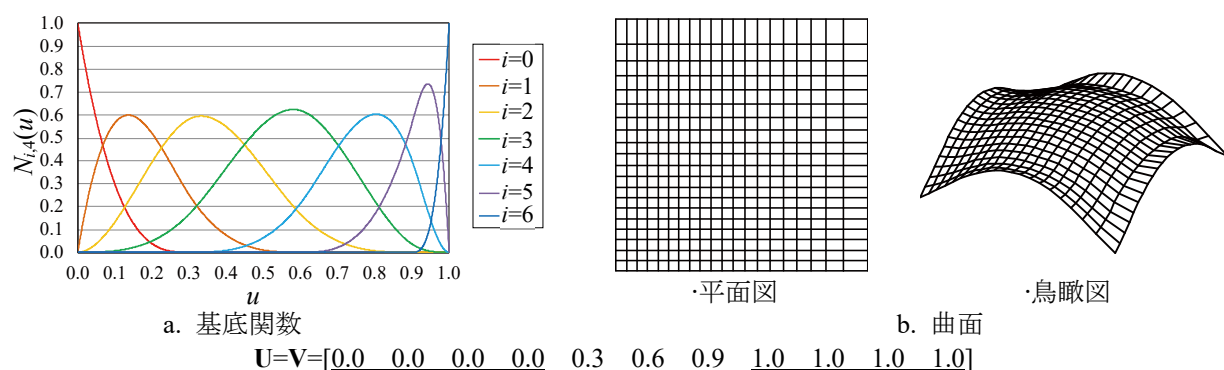


図 A.26 Case-3.11 ( $m_{uv} = 4$ )


 図 A.27 Case-3.12 ( $m_{uv} = 4$ )

 図 A.28 Case-3.13 ( $m_{uv} = 4$ )

 図 A.29 Case-3.14 ( $m_{uv} = 4$ )

 図 A.30 Case-3.15 ( $m_{uv} = 4$ )

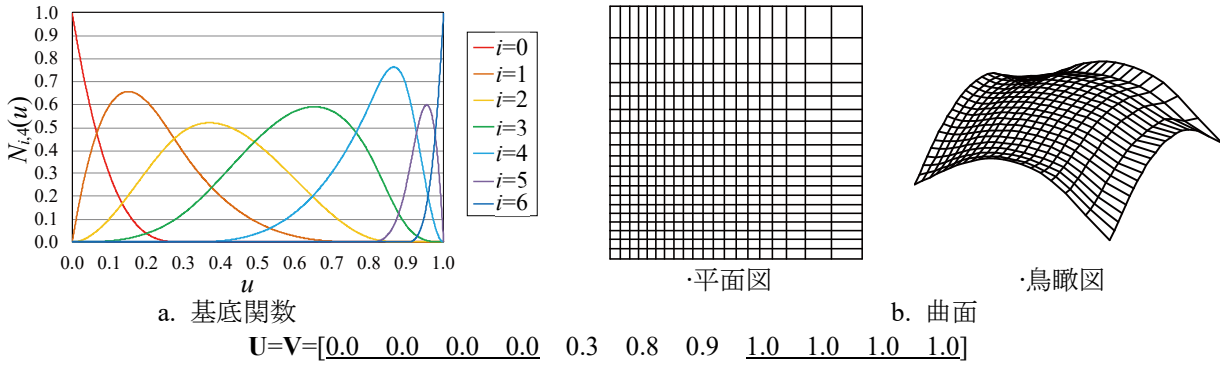


図 A.31 Case-3.16 ( $m_{uv} = 4$ )

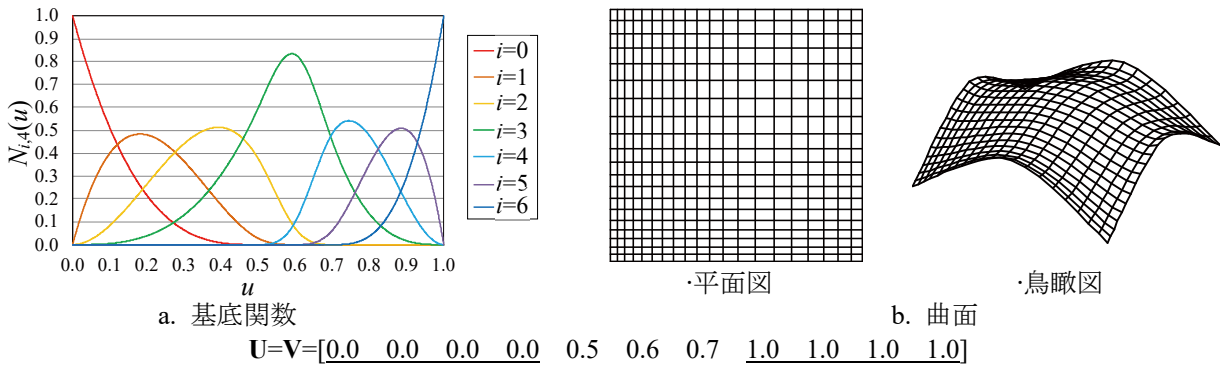


図 A.32 Case-3.17 ( $m_{uv} = 4$ )

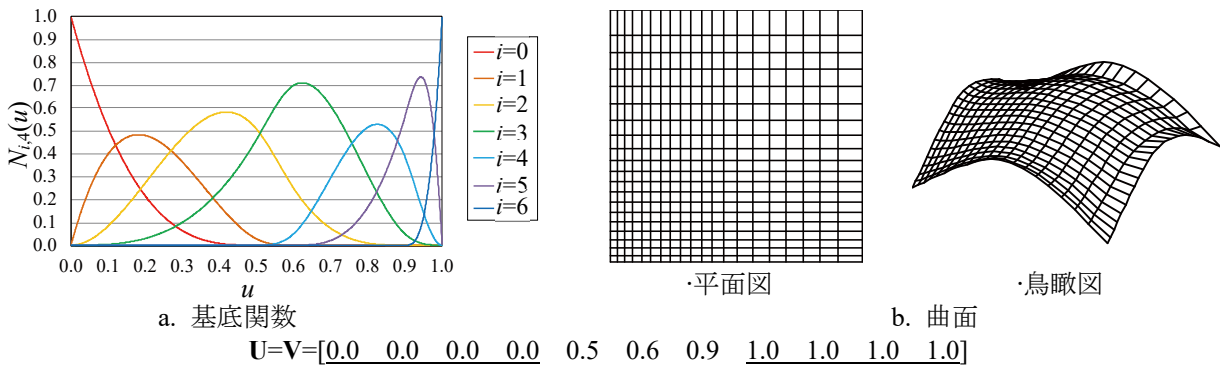


図 A.33 Case-3.18 ( $m_{uv} = 4$ )

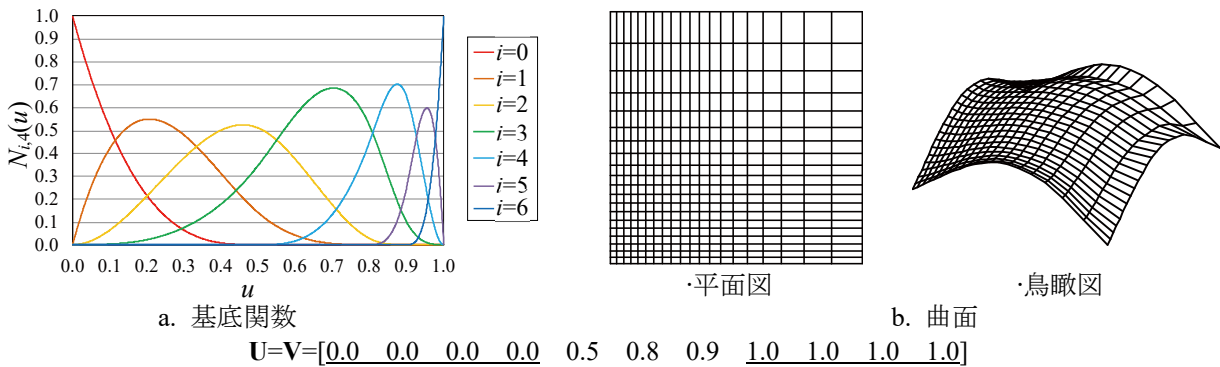


図 A.34 Case-3.19 ( $m_{uv} = 4$ )

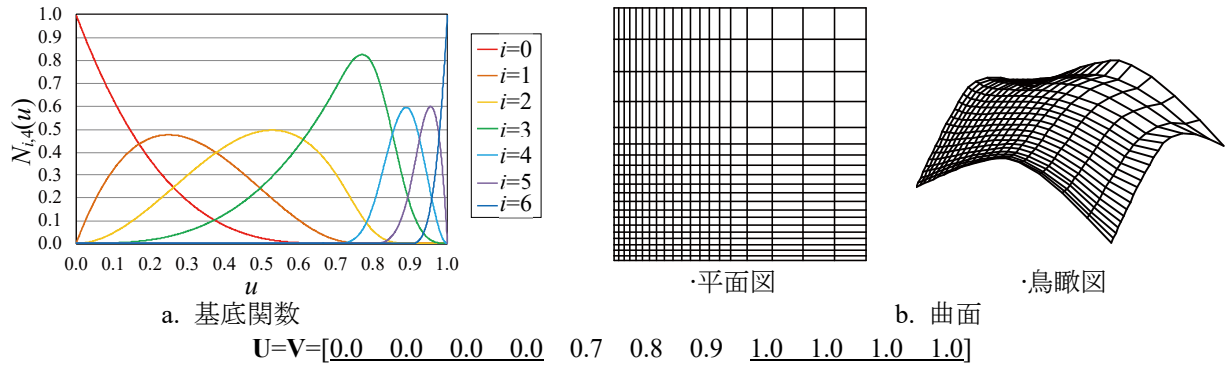


図 A.35 Case-3.20 ( $m_{uv} = 4$ )

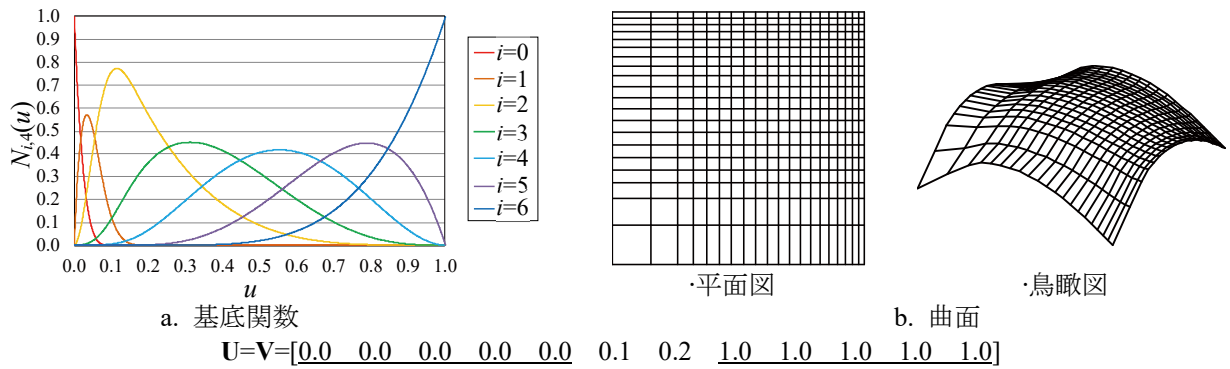


図 A.36 Case-4.1 ( $m_{uv} = 5$ )

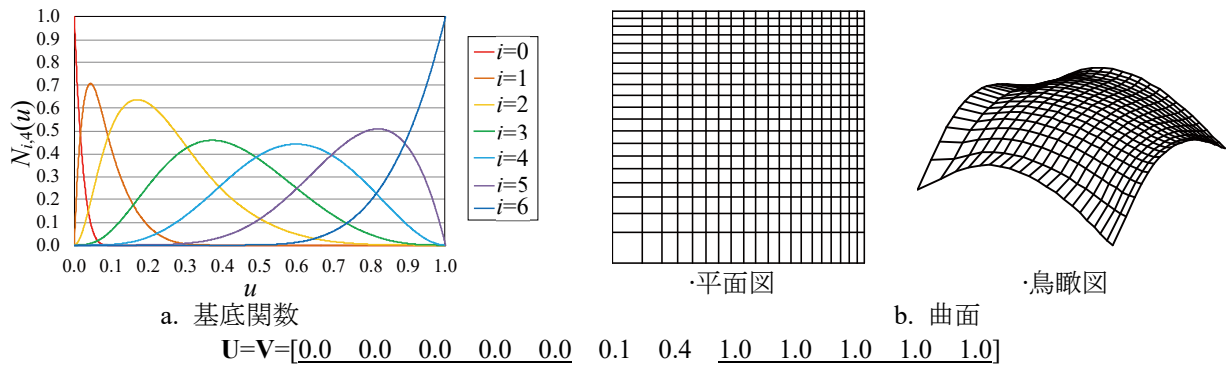


図 A.37 Case-4.2 ( $m_{uv} = 5$ )

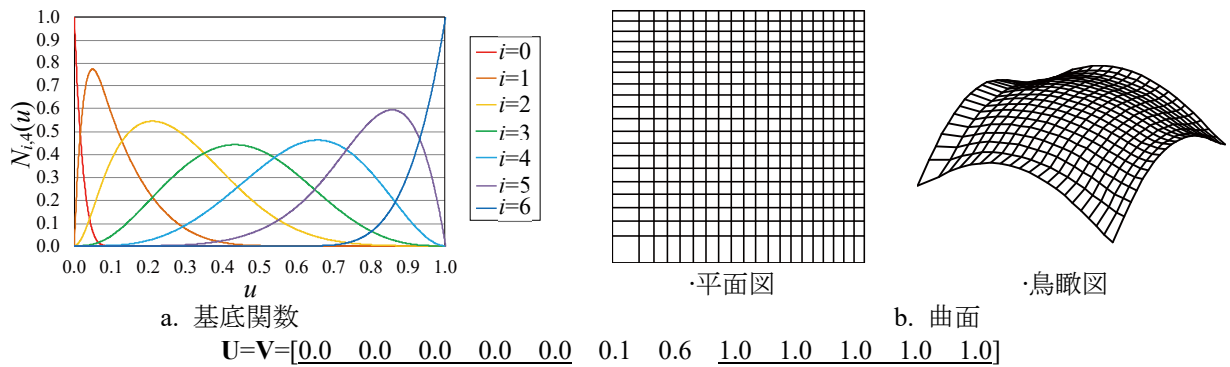


図 A.38 Case-4.3 ( $m_{uv} = 5$ )

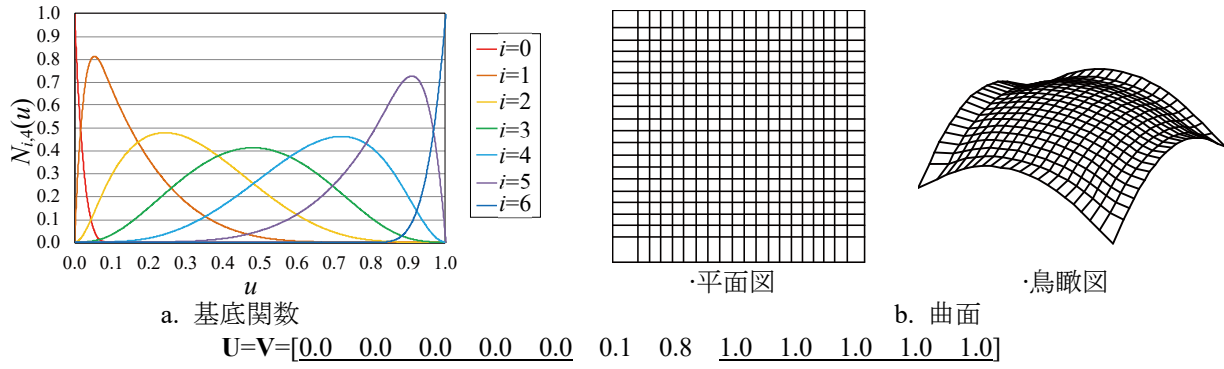


図 A.39 Case-4.4 ( $m_{uv} = 5$ )

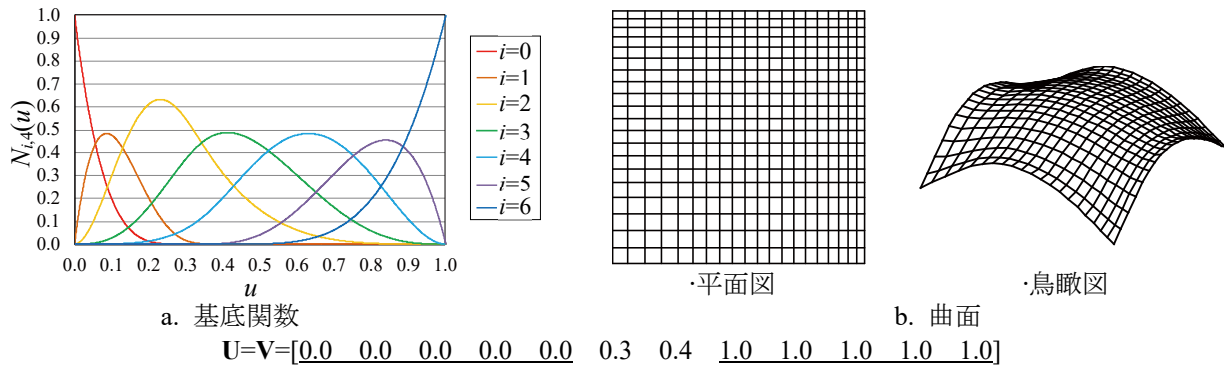


図 A.40 Case-4.5 ( $m_{uv} = 5$ )

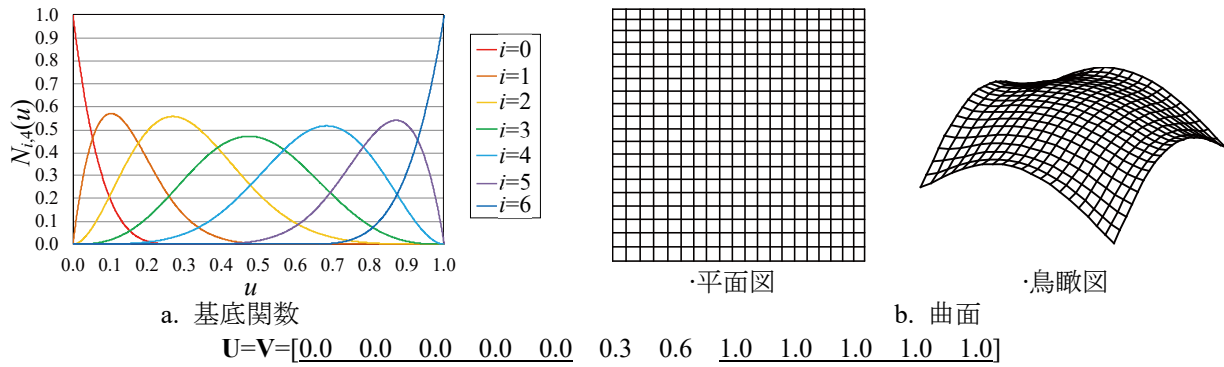


図 A.41 Case-4.6 ( $m_{uv} = 5$ )

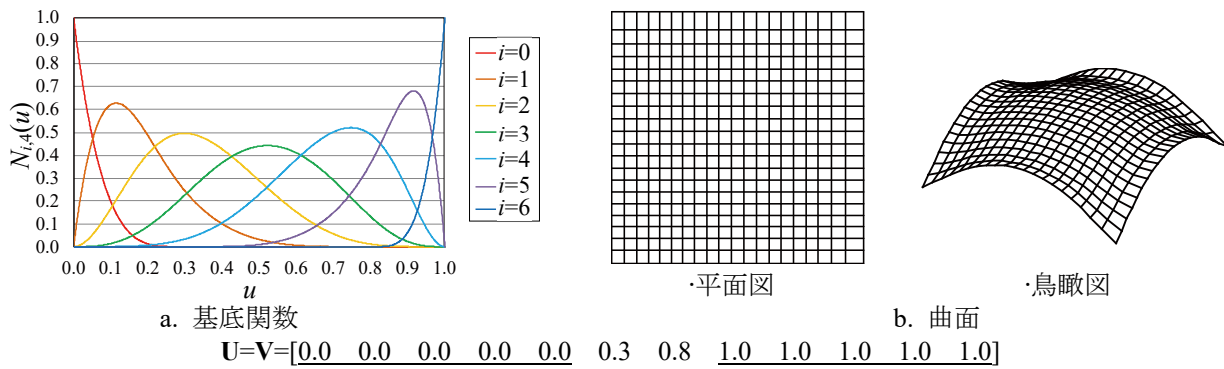
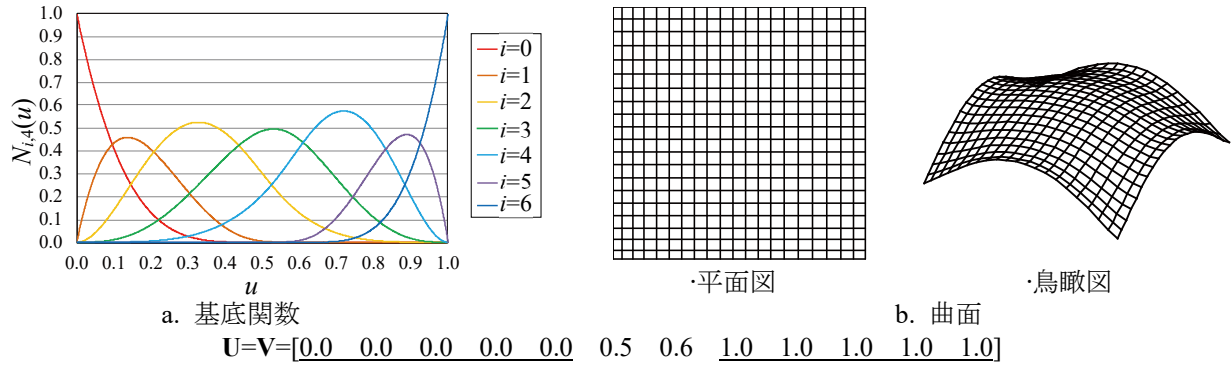
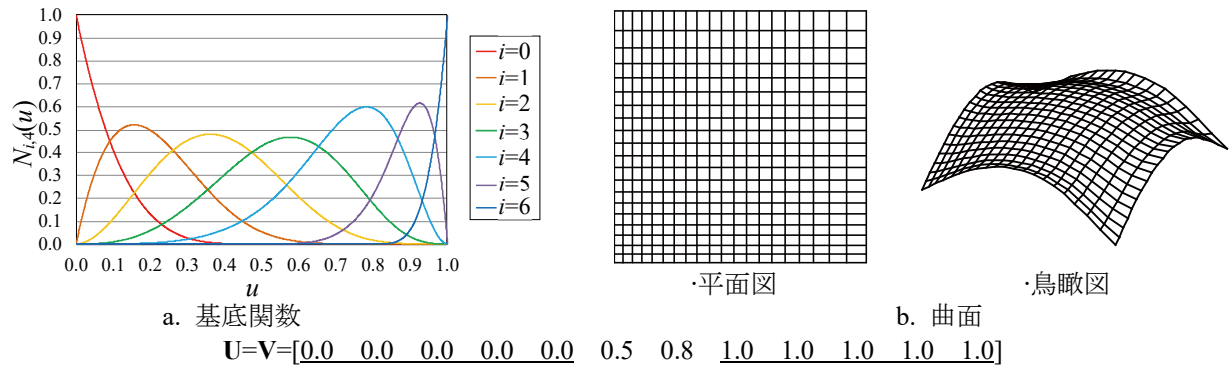
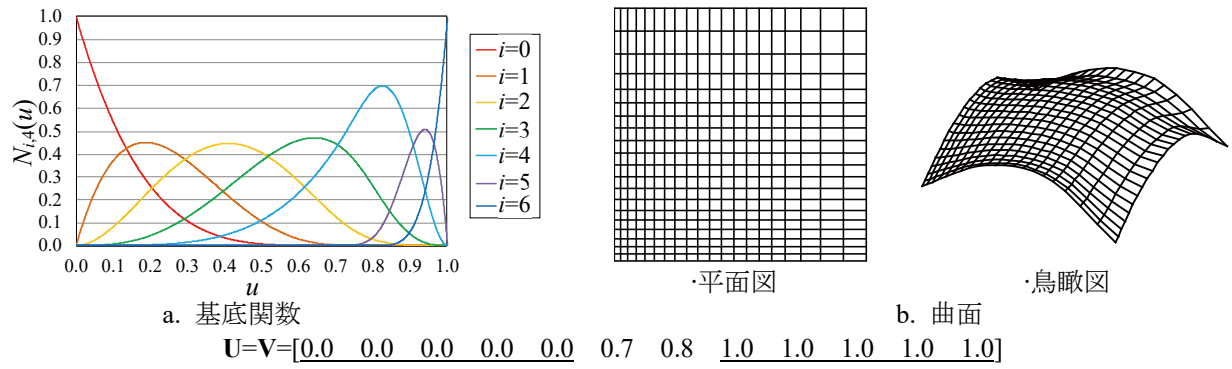


図 A.42 Case-4.7 ( $m_{uv} = 5$ )


 図 A.43 Case-4.8 ( $m_{uv} = 5$ )

 図 A.44 Case-4.9 ( $m_{uv} = 5$ )

 図 A.45 Case-4.10 ( $m_{uv} = 5$ )



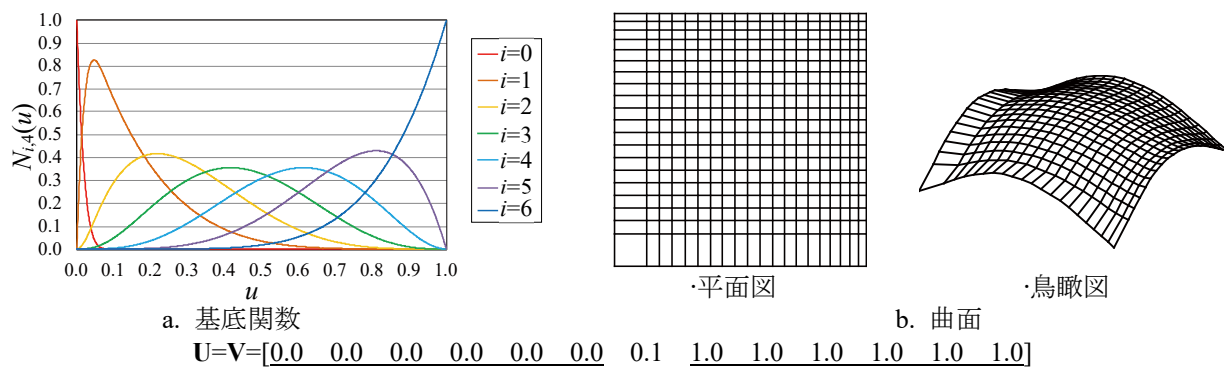


図 A.46 Case-5.1 ( $m_{uv} = 6$ )

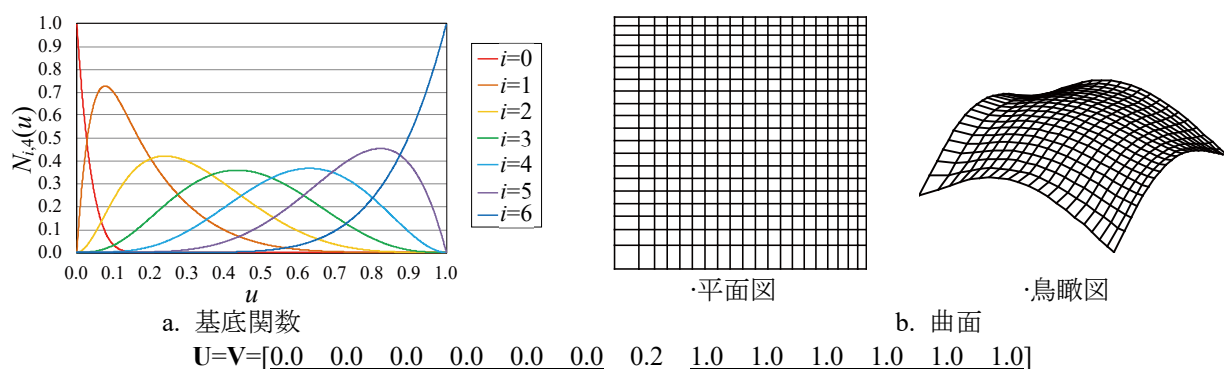


図 A.47 Case-5.2 ( $m_{uv} = 6$ )

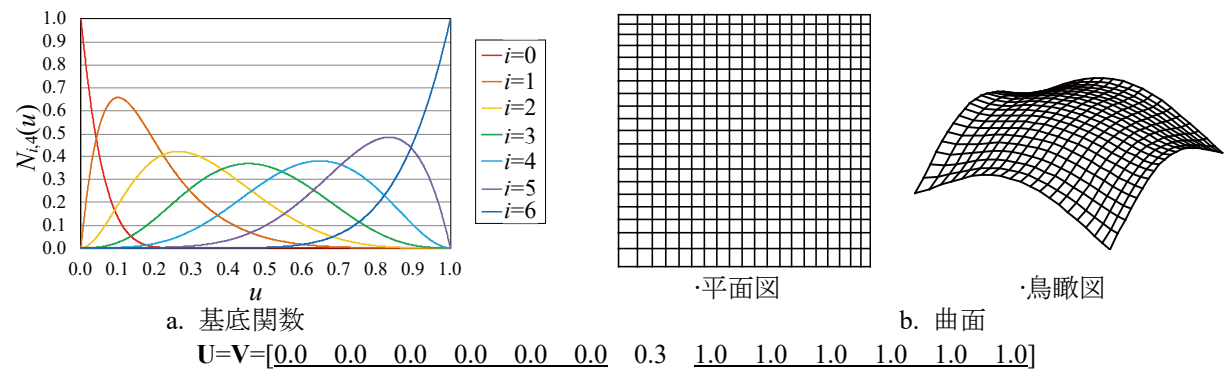


図 A.48 Case-5.3 ( $m_{uv} = 6$ )



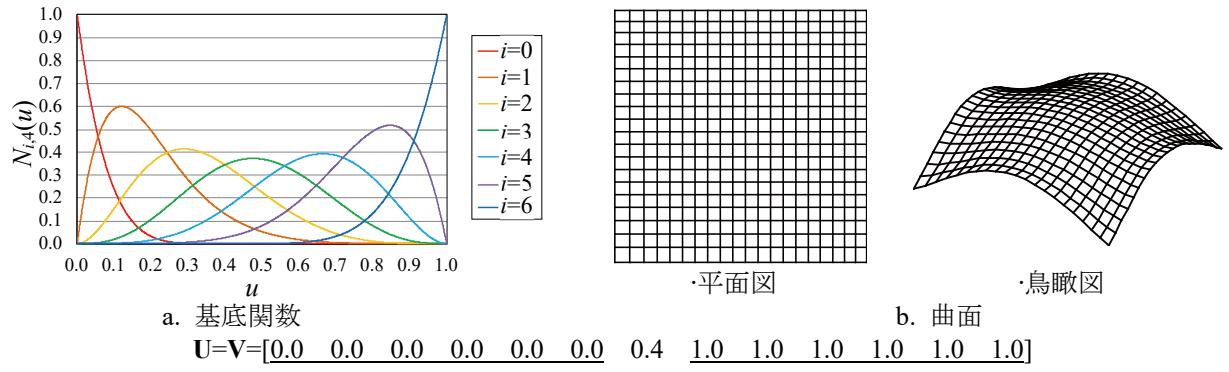


図 A.49 Case-5.4 ( $m_{uv} = 6$ )

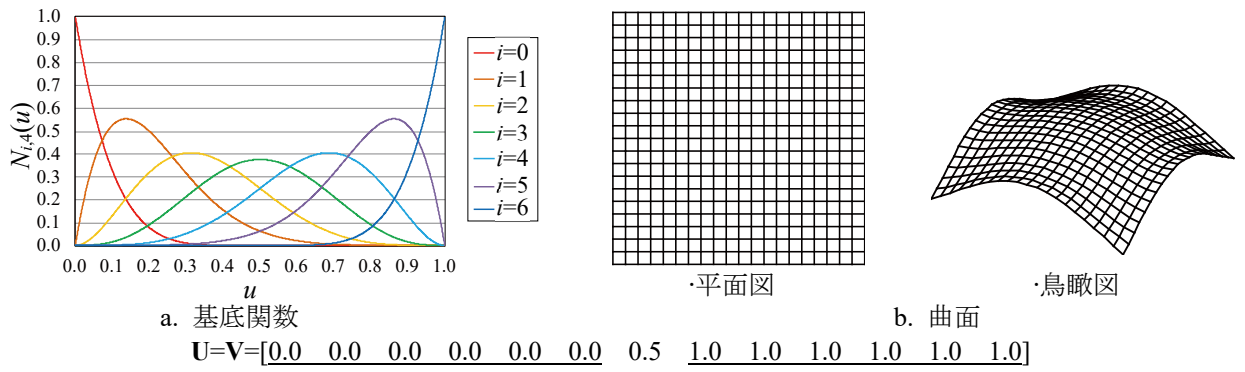


図 A.50 Case-5.5 ( $m_{uv} = 6$ )

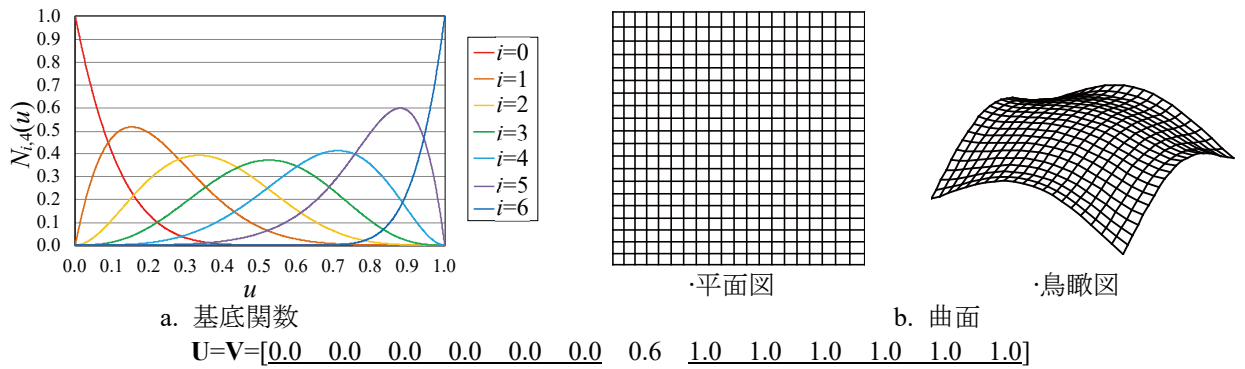


図 A.51 Case-5.6 ( $m_{uv} = 6$ )

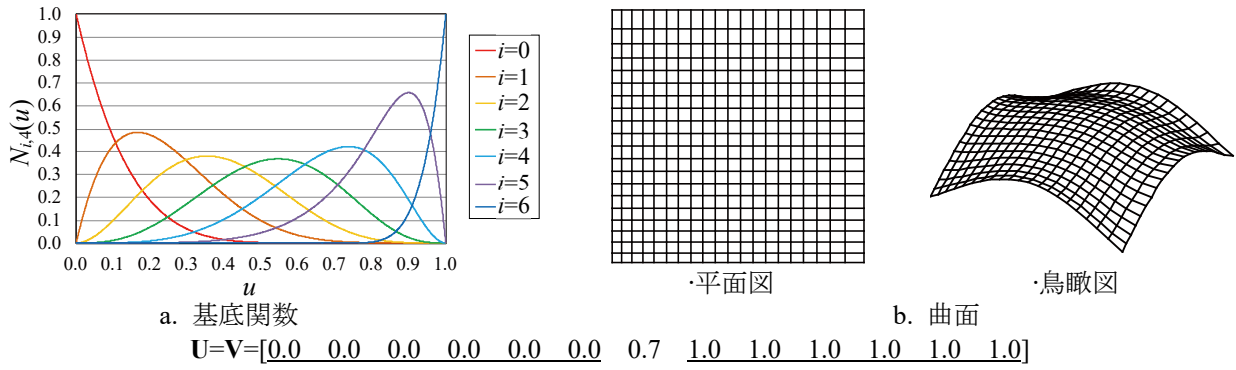


図 A.52 Case-5.7 ( $m_{uv} = 6$ )

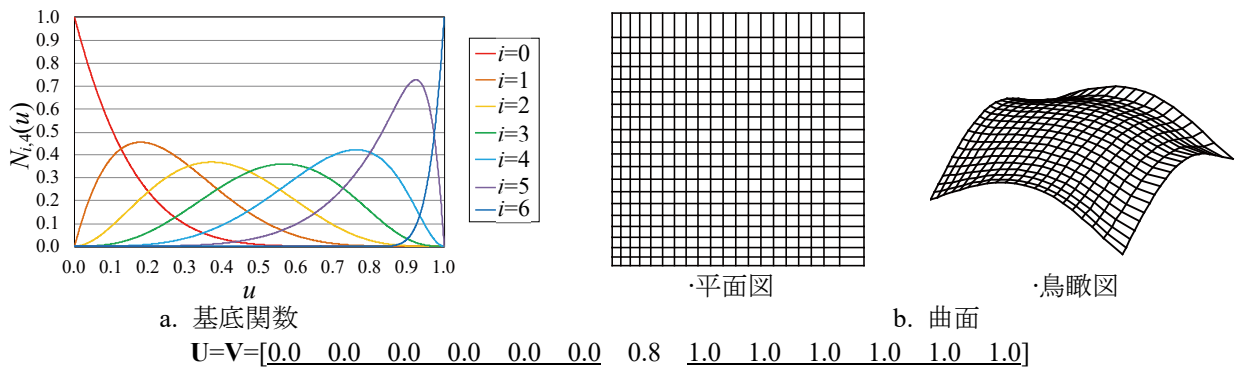


図 A.53 Case-5.8 ( $m_{uv} = 6$ )

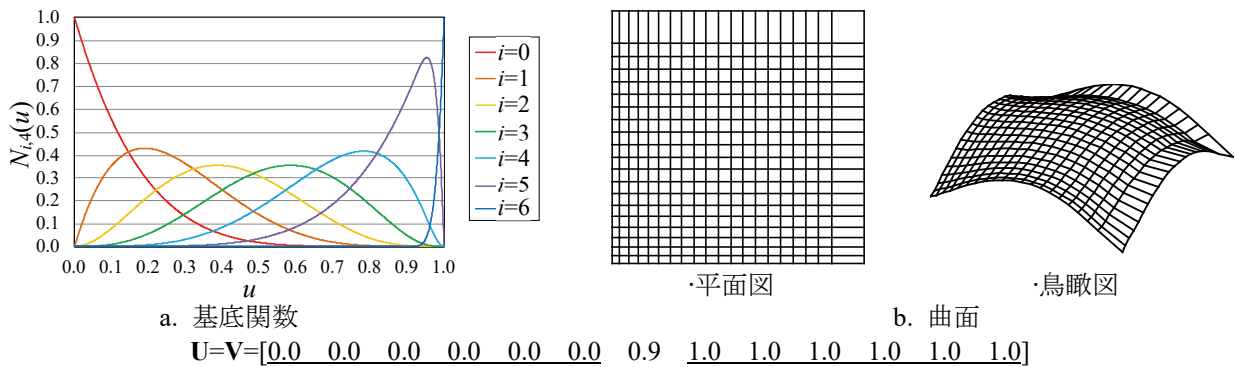


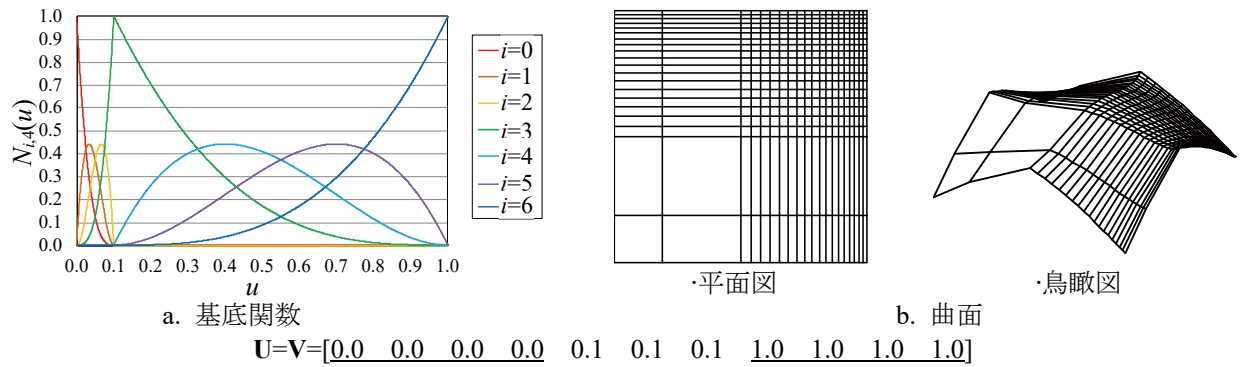
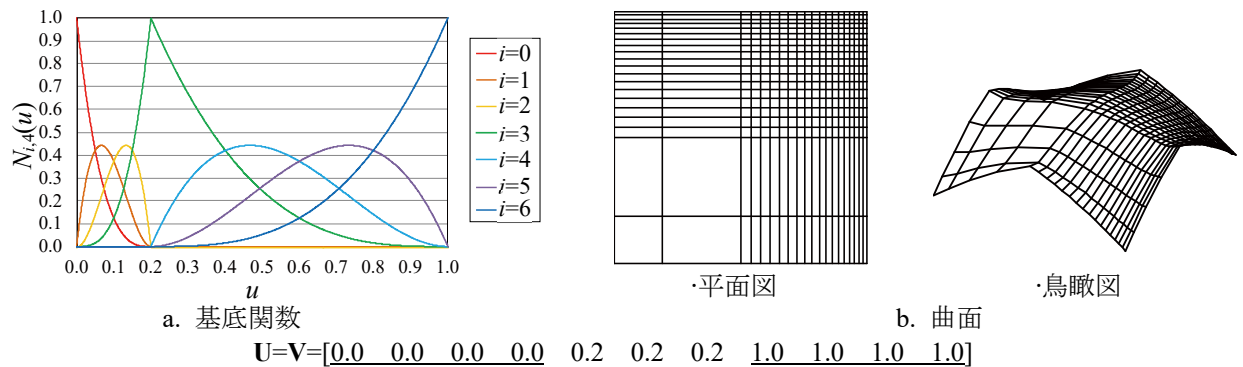
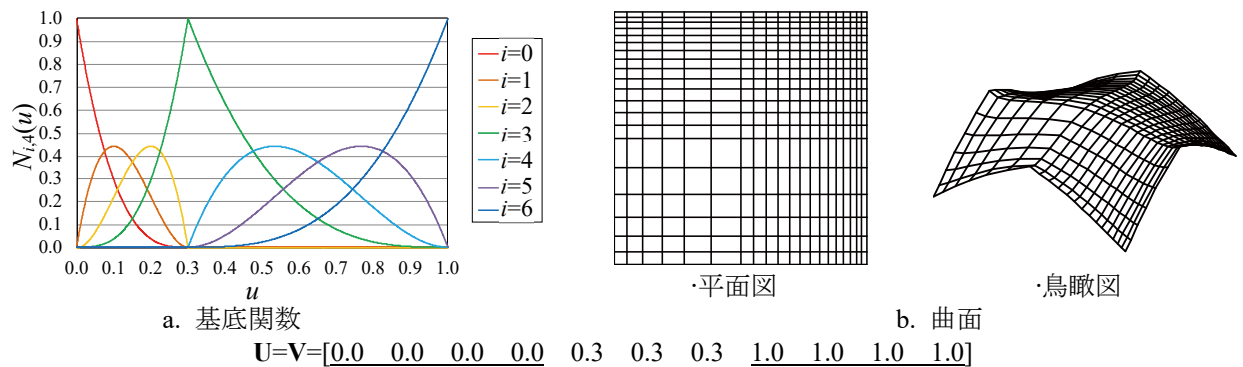
図 A.54 Case-5.9 ( $m_{uv} = 6$ )

## 考察

非対称配置に設定した場合、ノットベクトルが密集すると、裾野が狭く尖った基底関数が含まれる。基底関数が Case-3.11 (図 A.26) はほぼ中央に密集し、曲面形状が比較的尖る形状になる。また、Case-3.1 (図 A.16) や Case-3.20 (図 A.35) などは隅に密集し、ノットベクトルが偏ると曲面形状の節点座標も偏る。ノットベクトルを非対称配置に設定することで、制御点が対称形であっても曲面形状は非対象となる。

### A.3 内部ノット多重

内部ノットに多重ノットを含む NURBS の形状を比較する。ノットベクトルの端部を階数分重複させた設定は、 $m_{uv} = 6, 7$  は検討を行うことができない。そのためここでは  $m_{uv} = 4, 5$  のみを検討する。数値結果を図 A.55-A.108 に示す (a: 基底関数, b: 曲面形状)。図 A.55-A.63 は Case-6 (3 重ノット, 階数 4)、図 A.64-A.99 は Case-7 (2 重ノット, 階数 4)、図 A.100-A.108 は Case-8 (2 重ノット, 階数 5) の結果である。結果図中において、多重度  $m_{uv}$  としての端部のノットを下線で示した。

図 A.55 Case-6.1 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 3 重)図 A.56 Case-6.2 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 3 重)図 A.57 Case-6.3 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 3 重)

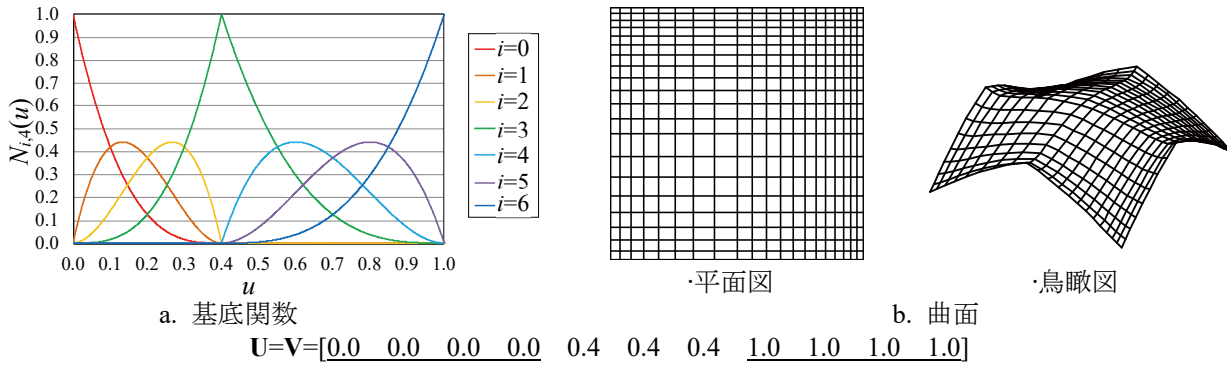


図 A.58 Case-6.4 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 3 重)

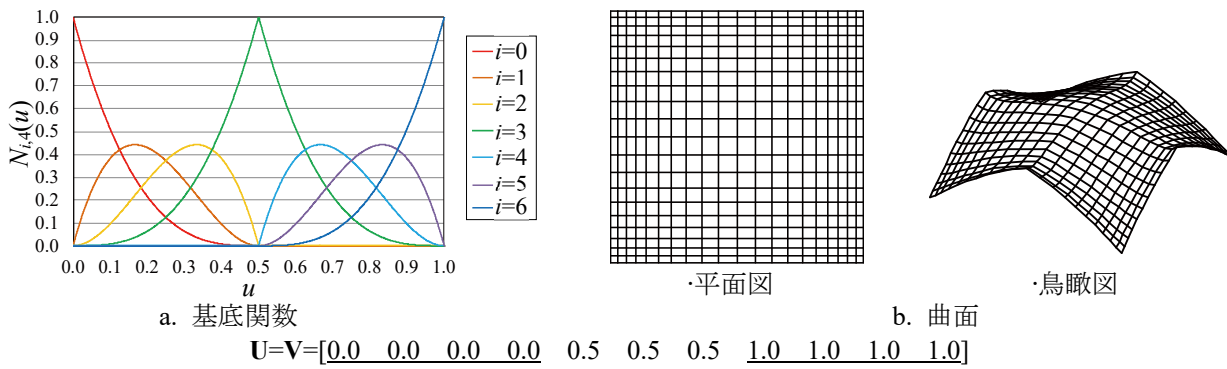


図 A.59 Case-6.5 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 3 重)

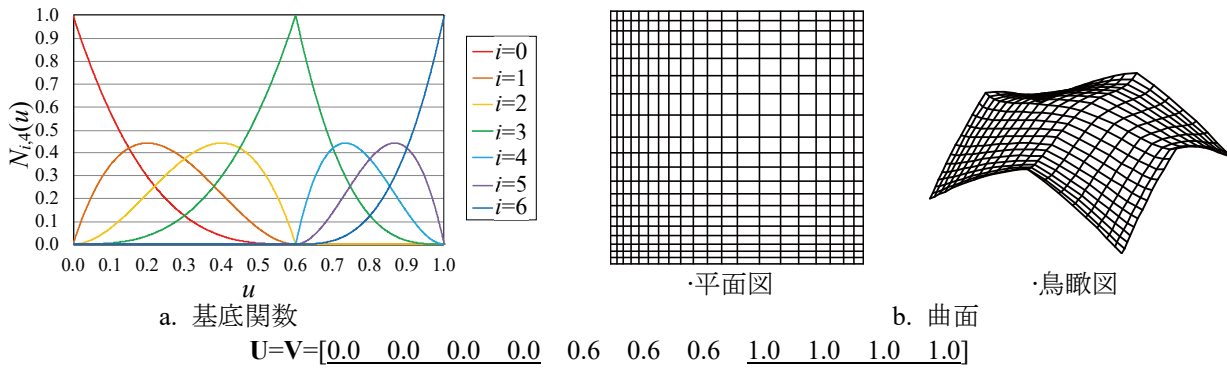


図 A.60 Case-6.6 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 3 重)

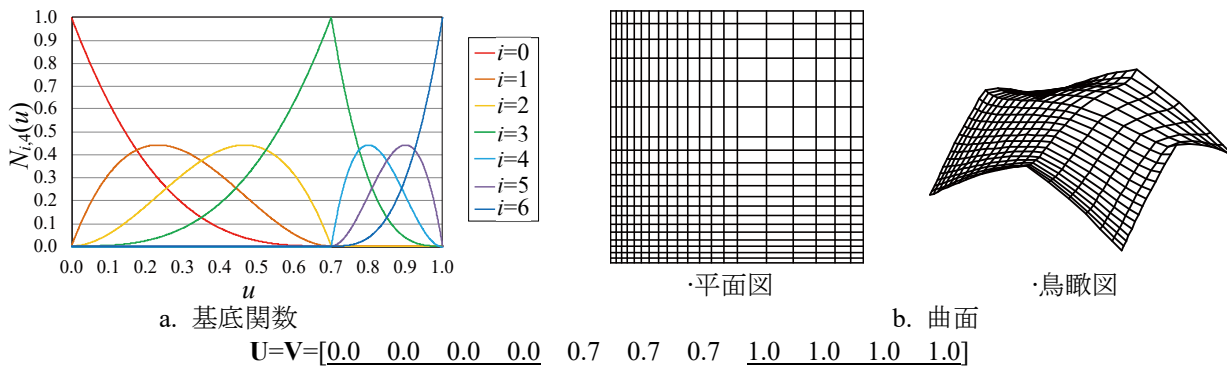


図 A.61 Case-6.7 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 3 重)

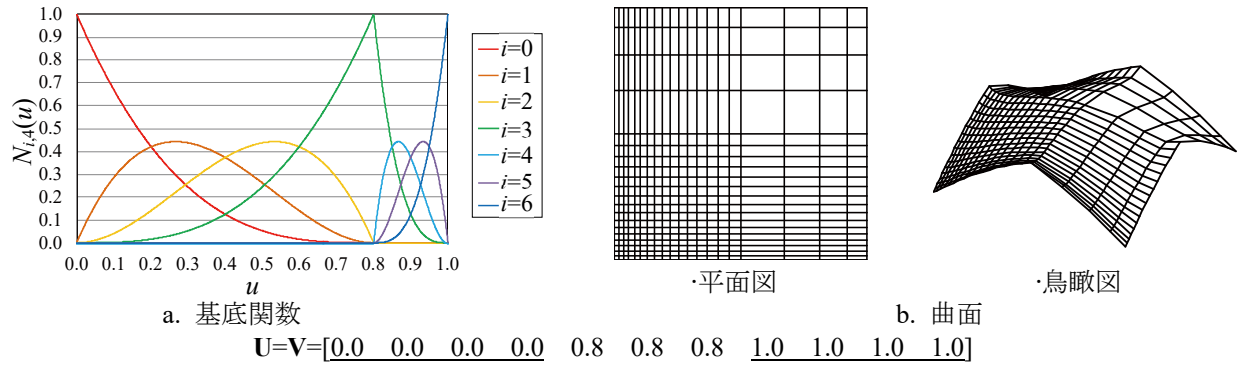


図 A.62 Case-6.8 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 3 重)

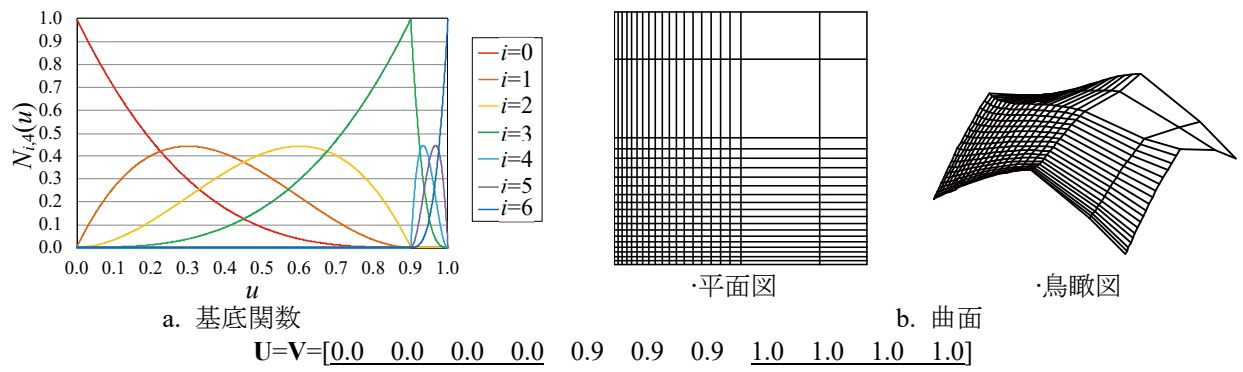


図 A.63 Case-6.9 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 3 重)

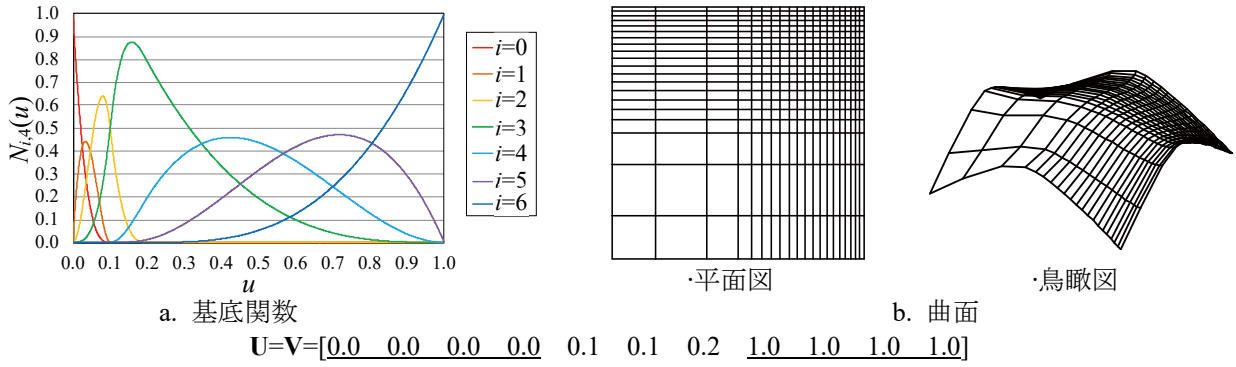


図 A.64 Case-7.1 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)

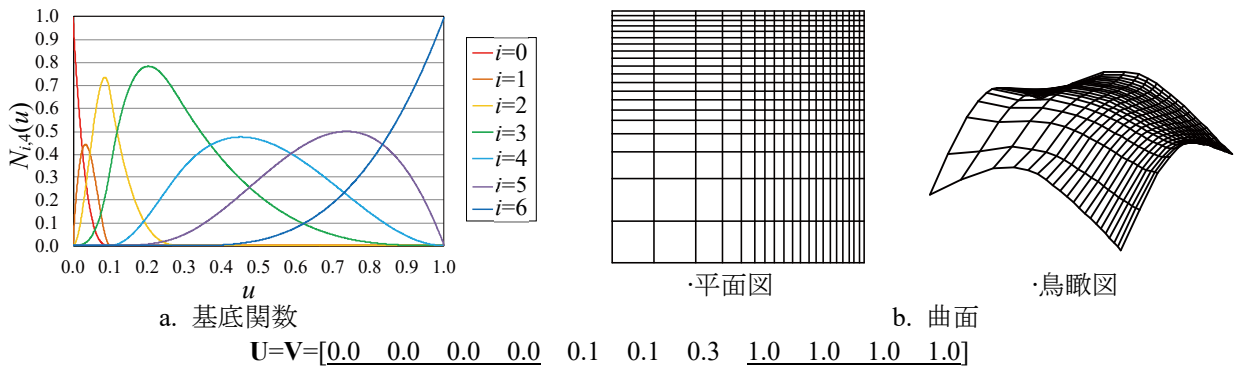


図 A.65 Case-7.2 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)

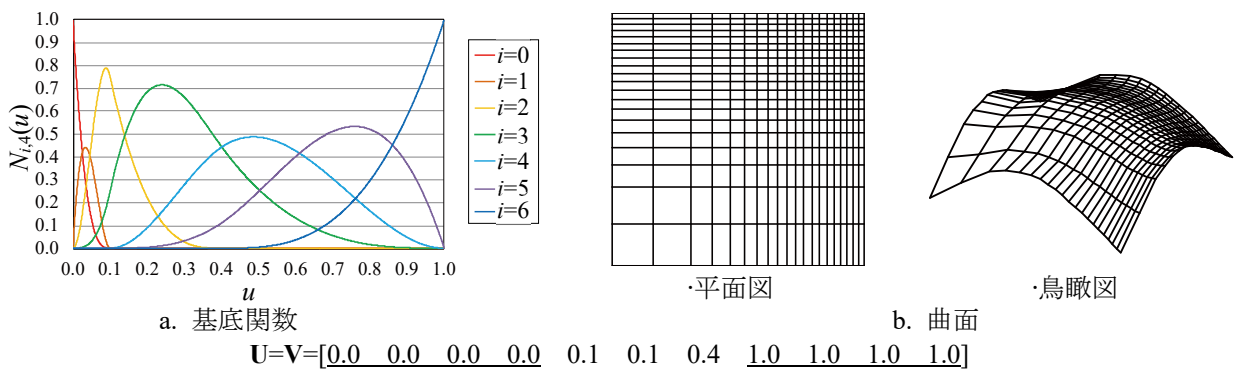


図 A.66 Case-7.3 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)

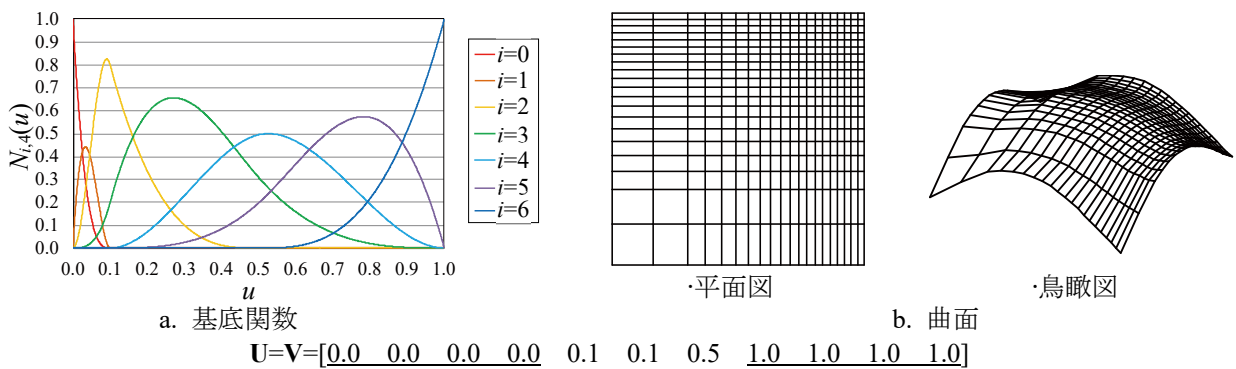
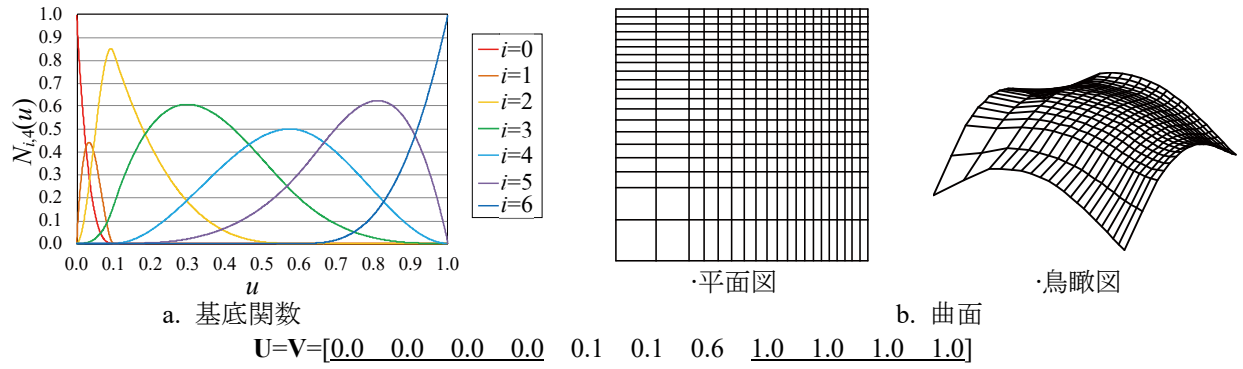
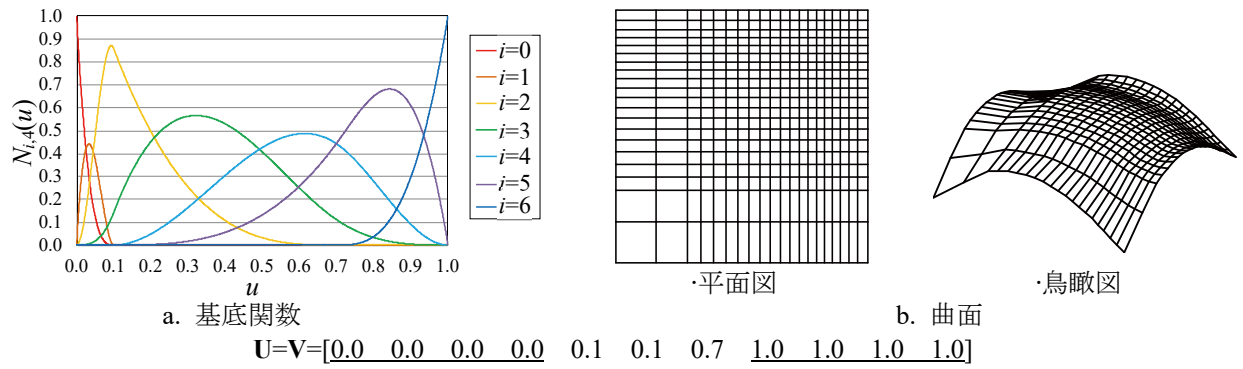
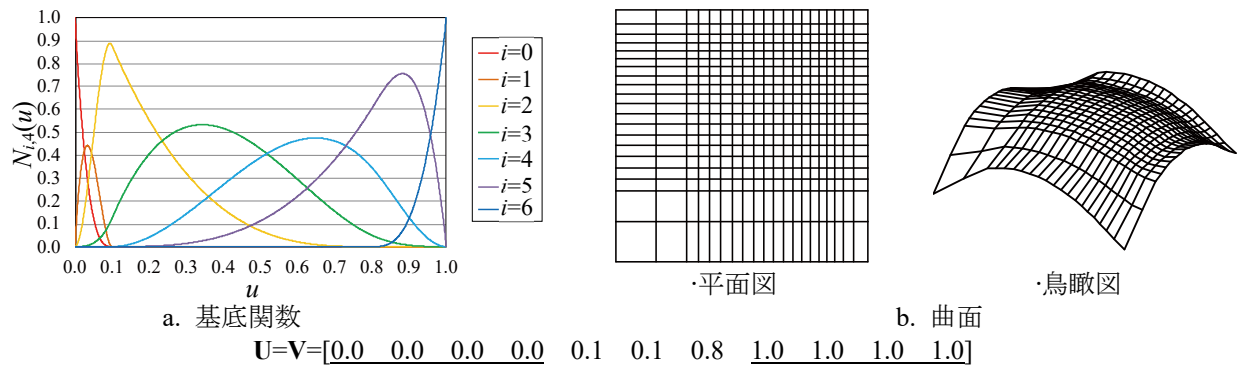
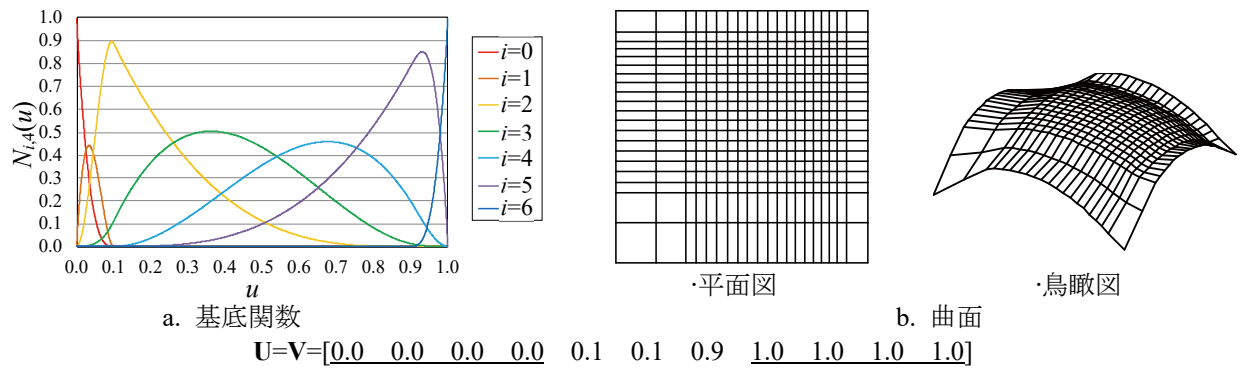


図 A.67 Case-7.4 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)


 図 A.68 Case-7.5 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.69 Case-7.6 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.70 Case-7.7 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.71 Case-7.8 ( $m_{uv}=4$ , 内部ノット: 2 重)



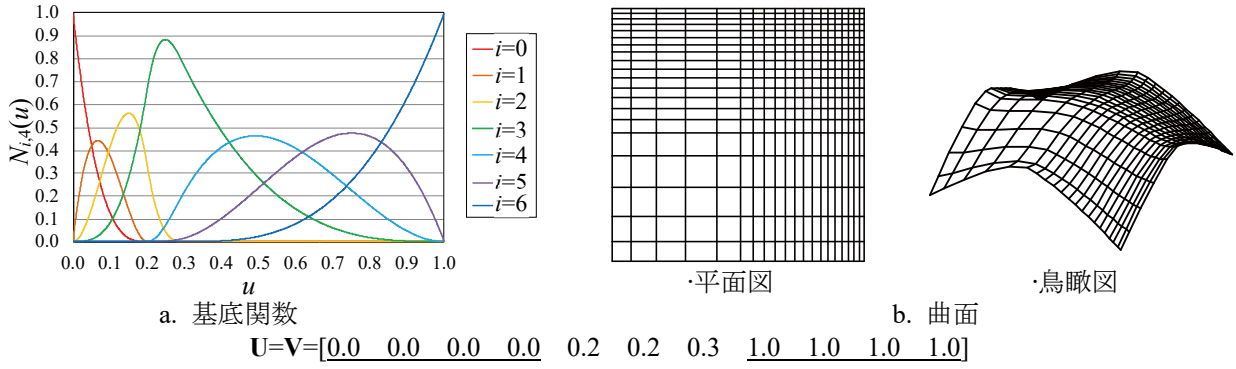


図 A.72 Case-7.9 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

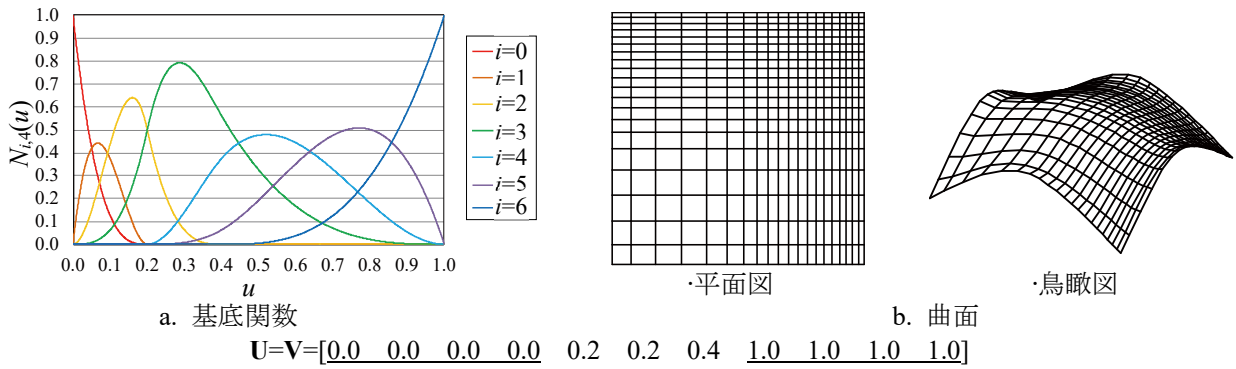


図 A.73 Case-7.10 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

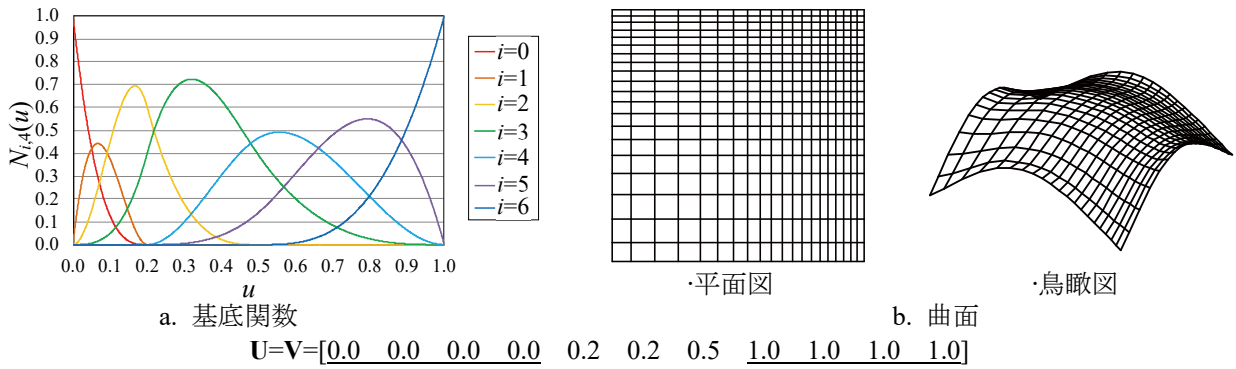


図 A.74 Case-7.11 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

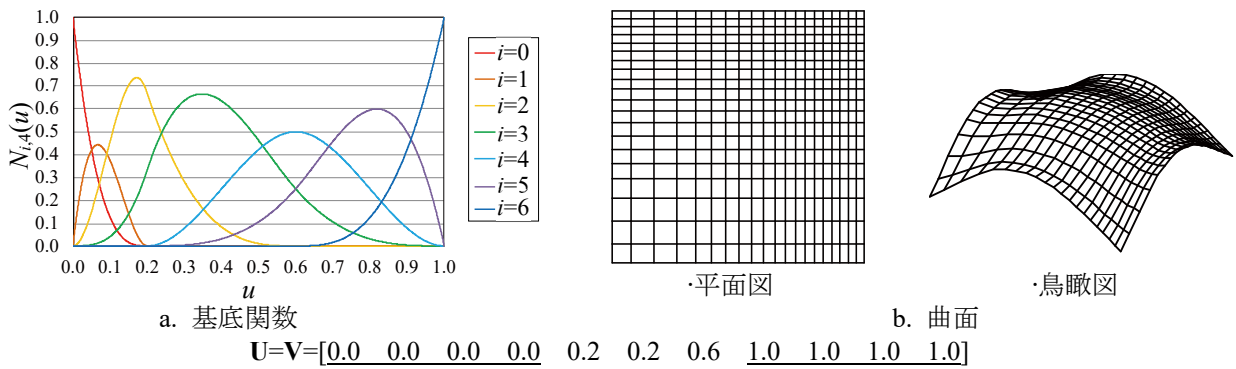
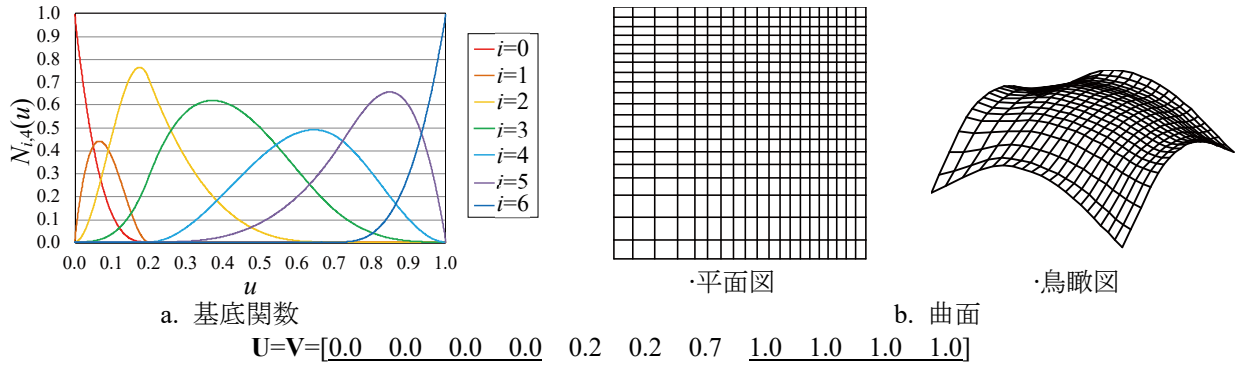
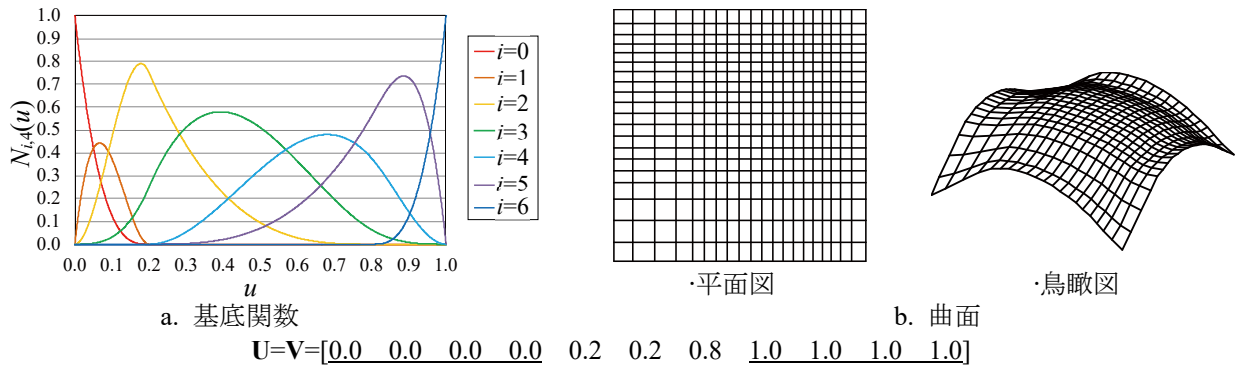
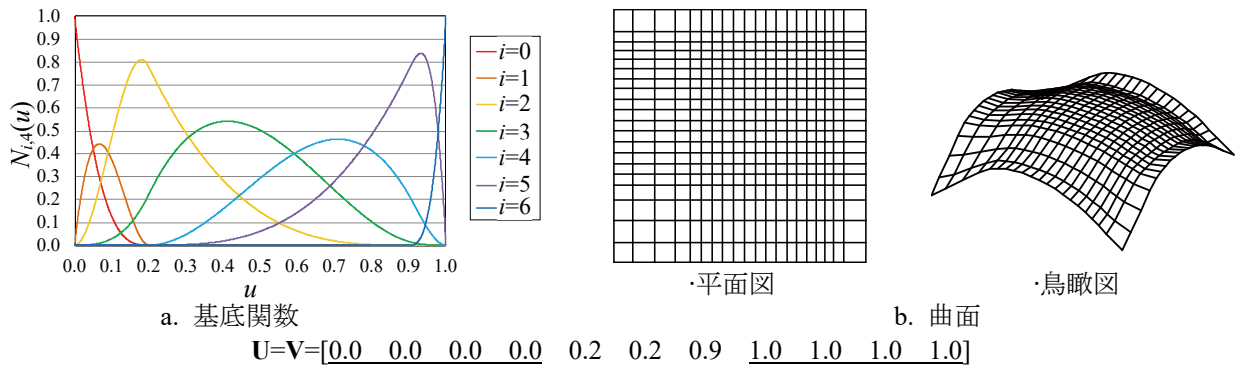
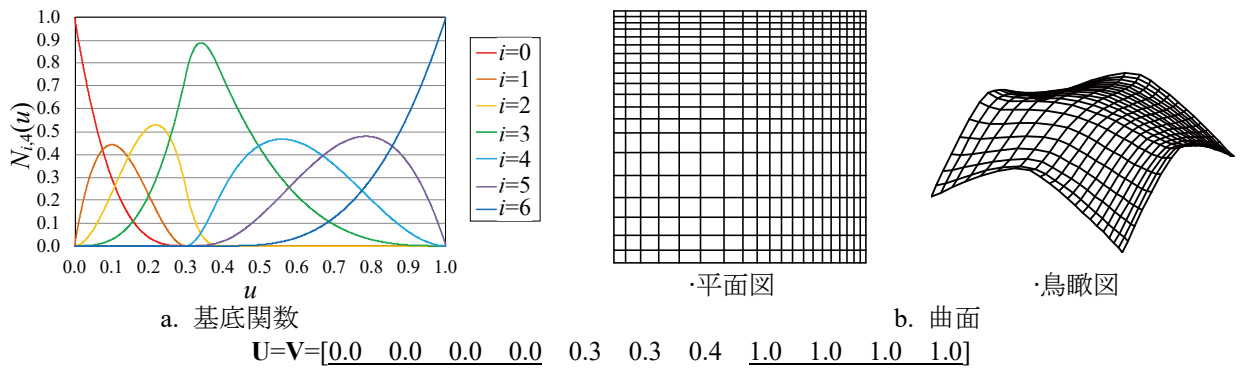


図 A.75 Case-7.12 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)




 図 A.76 Case-7.13 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.77 Case-7.14 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.78 Case-7.15 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.79 Case-7.16 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

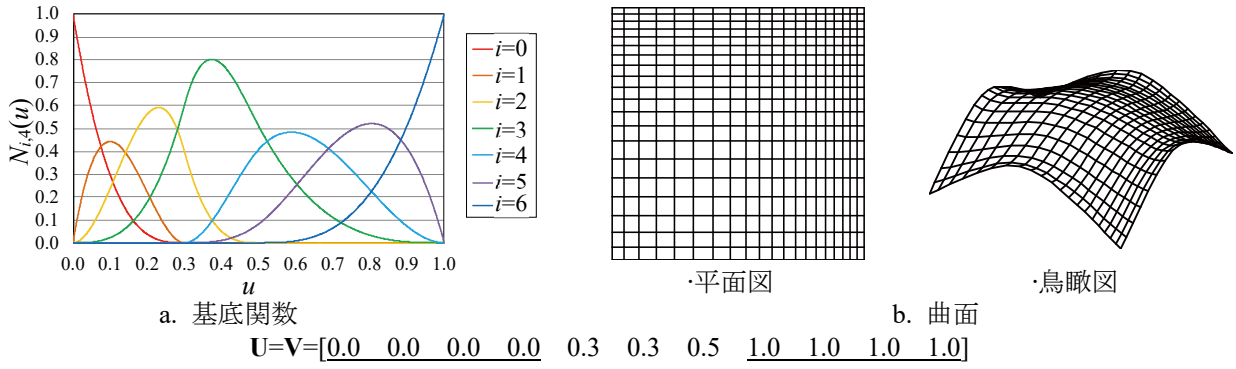


図 A.80 Case-7.17 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

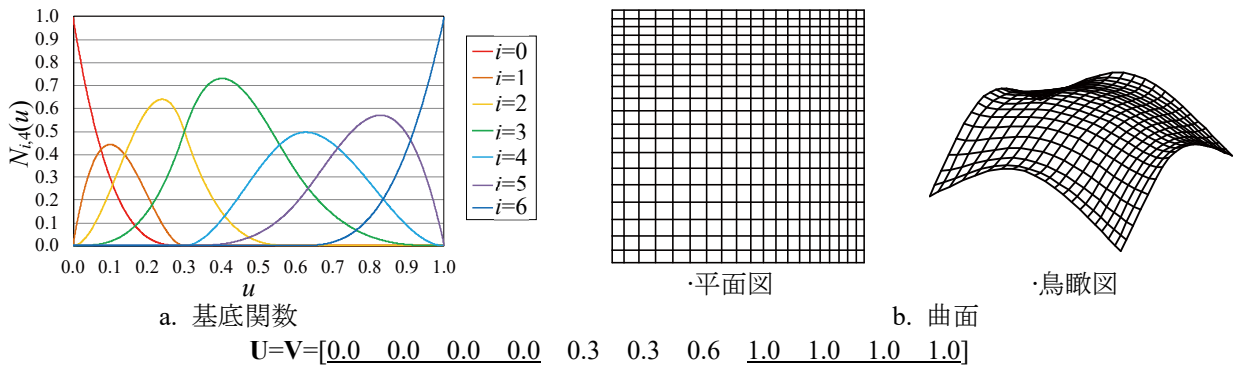


図 A.81 Case-7.18 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

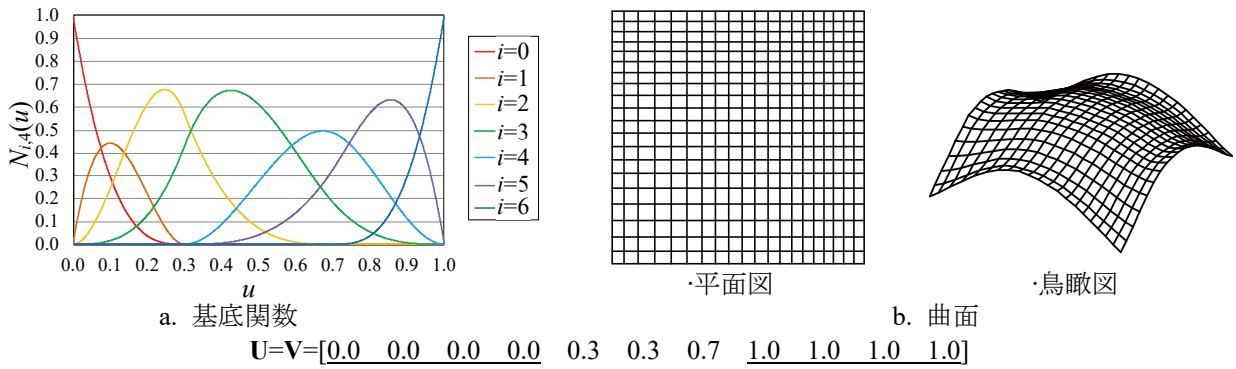


図 A.82 Case-7.19 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

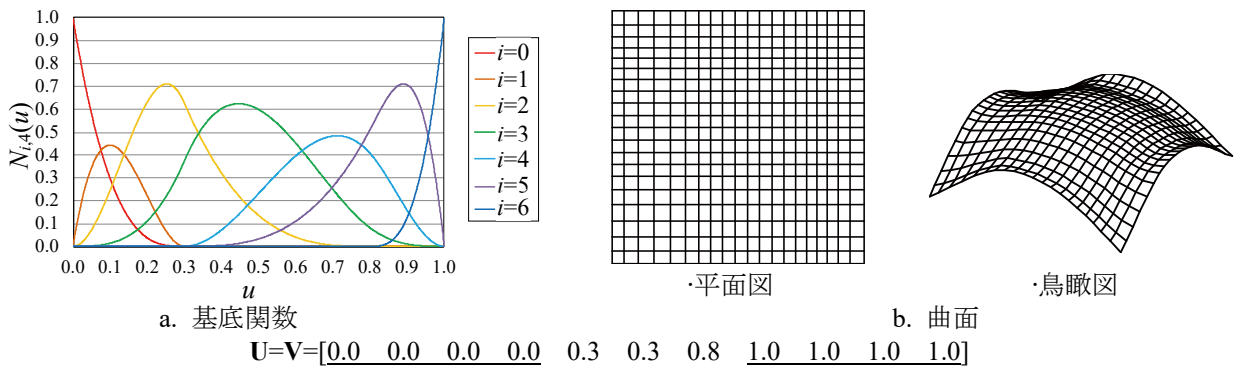
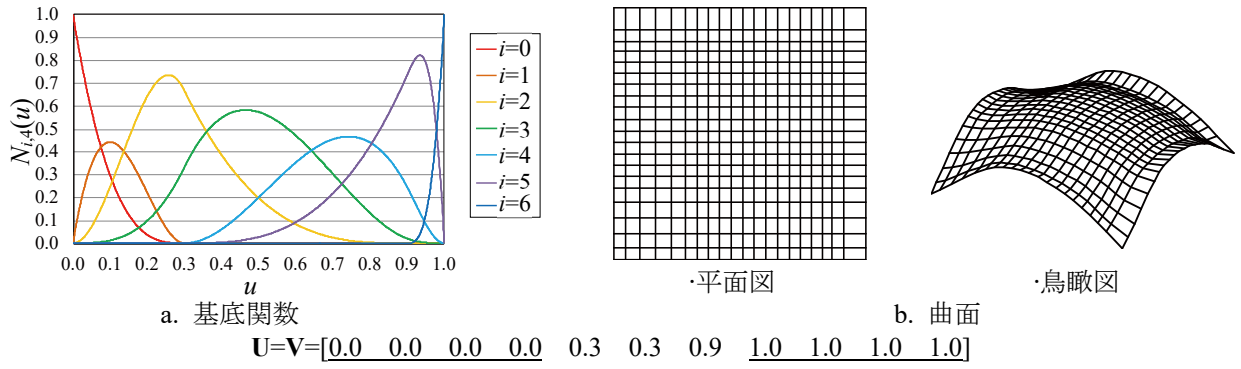
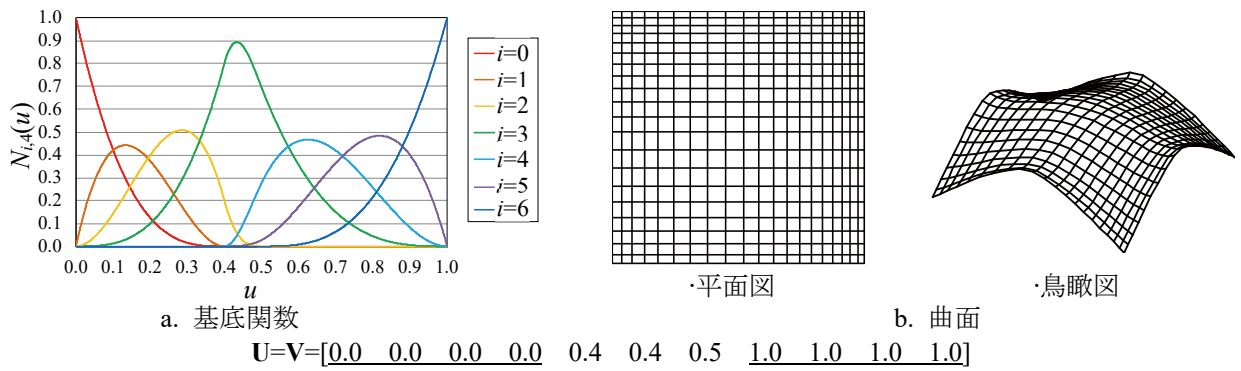
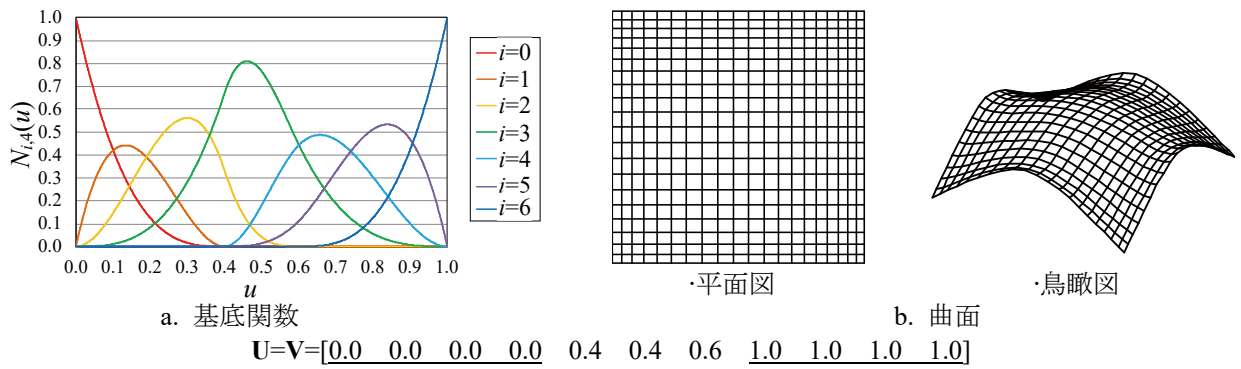
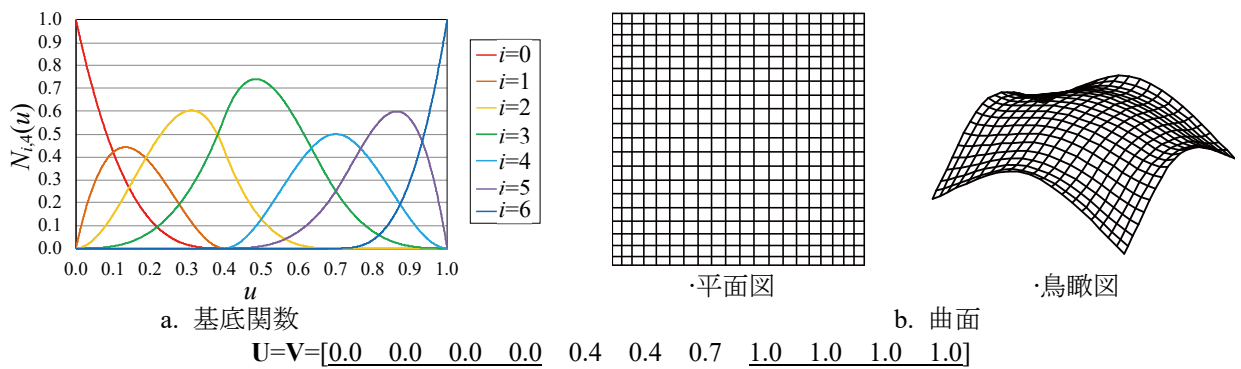


図 A.83 Case-7.20 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)


 図 A.84 Case-7.21 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.85 Case-7.22 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.86 Case-7.23 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.87 Case-7.24 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

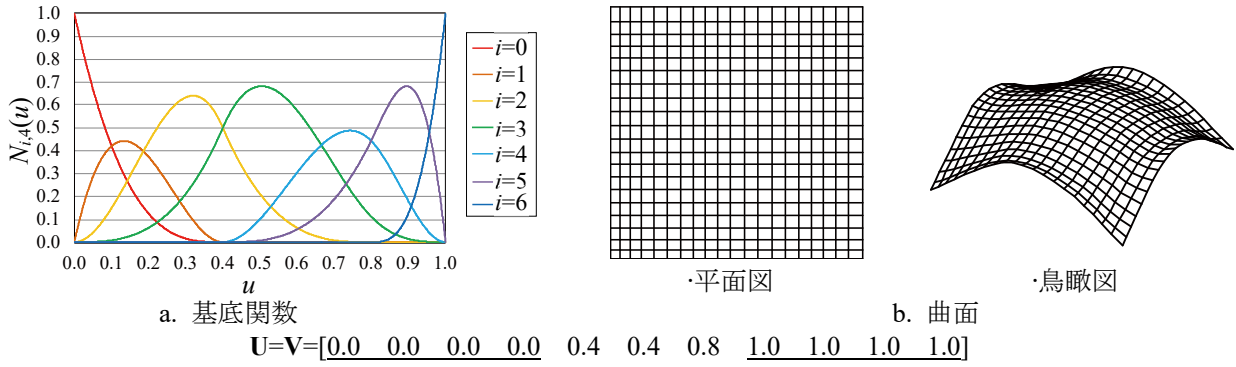


図 A.88 Case-7.25 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

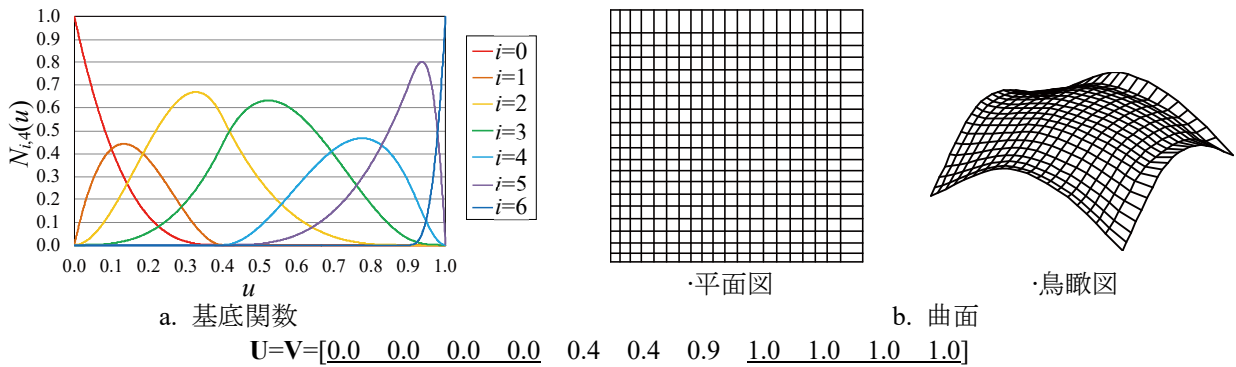


図 A.89 Case-7.26 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

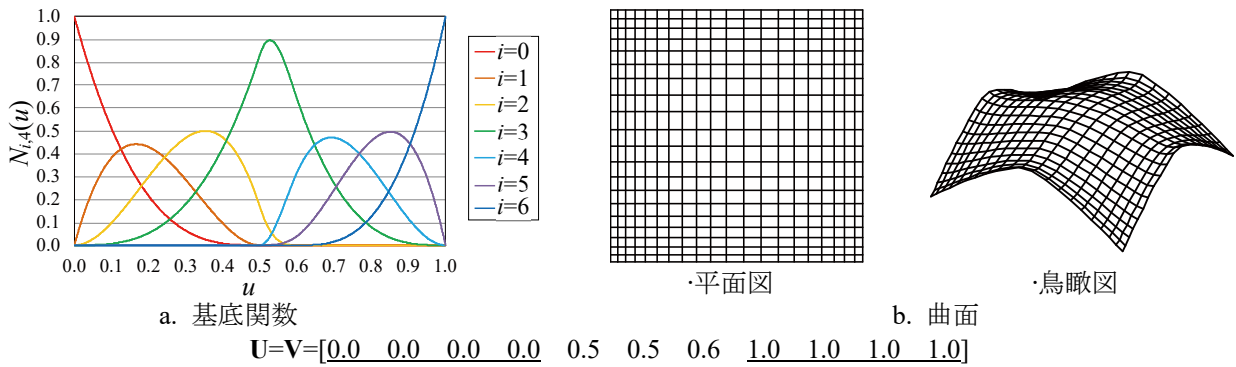


図 A.90 Case-7.27 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

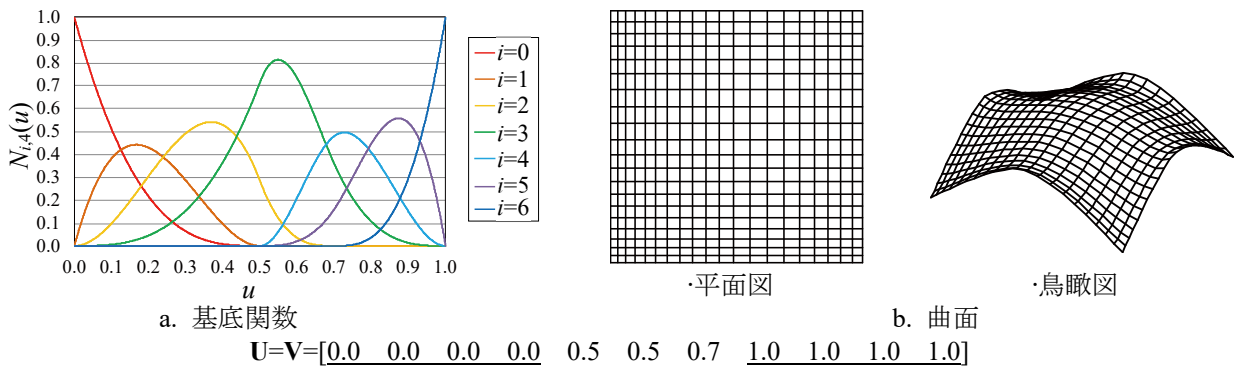
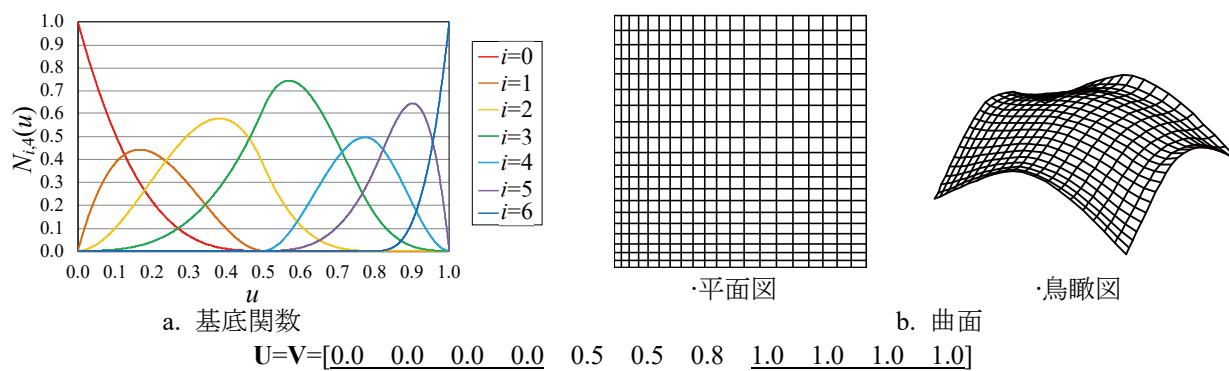
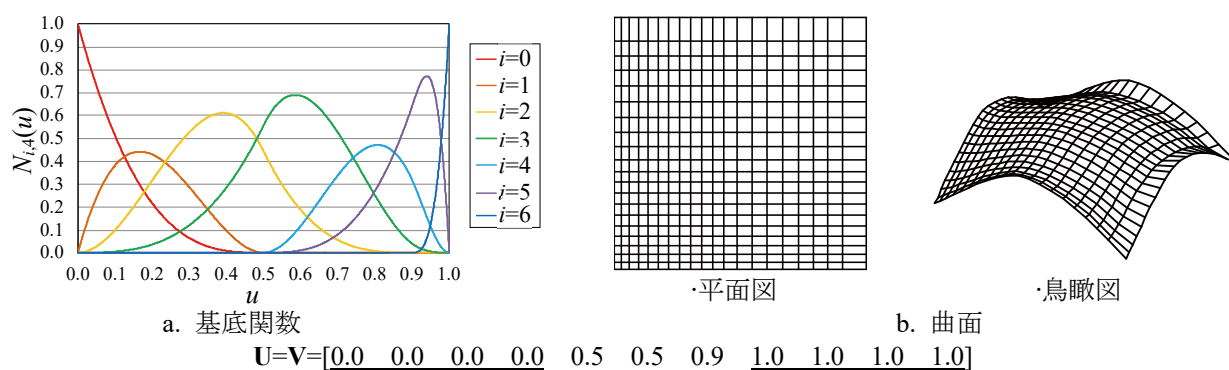
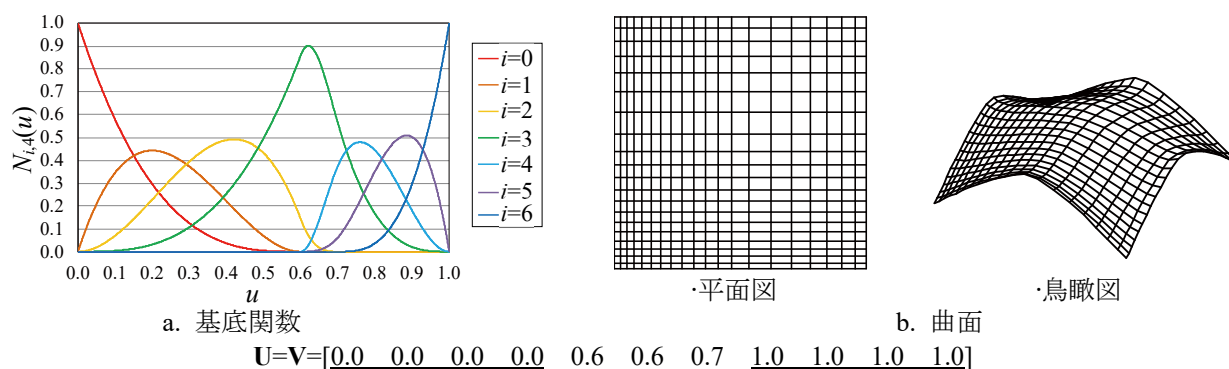
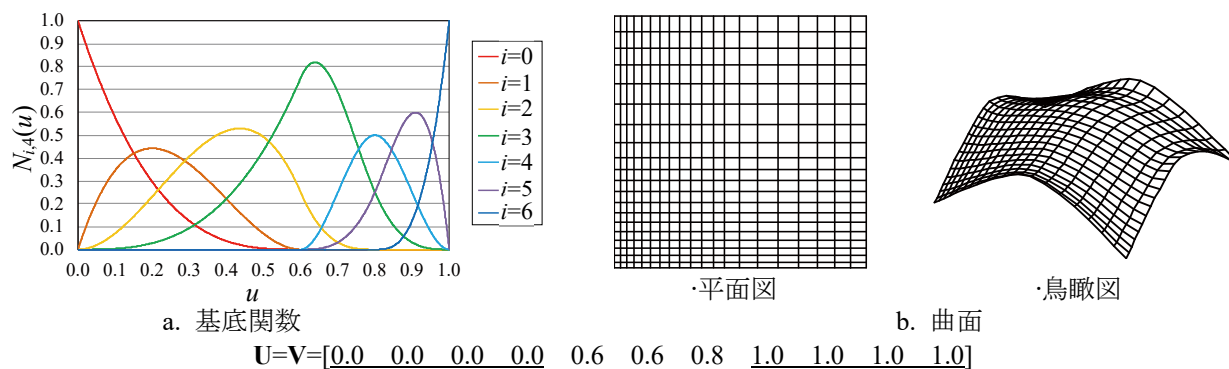


図 A.91 Case-7.28 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)


 図 A.92 Case-7.29 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.93 Case-7.30 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.94 Case-7.31 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

 図 A.95 Case-7.32 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

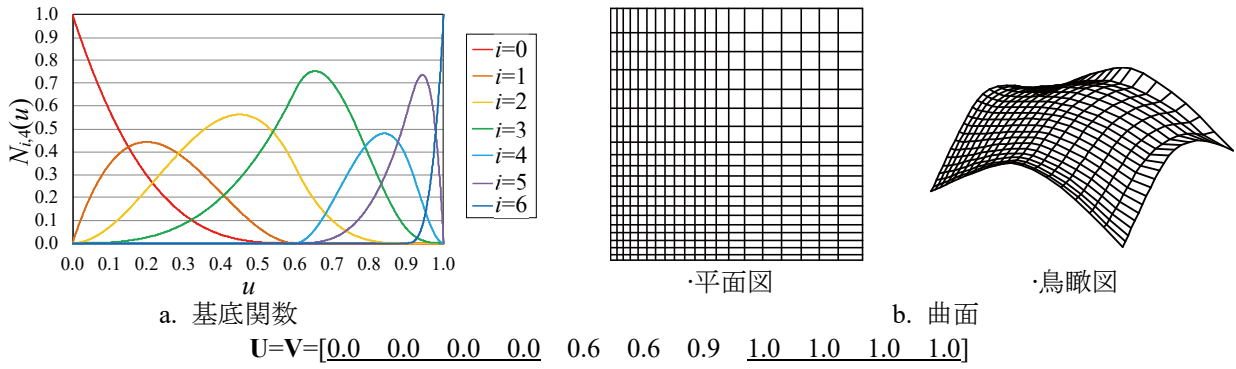


図 A.96 Case-7.33 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

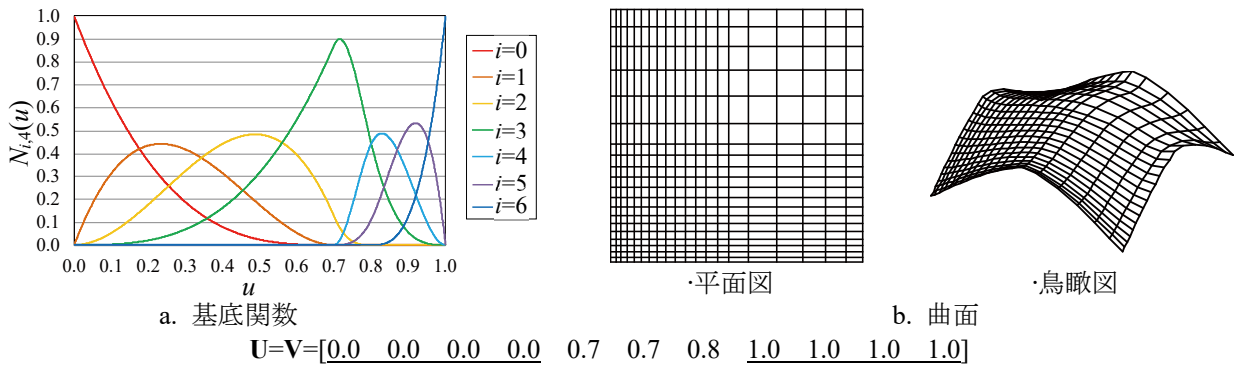


図 A.97 Case-7.34 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

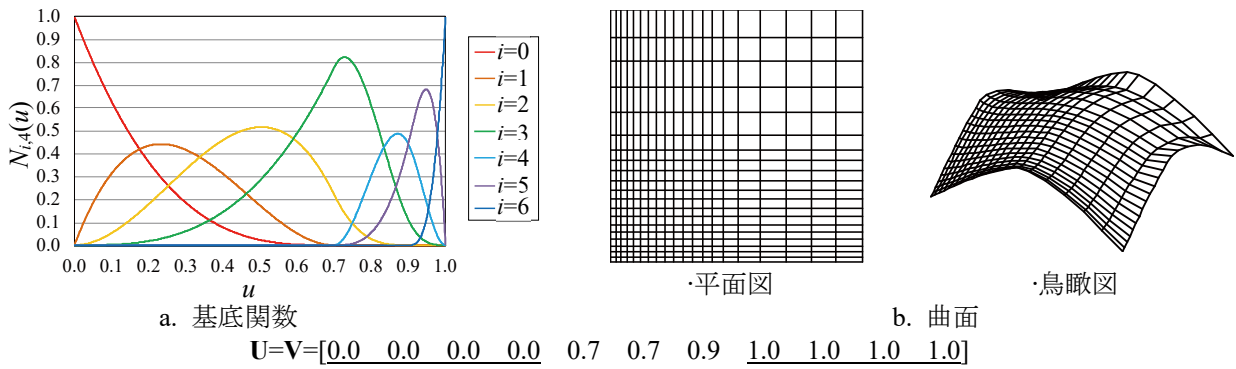


図 A.98 Case-7.35 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)

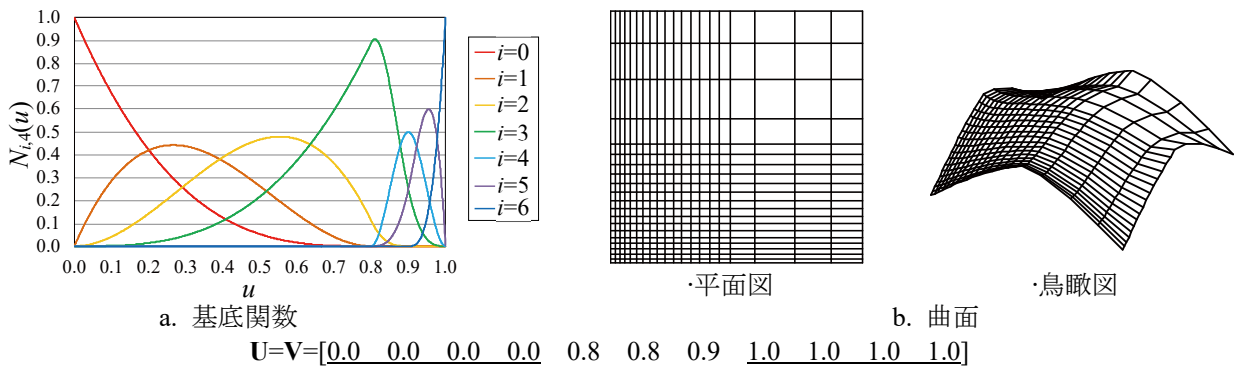
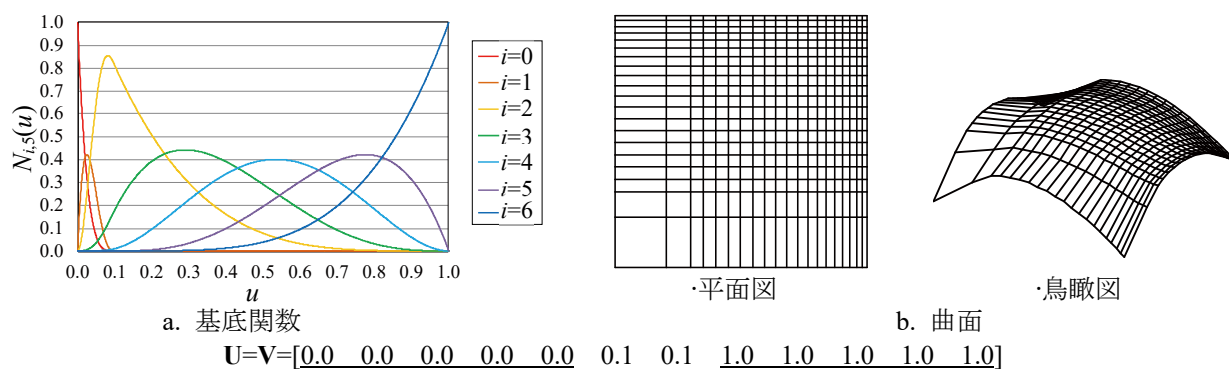
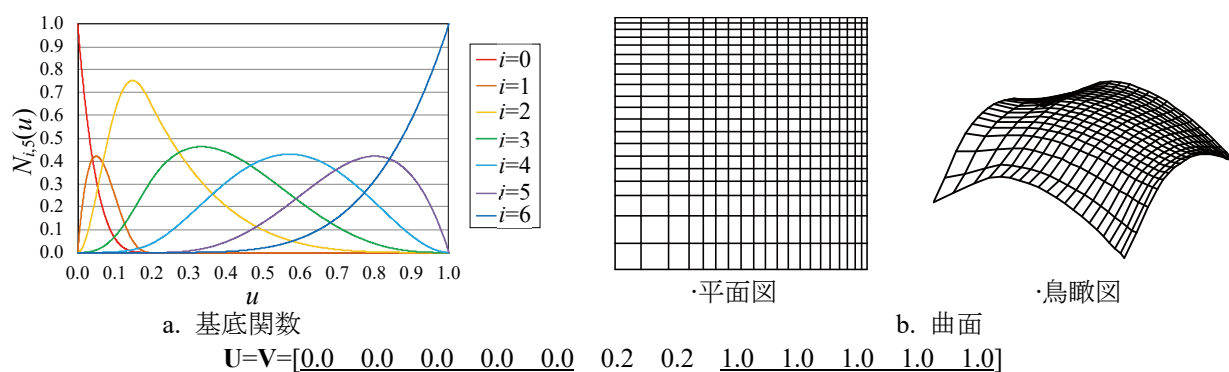
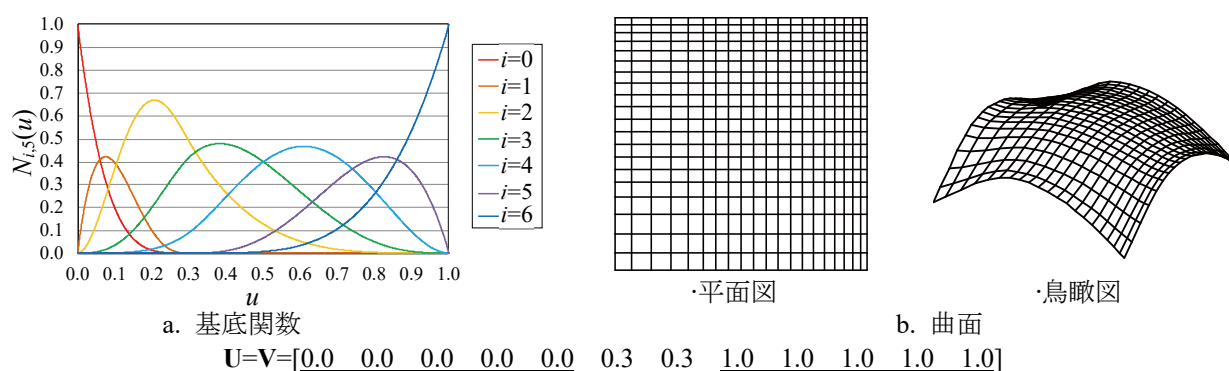
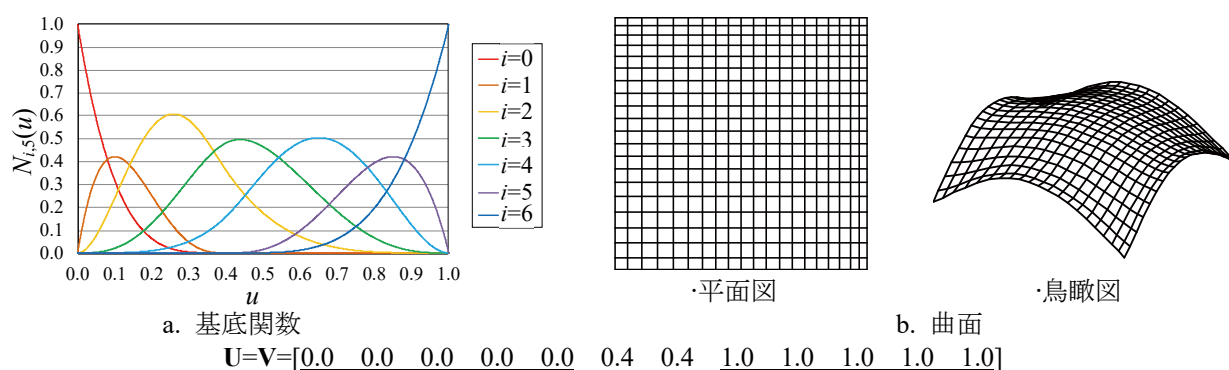


図 A.99 Case-7.36 ( $m_{uv} = 4$ , 内部ノット: 2 重)



図 A.100 Case-8.1 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)図 A.101 Case-8.2 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)図 A.102 Case-8.3 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)図 A.103 Case-8.4 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)

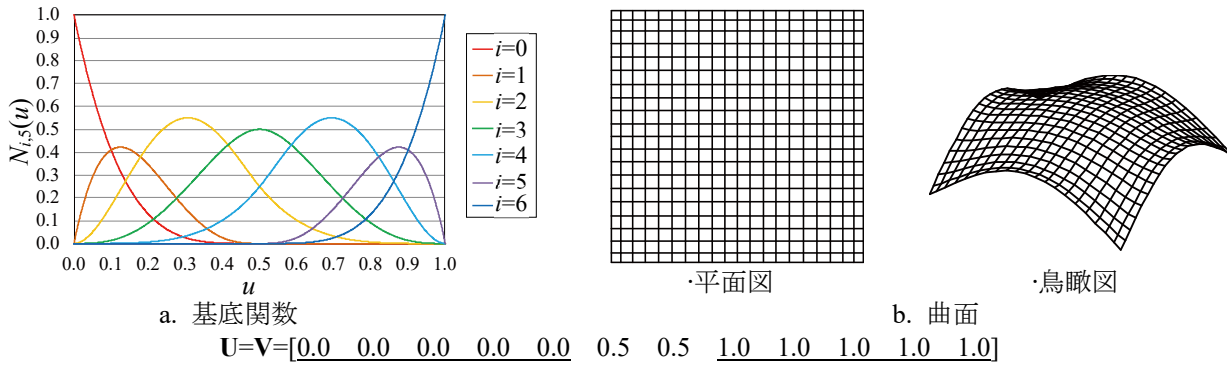


図 A.104 Case-8.5 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)

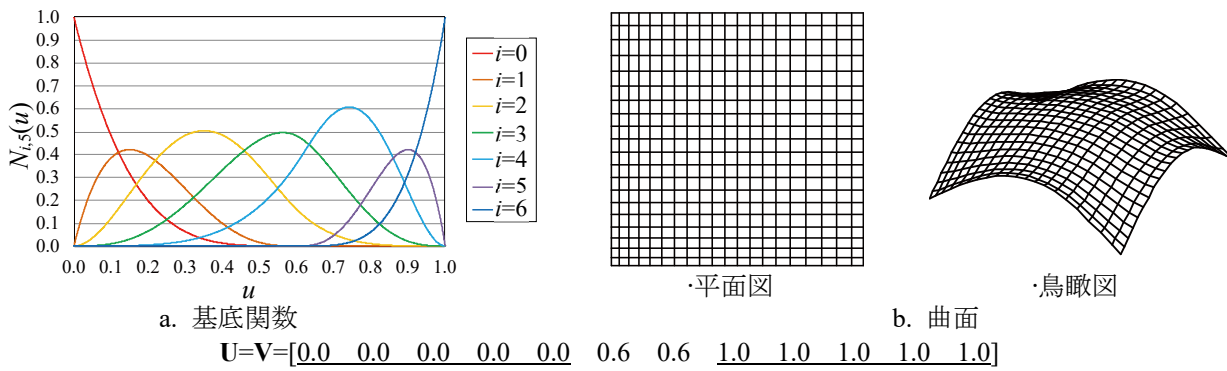


図 A.105 Case-8.6 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)

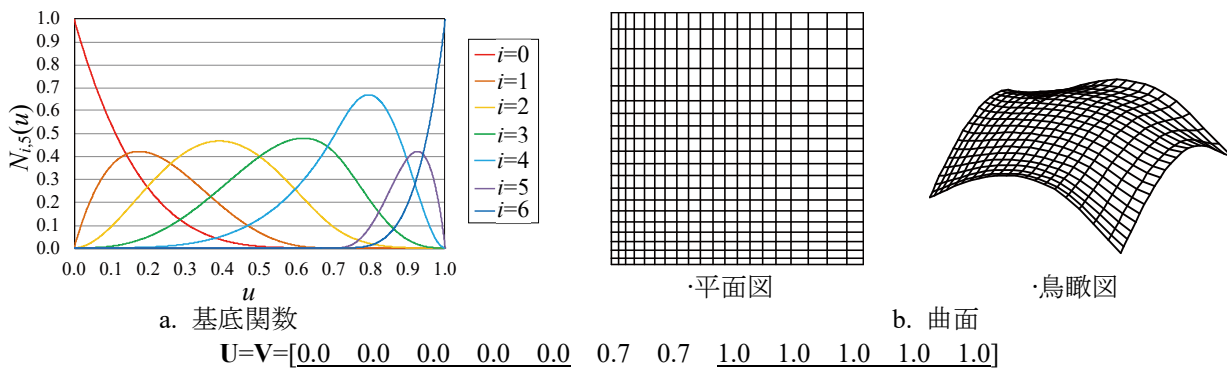


図 A.106 Case-8.7 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)

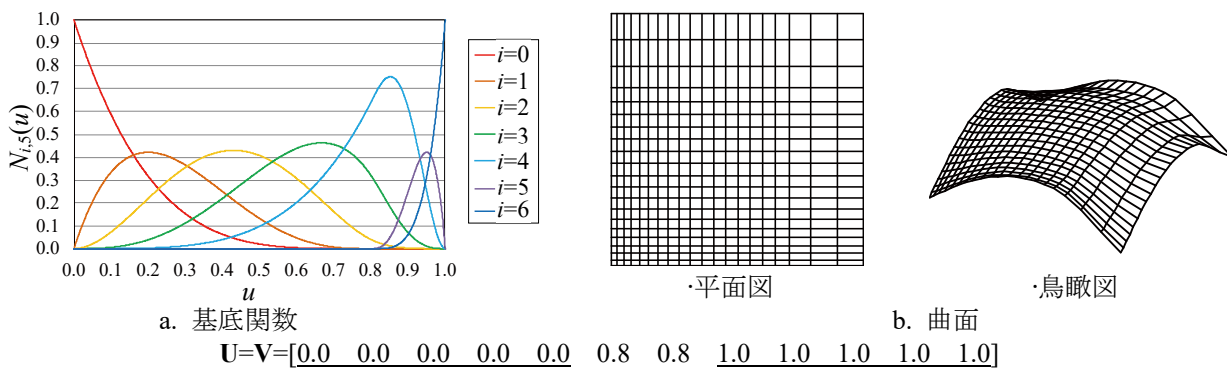
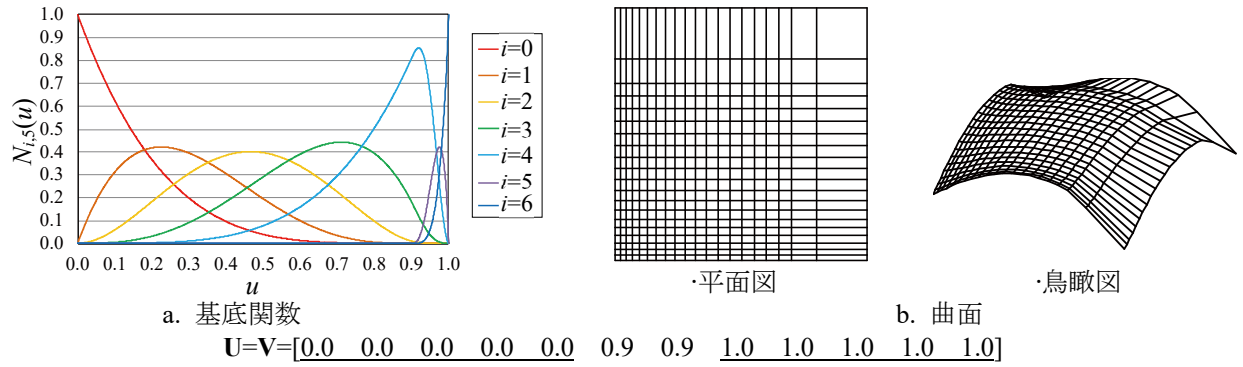


図 A.107 Case-8.8 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)



図 A.108 Case-8.9 ( $m_{uv} = 5$ , 内部ノット: 2 重)

### 考察

Case-6 (図 A.55-A.63) は、すべての結果が中央の十字の位置で尖る形状である。3 重ノットが含まれると接線連続性も失われ、形状が連続するだけの滑らかでない曲面となる。ここで示す 3 重ノットの例はその 3 つ以外にノットがないため、Case-6 はすべて同じ形状で節点配置が変化している。また、階数 4 の 3 重ノットに設定した Case-6 は多重度  $m_{uv} - 1$  であるので、4 枚のベジエ( $n_{uv} = 4$ )をつなぎ合わせたかたちとなっている。

階数  $m_{uv}$ 、多重度を  $s$  の NURBS は  $C^{m_{uv}-s-1}$  級連続が保証される。階数 4 において 2 重ノットが含まれる場合、 $C^1$  級連続となる。これはその位置において曲率連続が失われ接線連続になることを意味する。多重でないノットの位置によって、曲率連続が失われる位置が変化する。

## A.4 ノットベクトルに関する考察

以上の結果より、ノットベクトルの設定によって基底関数が著しく変化し、制御点の影響に大きな差異が生じることを確認した。ノットベクトルの内部ノットの操作は影響力が高い。そのため、その設定が大きな問題となるうえ、経験的に決める必要がある。したがって、次式で表される開一様ノットベクトルが安定した設定と判断し、本研究ではこれを採用する。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} = \mathbf{V} &= [u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{m_{uv}+n_{uv}}] \quad (u_i \leq u_{i+1}) \\
 u_i &= \begin{cases} 0.0 & (i' = 0, \dots, m_{uv} - 1) \\ \frac{i' - m_{uv} + 1}{m_{uv} - n_{uv} + 1} & (i' = m_{uv}, \dots, n_{uv} - 1) \\ 1.0 & (i' = n_{uv}, \dots, m_{uv} + n_{uv}) \end{cases} \quad (\text{A-2})
 \end{aligned}$$



付録B 遺伝的アルゴリズム系解法の基幹部

現存する生物は何百万年という時間を経過する間に、突然変異や淘汰を受けて進化を行ってきた。より優れた生物は生き残り、劣った生物は死滅する。生き残った生物は優れた生物同士による生殖の機会が与えられ次世代にその遺伝子が受け継がれる。その中には突然変異を起こすものもいる。そのような生物を含めた優越関係から、次世代には優れた遺伝子が受け継がれ、これを繰り返すことで進化が行われる。GA はこのような、優秀な遺伝子は繁栄し劣った遺伝子が消滅していくという自然淘汰説に基づく Darwin の進化論を工学的に模倣した演算システムである。

B.1 遺伝的アルゴリズム系解法の概要

ここでは、GA 系解法における基幹部の概要と用語を整理する。

GA は個体(individual)の持つ設計変数(design variable)を遺伝子列(string)で表現し、遺伝子列の操作によって解を更新していく。また、単一の個体によって探索するのではなく、個体群(population)によって探索する。個体の持つ設計変数から目的関数値(objective function value)を計算し、これを基に各個体の適応度(fitness)が与えられる。適応度の高い個体ほど繁殖(reproduction)の機会が多くなる。親の遺伝子列から子の遺伝子列を生成する操作を交叉(crossover)と呼び、進化の重要な要因である突然変異(mutation)もこの時に発生する。設計変数を遺伝子列の表現に変換することをコーディング(coding)、その逆をデコーディング(decoding)と呼ぶ。遺伝学では、遺伝子列を染色体(chromosome)と呼び、染色体上の場所を遺伝子座(locus)と呼ぶ。染色体の内部表現を遺伝子型(genotype)または GTYPE、その遺伝子列に対応する形質(設計変数)を表現型(phenotype)または PTYPE と呼ぶ。

生物と GA 系解法の比較を表 B.1 に示す。なお、下段に各々の例を示す。

表 B.1 生物と遺伝的アルゴリズムの比較

生物	遺伝的アルゴリズム
遺伝子型 (染色体の集まり) <i>TT, Tt, tt</i>	GTYPE (遺伝子コード) <i>000, 001, 010</i>
表現型 (遺伝子型の表現) <i>果実の甘さ, 病気に対する抵抗性</i>	PTYPE (GTYPE の変換結果) <i>0, 1, 2</i>
適応度 <i>生き残りやすさ</i>	適応度 <i>目的関数値</i>

## B.2 単純遺伝的アルゴリズムの計算手順

GA 系解法の基幹部として単純遺伝的アルゴリズム(standard genetic algorithm: SGA)の計算手順を以下に示す。

図 B.1 は SGA の計算フローチャートである。なお、ここでは目的関数の最小化問題を対象とする。

**Step 1 初期個体群の発生：** 乱数を用いて初期個体群(GTYPE)  $P_0=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  を発生させる。なお、本研究では GTYPE を 0 と 1 で表現した 2 進数型の gray 表現を採用する。

**Step 2 目的関数の計算：** 第  $t$  世代 ( $t \geq 0$ ) における集団内にある各個体の目的関数値  $f_k(\mathbf{x}_i)$  ( $k=1, 2, \dots, l, i=1, 2, \dots, n$ ) を算出する。

**Step 3 適応度の評価：** 目的関数に基づいて各個体に適応度を与える。ここでは目的関数の値そのものを適応度として扱う。

**Step 4 個体の選択：** 算定した適応度に基づき次世代個体を生成するための個体を選択する。適応度が高い個体は高い確率で選択され、適応度の低い個体はここで淘汰される。

**Step 5 次世代個体群の生成：** 選択された個体群に対して交叉・突然変異を行い、次世代個体群を生成する。

上述の Step2-6 を指定世代数繰り返し、最終世代のエリートを解とする。Step 4, 5 である選択・交叉・突然変異は GA オペレータと呼ばれる。この操作により適応度に基づいた淘汰が可能となる。

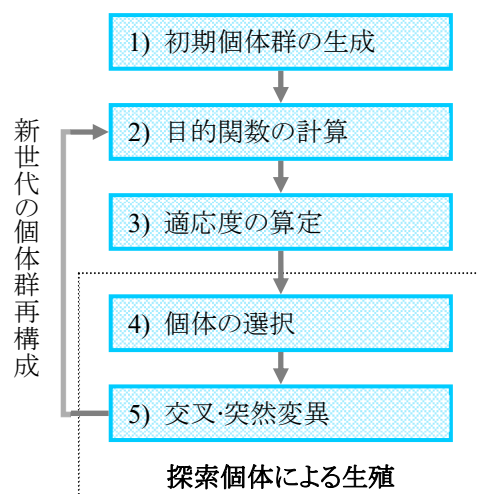


図 B.1 SGA の計算フロー

### B.3 初期個体群の生成

GA の Step 1 において、0 と 1 の二進数の乱数により各個体の遺伝子を構成し、初期個体を生成する。一つの設計変数の遺伝子長  $L$  とすると、乱数を  $L$  回発生させて各遺伝子座に数値を代入する。設計変数が複数ある場合は、それを連ねて遺伝子長を構成し、一つの個体の持つ情報とする。図 B.2 に、個体数  $N$ 、遺伝子長 8 bit、設計変数 2 個の初期個体群生成例を示す。

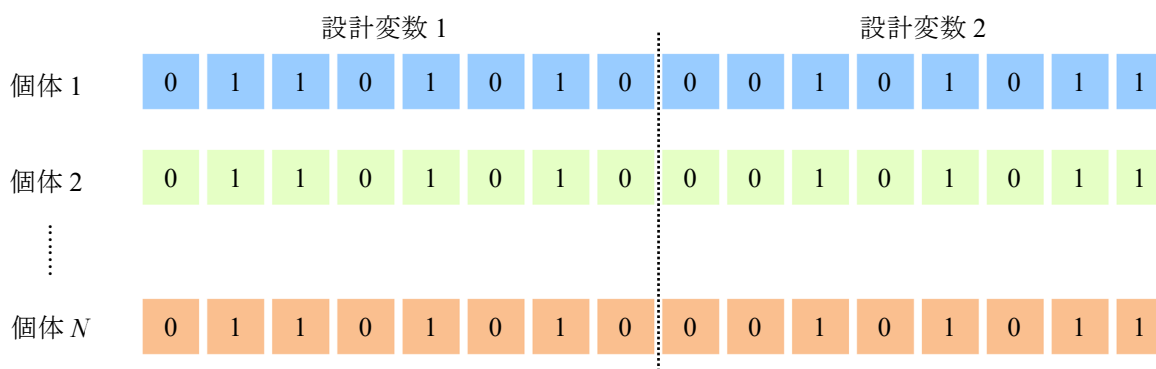


図 B.2 初期個体群

### B.4 コーディング

GA は各個体の持つ設計変数の情報を 0 と 1 の二進数で表現する。この遺伝子型である GTYPE は表現型である PTYPE にコーディングされる。その際、バイナリ表現(binary code)とグレイ表現(Gray code)があり、本研究ではグレイ表現を用いる。

#### バイナリ表現

バイナリ表現は、通常の二進法で計算し、整数値にする方法である。図 B.3 にバイナリ表現のコーディング例を示す。

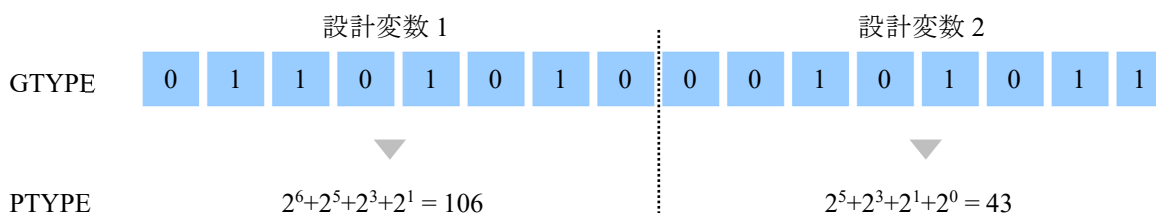


図 B.3 バイナリ表現のコーディング

## グレイ表現

グレイ表現は、以下の変換則に従って整数値にする方法である。

$n$  bit で構成された遺伝子列  $G$  において、 $i$  番目のグレイ表現の遺伝子座を  $G_i$  とすると、バイナリ表現  $B$  の遺伝子座  $B_i$  は次式の変換則が成立する。なお、この計算において  $B_{n+1} = 0$  とおく。

$$B_i = \begin{cases} 1 & \text{if } G_i \neq B_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{B-1})$$

隣り合う整数に対するグレイ表現は、ハミング距離が常に 1 となる特徴を持つ。4 bit のグレイ表現の 0 から 10 を表 B.2 に例示する。例えば 4 bit のバイナリ表現において、整数 7 は 0111、整数 8 は 1000 である。このように、隣り合う整数でもすべての遺伝子座が異なる場合があり、GA において設計変数の生成に偏りが生じる可能性があるが、グレイ表現はこの特性を持たない。そのため、本研究ではグレイ表現を採用している。

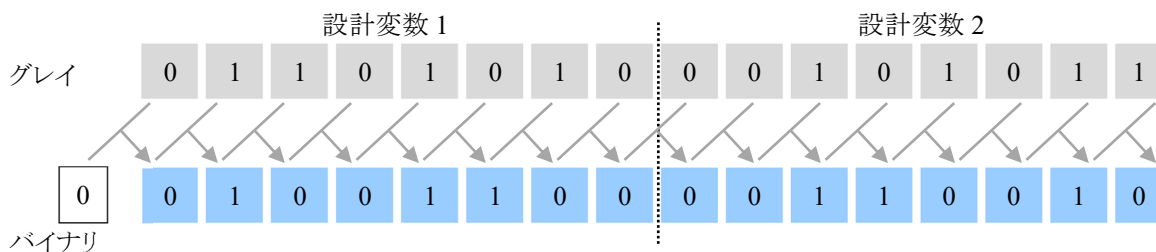


図 B.4 グレイ表現からバイナリ表現への変換

表 B.2 実数値とグレイコードの対応

実数	グレイコード
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111

## B.5 選択方式

選択された個体の情報は次世代に受け継がれる。選択時には適応度に基づいて選択される確率を個体に与える必要がある。適応度の低い個体の淘汰されやすさのことを選択圧(selection pressure)または淘汰圧という。ここでは選択方式の一例としてトーナメント選択(tournament selection)とルーレット選択(roulette selection)について説明する。

### トーナメント選択

トーナメント選択は、集団の中からランダムに  $T$  個体を選び、適応度の優越のトーナメントを行う。ここで、 $T$ : トーナメントサイズである。その結果、ランダムに選ばれた  $T$  個体のうち最も優れた個体を選択する。図 B.5 にトーナメント選択の例を示す( $T=4$ )。

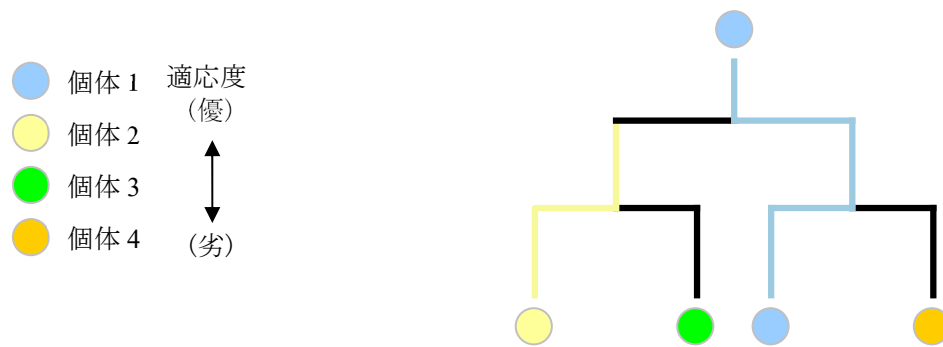


図 B.5 トーナメント選択

### ルーレット選択

ルーレット選択は、ルーレットの領域を適応度に応じた割合で決定する。ルーレットを回して、当たった領域に対応する個体を選択する。適応度が優れた個体ほど領域が広く、選択されやすくなる。しかし、個体数が多すぎると選択圧が弱くなる。図 B.6 にルーレット選択の例を示す（個体数: 4）。



図 B.6 ルーレット選択

## B.6 交叉方式

選択された個体の情報は次世代に受け継がれる。選択時には適応度に基づいて選択される確率を選択された個体は親個体として交叉を行い次世代の子個体に遺伝子情報を受け継ぐ。その際の交叉は、遺伝子中に乱数を基に交叉点決め、親個体間の遺伝子を組み換えて子個体の遺伝子を生成する操作である。ここでは代表的な交叉方式として一点交叉(one-point crossover)、二点交叉(two-point crossover)、一様交叉(uniform crossover)について示す。ここでは説明のため、遺伝子座を順番にアルファベットと数字で表現している。

### 一点交叉

交叉点を一つ設定して行う交叉方式を一点交叉という。図 B.7 に遺伝子長が 16 bit の個体による一点交叉の例を示す。

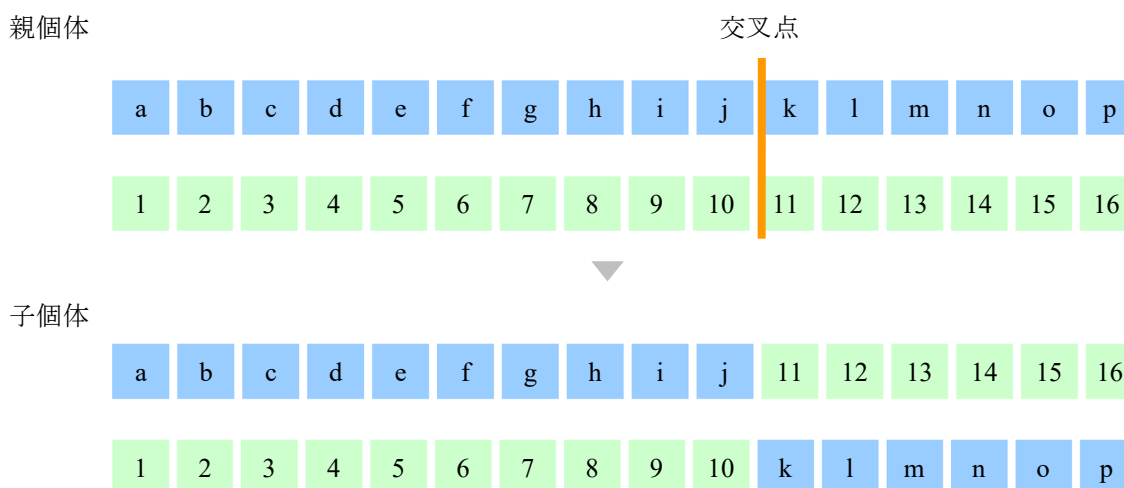


図 B.7 一点交叉



## 二点交叉

交叉点を二つ設定して行う交叉方式を二点交叉という。図 B.8 に遺伝子長が  $16bit$  の個体による二点交叉の例を示す。

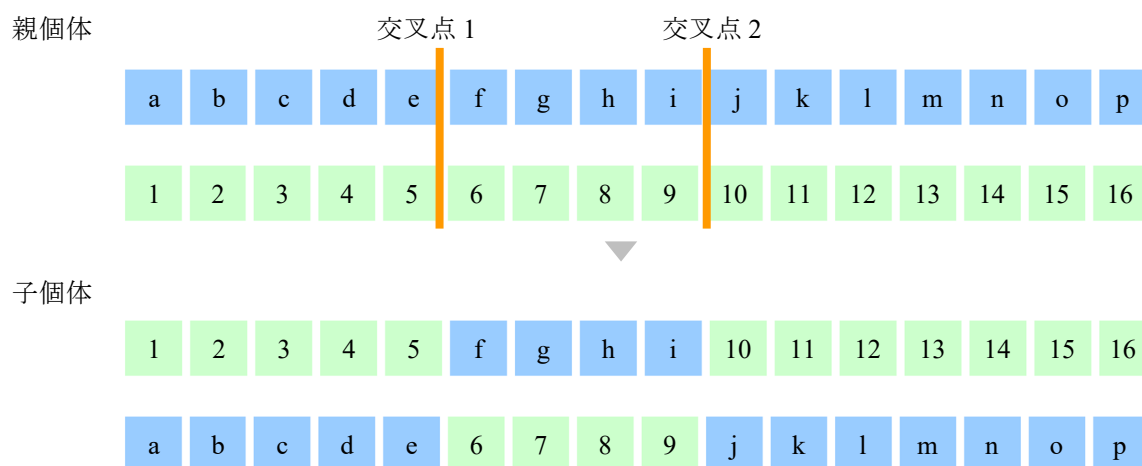


図 B.8 二点交叉

## 一様交叉

ランダムに発生させた 0 と 1 のマスクを用意し、どちらの親個体の遺伝子の子個体が引き継ぐかを決定する方式である。図 B.9 に遺伝子長が  $16bit$  の個体による一様交叉の例を示す。

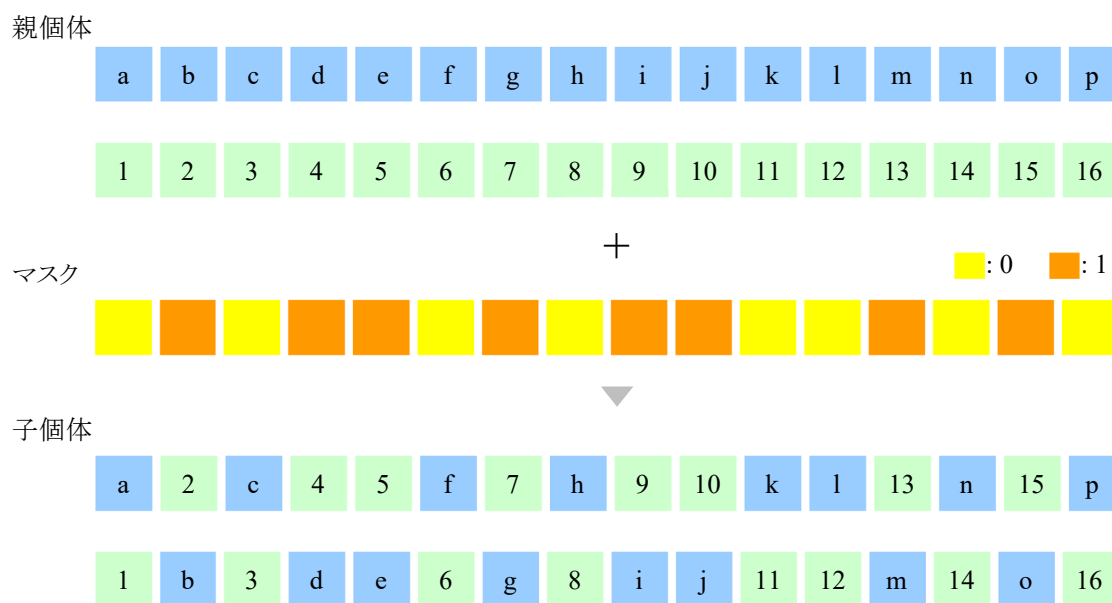


図 B.9 一様交叉

## B.7 突然変異

交叉により生成した個体の遺伝子を一定の確率(突然変異率: **mutation rate**)で変化させる操作である。交叉により生成される子個体は親個体の遺伝子に依存するため探索の多様性に限界が生じる。そのため、突然変異により解の多様化を図る。一般に突然変異率は遺伝子長の逆数を採用することが多い。これは、1 個体が持つ遺伝子中の 1 つの遺伝子座に突然変異が起こる確率である。図 B.10 に 4 個体の突然変異の例を示す。突然変異率に従って突然変異させる遺伝子座を決定し、その遺伝子が 0 なら 1 に、1 なら 0 に反転させる。この操作はビット突然変異と呼ばれる。



図 B.10 突然変異

## B.8 平均情報エントロピ

探索個体群の収束判定に利用される平均情報エントロピによる多様度を示す[71]。

個体集団が  $L$  bit の遺伝子を持つ  $N$  個の個体から構成され、各個体で共通する遺伝子座の記号 (対立遺伝子) が  $S$  個存在するとき、平均情報エントロピ  $D_g$  は次式で定義される。

$$D_g = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L h_j \quad (\text{B-2})$$

$$h_j = - \sum_{i=1}^S p_{i,j} \cdot \log p_{i,j} \quad (\text{B-3})$$

$$p_{i,j} = \frac{m_{i,j}}{N} \quad (\text{B-4})$$

ここで、 $h_j$ : 個体の遺伝子座  $j$  の情報エントロピ,  $p_{i,j}$ :  $i$  番目の記号が遺伝子座  $j$  に出現する確率,  $m_{i,j}$ : 遺伝子座  $j$  に出現した  $i$  番目の記号の総数である。

この平均情報エントロピを用いて個体集団の多様度を算出する。2 進数型の場合  $0.0 \leq D_g \leq 1.0$  となり、 $D_g$  が大きいほど遺伝子の多様性が高い。 $D_g = 0.0$  のとき、すべての個体が同じ遺伝子であることを意味し、収束判定に用いることがある。また、表現型で算出する場合もある。図 B.11 は情報エントロピの計算例を示す。

個体 1	0	1	1	0	1	0	0	0
個体 2	1	1	0	1	0	0	1	0
個体 3	0	1	0	1	1	0	1	1
個体 4	0	0	1	1	0	1	0	1
個体 5	1	0	1	0	1	0	0	1

$i=1$  の記号を 0,  $i=2$  の記号を 1 とする。

$$p_{1,4} = \frac{2}{5}, \quad p_{2,4} = \frac{3}{5} \text{ より、} h_4 = - \sum_{i=1}^2 p_{i,4} \cdot \log p_{i,4} = 0.673$$

図 B.11 平均情報エントロピ  $D_g$



## 付録C SPEA2 (strength Pareto evolutionary algorithm 2)

SPEA2 は 1999 年に提案された比較的新しい、多目的最適化問題において探索性能に優れたアルゴリズムである。適応度算定に強度の概念を導入し、目的関数空間でのニッチ操作によりパレート最適フロントの多様性を維持する。

### C.1 SPEA2 の計算手順

SPEA2 の計算手順を以下に示す。図 C.1 は SPEA2 の計算フローである。なお、ここでは目的関数の最小化問題を対象とする。

Step 1 初期個体群の発生：乱数を用いて初期個体群  $\mathbf{P}_0 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  を発生させる。空のアーカイブ個体群  $\bar{\mathbf{P}}_0$  を用意する。

Step 2 目的関数の計算：第  $t$  世代 ( $t \geq 0$ ) における集団内にある各個体の目的関数値  $f_k(\mathbf{x}_i)$  ( $k=1, 2, \dots, l, i=1, 2, \dots, n$ ) を算出する。

Step 3 適応度の評価：目的関数に基づいて個体強度  $s$  を次式で算定する。

$$s(i) = \{j | f_k(\mathbf{x}_i) \leq f_k(\mathbf{x}_j), k = 1, 2, \dots\} \quad (\text{C-1})$$

各個体の適応度  $F$  は集団に支配される個体の強度  $s$  を用いて次式で与えられる。

$$F(i) = \sum_{f_k(\mathbf{x}_i) > f_k(\mathbf{x}_j)} s(j) \quad (\text{C-2})$$

適応度の計算概念は図 4.8 (4.3.4 優良解選択率) に示す。なお、SPEA2 の適応度の評価において最も優れた個体は  $F(i) = 0$  となる。

Step 4 アーカイブ個体群の保存：適応度  $F(i) = 0$  の個体をアーカイブ個体群  $\bar{\mathbf{P}}_t$  とする。アーカイブ内の個体数が設定数を超えたとき、後述する端切り法を用いて個体数を設定数に調節する。

Step 5 次世代個体群の生成：適応度に基づきアーカイブ個体群  $\bar{\mathbf{P}}_t$  から GA オペレータにより次世代個体群  $\mathbf{P}_{t+1}$  を生成する。

上述の Step2-6 を指定世代数繰り返し、最終世代におけるアーカイブ個体群を解とする。

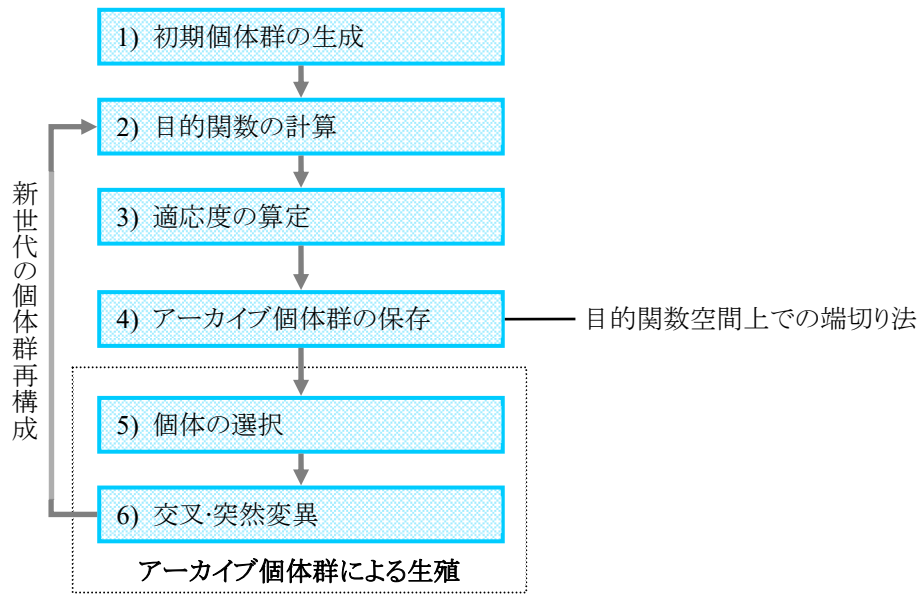


図 C.1 SPEA2 の計算フロー

## C.2 端切り法

アーカイブ個体群内の個体数が設定数を超えたとき、目的関数空間上の多様性を考慮した端切り法を用いて個体数の調節を行う。以下にその計算手順を説明する。

**Step 1 個体間距離の計算：**アーカイブ個体群  $\bar{\mathbf{P}}_t$  内の全個体において、目的関数空間上の個体間距離  $d(i, j)$  を算出する。個体間距離  $d(i, j)$  は無次元ユークリッド距離を用いて次式で算出する。

$$d(i, j) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{f_k(x_i) - f_k(x_j)}{f_{k \max} - f_{k \min}} \right)^2 \quad (\text{C-3})$$

**Step 2 個体の選択：**最小の  $d(i, j)$  を持つ 2 個体  $i, j$  を選択する。

**Step 3 個体の削除：** $i, j$  の持つそれぞれの個体間距離のうち、 $d(i, j)$  の次に最小の  $d(i, k)$ ,  $d(j, l)$  を比較し、小さい方の個体間距離を持つ個体を削除する。

アーカイブ個体群内の個体数が設定数になるまで上述の 1)-3) を繰り返す。

## 付録D 2 変数関数を用いた数値計算例

ISGA の計算特性を、2 変数関数最大化のベンチマーク問題による数値計算例より明らかにする。

### D.1 2 変数関数の解空間

数値計算例に用いる 2 変数関数は下式とし、各々の関数形状を図 D.1-4 に示す。関数形状の色は MOP における組み合わせを表す。

$$\text{曲面関数: } f_1(x, y) = -\{x(x-20) + y(y-20)\} \quad (0.0 \leq x, y \leq 20.0) \quad (\text{D-1})$$

$$\text{sin-cos 関数: } f_2(x, y) = x + y + 4(\sin x + \cos y) + 1 \quad (0.0 \leq x, y \leq 20.0) \quad (\text{D-2})$$

$$\text{平面関数: } f_3(x, y) = 100 + 2x + 2y \quad (0.0 \leq x, y \leq 20.0) \quad (\text{D-3})$$

$$f_4(x, y) = -20 - x - y \quad (0.0 \leq x, y \leq 20.0) \quad (\text{D-4})$$

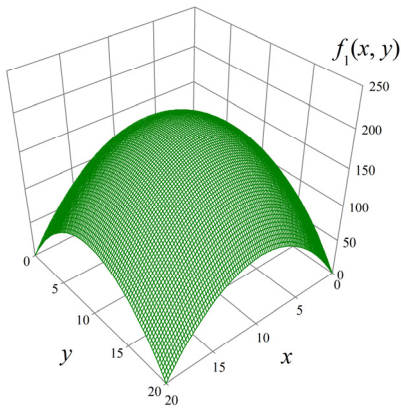


図 D.1 曲面関数  $f_1$

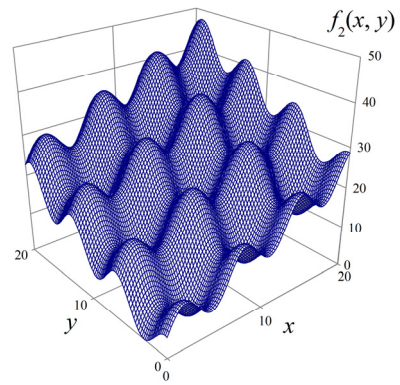


図 D.2 sin-cos 関数  $f_2$

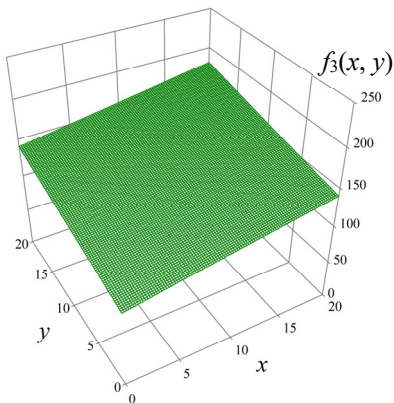


図 D.3 平面関数  $f_3$

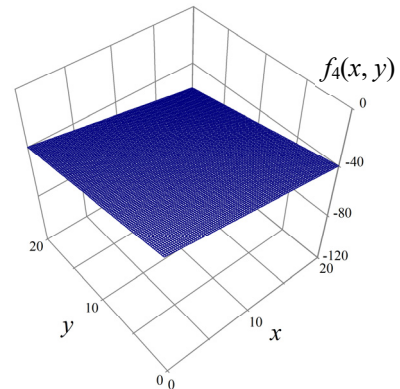


図 D.4 平面関数  $f_4$

SOP と MOP に共通し、各解法におけるパラメータを表 D.1 に示す。なお、ISGA パラメータのうち、上位個体選択率は  $H=0.01, 0.1, 0.2, 0.3$ 、グループ数は SOP に対して  $r=1, 10, 25, 50, 75, 100$ 、MOP に対して  $r=1, 10, 50, 100$  と変化させた結果を示す。

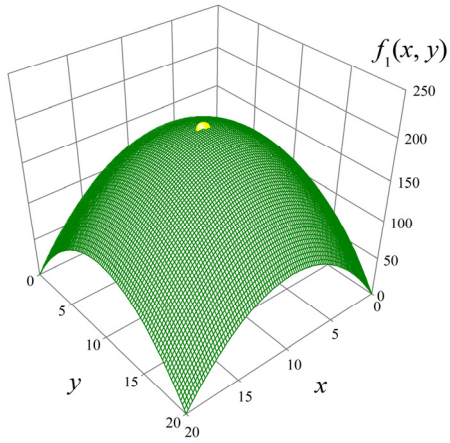
表 D.1 パラメータ (ISGA, SGA, SPEA2)

世代数	200
個体数	200
世代交代率	1.0
交叉率	1.0
突然変異率	0.01
交叉方式	2 点交叉
選択方式	トーナメント
コーディング	Gray code
記憶細胞数 (ISGA)	100

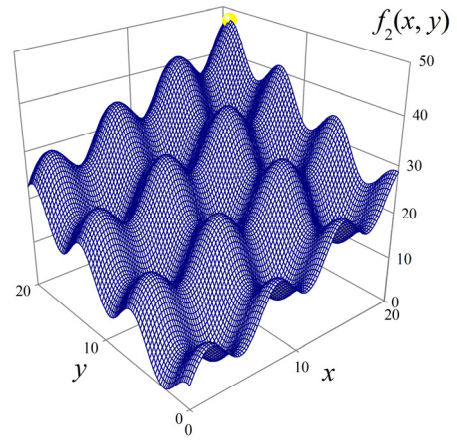


## D.2 単一目的最適化問題(SOP)

関数 $f_1, f_2$ の最大化を目標とした単一目的最適化問題に適用する。ここでは、SGA との比較を示す。図 D.5 に SGA による数値結果の最終世代における探索個体群上位 100 個体を示す。



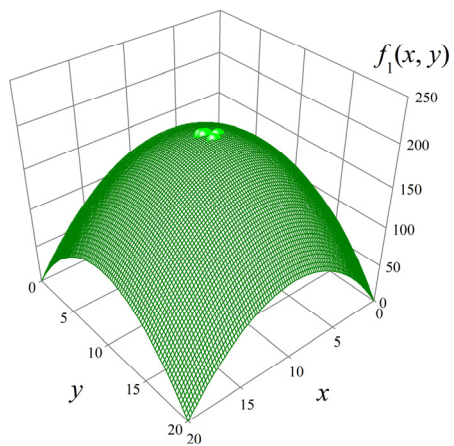
a. 曲面関数 $f_1$



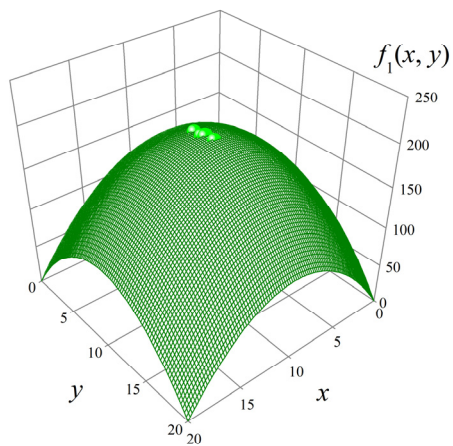
b. sin-cos 関数 $f_2$

図 D.5 SGA による数値結果

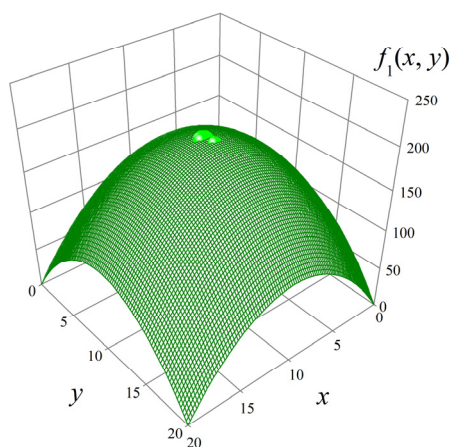
ISGA による単純曲面関数 $f_1$ の数値結果を図 D.6-9 に、sin-cos 関数 $f_2$ の数値結果を図 D.10-13 に示す。



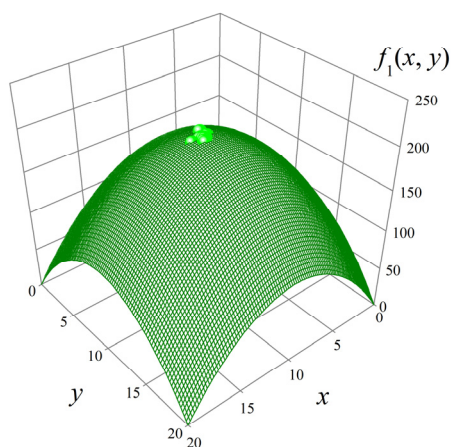
a.  $r=1, H=0.01$



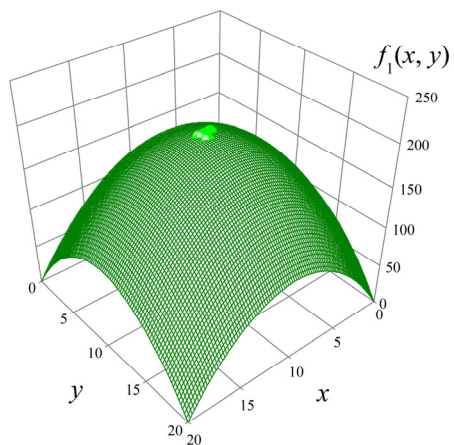
b.  $r=10, H=0.01$



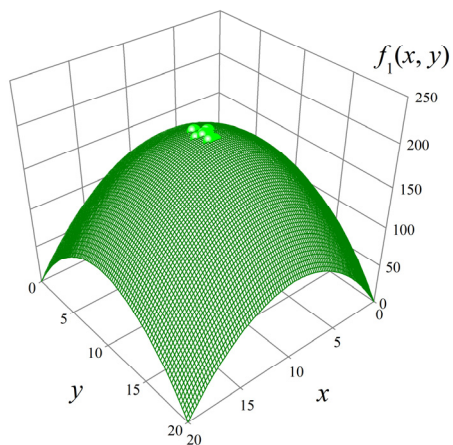
c.  $r=25, H=0.01$



d.  $r=50, H=0.01$

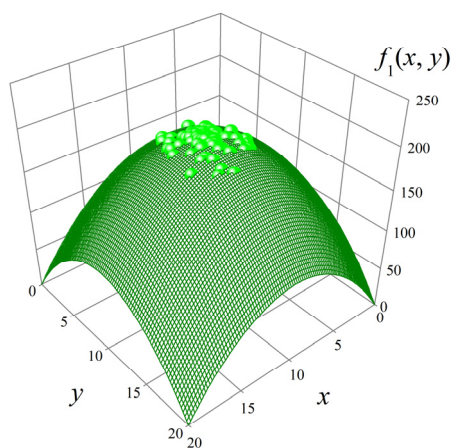


e.  $r=75, H=0.01$

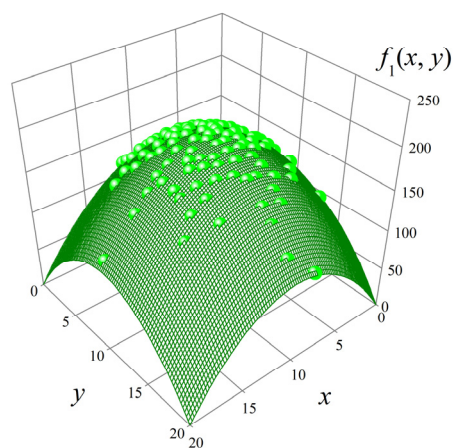


f.  $r=100, H=0.01$

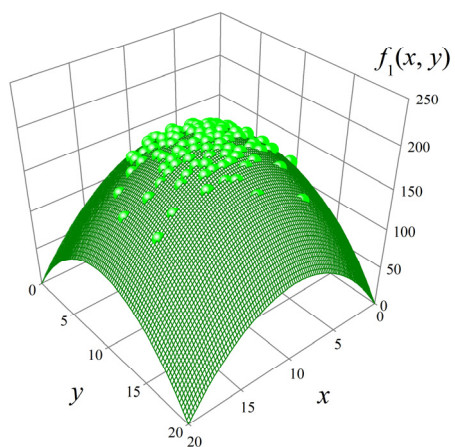
図 D.6 ISGA による数値結果( $H=0.01$ ):  $f_1$



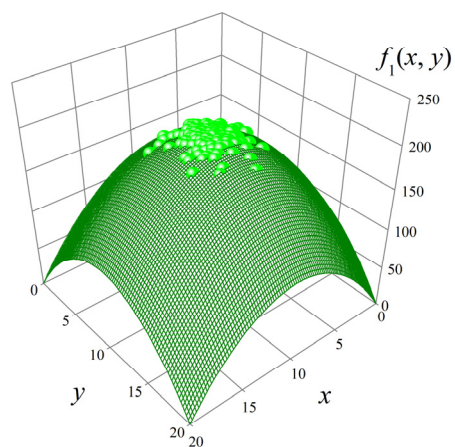
a.  $r=1, H=0.1$



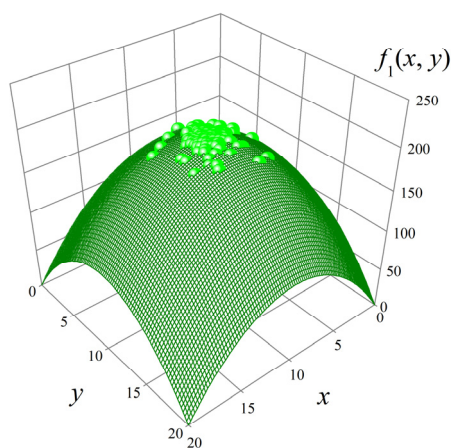
b.  $r=10, H=0.1$



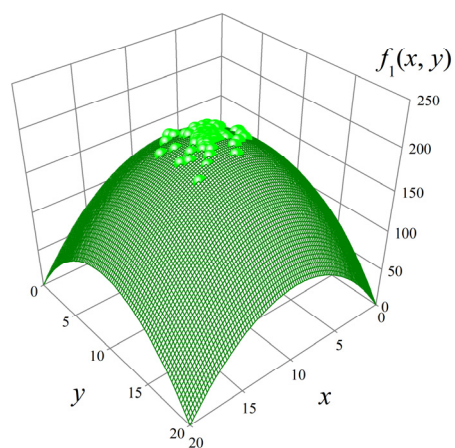
c.  $r=25, H=0.1$



d.  $r=50, H=0.1$

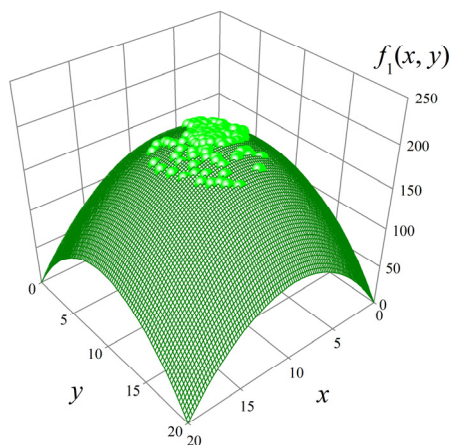


e.  $r=75, H=0.1$

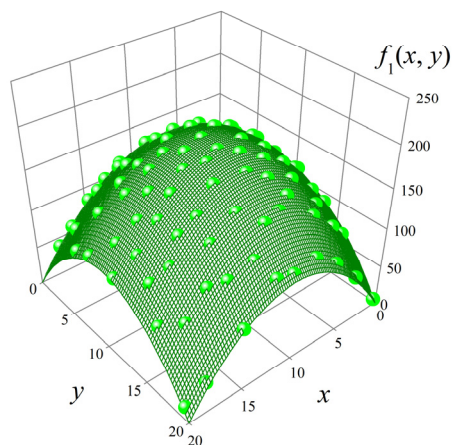


f.  $r=100, H=0.1$

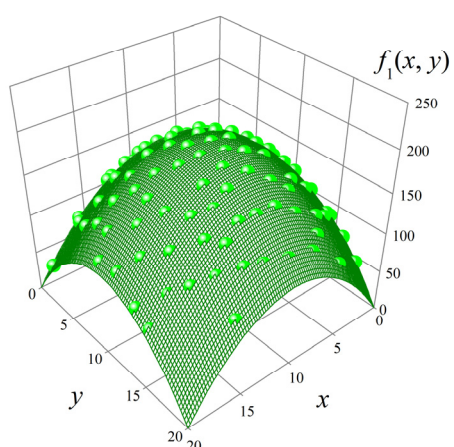
図 D.7 ISGA による数値結果( $H=0.1$ ):  $f_1$



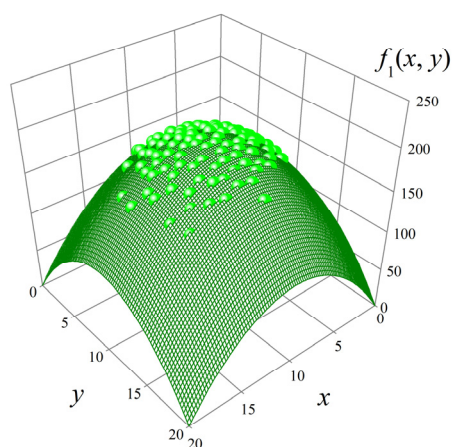
a.  $r=1, H=0.2$



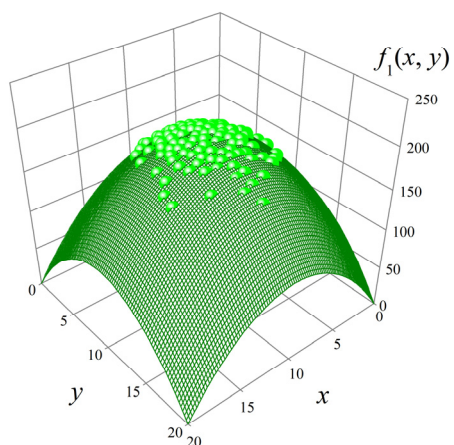
b.  $r=10, H=0.2$



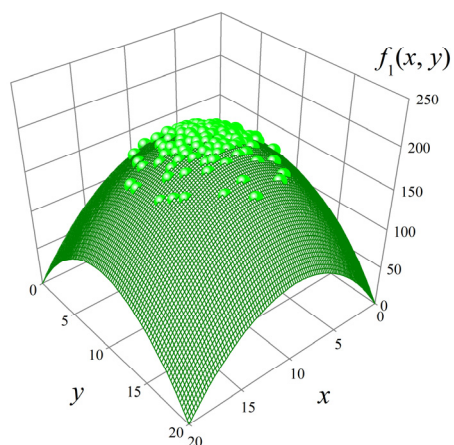
c.  $r=25, H=0.2$



d.  $r=50, H=0.2$



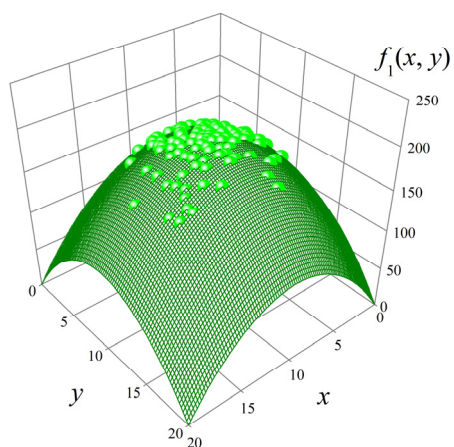
e.  $r=75, H=0.2$



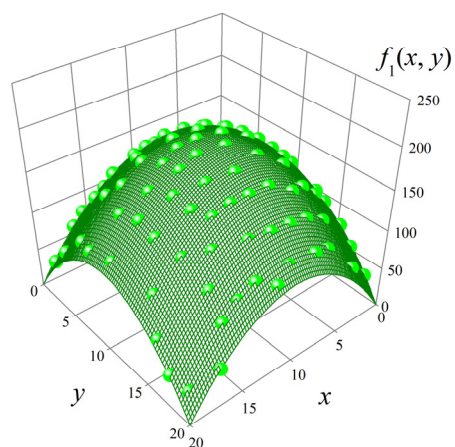
f.  $r=100, H=0.2$

図 D.8 ISGA による数値結果( $H=0.2$ ):  $f_1$

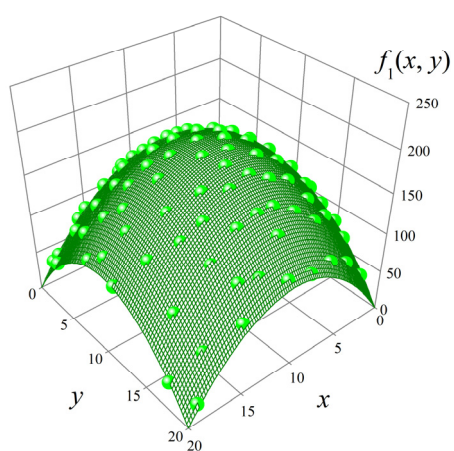




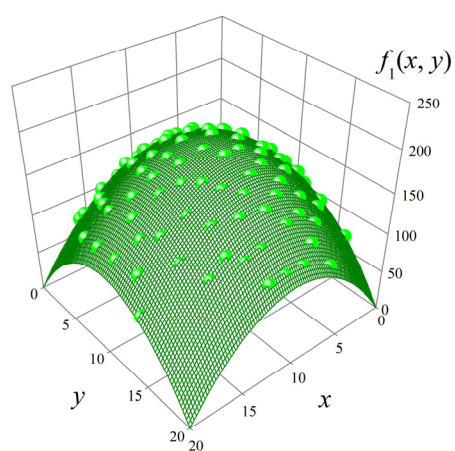
a.  $r=1, H=0.3$



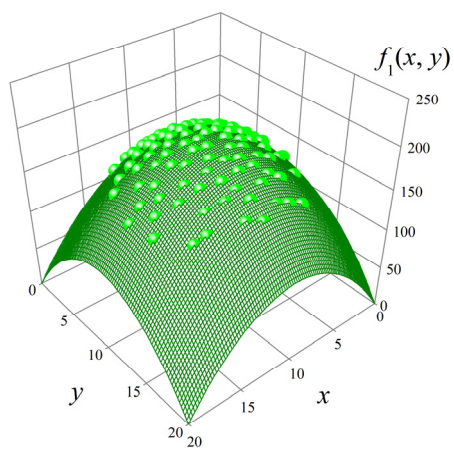
b.  $r=10, H=0.3$



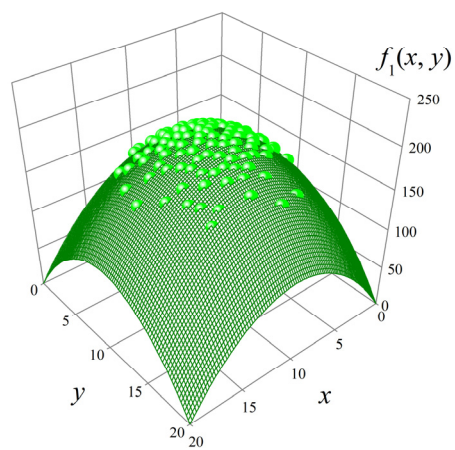
c.  $r=25, H=0.3$



d.  $r=50, H=0.3$

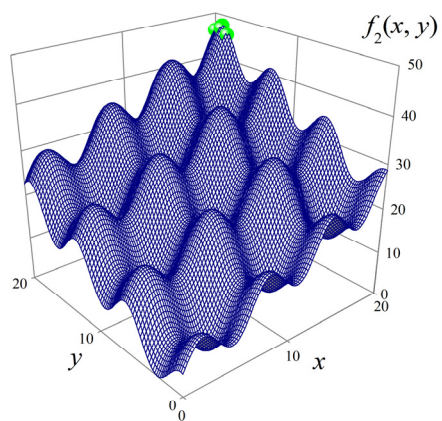


e.  $r=75, H=0.3$

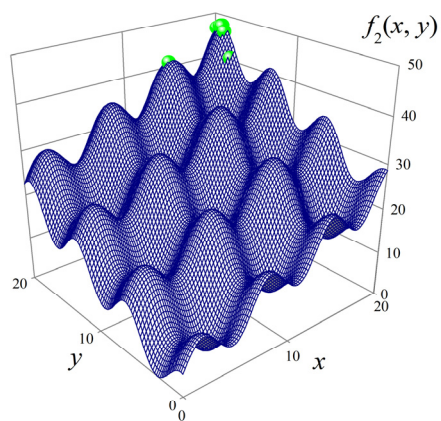


f.  $r=100, H=0.3$

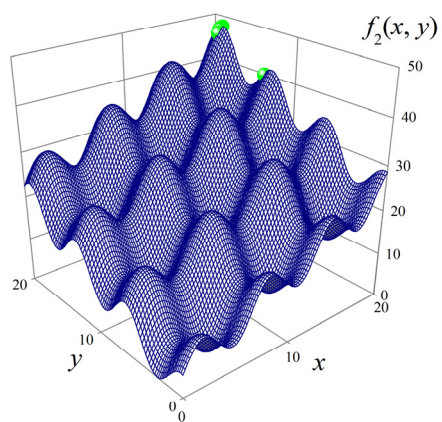
図 D.9 ISGA による数値結果( $H=0.3$ ):  $f_1$



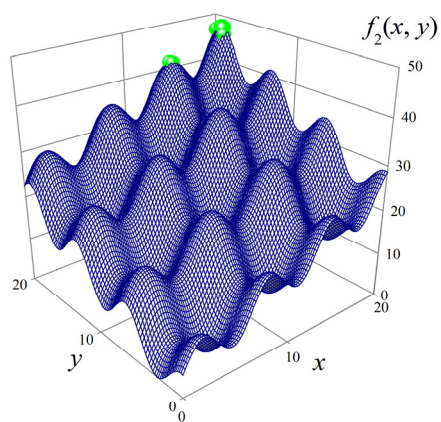
a.  $r=1, H=0.01$



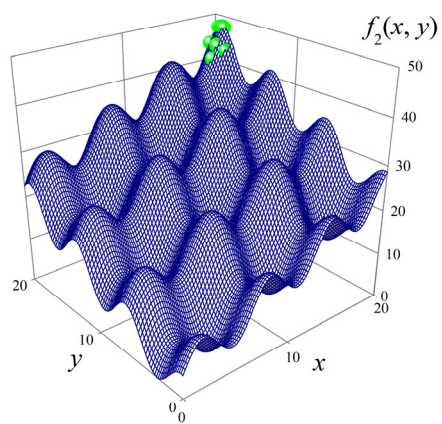
b.  $r=10, H=0.01$



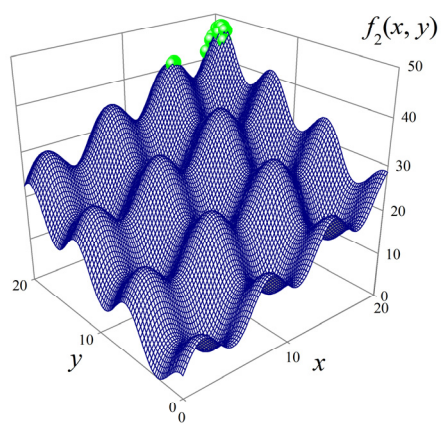
c.  $r=25, H=0.01$



d.  $r=50, H=0.01$



e.  $r=75, H=0.01$



f.  $r=100, H=0.01$

図 D.10 ISGA による数値結果( $H=0.01$ ):  $f_2$

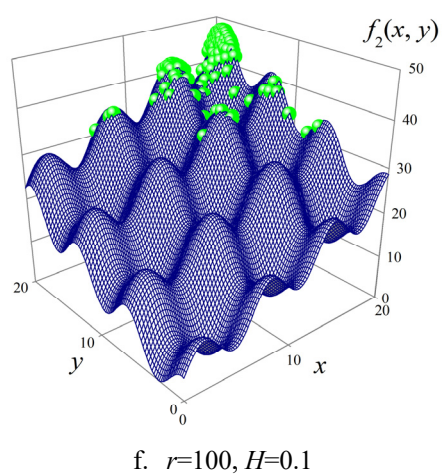
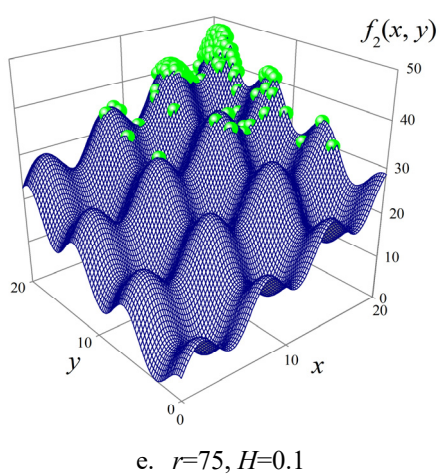
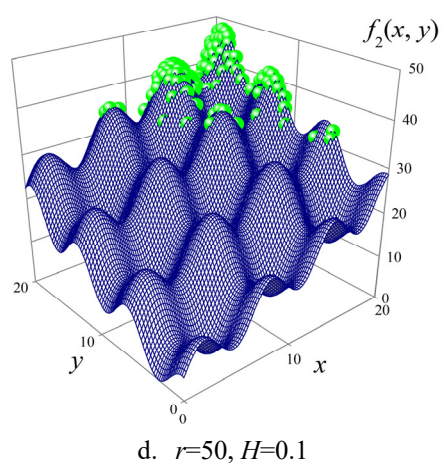
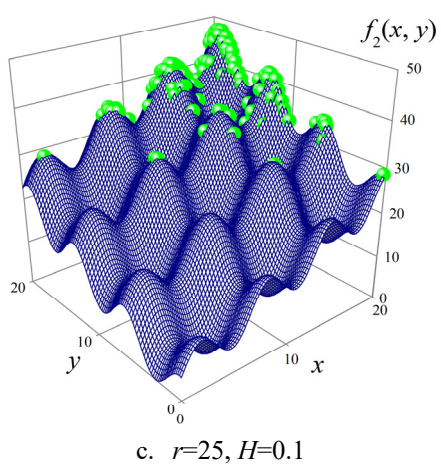
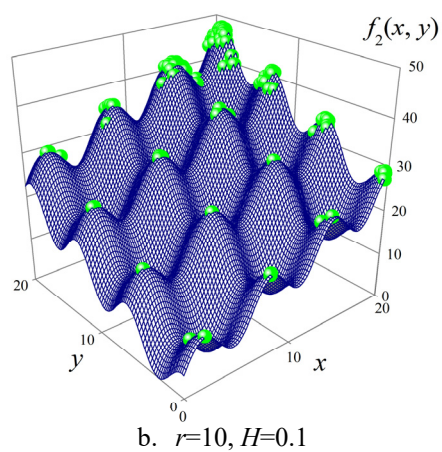
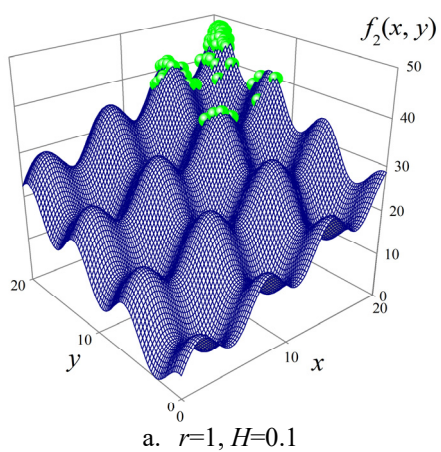
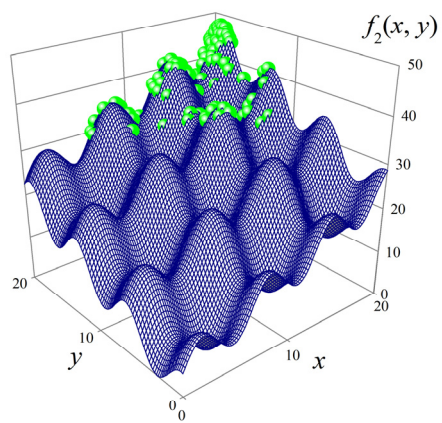
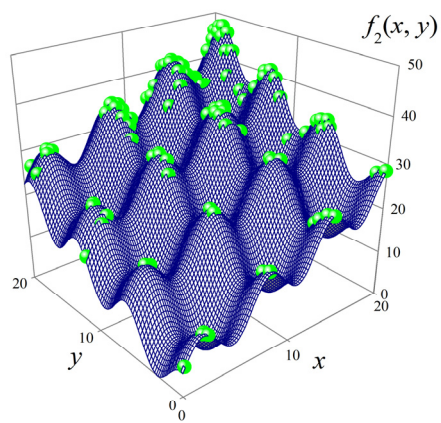


図 D.11 ISGA による数値結果( $H=0.1$ ):  $f_2$

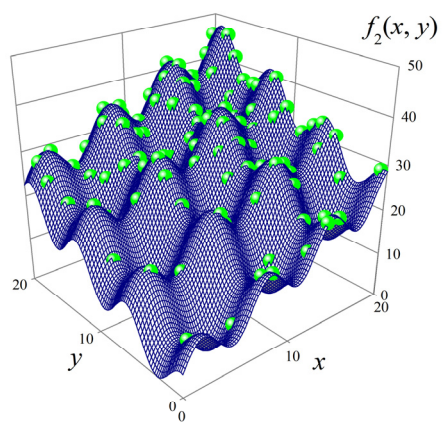




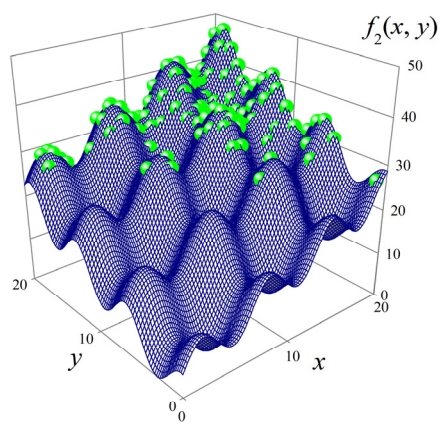
a.  $r=1, H=0.2$



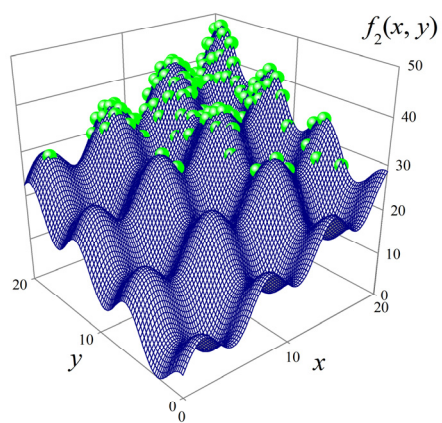
b.  $r=10, H=0.2$



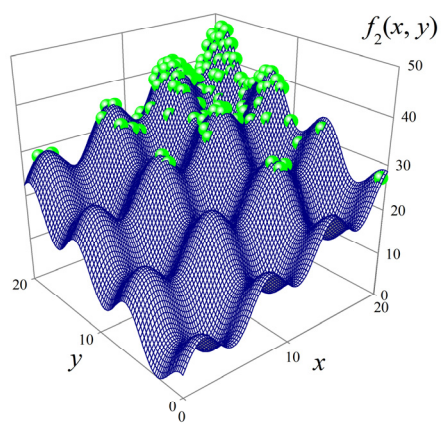
c.  $r=25, H=0.2$



d.  $r=50, H=0.2$



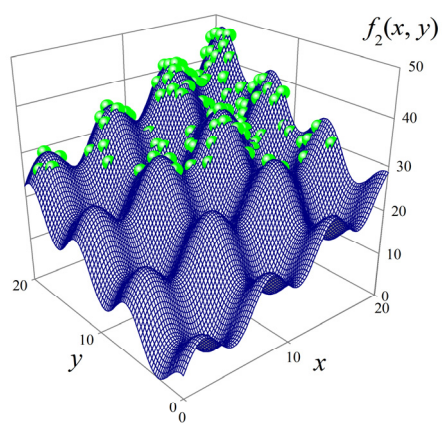
e.  $r=75, H=0.2$



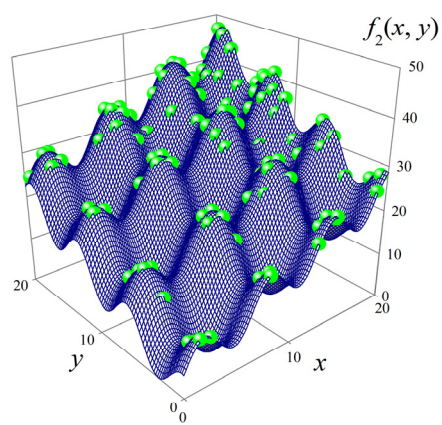
f.  $r=100, H=0.2$

図 D.12 ISGA による数値結果( $H=0.2$ ):  $f_2$

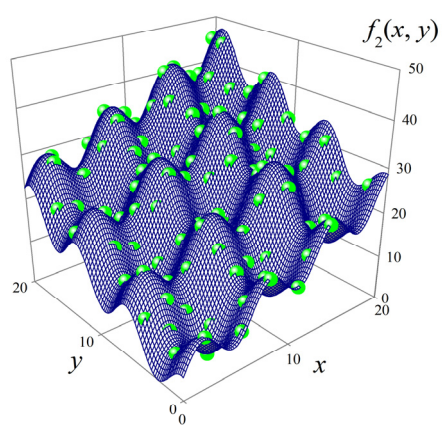




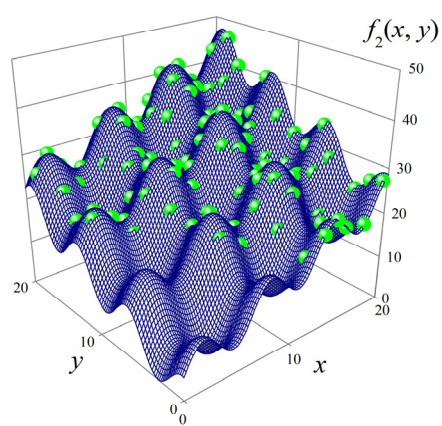
a.  $r=1, H=0.3$



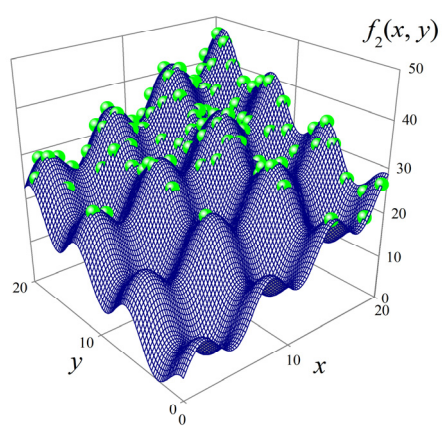
b.  $r=10, H=0.3$



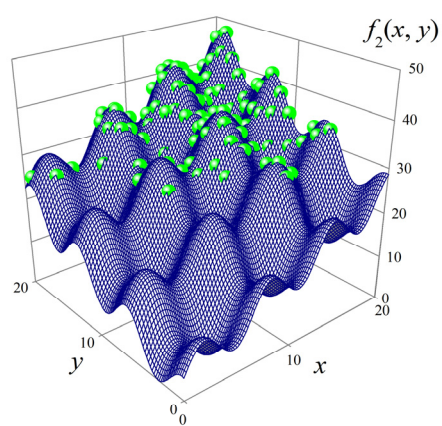
c.  $r=25, H=0.3$



d.  $r=50, H=0.3$



e.  $r=75, H=0.3$



f.  $r=100, H=0.3$

図 D.13 ISGA による数値結果( $H=0.3$ ):  $f_2$

### D.3 多目的最適化問題(MOP)

関数  $f_1(x, y)$  と  $f_3(x, y)$ 、および  $f_2(x, y)$  と  $f_4(x, y)$  を各々同時に最大化する多目的最適化問題の結果を示す。ここでは、SPEA2 との比較を示す。図 D.14, 15 に SPEA2 による数値結果を示す。

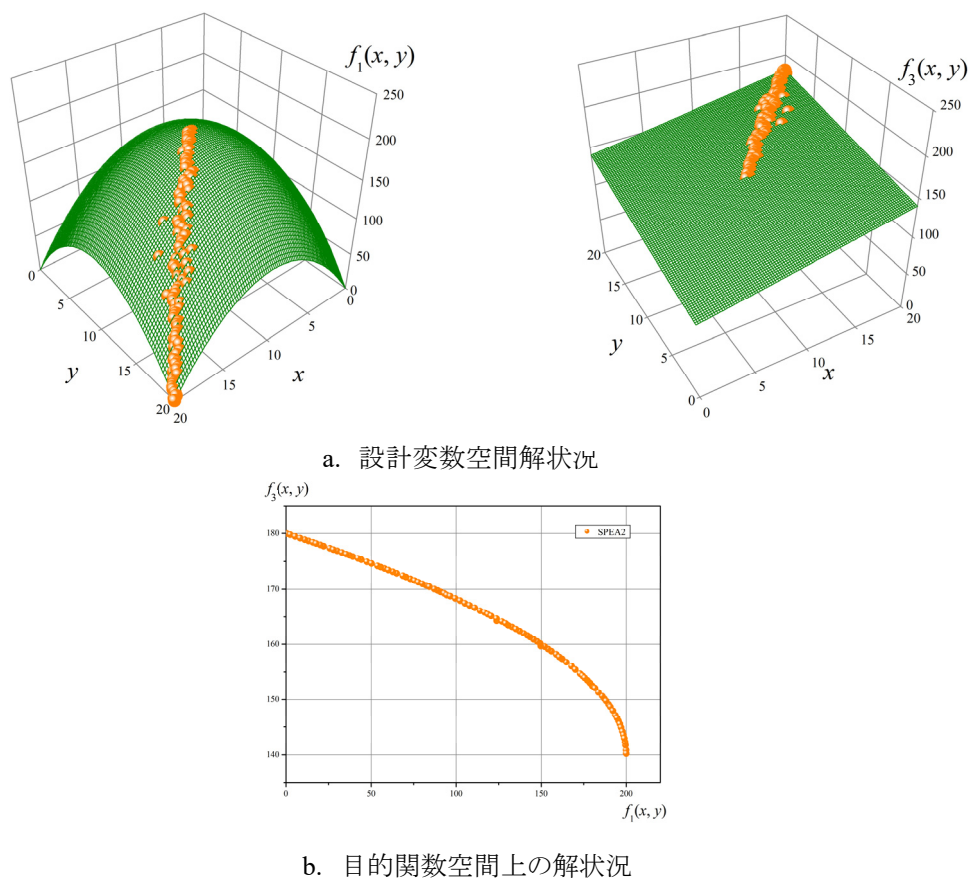
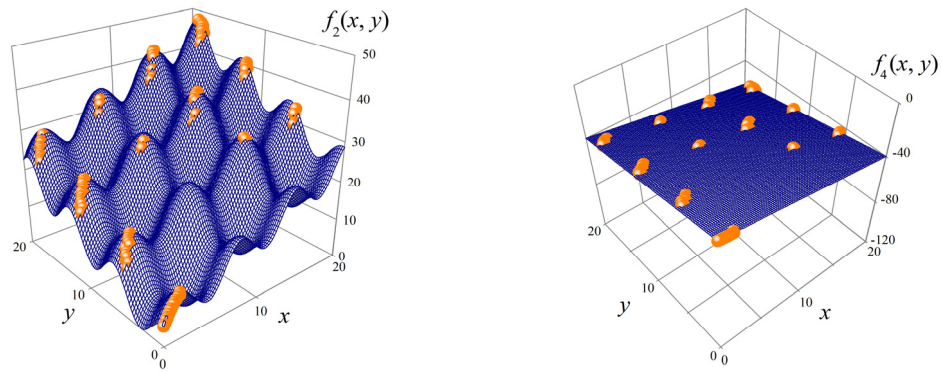
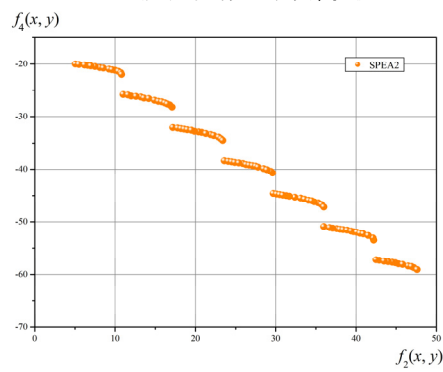


図 D.14 SPEA2 による数値結果:  $f_1, f_3$



a. 設計変数空間解状況



b. 目的関数空間上の解状況

図 D.15 SPEA2 による数値結果:  $f_2, f_4$

ISGA による  $f_1$  と  $f_3$  の MOP の結果を図 D.16-19 に、 $f_2$  と  $f_4$  の MOP の結果を図 D.20-23 に示す。

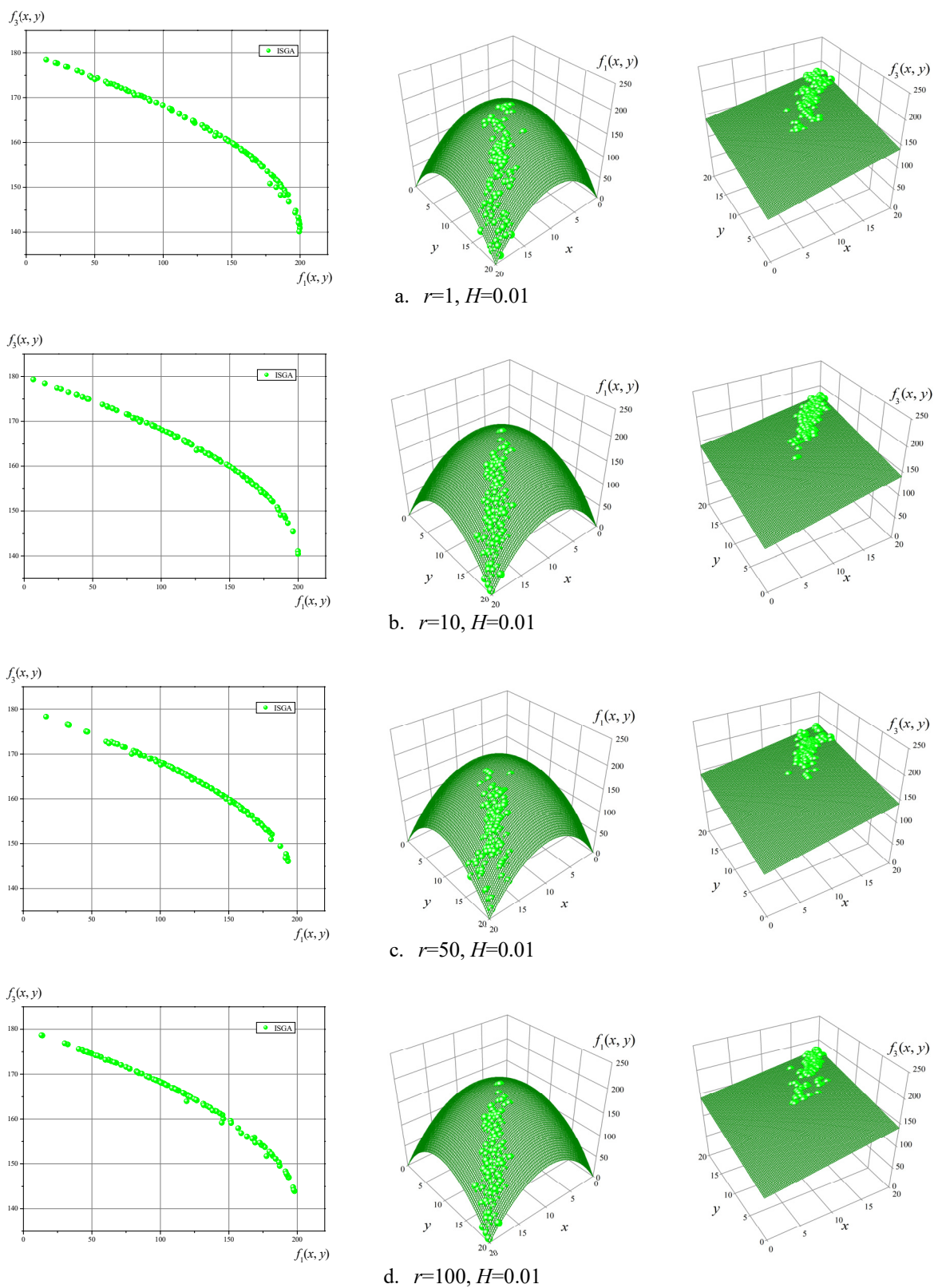


図 D.16 ISGA による数値結果( $H=0.01$ ):  $f_1, f_3$



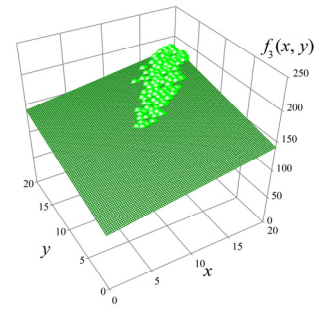
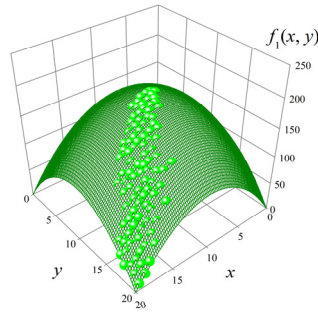
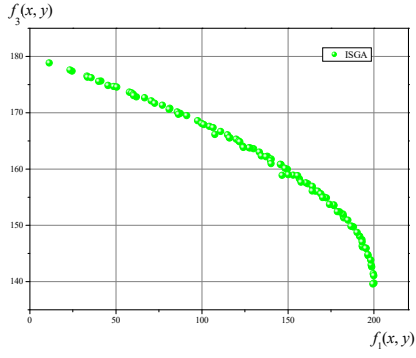
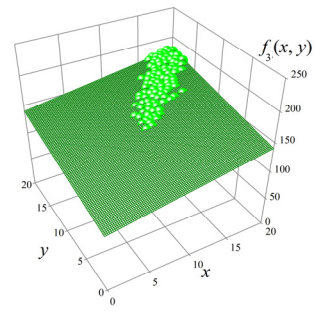
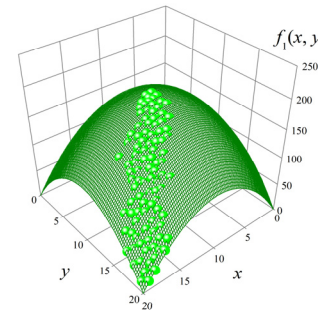
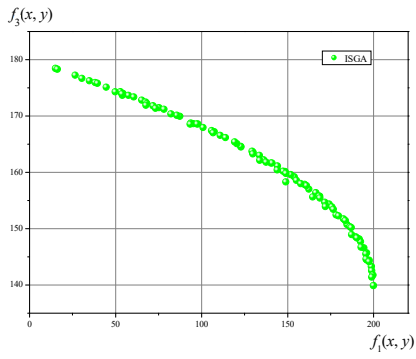
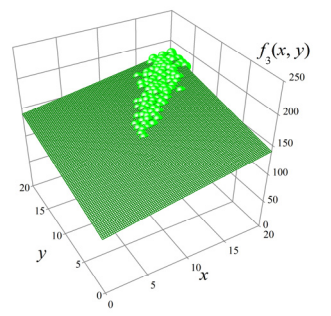
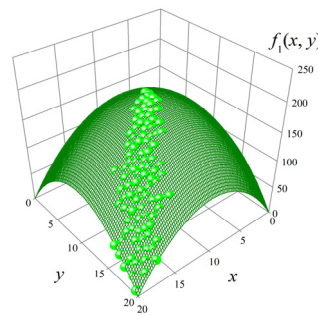
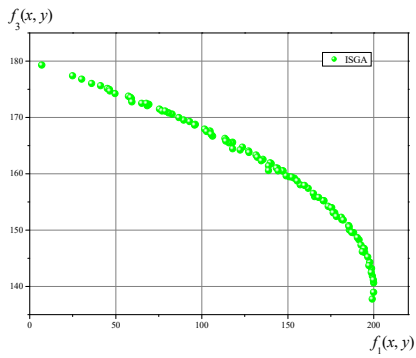
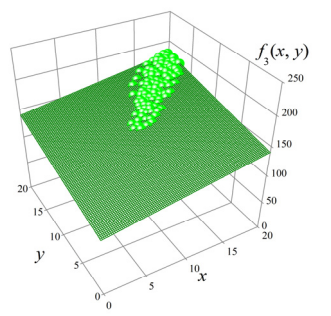
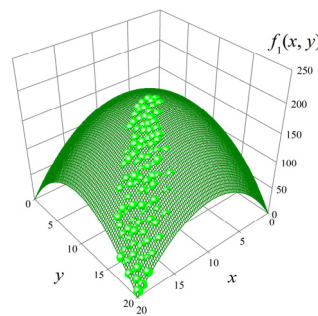
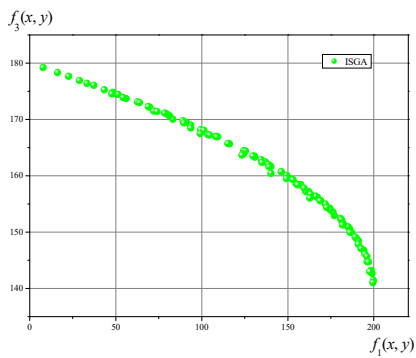
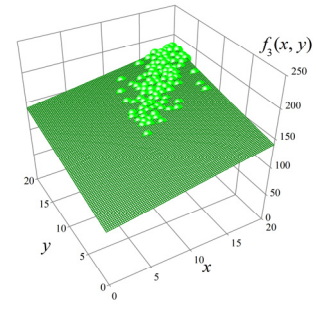
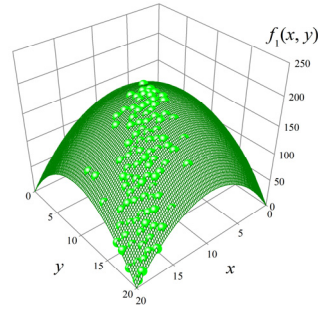
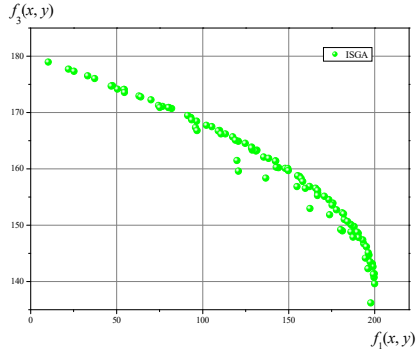
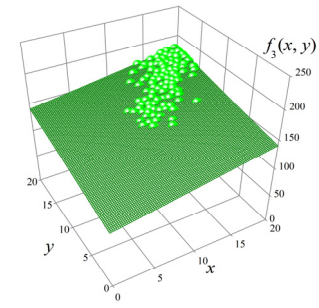
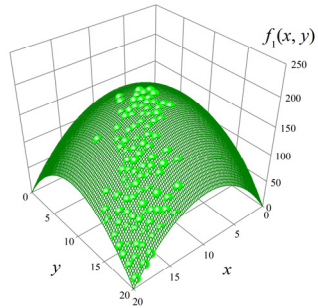
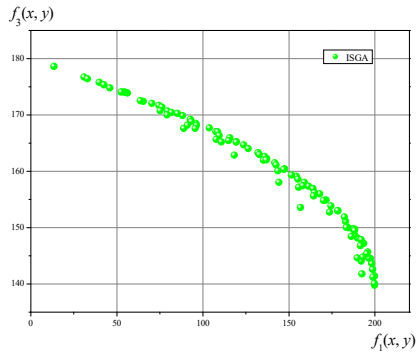

 a.  $r=1, H=0.1$ 

 b.  $r=10, H=0.1$ 

 c.  $r=50, H=0.1$ 

 d.  $r=100, H=0.1$ 

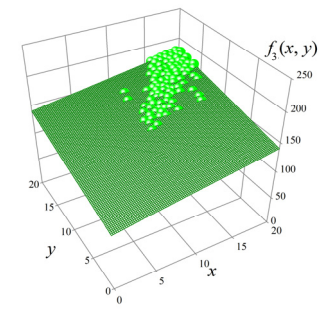
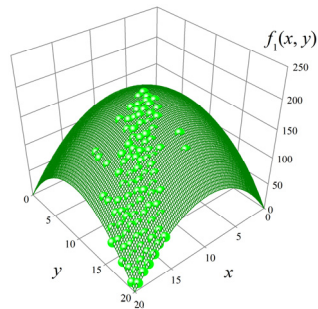
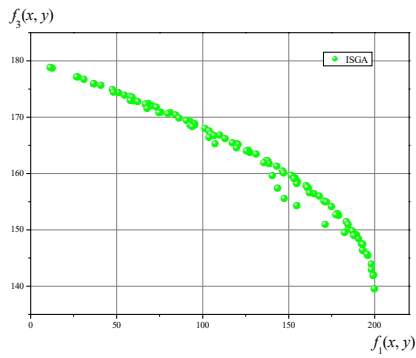
 図 D.17 ISGA による数値結果( $H=0.1$ ):  $f_1, f_3$



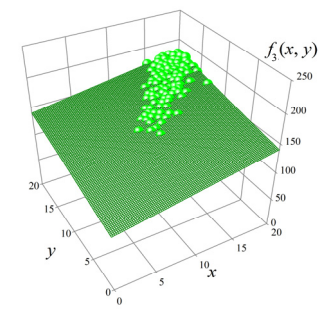
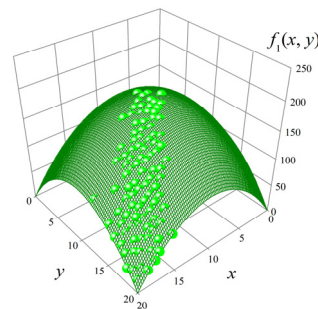
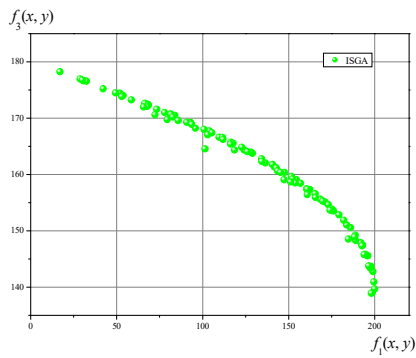
a.  $r=1, H=0.2$



b.  $r=10, H=0.2$



c.  $r=50, H=0.2$



d.  $r=100, H=0.2$

図 D.18 ISGA による数値結果( $H=0.2$ ):  $f_1, f_3$

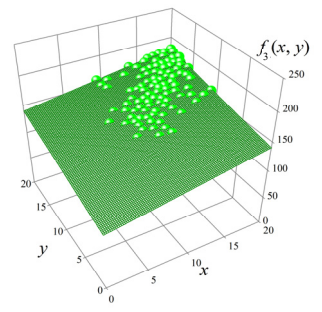
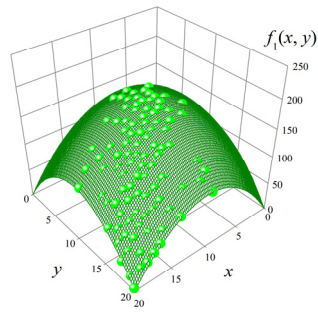
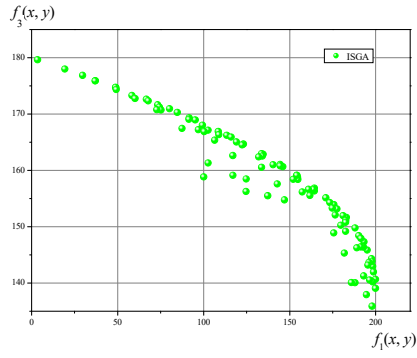
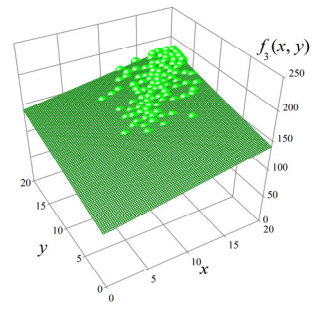
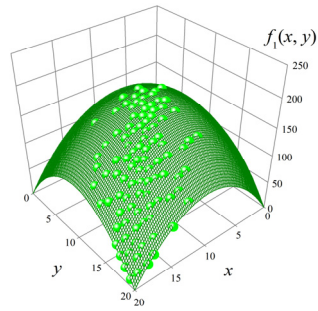
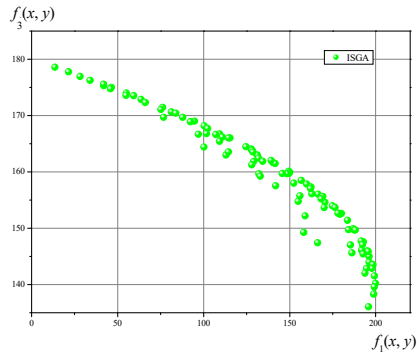
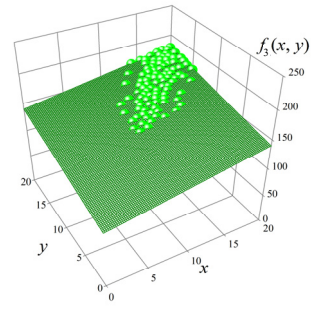
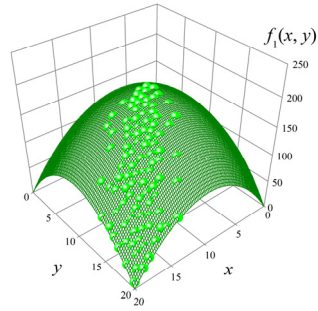
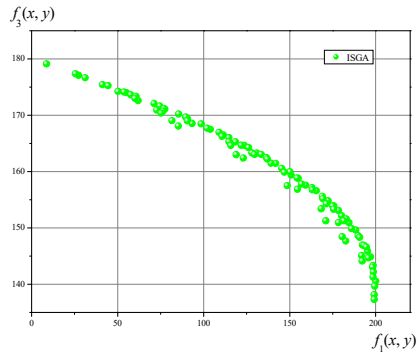
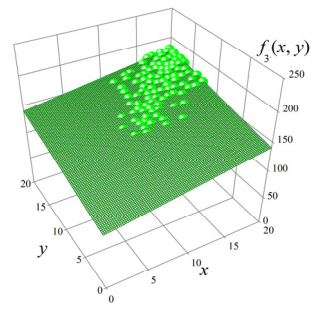
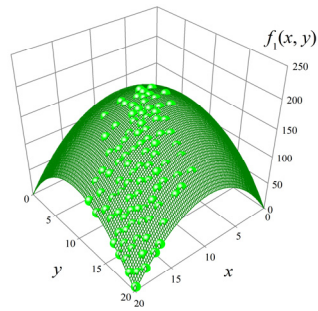
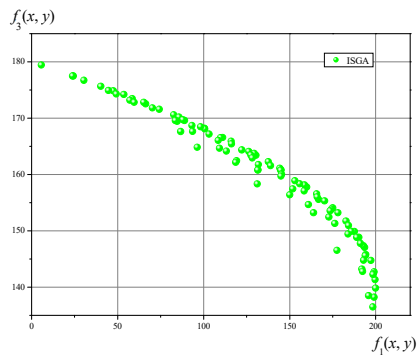
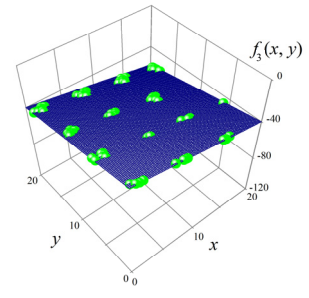
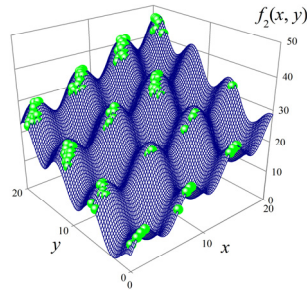
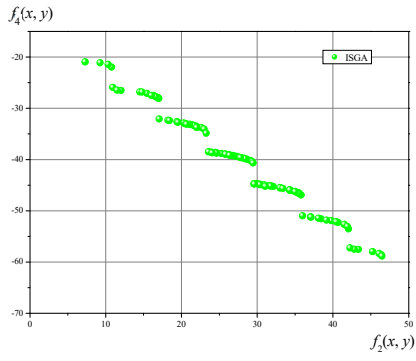
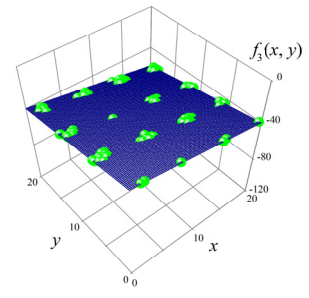
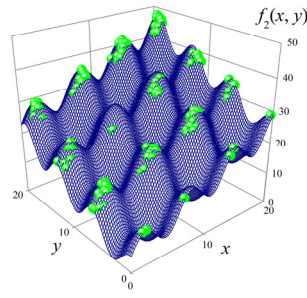
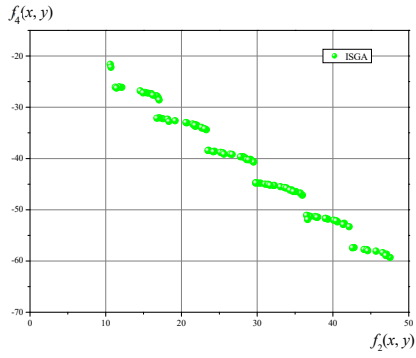

 a.  $r=1, H=0.3$ 

 b.  $r=10, H=0.3$ 

 c.  $r=50, H=0.3$ 

 d.  $r=100, H=0.3$ 

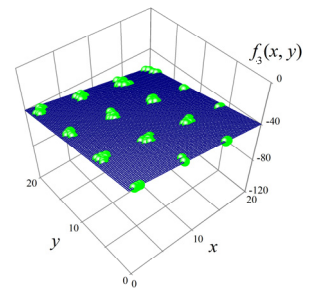
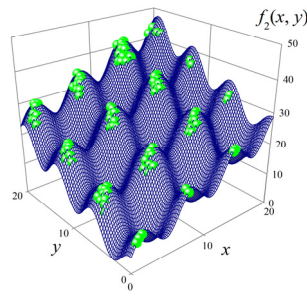
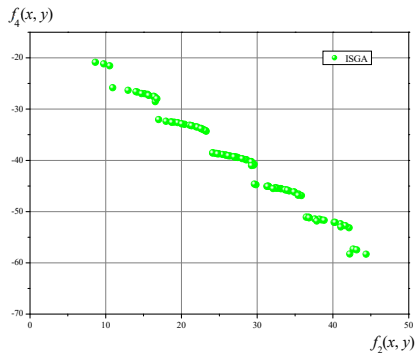
 図 D.19 ISGA による数値結果( $H=0.3$ ):  $f_1, f_3$



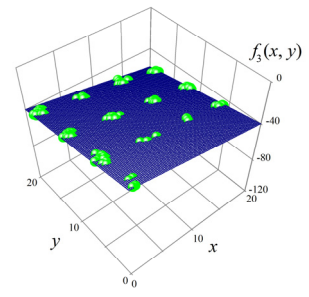
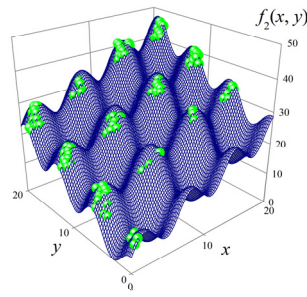
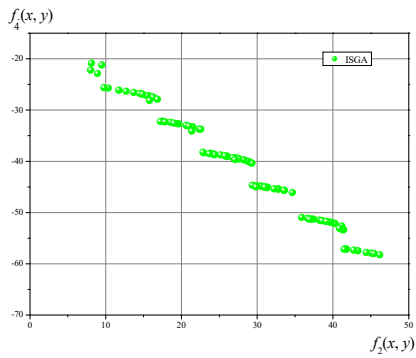
a.  $r=1, H=0.01$



b.  $r=10, H=0.01$



c.  $r=50, H=0.01$



d.  $r=100, H=0.01$

図 D.20 ISGA による数値結果( $H=0.01$ ):  $f_2, f_4$



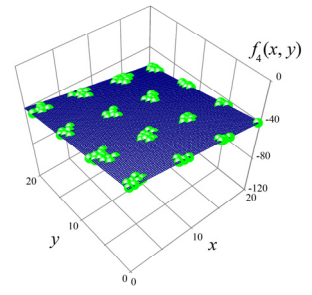
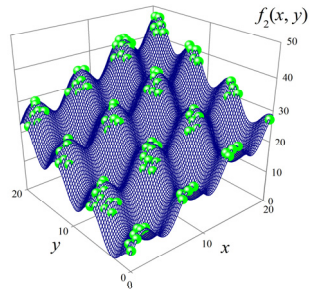
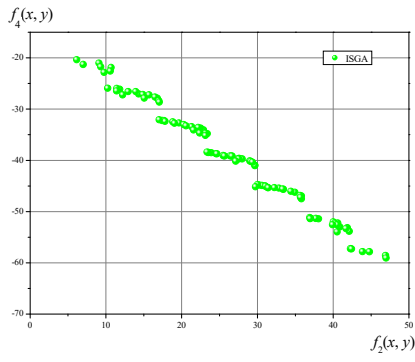
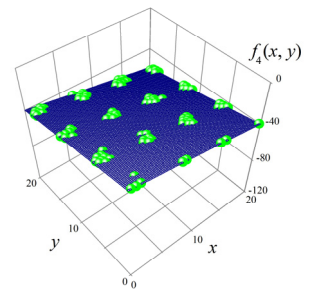
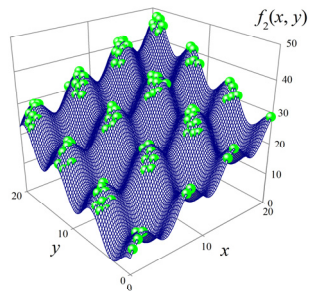
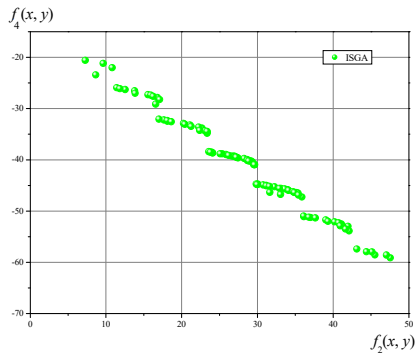
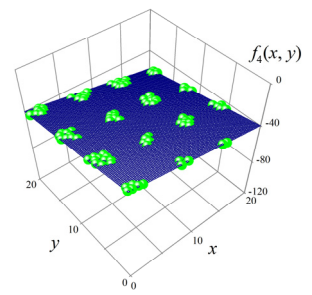
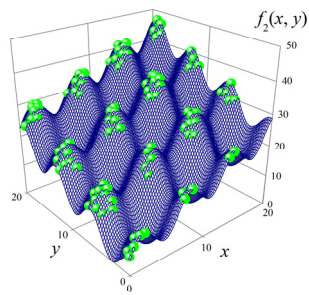
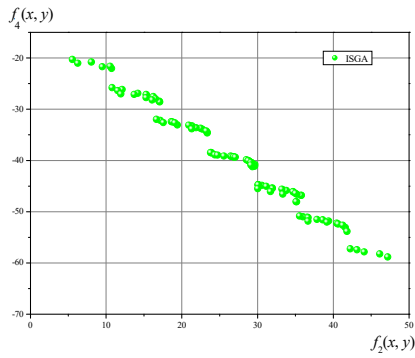
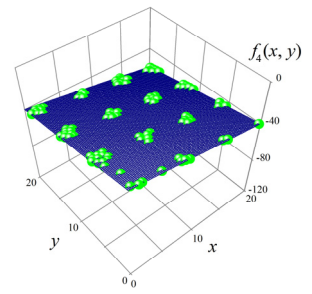
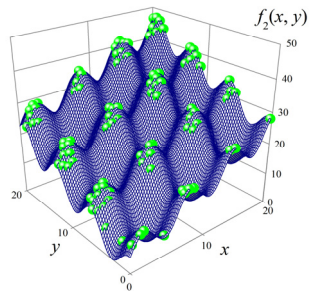
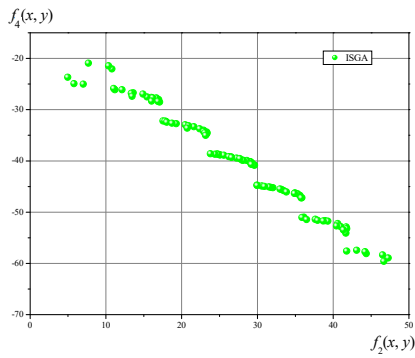

 a.  $r=1, H=0.1$ 

 b.  $r=10, H=0.1$ 

 c.  $r=50, H=0.1$ 

 d.  $r=100, H=0.1$ 

 図 D.21 ISGA による数値結果( $H=0.1$ ):  $f_2, f_4$

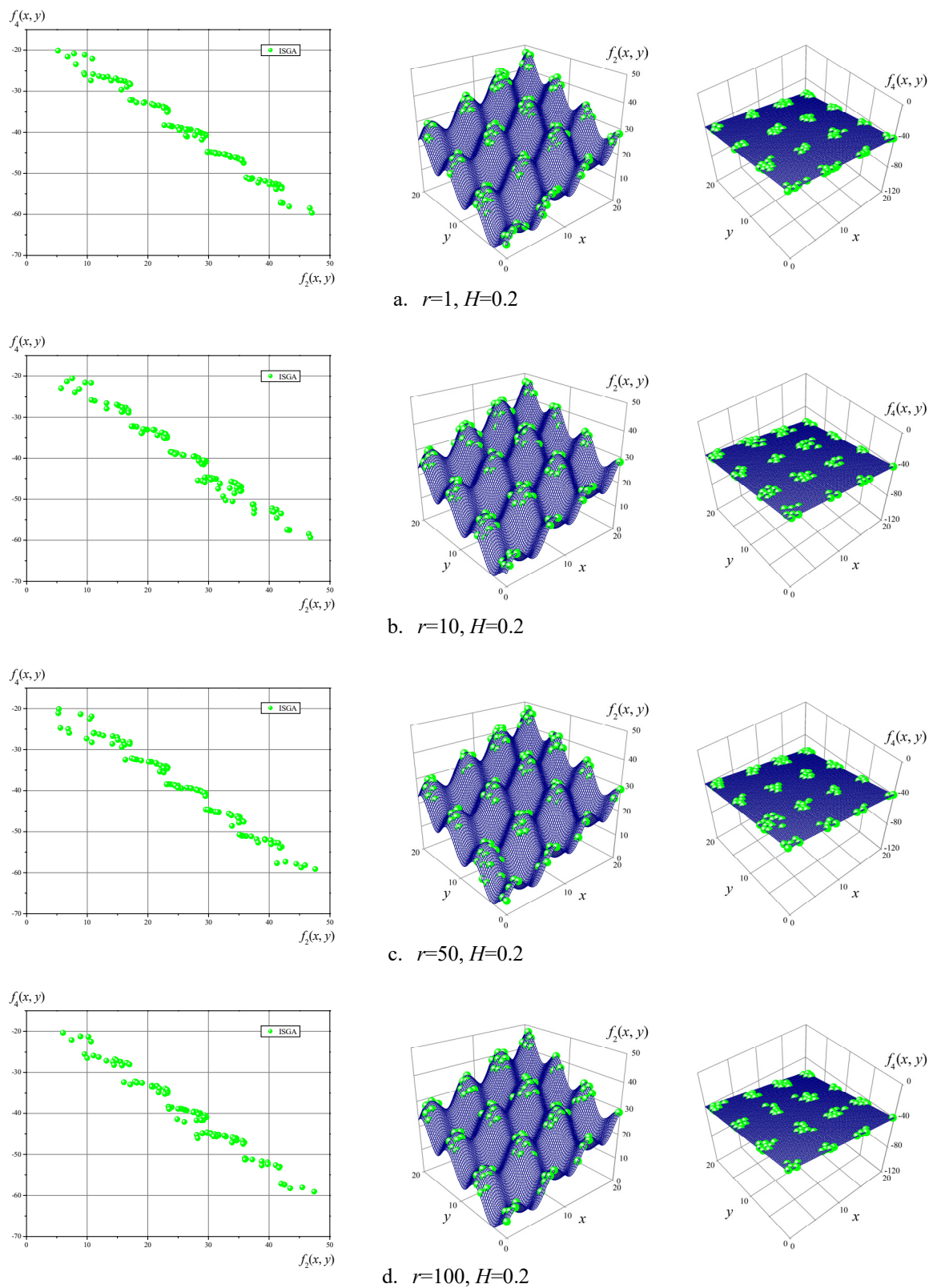


図 D.22 ISGA による数値結果( $H=0.2$ ):  $f_2, f_4$

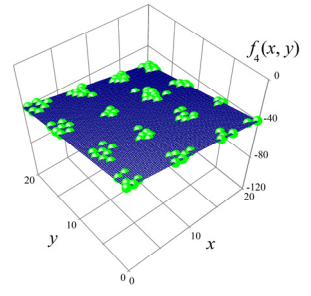
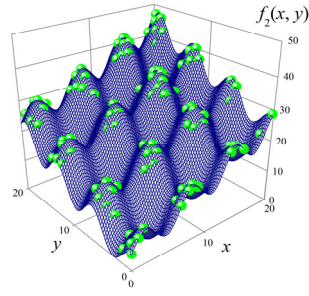
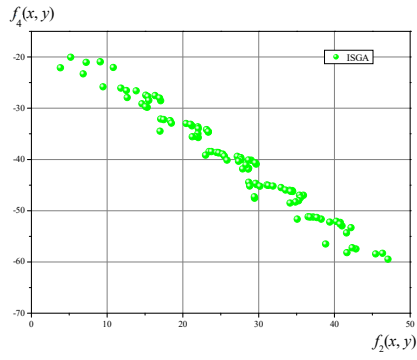
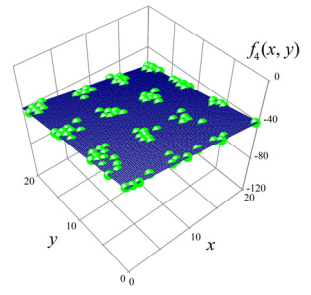
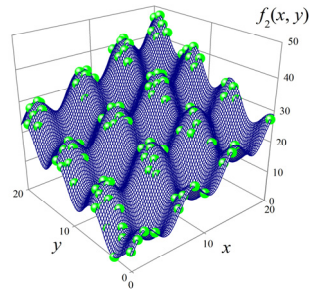
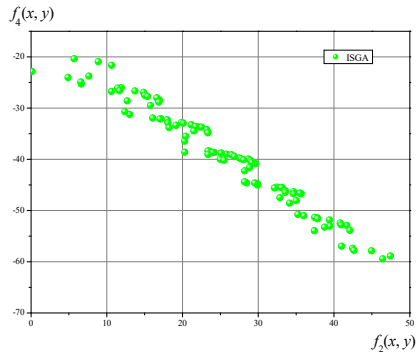
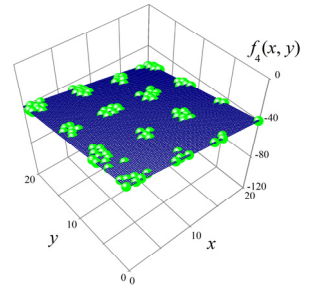
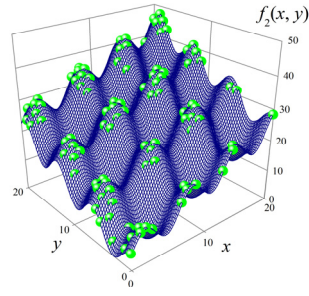
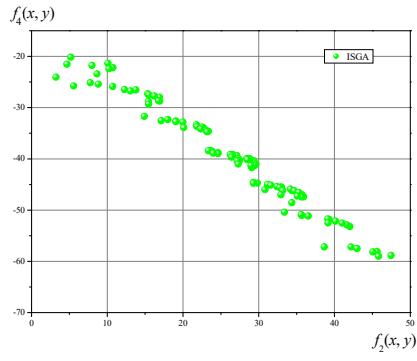
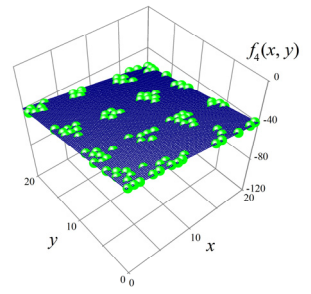
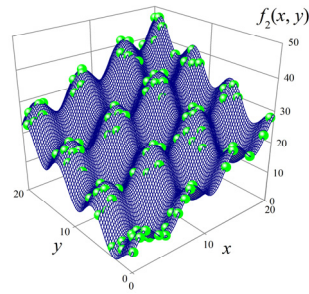
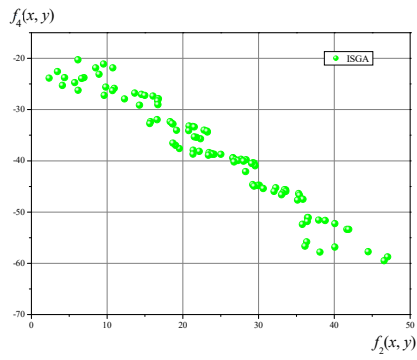

 a.  $r=1, H=0.3$ 

 b.  $r=10, H=0.3$ 

 c.  $r=50, H=0.3$ 

 d.  $r=100, H=0.3$ 

 図 D.23 ISGA による数値結果( $H=0.3$ ):  $f_2, f_4$

## D.4 考察

本章では解空間形状が異なる 2 変数関数による SOP, MOP に ISGA を適用し数値計算を行った。得られた知見を次に示す。

### 単一目的最適化問題

ISGA は上位個体選択率  $H$  を小さく設定するとグループ数  $r$  に関わらず大域的最適解を捉える。 $H$  を大きく設定するにつれて単純曲面関数では大域的最適解を中心に解領域が広がり、sin-cos 関数では大域的最適解と評価値に近い局所最適解とその周辺を捉え、設計変数空間での多様性を維持する結果を示している。 $r=1$  のとき評価は絶対評価であり、 $H$  は大域的最適解を中心として得られる解の範囲を決定する。 $r$  を大きくすると局所最適解及びその周辺の解の評価が高くなる。 $r$  を大きく設定することで局所最適解を捉える。また、局所最適解のない単峰性の単純曲面関数に適用した場合でも、 $r$  を大きく設定することで解領域は広がる。しかし、 $r$  をある程度大きく設定すると、クラスタリングにより構成される各グループの個体数が少なくなり、絶対評価に近づく。 $H$  はグループ内での評価値のラインに大きく影響し、 $r$  と  $H$  は相互に影響し合う。

### 多目的最適化問題

ISGA は  $H$  を厳しく設定すると、目的関数空間上でパレート最適フロントに収束し、 $H$  を高く設定すると解領域が広がりパレート最適フロント近傍を帯状に捉える。設計変数空間上では  $H$  を高くするにつれて解分布の幅が広がる。sin-cos 関数と平面関数の同時最大化において、SPEA2 の結果は、目的関数空間上で均一に解が分布しているが、設計変数空間において捉えていない峰がある。一方、ISGA での結果はほとんどのパラメータにおいて全ての峰を捉える。しかし目的関数空間上の解密度は均一ではない。これは ISGA が設計変数空間上の多様性を維持した探索を行うためである。

参考文献

---

*References*



---

## 参考文献

- [1] 坪井善昭, 川口衛, 佐々木睦朗, 大崎純, 植木隆司, 竹内徹, 河端昌也, 川口健一, 金箱温春: *力学・素材・構造デザイン*, 建築技術, 2012. 1.
  - [2] フライ・オットー(岩村和夫訳): *自然な構造体-自然と技術における形と構造、そしてその発生プロセス*, 鹿島出版会, 2004. 4.
  - [3] セシル・バルモンド(金田充弘監修, 山形浩生訳): *インフォーマル*, TOTO 出版, 2005. 4.
  - [4] 小野暁彦, 門脇哲也, 乾陽亮: *ヴィヴィッド・テクノロジー 建築を触発する構造デザイン*, 学芸出版社, 2008. 8.
  - [5] 三井和男, 大崎純, 大森博司, 田川浩, 本間俊雄: *発見的手法による構造フォルムとシステム*, コロナ社, 2004. 7.
  - [6] 日本建築学会編: *空間構造におけるコンピュータ利用の新しい試み*, 日本建築学会・丸善, 2005. 4.
  - [7] 本間俊雄: 生物的アプローチによる形態発想支援システムの試み, 空間構造におけるコンピュータ利用の新しい試みと将来展望セミナー資料, 日本建築学会, 1-8, 2005. 10.
  - [8] 佐々木睦朗: *FLUX STRUCTURE*, TOTO 出版, 2007. 3.
  - [9] 日本建築学会編: 構造形態の創生と最適化技術「最適設計」の過去・現在・未来, 日本建築学会大会(関東)構造部門(応用力学)パネルディスカッション資料, 日本建築学会, 2015. 9.
  - [10] 本間俊雄, 和田大典, 永田洸大, 沖田裕介: 優良解探索機能を導入した GA 系解法および SI 系解法の特徴と構造形態創生, *ソフトコンピューティングの最前線 講演論文集*, 日本建築学会, 21-32, 2011. 7.
  - [11] 伊庭斉志: *遺伝的アルゴリズムの基礎-GA の謎を解く-*, オーム社, 1994. 9.
  - [12] 本間俊雄, 野瑞憲太: 解の多様性を考慮した遺伝的アルゴリズムによる構造形態の創生, *日本建築学会論文集*, **614**, 35-43, 2007. 4.
  - [13] 本間俊雄, 堀切秀作: 最適化問題における多種多様な優良解獲得を目指した遺伝的アルゴリズムと解空間の状況, *日本応用数理学会 環瀬戸内応用数理研究学会第 11 回シンポジウム講演予稿集*, 54-59, 2007. 7.
  - [14] 堀切秀作, 本間俊雄: GA 系解法による解の多様性を考慮した橋梁の形態創生, *日本建築学会研究報告九州支部*, **46(1)**, 構造系, 565-568, 2007. 3.
  - [15] 堀切秀作, 本間俊雄: 多目的構造最適化のための解の多様性を考慮した遺伝的アルゴリズム, *計算工学講演会論文集*, **12**, 253-256, 2007. 5.
  - [16] 堀切秀作, 本間俊雄: 優良解探索を考慮した遺伝的アルゴリズムによる鋼構造物の多目的最適化, *コロキウム 構造形態の解析と創生 2007*, 39-44, 2007. 10.
  - [17] 堀切秀作, 本間俊雄: 優良解探索を考慮した遺伝的アルゴリズムによる鋼構造物の形態創生, *日本建築学会研究報告 九州支部*, **47(1)**, 構造系, 533-536, 2008. 3.
  - [18] 工藤玲, 坂中玲子, VU Le Bich Phuong, 堀切秀作, 本間俊雄: 解の多様性を考慮した GA 系解法の特徴とアーケード構造形態の創生, *日本建築学会研究報告 九州支部*, **46(1)**, 構造系, 569-572, 2007. 3.
-

- 
- [19] 沖田裕介, 和田大典, 本間俊雄: 解の多様性を考慮した GA 系解法によるラチスシェル構造の形態創生, コロキウム構造形態の解析と創生 2010, 121-124, 2010. 10.
  - [20] 和田大典, 本間俊雄: 自由曲面シェル構造の形態決定における優良解探索と解の多様性, 構造工学論文集, **58B**, 453-460, 2012. 3.
  - [21] Y. Okita, T. Honma, Structural morphogenesis for free-form grid shell using genetic algorithms with manipulation of decent solution search, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, **53**(3), 177-184, 2012. 9.
  - [22] Xin-She Yang: *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms, second edition*, Luniver Press, 2010.
  - [23] J. Kennedy, R. Ederhart: Particle Swarm Optimization, Proc. of IEEE International Conference on Neural Network (ICNN), IV, 1942-1948, 1995.
  - [24] D. Karaboga, B. Basturk: A Powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm, Journal of Glob Optimization 39, 459-471, 2007.
  - [25] 永田洸大, 本間俊雄: 優良解探索機能を導入した群知能による自由曲面シェル構造の形態, 日本建築学会構造系論文集, **78**(684), 345-354, 2013. 2.
  - [26] 永田洸大, 本間俊雄: ベジエ曲線によるトリム曲面を用いた開口部を有する自由曲面シェルの形状最適化, 構造工学論文集, **64B**, 515-523, 2018.3.
  - [27] 本間俊雄, 加治広之, 登坂宣好: 免疫アルゴリズムによる構造システムの最適化と解の多様性, 日本建築学会構造系論文集, **588**, 103-110, 2005.7.
  - [28] J. D. Schaffer: Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms, In Proceedings of 1<sup>st</sup> International Conference on Generic Algorithms and Their Applications, 93-100, 1985.
  - [29] P. Hajela and C. -Y. Lin: Genetic search strategies in multicriterion optimal design, Structural Optimization, **4**(2), 99-107, 1992.
  - [30] C. M. Fonseca and P. J. Fleming: Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization, Formulation, Discussion and Generalization, Proceedings of 5<sup>th</sup> International Conference on Genetic Algorithm (ICGA'93), 416-423, 1993.
  - [31] N. Srinivas and Kalyanmoy Deb. Multiobjective Optimization Using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms, Evolutionary Computation, **2**(3), 221-248, 1994.
  - [32] J. Horn, N. Nafpliotis, and D. E. Goldberg: A Niched Pareto Genetic Algorithm for Multi-objective Optimization, Proceedings of 1<sup>st</sup> IEEE Conference on Evolutionary Computation, IEEE World Congress on Computational Intelligence, **1** 82-87, 1994.
  - [33] E. Zitzler and L. Thiele: Multiobjective Evolutionary Algorithm, A Comparative Case Study and Strength Pareto Approach, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, **3**(4), 257-271, 1999.
  - [34] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratab, T. Meyarivan: A Fast Elitist Non-Domized Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization: NSGA-II, In KanGAL report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, 2000.
-



- 
- [35] E. Zitzler, M. Laumans and L. Thiele: SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithms, Technology Report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 2001.
- [36] E. Zitzler, M. Laumans, L. Thiele: SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithms, Technology Report 103, Computer Engineering and Communication Networks Lab (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zurich, 2001.3
- [37] 金美和, 廣安知之, 三木光範: 目的関数空間と設計変数空間におけるパレート最適解の多様性を維持するアーカイブメカニズム, 情報処理学会論文誌, 数理モデル化と応用 **46**(SIG17(TOM13)), 102-113, 2005.
- [38] 小林賢二, 廣安知之, 三木光範: ネットワークインバージョンを利用した多目的遺伝的アルゴリズムのための多様性維持メカニズム, 情報処理学会論文誌, 数理モデル化と応用 **1**(1), 27-42, 2008.
- [39] 北山哲士, 宮川智栄, 山崎光悦, 荒川雅生: 領域適応型 Particle Swarm Optimization による複数の最適解の探索, 日本機械学会論文集 C 偏, **75**(751), 710-718, 2009. 3.
- [40] S. Habaguchi, S. Kitayama, K. Yamazaki: Multi-Objective Particle Swarm Optimization using the Pareto-Fitness Function, 6<sup>th</sup> China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems, J-61, 2010.
- [41] KOLAREVIC B.: *Architecture in Digital Age – Design and Manufacturing*, Taylor and Francis, 2005.
- [42] 日本建築学会編: ラチスシェルの黎明期を支えた理論・技術・施工 -先人の手法をどう学ぶか- 日本建築学会大会(関東)構造部門(シェル・空間構造)パネルディスカッション資料, 日本建築学会, 2011. 8.
- [43] 杉原厚吉: *グラフィックスの数理*, 共立出版, 1995.
- [44] 三浦曜, 望月一正: *CAD・CG 技術者のための実践 NURBS*, 工業調査会, 2001. 3.
- [45] Belegundu, A.D. and Rajan, S.D.: A Shape Optimization Approach Based on Natural Design Variable and Shape Function, *Comput. Methods, Appl. Mech. Eng.*, **66**, 87-106, 1988.1.
- [46] 辻孝輔, 本間俊雄, 横須賀洋平: ベーシスベクトル法を用いたグリッドシェル構造の形態創生法, 日本建築学会構造系論文集, **63B**, 99-106, 2017. 3.
- [47] E. Ramm, K. U. Bletzinger, R. Reiteringer: Shape Optimization of Shell Structures, *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS)*, **34**(112), 103-121, 1993.
- [48] 浜田英明, 大森博司: 設計者の選好と力学的合理性を勘案した自由曲面シェル構造の構造形態創生法の提案 その1 多目的遺伝的アルゴリズムによる発見的手法, 日本建築学会構造系論文集, **609**, 105-111, 2006. 11.
- [49] P. Winslow, S. Pellegrino, S. B. Sharma: Mapping Two-way Grids onto Free-form Surfaces, *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, **49**(2), 123-130, 2008. 9.
- [50] 高野勝吉, 大竹美智子, 円酒昇, 高瀬淑也, 佐々木睦朗: GA を用いたラチスシェル構造物の形態デザイン手法に関する研究, コロキウム構造形態の解析と創生 2008, 91-96, 2008. 10.
- [51] 木村俊明, 大森博司: 形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用 自由曲面シェル構造の構造形態創生
-

- 
- 手法の提案(その1), 日本建築学会構造系論文集, **74**(640), 1091-1098, 2009. 6.
- [52] P. Basso, A. E. Grosso, A. Pugnale, M. Sassone: Computational Morphogenesis in Architecture: Cost Optimization of Free-form Grid Shells, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, **50**(3), 143-150, 2009. 12.
- [53] P. Winslow, S. Pellegrino, S. B. Sharma: Multi-objective optimization of free-form grid structures, Structural and Multidisciplinary Optimization, **40**, 257-269, 2010. 1.
- [54] L. F. R. Espath, R. V. Linn and A. M. Awruch: Shape optimization of shell structures based on NURBS description using automatic differentiation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **88**, 613-636, 2011. 3.
- [55] 西森裕人, 本間俊雄, 横須賀洋平: 自由曲面グリッドシェル構造の部材長一様化を考慮した形態創生, 構造工学論文集, **61B**, 343-348, 2015. 3.
- [56] 西森裕人, 本間俊雄, 横須賀洋平: 自由曲面グリッドシェル構造の部材長一様化と接合角を考慮した形態創生, 日本建築学会構造系論文集, **721**, 565-574, 2016. 3.
- [57] 本間俊雄, 西村敏雄: 膜構造の形状決定問題, 応用力学シリーズ2, 建築構造物の設計力学と制御動力学 (日本建築学会編), 4 章, 89-123, 丸善, 1994. 11.
- [58] 江畑和弘, 崔 昌萬, 佐々木 睦朗: 感度解析法による自由曲面シェルの構造形態創生 (構造デザインへの応用), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, 269-270, 2003. 9.
- [59] 木村俊明, 浜田英明, 大森博司: スプライン関数による自由曲面シェル構造の形態デザインに関する研究 (その 3 既存自由曲面シェル構造への適用), 日本建築学会大会学術講演梗概集 B-1, 821-822, 2006. 9.
- [60] 大森博司, 山本憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究 その 2 スペースフレームへの適用, 日本建築学会構造系論文集, **503**, 77-83, 1998. 1.
- [61] V. Henriksson, S. Lomax, J. Richardson: Multi-Objective Optimization of a Concrete Shell, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Annual Symposium 2019, Barcelona, Spain.
- [62] 藤田慎之輔, 大崎純: ひずみエネルギーとパラメトリック曲面の代数不変量を考慮したシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, **639**, 857-863, 2009. 5.
- [63] 藤田慎之輔, 大崎純: ラチスシェルの部材一様化のための最適化手法, コロキウム構造形態の解析と創生 2010, 71-76, 2010. 10.
- [64] 小河利行, 大崎純, 立石理恵: 線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, **570**, 129-136, 2003. 8.
- [65] 藤田慎之輔, 大崎純: パラメトリック曲面で定義されたラチスシェルの部材長一様化と剛性最大化を目的とした形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, **78**, 495-502, 2013. 3.
- [66] 日本建築学会編: 建築最適化への招待, 日本建築学会, 2005. 4.
- [67] 日本建築学会編: 空間構造の数値解析ガイドライン 2001, 日本建築学会, 2001. 5.
- [68] 日本建築学会: 鋼構造設計規準 許容応力度設計法, 日本建築学会, 2019. 10.
-

- [69] 日本建築学会: *鉄筋コンクリート構造計算基準・同解説*, 日本建築学会, 2018. 12.
- [70] 小林昭七: *曲線と曲面の微分幾何*, 裳華房, 1996. 5.
- [71] 斉藤文彦: 免疫システム型 GA を用いた正規化相関による複数画像領域探索, 電気学会論文誌, **122-C**(4), 655-661, 2002.



本研究に関連した論文・賞歴

---

*Research Achievement*



## 査読付き論文

著者名	発表論文	掲載誌	頁	発行年月
沖田裕介 本間俊雄	Structural Morphogenesis for Free-Form Grid Shell Using Genetic Algorithms with Manipulation of Decent Solution Search	Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, <b>53</b> (3).	177-184	2012 年 9 月
沖田裕介 本間俊雄	優良解探索遺伝的アルゴリズム系解法による自由曲面グリッドシェルの構造形態創生-構造形態と曲面を記述する NURBS の階数の関係 -	日本建築学会構造系論文集 第 78 巻 第 687 号	949-958	2013 年 5 月
沖田裕介 本間俊雄	パラメトリック曲面 NURBS を用いた構造最適化による RC シェルとグリッドシェルの自由曲面形態	構造工学論文集 66B	85-93	2020 年 3 月

## シンポジウム

著者名	発表論文	掲載誌	頁	発行年月
本間俊雄 和田大典 永田洸大 沖田裕介	優良解探索機能を導入した GA 系解法及び SI 系解法の特性と構造形態創生	日本建築学会シンポジウム ソフトコンピューティングの最前線	21-32	2011 年 6 月
沖田裕介 本間俊雄	優良解探索 GA によるグリッドシェルの構造形態創生	コロキウム構造形態の解析と創生 2011	31-36	2011 年 10 月
Y. Okita T. Honma	Structural Morphogenesis for Free-Form Grid Shell Using Genetic Algorithms with Manipulation of Decent Solution Search	International Association for Shell and Spatial Structures 2012 Annual Symposium IASS-APCS	315	2012 年 5 月
沖田裕介 本間俊雄	優良解探索 GA による NURBS を用いた自由曲面グリッドシェルの構造形態の解形態	コロキウム構造形態の解析と創生 2012	61-66	2012 年 10 月
Y. Okita T. Honma	Structural Morphogenesis for Asymmetric Free-Form Grid Shell Using NURBS with Manipulation of Decent Solutions Search	International Association for Shell and Spatial Structures 2016 Annual Symposium IASS	ID 1233	2016 年 9 月

## 日本建築学会

著者名	発表論文	掲載誌	頁	発行年月
沖田裕介 本間俊雄	多様な解の獲得を考慮した GA 系解法によるラチ スシェルの構造形態創生	学術講演梗概集 構造 I	727-728	2011 年 8 月
沖田裕介 本間俊雄	優良解探索 GA によるパラメトリック曲面を用いた 自由曲面グリッドシェル構造の形態-NURBS パラメ ータ設定値と優良解の関係-	日本建築学会九州支 部研究報告 構造系 第 51 号	281-284	2012 年 3 月
沖田裕介 本間俊雄	優良解探索 GA によるパラメトリック曲面を用いた 自由曲面構造の解形態 -多目的最適化における NURBS パラメータ設定値と優良解の関係-	学術講演梗概集 B-1, 構造 I	831-832	2012 年 9 月
沖田裕介 本間俊雄	自由曲面グリッドシェル構造の形態創生における NURBS パラメータ設定に関する検討	日本建築学会九州支 部研究報告 第 52 号	301-304	2013 年 3 月
沖田裕介 本間俊雄	優良解探索遺伝的アルゴリズムによるグリッドシェ ル及び RC シェルの自由曲面形態	学術講演梗概集 構造 I	915-916	2018 年 7 月

## 受賞

内容	受賞年月
The 10th International Association for Shell and Spatial Structures Hangai Prize 論文タイトル: Structural Morphogenesis for Free-Form Grid Shell Using Genetic Algorithms with Manipulation of Decent Solution Search 著者: Y. Okita and T. Honma	2012 年 5 月
コロキウム構造形態の解析と創生 2012 優秀講演賞 論文タイトル: 「優良解探索 GA による NURBS を用いた自由曲面グリッドシェル構造の解形 態 -階数設定値と優良解形状の関係-」 著者: 沖田裕介(講演者), 本間俊雄	2012 年 10 月
コロキウム構造形態の解析と創生 2012 構造形態創生コンテスト「歴史ある地域の固有性に学び 『再生する』かたちを創生する」入選 作品タイトル: 「Jenga Automaton」 製作者: 永田洸大, 佐々木亜衣, 沖田裕介, 土持拳	2012 年 10 月



謝辭

---

*Acknowledgement*



---

## 謝辞

本論文をまとめるまでに多くの方々のご指導とご支援を賜りました。お世話になった皆様に、この場をお借りして感謝の意を申し上げます。

鹿児島大学大学院 理工学研究科 建築学専攻 教授 本間俊雄先生には、主査として終始丁寧かつ熱心なご指導をいただきました。心から感謝申し上げます。呉工業高等専門学校から鹿児島大学への編入学時、構造形態創生の研究を志望していた私を快く受け入れていただきました。研究室在籍中は、国内外における多くの学会参加の機会を与えていただき、建築学の奥深さと広さを改めて実感ただけでなく、将来に生かすことのできる多くの刺激的な経験をさせていただきました。本間先生の研究室を志望して本当に良かったと感じています。

同教授 塩屋晋一先生、同准教授 黒川善幸先生、島根大学 総合理工学部 建築デザイン学科 教授(元 鹿児島大学大学院 理工学研究科 建築学専攻 准教授)澤田樹一郎先生には、副査として、貴重なご指導とご助言を賜りました。先生方のご意見により、多角的な視点からまとめることの重要性を再認識することができ、本研究の研鑽に繋がったと感じています。ここに感謝申し上げます。

また、会社での業務と研究活動の並行が困難な時期もあり、博士課程入学から本論文をまとめるに至るまで、休学期間等を含めて5年を要しました。それにもかかわらず、主査、副査の先生方にはご理解をいただき、終始変わらず懇切丁寧なご指導をいただけたことのありがたさを深く痛感しております。重ねてお礼申し上げます。

株式会社 東畑建築事務所 重松雄二氏をはじめ、著者在籍会社の多くの方々には、社会人博士課程への在籍を承諾いただいただけでなく、研究活動に対して寛容なるご理解をいただきました。ここに深く感謝申し上げます。また、株式会社 梓設計 和田大典氏、株式会社 大建設 永田洸大氏とは、同年に博士後期課程に進学した同じ志を持つ仲間として様々な議論を交わし、多くの刺激と示唆を得ることができました。挫けずに完遂することができたのは二人の存在のおかげです。ありがとうございました。

最後に、研究生活を支えてくれた家族に心から感謝いたします。

本当にありがとうございました。

2021年3月

沖田 裕介