# シャノンの標本化関数による数値補間

村　島　定　行

（受理　昭和50年5月30日）

# Numerical Interpolation by SHANON'S Sampling Function

by Sadayuki MURASHIMA

**Summary**

Numerical interpolation by Shanon's sampling function $\frac{\sin(x)}{x}$ is studied. From the standpoint of analytic function, the error of this interporation is discussed. For the functions which become zero rapidly at both end point, the error is very small. The computing time is proportional to the degree of interpolation N. This point is advantageous to Lagrange interpolation which shows the dependence of $N^2$. Using the Walther's CORDIC algorithm, the computing time becomes more small.

## 1. まえがき

J. H. Walther の CORDIC[1] の出現によつて標準関数が乗除算と同じレベルで計算されるようになると従来の数値解析の理論は大幅に修正される可能性がある．乗除算の数倍の計算時間がかかるとして敬遠されていた標準関数を積極的に利用して計算時間の短縮をはかる方向が考えられる．ここではその一例として，シャノンの標本化関数 $\frac{\sin(x)}{x}$ を使つて数値補間を行う公式を示し，多項式補間の代表例であるラグランジュ補間公式との比較を行う．

シャノンの標本化関数による数値補間は情報理論の標本化定理の説明に必ず使われるものであるが，まともに数値補間公式として扱われたことがなかつた．主な理由として，標本化関数に含まれる $\sin(x)$ の計算に時間がかかること，$x=0$ の近傍における桁落ち，更には誤差評価が困難ということもあるかも知れない．しかしながら CORDIC[1] の出現で計算時間は大幅に短縮され，桁落ち現象もその防止策を考えるのはそれほど困難ではない．誤差評価も複素関数論の立場から実用的な式が得られるようになつている．

シャノンの補間公式は等間隔補間に制限されているのでラグランジュ補間ほどの一般性がない．端点での標本値が零に近い関数の場合にはかなりの精度がある．更にラグランジュ補間は次数 $N$ を大きくすると $N^2$ の割で計算量は増大するが，シャノン補間は単に $N$ に比例する．

2章ではシャノンの数値補間公式と誤差評価式を示し，4章ではいくつかの関数についての補間結果を示す．3章ではシャノンの補関公式に導かれる数値積分公式について説明している．

## 2. シャノンの標本化関数による数値補間

### 2.1. シャノンの標本化関数

シャノンの標本化関数は（2.1)式で与えられ，図1に示すように $x=0$ で1になる偶関数で，周期 $\pi$ で正負が交代しながら減衰していく．

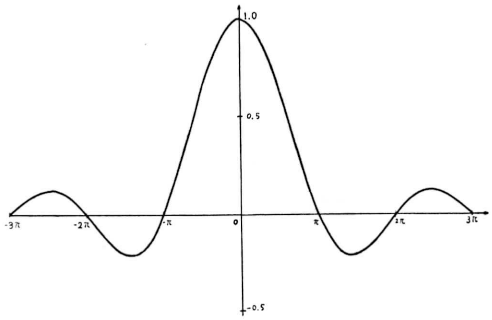


図1　SHANON の標本化関数

$$g(x)=\frac{\sin(x)}{x}\,. \qquad (2.1)$$

シャノンの標本化定理によれば $-\nu_M<\nu<+\nu_M$ の

範囲に周波数制限された信号 $f(t)$ は信号の継続時間を $\tau$ とすると $N=2\nu_M\tau$ の自由度を持つているので $f(t)$ を再現するには$N$個の等間隔にとつた標本点での値があれば十分である．$f(t)$ を再現する方法としてシャノンは次式を示した．

$$f(t)=\sum_m f_m \frac{\sin\{\pi(2\nu_M t-m)\}}{\pi(2\nu_M t-m)}\ . \tag{2.2}$$

(2.2) 式は $0<t<\tau$ の範囲以外で零になり，スペクトルが $|\nu|<\nu_M$ に制限されていれば $f(t)$ は正しく再現される．

### 2.2. 数値補間公式

(2.2) 式は数値補間の形式になつているがこのままでは公式として不便である．$f(x)$ の $N$ 等分の補間公式を $f_N(x)$ とすると

$$f_N(x)=\sum_m f(x_m)\frac{\sin\left\{\frac{N\pi}{2}(x-x_m)\right\}}{\frac{N\pi}{2}(x-x_m)}\ , \tag{2.3}$$

ここで $x_m$ は $[-1,1]$ を端点が標本点になるように $N$ 等分した場合の各標本点である．(2.3) 式が $x=x_m$ の時，標本値と一致することは簡単に示せる．これを今後シャノンの数値補間公式とよぶ．

### 2.3. 誤差の特性関数

コーシーの定理によれば任意の解析関数 $f(x)$ は次のように複素積分で表現することができる．

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c'}\frac{f(z)}{z-x}dz\ , \tag{2.4}$$

ここで積分路 $c'$ は，点 $x$ を反時計方向へ囲む任意の閉曲線である．

一方シャノンの数値補間公式は次のように表わせる

$$f_N(x)=\frac{1}{2\pi i}$$
$$\oint_c \frac{\sin\left\{\frac{N\pi}{2}(z+1)\right\}-\sin\left\{\frac{N\pi}{2}(x+1)\right\}}{(z-x)\sin\left\{\frac{N\pi}{2}(z+1)\right\}}f(z)dz\ . \tag{2.5}$$

ここで積分路 $c$ は，図2に示すように $\sin\left\{\frac{N\pi}{2}(z+1)\right\}$ の極のうち $[-1,1]$ に含まれる極のみを囲む任意の閉曲線とする．

従つて数値補間の誤差 $\varepsilon_N(x)$ は

$$\varepsilon_N(x)=f(x)-f_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \Phi_{N,x}(z)f(z)dz \tag{2.6}$$

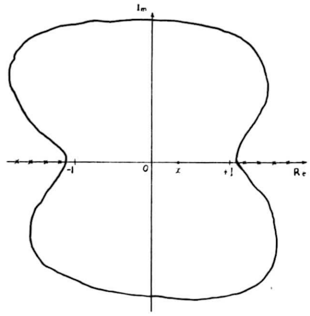


図2　積分路 $C$

となる．ここでの積分路 $c$ は図2に示すものと同じにとる．$\Phi_{N,x}(z)$ は (2.4), (2.5) を (2.6) 式に代入することにより

$$\Phi_{N,x}(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(\frac{N\pi}{2}x\right)}{(z-x)\sin\left(\frac{N\pi}{2}z\right)}\ , & N:\text{偶数}\\[2ex] \dfrac{\cos\left(\frac{N\pi}{2}x\right)}{(z-x)\cos\left(\frac{N\pi}{2}z\right)}\ , & N:\text{奇数}\end{cases} \tag{2.7}$$

と得られる．以後シャノンの数値補間公式の誤差の特性関数とよぶことにする．

一般に誤差評価式は近似式で与えられるが，(2.6) 式には近似は含まれていない．従つて必要になれば (2.6) 式を計算して数値補間の補正量を知ることができる．(2.6) 式は留数定理や鞍部点法[3] で簡単に評価でき，$f(x)$ の高次微分で与えられる誤差式よりはるかに実用的である．

### 2.4. 計算時間について

J. S. Walther[1] によれば $\sin(x)$ の計算は楕円型 **CORDIC** の一回適用ですむが，初期値の与え方を工夫すれば（標本値 $f(x_m)$ を与えれば）楕円型 **CORDIC** の一回適用で $f(x_m)\times\sin(x)$ の計算がすんでしまう．従つて $N$ 等分した数値補間公式の加減算以外の演算は

楕円型　**CORDIC**：$N+1$ 回
除　算　　　　　：$N+1$ 回

でよい．これに対しラグランジュ公式の場合は，そのままプログラムすると

乗　算　：　$2(N+1)^2$ 回
除　算　：　$N+1$ 回

が必要である．多項式補間のなかにはもつと少い演算回数で補間式の計算がすむのがあるが，係数の決定のため別に大きな計算量が必要になる．

## 3. 数値積分公式への応用

### 3.1. シャノンの数値積分公式

数値補間公式からは一般に補間形の数値積分公式が導かれる．

$[-1.1]$ の範囲で $f(x)$ を積分することを考える

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)dx \fallingdotseq \sum_{m} f(x_m)w_m \tag{3.1}$$

(3.1) 式に (2.3) 式を代入して重み $w_m$ を決定すると

$$w_m=\int_{-1}^{1}\frac{\sin\left\{\frac{N\pi}{2}(x-x_m)\right\}}{\frac{N\pi}{2}(x-x_m)}dx \tag{3.2}$$

となる．等間隔の分点と上式の重みからなる公式をシャノンの数値積分公式とよぶことにする．

表 1　$F(l)=\int_{(l-1)\pi}^{l\pi}\frac{\sin(x)}{x}dx$ の値

| $l$ | $F(l)$ |
|---|---|
| 1 | 1.8519370519 |
| 2 | −0.4337854758 |
| 3 | 0.2566102228 |
| 4 | −0.1826005733 |
| 5 | 0.1418036205 |
| 6 | −0.1159308846 |
| 7 | 0.0980515559 |
| 8 | −0.0849542324 |
| 9 | 0.0749456068 |
| 10 | −0.0670478122 |
| 11 | 0.0606565227 |
| 12 | −0.0553780799 |
| 13 | 0.0509450282 |
| 14 | −0.0471692809 |
| 15 | 0.0439147060 |
| 16 | −0.0410803429 |
| 17 | 0.0385897305 |
| 18 | −0.0363839000 |
| 19 | 0.0344166426 |
| 20 | −0.0326512349 |
| 21 | 0.0310581234 |
| 22 | −0.0296132562 |
| 23 | 0.0282968594 |
| 24 | −0.0270925266 |
| 25 | 0.0259865309 |
| 26 | −0.0249672997 |
| 27 | 0.0240250079 |
| 28 | −0.0231512597 |
| 29 | 0.0223388384 |
| 30 | −0.0215815057 |

表 1 には次式で定義される関数値を示してある．

表 2　シャノンの数値積分公式の重みと分点

| $N$ | $\pm x_m$ | $W_m$ |
|---|---|---|
| 10 | 0.0 | 0.1040214328 |
| | 0.2 | 0.0958174887 |
| | 0.4 | 0.1047509234 |
| | 0.6 | 0.0938785891 |
| | 0.8 | 0.1100720024 |
| | 1.0 | 0.0489888171 |
| 16 | 0.000 | 0.0609217781 |
| | 0.125 | 0.0641028843 |
| | 0.250 | 0.0608183367 |
| | 0.375 | 0.0643314316 |
| | 0.500 | 0.0604086263 |
| | 0.625 | 0.0650548684 |
| | 0.750 | 0.0590113672 |
| | 0.875 | 0.0685149104 |
| | 1.000 | 0.0308545259 |
| 20 | 0.0 | 0.0489888171 |
| | 0.1 | 0.0510212947 |
| | 0.2 | 0.0489471288 |
| | 0.3 | 0.0511100327 |
| | 0.4 | 0.0487987713 |
| | 0.5 | 0.0513427929 |
| | 0.6 | 0.0484321042 |
| | 0.7 | 0.0519524572 |
| | 0.8 | 0.0472893109 |
| | 0.9 | 0.0547409791 |
| | 1.0 | 0.0247468249 |
| 25 | 0.04 | 0.0399741203 |
| | 0.12 | 0.0400786380 |
| | 0.20 | 0.0398654746 |
| | 0.28 | 0.0401961027 |
| | 0.36 | 0.0397332053 |
| | 0.44 | 0.0403516219 |
| | 0.52 | 0.0395413971 |
| | 0.60 | 0.0406017465 |
| | 0.68 | 0.0391916910 |
| | 0.76 | 0.0411395861 |
| | 0.84 | 0.0382326100 |
| | 0.92 | 0.0434107855 |
| | 1.00 | 0.0201620614 |

$$F(l)=\int_{(l-1)\pi}^{l\pi}\frac{\sin x}{x}dx \tag{3.3}$$

(3.2) 式の重み $w_m$ は (3.3) 式の $F(l)$ の値を使つて決めることができる．表 2 にはシャノンの数値積分公式の分点 $x_m$ と重み $w_m$ を示してある．

## 4. 数　値　例

例 1

$$f(z)=\frac{1}{1+\lambda z^2},\quad \lambda>0 \tag{4.1}$$

補間誤差 $\varepsilon_N(x)$ は $N$ が偶数の時

$$\varepsilon_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{\sin\left(\frac{N\pi}{2}x\right)}{(z-x)\sin\left(\frac{N\pi}{2}z\right)\{1+\lambda z^2\}}dz \tag{4.2}$$

表3 $f(z)=\frac{1}{1+\lambda z^2}$, $\lambda>0$ の場合の計算結果

| | $x$ | $f(x)$ | シャノンの公式 ($N=20$)の誤差 | 複素積分表示の誤差評価 (4.2) 式 | ラグランジェ公式 ($N=20$) の誤差 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda=25$ | 0.05 | 0.94117649 | 0.0008292 | 0.0008226 | 0.001314 |
| | 0.35 | 0.24615385 | −0.001220 | −0.001172 | −0.006947 |
| | 0.95 | 0.04244032 | 0.003591 | 0.003770 | −39.99 |
| $\lambda=50$ | 0.05 | 0.88888893 | 0.007369 | 0.007365 | 0.009154 |
| | 0.35 | 0.14035088 | −0.007975 | −0.007950 | −0.03242 |
| | 0.95 | 0.02168022 | −0.001217 | −0.001127 | −150.7 |
| $\lambda=75$ | 0.05 | 0.84210532 | 0.01938 | 0.01938 | 0.02255 |
| | 0.35 | 0.0981595 | −0.01570 | −0.01568 | −0.05895 |
| | 0.95 | 0.01455869 | −0.004891 | −0.004831 | −263.1 |
| $\lambda=100$ | 0.05 | 0.80000007 | 0.03462 | 0.03462 | 0.03901 |
| | 0.35 | 0.07547170 | −0.02277 | −0.02276 | −0.08254 |
| | 0.95 | 0.01095890 | −0.007901 | −0.007856 | −360.7 |

となる．積分路 $c$ は図2に示すと同じであるが $f(z)$ の極 $\pm\frac{i}{\sqrt{\lambda}}$ を考慮する必要がある．留数計算の結果

$$\varepsilon_N(x)=-2x\sin\left(\frac{N\pi}{2}x\right)\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\sinh\left(\frac{N\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right)(1+\lambda x^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{N\pi}(-1)^{\frac{N}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{\left\{1+\lambda\left(1+\frac{2}{N}i\right)^2\right\}\left\{\left(1+\frac{2}{N}i\right)^2-x^2\right\}}\right].\tag{4.3}$$

表3にシャノン補間とラグランジュ補間の比較を行う．公式は共に $N=20$ の場合である．$x$ のすべての領域でシャノン補間のほうが精度がよい．

(4.2) 式による誤差評価は，無限和の部分を第5項まで計算しただけであるがよく一致している．

ラグランジュ公式の誤差は端点の近く ($x=0.95$) で極端に大きくなつているが，ルンゲの現象[3] であり次数 $N$ を増すと誤差が大きくなる．

例2　$f(z)=\exp(-\lambda\pi z^2)$, $\lambda>0$

$N$ が偶数の場合の補間誤差は

$$\varepsilon_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{\sin\left(\frac{N\pi}{2}x\right)}{(z-x)\sin\left(\frac{N\pi}{2}z\right)}\exp(-\lambda\pi z^2)dz\tag{4.4}$$

積分路 $c'$ を遠くへとると，例えば $z\to i\infty$ で無限大になるので鞍部点法[3] が適当である．かなり荒い近似であるが次式が得られた．

$$\varepsilon_N(x)\fallingdotseq 2x\sin\left(\frac{N\pi}{2}x\right)\left[\frac{16}{\sqrt{\pi\lambda}}\left(\frac{\lambda}{N\pi}\right)^2\exp\left(-\frac{N^2\pi^2}{16\lambda}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{N\pi}(-1)^{\frac{N\pi}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\exp\left\{-\lambda\left(1+\frac{2}{N}i\right)^2\right\}}{\left(1+\frac{2}{N}i\right)^2-x^2}\right].\tag{4.4}$$

例1と同様の計算結果を表4に示す．

$\lambda$ が小さくて関数がなだらかの時，ラグランジュ補間の精度がよく8桁の精度がある．シャノン補間はかなり悪い．逆に $\lambda$ が大きくなるとシャノン公式のほうがよくなり8桁の精度に達するが，ラグランジュ補間の誤差は急に悪くなる．

(4.2)，(4.4) 式の右辺の第二項は $\sin\left(\frac{N\pi}{2}z\right)$ の極のうち $[-1,1]$ に含まれない極からの寄与であるが，この項は端点における標本値に依存している．端点での関数値が小さいほど誤差が小さくなると言える．これは例1についても言えることでシャノンの補間公式の特徴である．

元来シャノンの標本化関数はある定義域以外では零になり，しかも帯域制限されている関数（ということは端点ではなめらかに零にならねばならない）を再現するために導入されたものであり，端点での値が小さくないと誤差が大きくなるのは当然と言える．

前述の二つの例では $f(z)$ は偶関数であつたが，偶関数でないとして，実軸上の極による影響を調べると次のようになる．

$$\varDelta E=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{N\pi}{2}x\right)}{N\pi}\cos\pi\left(\frac{N}{2}+i\right)$$

表 4　$f(z)=\exp(-\lambda\pi z^2)$，$\lambda>0$ の計算結果

| $\lambda$ | $x$ | $f(x)$ | シャノンの公式の誤差 | 複表積分表示による誤差評価 | ラグランジェ公式の誤差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.05 | 0.99217678 | −0.00004166 | −0.00004169 | −0.000000002 |
| | 0.35 | 0.68055606 | 0.0003256 | 0.0003258 | 0.000000008 |
| | 0.95 | 0.05870165 | 0.003461 | 0.003462 | −0.000000320 |
| 2 | 0.05 | 0.98441477 | −0.000001094 | −0.000001095 | 0.000000004 |
| | 0.35 | 0.46315656 | 0.000008543 | 0.000008537 | 0.000000000 |
| | 0.95 | 0.00344588 | 0.00008658 | 0.00008658 | −0.0002166 |
| 3 | 0.05 | 0.97671348 | −0.000000025 | −0.000000027 | 0.000000024 |
| | 0.35 | 0.31520399 | 0.000000215 | 0.000000209 | −0.000000368 |
| | 0.95 | 0.00020228 | 0.000002058 | 0.000002058 | −0.006657 |
| 4 | 0.05 | 0.96907244 | 0.000000002 | 0.000000000 | 0.000000213 |
| | 0.35 | 0.21451399 | 0.000000011 | 0.000000005 | −0.000003959 |
| | 0.95 | 0.00001187 | 0.000000047 | 0.000000048 | −0.06013 |

$$\times\left\{\frac{f\left(1+\frac{2}{N}i\right)}{\left(1+\frac{2}{N}i-x\right)}-\frac{f\left(-1-\frac{2}{N}i\right)}{1+\frac{2}{N}i+x}\right\}. \quad (4.5)$$

$[-1,1]$ の範囲から離れるにつれて急速に減衰する関数の補間の場合，標本点 $x_m$ を $[-1,1]$ の範囲内に限らず外側まで計算して精度をあげることが考えられる．この場合，$\Delta E$ の値は小さくる．標本点 $x_m$ を $-\infty$ から $+\infty$ まで考慮するなら実軸上の極の寄与はなくなる．

## 5. 結　　論

シャノンの数値補間は標本値がそのままで係数となるのでラグランジュの公式とよく似てわかりやすい．しかし等間隔補間に限られているので一般性に欠けるし，端点での標本値が大きいと誤差が大きくなるという欠点を持つている．

一方ラグランジュ補間が次数 $N$ を増すと計算量が $N^2$ で大きくなるのに対し，シャノンの補間は $N$ に比例して増加するだけであるので次数が増えるにつれて相対的に速く計算できる．最近発表された **CORDIC** というアルゴリズムと併用するなら一層短縮されるはずである．

同じ次数のラグランジュ補間と比較すると精度は相補的な関係にあり，ルンゲの現象などが起つてラグランジュ補間がうまく働かないような場合に，精度がよい．

ここで示した誤差評価式は関数の高次微係数で与えられた評価式より，計算しやすく，近似を含んでいないので，大いに役立つものと思う．

## 参 考 文 献

1) J. S. Walther: A unified algorithm for elementary functions, S. J. C. C., 1971.
2) L. ブリルアン：科学と情報理論．みすず書房．1969.
3) 森　正武：数値解析，共立出版，1972
4) Abramowitz and Segan : Handbook of Mathematical Function, Dover Pub., 1964.