

# 多重倒立振り子系の制御

吉田 宏・湯ノ口万友・加藤 寛・川崎 利昭  
(受理 平成4年5月29日)

## Control of a Multiple Inverted Pendulum System

Hiroshi YOSHIDA, Kazutomo YUNOKUCHI  
Yutaka KATOH, and Toshiaki KAWASAKI

This paper deals with the control problem of a multiple inverted pendulum system connected in tandem. It was deduced that the system can be stabilized by an appropriate state feedback.

Furthermore, the transient behaviors of the feedback control system are discussed based on computer simulations.

### 1. まえがき

倒立振り子の制御問題は、2足歩行ロボットのモデルや不安定系の安定化制御の基本問題として、これまで多くの基礎的研究がなされている<sup>1)~4)</sup>。特に、一般的な $n$ 本の並列結合された倒立振り子系の制御問題については、平井らが考察している<sup>5)</sup>が、 $n$ 本の直列結合された倒立振り子系については、まだ研究されていない。本稿では、まず $n$ 本の直列倒立振り子系の数式モデルを導き、ついで可制御性の吟味を行ない、レギュレータ問題に帰着させることにより、安定に倒立させ得ることを指摘する。また、シミュレーション実験により、倒立振り子系の安定化制御の動作を確認する。

### 2. 数式モデル

Fig. 1は $n$ 本の直列に連結された倒立振り子系を示したものである。制御の目的は、台車に加える力 $u$  [N]によって、 $n$ 本の振り子系をレールの中央に直立させることである。いま

- 台車の質量： $M$  [kg]
- レールの中央からの台車の位置： $x$  [m]
- 台車とレールの粘性摩擦係数： $\nu$  [kg/s]
- 振り子 $i$ の質量： $m_i$  [kg]
- 振り子 $i$ の傾き角： $\theta_i$  [rad]
- 振り子 $i$ の支点から重心までの距離： $L_i$  [m]
- 振り子 $i$ の重心まわりの慣性モーメント： $J_i$  [kgm<sup>2</sup>]

振り子 $i$ の支点まわりの粘性摩擦係数： $\mu_i$  [kgm<sup>2</sup>/s]  
とすると、次の運動方程式を得る。(付録1参照)

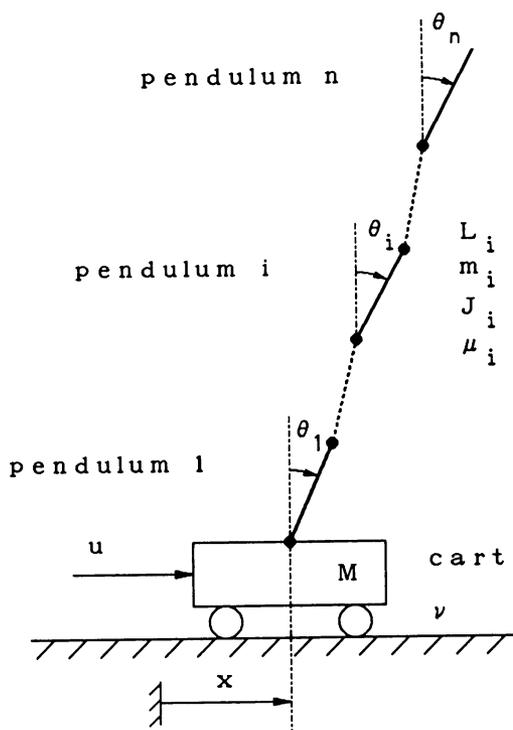


Fig. 1 Multiple inverted pendulum system

$$M^* \ddot{x} + \nu \dot{x} + \sum_{j=1}^n m_j^* L_j (\ddot{\theta}_j \cos \theta_j - \dot{\theta}_j^2 \sin \theta_j) = u \quad (1)$$

$$m_i^* L_i \ddot{x} \cos \theta_i + J_i^* \ddot{\theta}_i + 2 \sum_{j=i}^n m_{ij}^* L_i L_j \ddot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j) - 2 \sum_{j=i}^n m_{ij}^* L_i L_j \dot{\theta}_j^2 \sin(\theta_i - \theta_j) + \mu_i \dot{\theta}_i - m_i^* g L_i \sin \theta_i = 0; i=1, 2, \dots, n \quad (2)$$

ただし,

$$M^* = M + \sum_{j=1}^n m_j \quad (3)$$

$$m_i^* = m_i + 2 \sum_{j=i+1}^n m_j; i=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$m_{ij}^* = m_{ij}^*; j=1, 2, \dots, i-1; i=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$m_{ij}^* = m_j^*; j=i+1, i+2, \dots, n; i=1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$J_i^* = J_i + (m_i + 4 \sum_{j=i+1}^n m_j) L_i^2; i=1, 2, \dots, n \quad (7)$$

とする。ここで、振子系がレールの中央に直立した状態、すなわち平衡点

$$x = \dot{x} = 0, \theta_i = \dot{\theta}_i = 0; i=1, 2, \dots, n$$

のまわりで線形近似し、 $(2n+2) \times 1$  状態ベクトルを

$$x(t) = [x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n]^T$$

とおくと、つぎの状態方程式を得る。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (9)$$

ただし、 $A$  は  $(2n+2) \times (2n+2)$  行列、 $b$  は  $(2n+2) \times 1$  ベクトルである。 $n=2$  の場合の  $A$ 、 $b$  を付録2. に示す。

式(9)において可制御性の条件が満たされているとき、適当な  $1 \times (2n+2)$  ベクトル  $f^T$  による状態フィードバック

$$u(t) = -f^T x(t) \quad (10)$$

を施せば、閉ループ系

$$\dot{x}(t) = (A - bf^T) x(t) \quad (11)$$

の極  $|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n+2}|$  を自由に設定でき<sup>9)</sup>、閉ループ系を安定化することが可能である。

### 3. 数値例

以下、 $n=3$  の場合について具体的な数値を与え、フィードバック制御を施した場合のシミュレーション実験を行なう。

$$M = 0.5 \text{ [kg]}, m_1 = m_2 = m_3 = 0.125 \text{ [kg]},$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = 0.354 \text{ [m]}, \nu = 2.6 \text{ [kg/s]},$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.98 \times 10^{-3} \text{ [kg/s]},$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = 5.22 \times 10^{-3} \text{ [kgm]}^2$$

として、行列  $A$ 、 $b$  を求めると、次式を得る。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7.251 & 1.187 & -0.1318 & -4.850 \\ 0 & 68.90 & -45.25 & 5.028 & 8.695 \\ 0 & -75.72 & 91.62 & -24.02 & -2.371 \\ 0 & 25.14 & -72.06 & 49.53 & 0.7905 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.006622 & -0.001806 & 0.000602 & 0 & 0 \\ -0.06291 & 0.06887 & -0.02296 & 0 & 0 \\ 0.06887 & -0.1394 & 0.1097 & 0 & 0 \\ -0.02296 & 0.1097 & -0.2262 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$b = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.865 \quad -3.344 \quad 0.9121 \quad -0.3040]^T \quad (13)$$

このとき、式(9)は可制御性の条件を満たしていることが容易に確かめられる。並列倒立振子の場合には、少なくとも2本の振子の質量と長さが一致すれば可制御とならないが<sup>9)</sup>、直列倒立振子の場合にはこのような場合においても可制御となることが分かる。

さて、閉ループ系の極配置が

$$\lambda_1 = -1.35 + 3.7j, \lambda_2 = -1.35 - 3.7j,$$

$$\lambda_3 = -7.68, \lambda_4 = -10, \lambda_5 = -12,$$

$$\lambda_6 = -14, \lambda_7 = -16, \lambda_8 = -18 \quad (14)$$

となるように  $f^T$  を決めると次式を得る。

$$f^T = [-748, -663, 1135, -3707, -514, -347, -355, -652] \quad (15)$$

Fig. 2は式(11)の閉ループ系の過渡応答をシミュレーションした結果を示したものである。同図から、つぎのようなことが分かる。

①台車が右に動けば  $x$  が増加し、振子1は重心のまわりに反時計方向に回転するので、傾き角  $\theta_1$  は減少し、 $x$  と  $\theta_1$  とはおおむね逆方向に動く。

②制御を開始してから0.2秒程度経過するまでは、3本の振子は激しく運動するが、その後は、3本の振子は、協調動作を行ないながら次第に垂直に倒立し

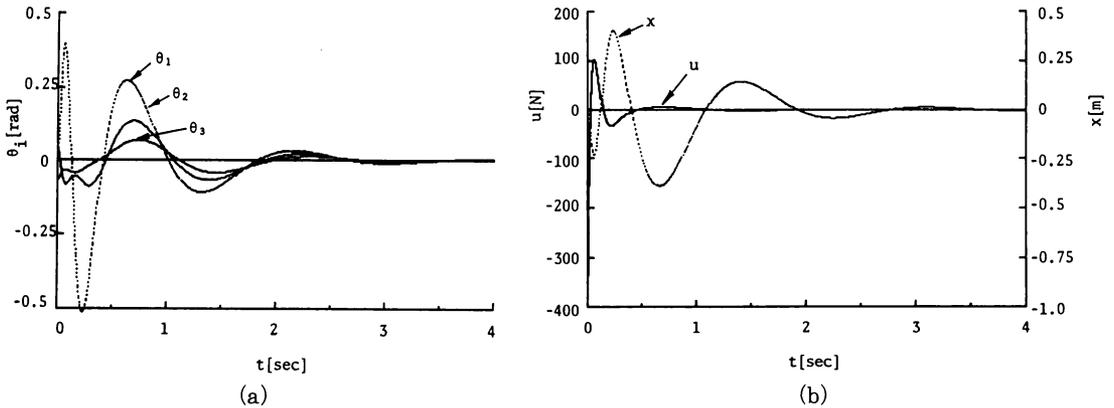


Fig. 2 Simulation results of the transient response curves for the multiple inverted pendulum system where  $n=3$ . Initial conditions are  $x(0) = 0$  m,  $\theta_1(0) = -0.03$  rad,  $\theta_2(0) = 0.05$  rad,  $\theta_3(0) = -0.07$  rad.

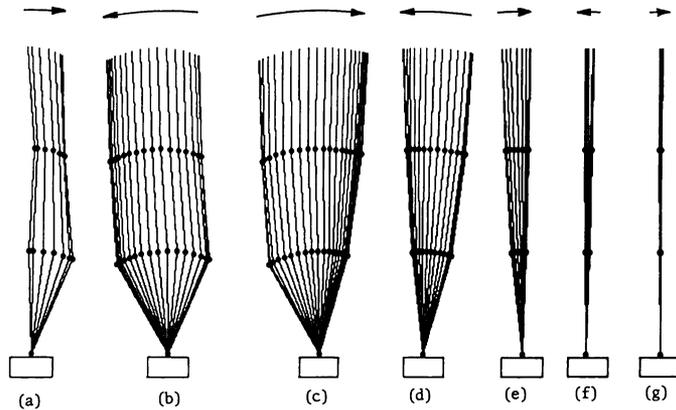


Fig. 3 Simulation results of the transient responses for the multiple inverted pendulum system observed on the moving cart.

(a)  $t=0-0.06$  sec; (b)  $t=0.06-0.23$  sec; (c)  $t=0.23-0.63$  sec; (d)  $t=0.63-1.33$  sec; (e)  $t=1.33-2.23$  sec; (f)  $t=2.23-3.03$  sec; (g)  $t=3.03-3.93$  sec.

て行く。

③およそ数秒程度で、3本の直列振り子が安定に倒立する。

つぎに、Fig. 3は台車に同乗している観測者から見た3本の振り子の運動の様子を图示したものである。このとき、観測者からは台車は静止して見え、振り子のみが動いて見える。Fig. 3から、0.66秒経過後は、以下のような振り子系の過渡動作の特徴を読み取ることができる。

①振り子の傾き角  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  はおおむね同じ方向に動く。

②  $\theta_3, \theta_2, \theta_1$  の順に絶対値が小さくなっている。

③3本の振り子があたかも1本の弦のように一体となって、垂直に倒立して行く。

④その際、振り子1の支点が波の節となり、振り子3の先端が波の腹となり、波の振幅が次第に減衰して行く。

#### 4. むすび

$n$ 本の直列倒立振り子系のフィードバック制御問題を考察した。 $n$ 本の並列倒立振り子系では、可制御性が成立しない場合でも、直列倒立振り子系の場合には、可制

御性が保証されることを指摘し、さらに、適当な状態フィードバックを施すことにより、安定に倒立させ得ることを数値シミュレーションにより確認した。

### 謝 辞

シミュレーションプログラムの作成に御協力頂いた元本学大学院生森 秀樹、鶴田 和久の両氏に感謝致します。

### 文 献

- 1) 森 正三, 西原裕善, 古田勝久: “倒立振り子制御用ハイブリッド制御系”, 計測自動制御学会論文集, 12, 4, pp. 116-121 (1976-08)
- 2) 梶原宏之, 小菅一弘, 古田勝久: “傾斜されたレール上の二重倒立振り子の位置制御”, 計測自動制御学会論文集, 15, 7, pp. 873-879 (1979-12)
- 3) 辻沢隆彦, 余湖静也, 田川遼三郎: “2次元倒立振り子の制御”, 計測自動制御学会論文集, 19, 12, pp. 964-969 (1983-12)
- 4) 美多 勉, 原 辰次, 近藤 良: “基礎デジタル制御”, コロナ社 (1988)
- 5) 平井一正, 新堂尚紀: “複合システムの協調動作—n本倒立振り子の場合”, 電子情報通信学会論文誌(A), J74-A, 12, pp. 1748-1754 (1991-12)

### 付録1. 式(1), (2)の誘導

振り子*i*の重心の位置を $x_i$ ,  $y_i$ とすれば,

$$x_i = x + 2 \sum_{j=1}^{i-1} L_j \sin \theta_j + L_i \sin \theta_i; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$$y_i = 2 \sum_{j=1}^{i-1} L_j \cos \theta_j + L_i \cos \theta_i; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A} \cdot 2)$$

となるから,

台車の運動エネルギー関数:  $K_x$

台車の位置エネルギー関数:  $U_x$

台車の損失エネルギー関数:  $D_x$

振り子*i*の運動エネルギー関数:  $K_i$

振り子*i*の位置エネルギー関数:  $U_i$

振り子*i*の損失エネルギー関数:  $D_i$

は次式で表わされる。

$$K_x = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (\text{A} \cdot 3)$$

$$U_x = 0 \quad (\text{A} \cdot 4)$$

$$D_x = \frac{1}{2} \nu \dot{x}^2 \quad (\text{A} \cdot 5)$$

$$K_i = \frac{1}{2} J_i \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

$$U_i = m g y_i \quad (\text{A} \cdot 7)$$

$$D_i = \frac{1}{2} \mu \dot{\theta}_i^2 \quad (\text{A} \cdot 8)$$

したがって、振り子の運動エネルギー関数  $K$ , 位置エネルギー関数  $U$ , 損失エネルギー関数  $D$  は

$$K = K_x + K_1 + K_2 + \dots + K_n \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$$U = U_x + U_1 + U_2 + \dots + U_n \quad (\text{A} \cdot 9)$$

$$D = D_x + D_1 + D_2 + \dots + D_n \quad (\text{A} \cdot 10)$$

となるから、ラグランジュの運動方程式から

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta K}{\delta \dot{x}} - \frac{\delta K}{\delta x} + \frac{\delta U}{\delta x} + \frac{\delta D}{\delta x} = u \quad (\text{A} \cdot 11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta K}{\delta \dot{\theta}_i} - \frac{\delta K}{\delta \theta_i} + \frac{\delta U}{\delta \theta_i} + \frac{\delta D}{\delta \theta_i} = 0; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (\text{A} \cdot 12)$$

を得る。これらの式から式(1), (2)が導かれる。

### 付録2. $n=2$ の場合のA, b

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A} \cdot 13)$$

$$b = [0 \quad 0 \quad 0 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6]^T \quad (\text{A} \cdot 14)$$

ただし,  $a_{42} \sim a_{66}$  および  $b_4 \sim b_6$  は次式で表わされる。

$$a_{42} = -6L_1^2 L_2^2 m_2 (2m_1 + m_2) (m_1 + 2m_2) g$$

$$a_{52} = 3L_1 L_2^2 m_2 (4M + 4m_1 + m_2) (m_1 + 2m_2) g$$

$$a_{62} = -9L_1^2 L_2 m_2 (2M + m_1) (m_1 + 2m_2) g$$

$$a_{43} = 6L_1^2 L_2^2 m_1 m_2^2 g$$

$$a_{53} = -9L_1 L_2^2 (2M + m_1) m_2^2 g$$

$$a_{63} = 3L_1^2 L_2 \{ 4M(m_1 + 3m_2) + m_1(m_1 + 4m_2) \} m_2^2 g$$

$$a_{44} = -4L_1^2 L_2^2 (4m_1 + 3m_2) m_2 \nu$$

$$a_{54} = 6L_1 L_2^2 (2m_1 + m_2) m_2 \nu$$

$$a_{64} = -6L_1^2 L_2 m_1 m_2 \nu$$

$$a_{45} = 6L_1 L_2^2 (2m_1 + m_2) m_2 \mu_1$$

$$a_{55} = -3L_2^2 (4M + 4m_1 + m_2) m_2 \mu_1$$

$$a_{65} = 9L_1 L_2 (2M + m_1) m_2 \mu_1$$

$$a_{46} = -6L_1^2 L_2 m_1 m_2 \mu_2 \qquad b_6 = 6L_1^2 L_2 m_1 m_2 \qquad (\text{A} \cdot 15)$$

$$a_{56} = 9L_1 L_2 (2M + m_1) m_2 \mu_2$$

ここで

$$a_{66} = -3L_1^2 \{ 4M (m_1 + 3m_2)$$

$$s = 4L_1^2 L_2^2 \{ (4m_1 + 3m_2)M + (m_1 + m_2)m_1 \} m_2 \qquad (\text{A} \cdot 16)$$

$$+ m_1(m_1 + 4m_2) \} m_2 \mu_2$$

$$b_4 = 4L_1^2 L_2^2 (4m_1 + 3m_2) m_2$$

とする。

$$b_5 = -6L_1 L_2^2 (2m_1 + m_2) m_2$$