言語に関する2，3の構造方程式の極小解について

鹿児島大学理学部紀要（数学・物理・化学），
No. 8, p. 17-21, 1975.

言語に関する2,3の構造方程式の極小解について

富樫　昭・藤野精一

(1975年9月30日　受理)

On minimal solutions of some structural equations of languages

By

Akira TOGASI and Seiiti HUZINO

Abstract

In this paper we shall study on minimal solutions of some structural equations of languages. It is shown that several minimal solutions exist in the same equation and properties of solutions are deduced from the structure of the equation.

1° 構造方程式の極小解

アルファベット $\Sigma=\{a, b\}$ 上の言語 $L_1=\{(ab)^n \mid n=0, 1, 2, \cdots\}=\{\lambda, ab, abab, \cdots, (ab)^n, \cdots\}$ は，構造方程式

$$\partial_a L = bL \tag{1.1}$$

の1解となっている。

$$\begin{aligned}\partial_a L_1 &= \{b, bab, \cdots, b(ab)^{n-1}, \cdots\} \\ &= b\{\lambda, ab, \cdots, (ab)^n, \cdots\} \\ &= bL_1\end{aligned}$$

(1.1) の解は L_1 のみとはかぎらない。たとえば，次の言語 L_2, L_3 も (1.1) の解である。

$$L_2 = L_1\cdot\{\lambda, bab, bbb\}$$
$$L_3 = L_1\cdot\{\lambda, ba, baa, \cdots, ba^n, \cdots\}$$

この L_1, L_2 および L_3 の間には集合の包含関係

$$L_1 \subset L_2, \text{ および } L_1 \subset L_3$$

が成立する。

次のような定義をしよう。

定義 1 構造方程式の解のうちで，その解の（空でない）任意の部分集合が，与えられた構造方程式の解となっていない解を，この方程式の極小解 (minimal solution) という。

定理 1 L_1 は構造方程式 (1.1) の極小解である。

証明 まず次のことを証明しよう。

L が (1.1) の解であるための必要かつ十分条件は，L がある言語 $L_0 \subset Ker(\partial_a)$ に対して方

Akira Togasi (Department of Mathematics, Kagoshima University.)
Seiiti Huzino (Department of Mathematics, Kyushu University).

程式

$$L = L_0 + abL \tag{1.2}$$

を満足することである。ここに，$Ker(\partial_a)$ は ∂_a の核，すなわち，言語 $\{w \mid w \in \Sigma^*,\ \partial_a\{w\} = \phi\}$，したがって，$Ker\ (\partial_a) = \lambda + b \cdot \Sigma^*$ である。

イ）必要なること

L が (1.1) を満足するとする。任意の言語 L に対して，恒等式

$$L = a\,\partial_a L + b\,\partial_b L + \delta_\lambda\ (L),$$

ここに

$$\delta_\lambda\ (L) = \begin{cases} \lambda & (\lambda \in L), \\ \phi & (\lambda \notin L), \end{cases}$$

が成立するので ([1])，(1.1) を満足する L に対しては

$$L = abL + b\partial_b L + \delta_\lambda\ (L)$$

となる。$L_0 \equiv b\partial_b L + \delta_\lambda(L)$ ととれば，あきらかに，$L_0 \subset Ker(\partial_a)$，すなわち $\partial_a L_0 = \phi$ となって，L は

$$L = L_0 + abL$$

を満足する。

ロ）十分なること

L が方程式 (1.2) を満足するとする。このとき，$\partial_a L_0 = \phi$ であるから，

$$\begin{aligned} \partial_a L &= \partial_a\ (L_0 + abL) \\ &= \partial_a\ (abL) \\ &= bL \end{aligned}$$

となり，L は (1.1) を満足することがわかる。このことから，L が (1.1) の極小解であるための必要十分条件は“L が方程式 (1.2) の最小不動点 (least fixed point) であること”であることがわかる。最小不動点の求め方はよく知られている。(たとえば [2])

(1.2) の最小不動点は，反復過程

$$\begin{cases} L^{(p+1)} = L_0 + abL^{(p)} \\ L^{(0)} = \phi \quad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases} \tag{1.3}$$

によって得られる言語列 $\{L^{(p)}\}_{p=0,1,2,\cdots}$ の極限集合である。

$$\begin{aligned} L &= L_0 + abL_0 + (ab)^2 L_0 + \cdots \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (ab)^n\right] \cdot L_0 \\ &= L_1 \cdot L_0 \end{aligned}$$

$L_0 \subset Ker(\partial_a) \equiv \lambda + b \cdot \Sigma^*$ であることと，L_1 の構造から，言語 $L_1 \cdot L_0$ は L_0 をふくむ極小解であることがわかる。$\lambda \in L_1$ であり，$L_0 = \lambda L_0 \subset L_1 \cdot L_0$，かつ $L_1 \cdot L_0$ は (1.2) の最小不動点であるからである。このような L_0 を極小解の基底とよぶ。したがって，$L_1 = \{(ab)^n \mid n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ は基底 L_0 をとくに $\{\lambda\}$ ととったときの極小解である。(証終)

この定理の証明の経過からわかるように，構造方程式 (1.1) の極小解は無数にあること，また基底 L_0 を定めれば，L_0 に対して極小解は一意に定まることがわかる。

一般に構造方程式の極小解は，1つとはかぎらないことに注意せよ。

さて，前と同様にして，$\Sigma = \{a,\ b\}$ 上の構造方程式

$$\partial_a L = Lb \tag{1.4}$$

の極小解の1つは

$$L_4 = \{a^n b^n \mid n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$$
$$= \{\lambda,\ ab,\ aabb,\ \cdots,\ a^n b^n,\ \cdots\}$$

であることがわかる。

$$\partial_a L_4 = \{b,\ abb,\ aabbb,\ \cdots,\ a^{n-1} b^n,\ \cdots\}$$
$$= \{\lambda,\ ab,\ aabb,\ \cdots,\ a^n b^n,\ \cdots\}\cdot b$$
$$= L_4 b$$

このような構造方程式の極小解を求めることは，解となる言語の特性を調べる上にも重要である。

定理 2　$\Sigma = \{a,\ b\}$ 上の構造方程式

$$\partial_a L = L \cdot b$$

を満足するすべての極小解は正則（regular）ではない。

証明　帰納的に（1.4）の解 L は構造方程式

$$\partial_{a^m} L = L \cdot b^m \quad (m = 1,\ 2,\ \cdots) \tag{1.5}$$

を満足することがわかる。

まず，$m=1$ のときは，L の仮定から自明である。($\partial_a L = L \cdot b$) いま m のとき，L が (1.5) を満足するとすると，

$$\partial_{a^{m+1}} L = \partial_a\ (\partial_{a^m} L)$$
$$= \partial_a\ (L \cdot b^m)$$
$$= (\partial_a L) \cdot b^m + \delta_\lambda\ (L) \cdot \partial_a\ \{b^m\}$$
$$= (\partial_a L) \cdot b^m$$
$$= (L \cdot b) \cdot b^m$$
$$= L \cdot b^{m+1}$$

となり帰納法が成立する。

このことは，L に対する言語の族 $\{\partial_{a^m} L \mid m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$（ただし，$\partial_{a^0} L = L$）の中の集合 $\partial_{a^m} L$ は，すべて集合として異なっていることを示す。導集合写像（derivative mapping）∂_a に関する定理（[3]）により L は正則ではないことが直ちにかわる。（証終）

実際 $L_4 = \{a^n b^n \mid n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ は正則ではない自由言語（context free language）である。

2°　方程式 $\partial_a L = L^2$ および $\partial_a L + \partial_b L = L^2$ の極小解について

つぎに，[3] で残した若干の方程式の解ならびに極小解について考察する。いま L_0 を $Ker(\partial_a) \equiv \{w \mid w \in \Sigma^*,\ \partial_a w = \phi\}$ の部分集合で，とくに有限集合とする。このとき，生成規則の集合

$$\begin{cases} \alpha \to u & (u \in L_0) \\ \alpha \to a\alpha\alpha \end{cases}$$

を P とする文法 $G = \langle N,\ \Sigma,\ P,\ \alpha \rangle$（ここに，$N = \{\alpha\}$）によって生成される言語 $L(G)$ を L_5 と記すことにする。

定理 3　L_5 は $\Sigma = \{a,\ b\}$ 上の構造方程式

$$\partial_a L = L^2$$

の1解である。

証明 任意の $w\in\partial_a L_5$ をとる。このとき，$aw\in L_5$ である。$L_0\subset Ker(\partial_a)$ であるから，$aw\in L_5\text{-}L_0$，したがって

$$\alpha \overset{1}{\Rightarrow} a\,\alpha\alpha \overset{*}{\Rightarrow} aw$$

すなわち，$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} u$，$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} v$，$w=uv$ となる u，$v\in L_5$ が存在する。ゆえに，$w=u\cdot v\in L_5\cdot L_5$，すなわち，$\partial_a L_5\subset L_5^2$ がいえた。逆に，任意の $w\in L_5^2$ に対して，$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} u$，$\alpha \overset{*}{\Rightarrow} v$ かつ $w=uv$ となる u，$v\in L_5$ が存在する。このとき，$auv\in L_5$ である。何となれば

$$\alpha \to a\,\alpha\alpha \overset{*}{\Rightarrow} auv\in L_5$$

したがって，$uv\in\partial_a L_5$ となり，$L_5^2\subset\partial_a L_5$ がいえる。このことと，上のこととあわせて

$$\partial_a L_5 = L_5^2$$ (証終)

定理 4 L_5 は構造方程式 $\partial_a L=L^2$ の極小解である。

証明 L が $\partial_a L=L^2$ の極小解であるための必要かつ十分条件は，L がある $L_0\subset Ker(\partial_a)$ に対して，方程式

$$L = L_0 + aL^2$$

を満足することである。このことは定理1の場合と同様に示される。したがって，極小解を求めるかわりに，$L=L_0+aL^2$ の最小不動点を求めればよいことがわかる。この最小不動点が L_5 であることはよく知られている（[2]） (証終)

つぎに，$\Sigma=\{a,\ b\}$ 上で構造方程式

$$\partial_a L + \partial_b L = L^2$$

を考えよう。次の結果が得られる。

定理 5 生成規則の集合

$$\begin{cases} \alpha\to\lambda \\ \alpha\to a\,\alpha\alpha \\ \alpha\to b\,\alpha\alpha \end{cases}$$

を P とする文法 $G=\langle N,\ \Sigma,\ P,\ \alpha\rangle$（ただし，$N=\{\alpha\}$）によって生成される言語 $L(G)$ は，構造方程式

$$\partial_a L + \partial_b L = L^2$$

の解である。

証明 $L(G)$ は方程式

$$L = L_0 + aL^2 + bL^2 \qquad \text{ただし，} L_0=\{\lambda\}$$

の最小不動点である。

$$L(G) = L_0 + a\,(L(G))^2 + b\,(L(G))^2$$

したがって

$$\partial_a L(G) = (L(G))^2$$
$$\partial_b L(G) = (L(G))^2$$

このことから

$$\begin{aligned}\partial_a L(G) + \partial_b L(G) &= (L(G))^2 + (L(G))^2 \\ &= (L(G))^2\end{aligned}$$

となり，$L(G)$ が，与えられた構造方程式の解であることがわかる。 (証終)

定理 6 $\partial_a L=L^2$ または $\partial_b L=L^2$ の，$\{\lambda\}$ を基底とする極小解は $\partial_a L+\partial_b L=L^2$ の極小解である。

証明 任意の言語 L は恒等式

$$L = a\cdot\partial_a L + b\cdot\partial_b L + \delta_\lambda(L)$$

を満足する。いま L を $\partial_a L = L^2$ の，$\{\lambda\}$ を基底にする極小解とすると，

$$L = aL^2 + b\cdot\partial_b L + \delta_\lambda(L)$$

定理4の証明より L は，ある $L_0 \subset Ker(\partial_a)$ に対して $L = aL^2 + L_0$ を満足する。仮定より，$L_0 = \{\lambda\}$ である。この2つの式より $L_0 = b\cdot\partial_b L + \delta_\lambda(L)$ となる。$\lambda \in L$ であるから，$\delta_\lambda(L) = \lambda$ となり，$L_0 = \lambda + b\cdot\partial_b L$，したがって $\partial_b L = \phi$ となる。$\partial_a L = L^2$，$\partial_b L = \phi$ であるから

$$\partial_a L + \partial_b L = L^2$$

を得る。

$\partial_b L = L^2$ の，$\{\lambda\}$ を基底とする極小解についても同様である。 (証終)

参考文献

[1] J.A. Brzozowski: Derivatives of Regular Expressions, J. ACM. 11 (1964), 481–494

[2] S. Ginsburg: The Mathematical Theory of Context Free Languages, McGraw-Hill Book Co. (1966), 232pp

[3] S. Huzino: On Some Properties of Derivative-Mappings, Structural Diagrams and Structural Equations, Part I, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. 20 (1966), 179–265