数理解析研究所講究録
271巻 1976年 45-53

局所係数を持つコホモロジー理論の一般化とその応用

広島大 理　安井 孜

ordinary cohomology theory を一般化した generalized cohomology theory は代数的位相幾何学の有力な道具になっているが、対応する局所系を係数に持つ cohomology theory の一般化についてはどうであろうか。それが今後有力になるかどうか予想はつかないが、今回は J. C. Becker [1] の一般化の定義を採用すれば、generalized cohomology theory で成立する命題の多くは拡張された形で成立する事をみてゆく。

§1 定義

定義 1 [1]　B を（基点 b_0 を持つ）位相空間とする。この時、finite cell complex の対 (X, A) と連続写像 $f: X \longrightarrow B$ との組 $(X, A; f)$ を object とし、連続写像 $g: (X, A) \longrightarrow (X', A')$ で $f' \circ g = f$ をみたすものを $g: (X, A; f)$

$\longrightarrow (X', A'; f')$ とかき morphism とする category を $\mathcal{P}(B)$ とする。

定義2.[1]　h^n は $\mathcal{P}(B)$ から abel 群の category への contravariant functor の列、$d^n: h^n T \longrightarrow h^{n+1}$ は natural transformation の列とする。但し、$T: \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ は $T(X, A; f) = (A, \phi; f|A)$ で定まる functor とする。h^n, d^n が次の (i)〜(iii) をみたす時 (h^n, d^n) を cohomology theory on $\mathcal{P}(B)$ という。

(i) (homotopy axiom)　$I = [0, 1]$ と置き、$i_0: (X, A) \longrightarrow (X, A) \times I$ を $i_0(x) = (x, 0)$ で定める。更に $\mathcal{P}(B) \ni ((X, A) \times I; F)$ とし、$F \circ i_0 = f_0$ と置く。この時 $h^n(i_0): h^n(X \times I, A \times I; F) \longrightarrow h^n(X, A; f_0)$ は全ての n で同型である。

(ii) (exactness axiom)　$(X, A; f) \in \mathcal{P}(B)$ に対し、$i: (A; f|A) \longrightarrow (X; f)$, $j: (X; f) \longrightarrow (X, A; f)$ は共に $\mathcal{P}(B)$ に属し、次の sequence は exact である。

$$\xrightarrow{d^{n-1}} h^n(X, A; f) \xrightarrow{h^n(j)} h^n(X; f) \xrightarrow{h^n(i)} h^n(A; f|A) \xrightarrow{d^n} h^{n+1}(X, A; f) \longrightarrow$$

(iii) (excision axiom)　A_1, A_2 は finite cell complex X の subcomplex で $A_1 \cup A_2 = X$ とする。この時 $i: (A_1, A_1 \cap A_2; f|A_1) \longrightarrow (X, A_2; f) \in \mathcal{P}(B)$ に対し、$h^n(i): h^n(X, A_2; f)$

$\longrightarrow h^n(A_1, A_1 \cap A_2; f|A_1)$ は全ての n で同型である。

$b_0 \in B$ への定値写像を同じ b_0 で表わし、その object が $(X, A; b_0)$ であるもの全体からなる $\mathcal{S}(B)$ の subcategory を $\mathcal{S}_0(B)$ とかく。$\mathcal{S}(B)$ 上の cohomology theory を $\mathcal{S}_0(B)$ に制限すると定義2(i)は普通の homotopy axiom を導き、$\mathcal{S}_0(B)$ 上の cohomology theory は generalized cohomology theory になる。triple の exact sequence, Mayer-Vietoris の exact sequence が存在する事は定義2(ii),(iii)から容易にわかる。

§2 h-fibration と spectral sequence

$\pi: E \longrightarrow X$ と X の p-skeleton X_p とに対して、$\pi^{-1}(X_p) = E_p$ は finite cell complex とし、E の subcomplex E' に対して $\pi^{-1}(X_p) \cap E'$ は E_p の subcomplex とする。$f: X \to B$ とする。この時

$$D^{p,q} = h^{p+q}(E_p, E_p \cap E'; f\pi)$$
$$E^{p,q} = h^{p+q}(E_p, E_{p-1} \cup (E_p \cap E'); f\pi)$$

とおくと exact couple が構成される。対応する spectral sequence は $F_p^n = \ker\left(h^n(E, E'; f\pi) \longrightarrow h^n(E_{p-1}, E_{p-1} \cap E'; f\pi)\right)$ とおくと $E_\infty^{p,q} = F_p^{p+q} / F_{p+1}^{p+q}$ に収束する。$\{F_p^n\}_p$ は収束す

る filtration である。問題は spectral sequence の E_1-, E_2-term である。

定義3　$\pi: E \to X$ が次の条件を満たす時、これを h-fibration という。「任意の $f: X \to B$、X の任意の cell Δ、Δ の任意の頂点 v とに対し、$h^n(\pi^{-1}(\Delta); f\pi) \to h^{n-1}(\pi^{-1}(v); f\pi)$ が全ての n で同型である。」更に E の subcomplex E' に対して $\pi|E'; E' \to X$ も h-fibration の時 $\pi; (E, E') \to X$ は relative h-fibration とよぶ。

定理1　relative h-fibration $\pi: (E, E') \to X$ と $f: X \to B$ とを与える。X の各頂点 v に対し $h^n(\pi^{-1}(v), \pi^{-1}(v) \cap E'; f\pi)$ を対応させ、1-cell $[v_0, v_1]$ に対し $\eta_{[v_0, v_1]}: h^n(\pi^{-1}(v_1), \pi^{-1}(v_1) \cap E'; f\pi) \xleftarrow{\approx} h^n(\pi^{-1}([v_0, v_1]), \pi^{-1}([v_0, v_1]) \cap E'; f\pi) \xrightarrow{\approx} h^n(\pi^{-1}(v_0), \pi^{-1}(v_0) \cap E'; f\pi)$ を対応させる事により X 上に局所系 $\underline{h^n(F, F \cap E'; f\pi)}$ が定まる。但し $F = \pi^{-1}(x_0)$ で x_0 は X の基点とする。この時先に構成された spectral sequence において

$$E_1^{p,q} \approx C^p(X; \underline{h^q(F, F \cap E'; f\pi)})$$

$$E_2^{p,q} \approx H^p(X; \underline{h^q(F, F \cap E'; f\pi)})$$

が成立する。

この定理より直ちに次の系が導かれる。

系1　h, h' を $\mathcal{S}(B)$ 上の cohomology theory とする。$\tau : h \to h'$ が natural transformation で $\tau(*;b_0) : h^i(*;b_0) \to h'^i(*;b_0)$ が全ての i で同型ならば、任意の $(X,A;f) \in \mathcal{S}(B)$ に対して $\tau(X,A;f) : h^i(X,A;f) \to h'^i(X,A;f)$ は全ての i で同型である。

系2　$\mathcal{S}(B)$ 上の cohomology theory h が $i \neq 0$ に対して $h^i(*;b_0) = 0$ をみたすならば $h^n(X,A;f) \approx H^n(X,A;h^0(*;f))$ が任意の $(X,A;f) \in \mathcal{S}(B)$ に対して成立する。

§3　積について

定義4　基点 b_0 を持つ空間 B は基点を保つ写像 $\mu : B \times B \to B$ を持つとする。$\mathcal{S}(B)$ 上の cohomology theory h が次の (i) (ii) を満たす natural pairing $\eta : h^p(X,A;f) \otimes h^q(X',A';f') \to h^{p+q}((X,A)\times(X',A');\mu(f\times f'))$ を持つ時 h は multiplicative という。

(i)　$\mathcal{S}_0(B)$ に制限すると、η は bilinear, associative, commutative かつ unit $1 \in h^0(S^0 * ; b_0)$ を持つ。

(ii)　次の diagram は可換である。

$$\begin{tikzcd}
h^p(A;f)\otimes h^q(X',A';f') \arrow[r, "\mu"] \arrow[dd, "\delta\otimes 1"'] & h^{p+q}(A\times(X',A');\mu(f\times f')) \arrow[d, "\approx"', "(excision)"] \\
 & h^{p+q}(X\times B\cup A\times Y, X\times B;\mu(f\times f')) \arrow[d, "\delta"'] \\
h^{p+1}(X,A;f)\otimes h^q(X',A';f') \arrow[r, "\mu"] & h^{p+q+1}((X,A)\times(X',A');\mu(f\times f'))
\end{tikzcd}$$

対角線写像 $X \longrightarrow X\times X$ を用いて cup 積を定義する。$\mathcal{S}_0(B)$ で考えると generalized cohomology theory における cup 積になるが、$\mathcal{S}(B)$ 上では $h^*(X,A;f)$ は必ずしも ring にならないし、$h^*(*;b_0)$-module にもならない。しかし次の事は成立する。

補題　$\pi:(E,E')\longrightarrow X$ を relative h-fibration、X は連結で基点 x_0 に対し $\pi^{-1}(x_0)=F$ とする。$f:X\longrightarrow B$ に対して $\{a_i\in h^{n_i}(E,E';f\pi)\}_{i=1}^{r}$ が $h^*(F,F\cap E';b_0)$ の $h^*(*;b_0)$-module としての basis になるならば、任意の $g:X\longrightarrow B$ $(g(x_0)=b_0)$ と X の任意の頂点 v とに対して、$h^n(\pi^{-1}(v),\pi^{-1}(v)\cap E';\mu(g\pi,f\pi))$ の任意の元 u は $u_1a_1+\cdots+u_r\cdot a_r$ $(u_i\in h^{n-n_i}(*;g(v)),\ i=1,\cdots,r)$ と一意的に書ける。

従って Leray-Hirsch 及び Dold-Thom 型の定理は次の様

に拡張される。

定理2　補題の仮定のもとで $\rho: \bigoplus_{i=1}^{r} h^{n-n_i}(X;g) \longrightarrow h^n(E,E';\mu(g\pi,f\pi))$ を $\rho(x_1,\cdots,x_r)=x_1a_1+\cdots+x_ra_r$ で定めれば、ρ は同型（abel群として）になる。

定理3　$\pi: E\longrightarrow X$ は n-disc bundle、$\pi|E': E'\longrightarrow X$ は対応する sphere bundle とする。更に $f: X\longrightarrow B$ $(f(x_0)=b_0)$ に対して $h^*(*;b_0)$-module $h^*(D^n,S^{n-1};b_0)$ の base となる $U\in h^n(E,E';f\pi)$ が存在したとする。この時任意の $g: X\longrightarrow B$ に対して $\Phi(U,g): h^p(X;g)\longrightarrow h^{p+n}(E,E';\mu(g\pi,f\pi))$ を $\Phi(U,g)(x)=\pi^*(x)\cdot U$ で定めると $\Phi(U,g)$ は同型になる。

対応する Gysin sequence は次の様になる。$s: X\longrightarrow E$ を zero section、$j: E\subset(E,E')$, $i: E'\subset E$ とし、$\Psi(U,g)=s^*j^*\Phi(U,g)$, $s^*j^*U=\chi$ とおくと

$$\longrightarrow h^{p+n-1}(E';\mu(g\pi,f\pi))\longrightarrow h^p(X;g)\xrightarrow{\Psi(U,g)} h^{p+n}(X;\mu(g,f))\longrightarrow h^{p+n}(E';\mu(g\pi,f\pi))$$

は exact で $\Psi(U,g)(x)=x\cdot\chi$ とかける。

B を適当にとれば各（ring）spectrum に対応して $\mathcal{S}(B)$ 上の（multiplicative）cohomology theory が構成できる［1］が、有効な例は多くはみつかっていない。

§4　spectrum と $H^*(\ ;\mathcal{Q})$

F を fiber に持つ fiber space $p: E \to B$ とその切断 $\Delta: B \to E$ とを $\mathcal{E} = (E, p, B, F, \Delta)$ とかき、$\lambda: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ は $\lambda: E \to E'$ で $p = p'\lambda$、$\lambda\Delta = \Delta'$ をみたすものを表わす。$\mathcal{E}$ に対し $\Omega_B E = \{\gamma: I \to E \mid \exists\, b \in B \text{ s.t. } \gamma(I) \subset p^{-1}(b),\ \gamma(0) = \gamma(1) = \Delta(b)\}$、$\Omega_B(p)(\gamma) = \gamma(1)$、$\Omega_B(\Delta)(b)(t) = \Delta(b)$ とおくと $\Omega_B\mathcal{E} = (\Omega_B E, \Omega_B(p), B, \Omega F, \Omega_B(\Delta))$ が構成される。$\mathbb{E} = \{\mathcal{E}_k, \lambda_k: \mathcal{E}_k \to \Omega_B \mathcal{E}_{k+1}\}$ を B 上の spectrum という事にする。$\mathcal{L}(X, A, f; \mathcal{E}_k) = \{g: X \to E_k \mid pg = f,\ g|A = \Delta f|A\}$ とおくと $\mathcal{L}(X, A, f; \Omega_B\mathcal{E}_k) \approx \Omega\mathcal{L}(X, A, f; \mathcal{E}_k)$ が成立し、普通の意味で spectrum が構成される。$h^n(X, A; f) = \pi_{-n}(\{\mathcal{L}(X, A, f; \mathcal{E}_k)\})$ とおくと $\mathcal{P}(B)$ 上の cohomology theory になる[1]。

そこで群 π と abel 群 G と準同型 $\varphi: \pi \to \mathrm{aut}\, G$ とを与える。すると $\tilde{\varphi}: \pi \to \mathrm{Homeo}(K(G,n),*)$ が $\varphi = \tilde{\varphi}_*: \pi \to \mathrm{aut}(\pi_n(K(G,n)))$ となる様に定まる。$K(\pi,1)$ の普遍被覆を $\widetilde{K(\pi,1)}$ で表わし、$K_\varphi(G,n) = \widetilde{K(\pi,1)} \times_{\tilde{\varphi}} K(G,n)$ とおく。$p_k: K_\varphi(G,k) \to K(\pi,1)$ は切断 Δ_k を持つ fiber space になる。$\mathcal{K}(G,k) = (K_\varphi(G,k), p_k, K(\pi,1), K(G,k), \Delta_k)$ と π-equivariant homotopy 同値 $\lambda_k: K(G,k) \to \Omega K(G,k+1)$ から導かれる fiber homotopy 同値 $\lambda_k: \mathcal{K}(G,k) \to \Omega_{K(\pi,1)}\mathcal{K}(G,k+1)$ とより $K(\pi,1)$ 上の spectrum $\{\mathcal{K}(G,k), \lambda_k\}$ が定まる。この spectrum に対して定まる $\mathcal{P}(K(\pi,1))$ 上の

cohomology theory は

$$h^n(X, A ; f) = \pi_{-n}(\{K(G, k), \lambda_k\})$$
$$= \pi_0(\mathcal{L}(X, A, f ; K(G, n))).$$

特に $h^n(* ; b_0) = 0 \ (n \neq 0)$, $h^0(* ; b_0) = G$ だから、$f : X \to K(\pi, 1)$ より定まる X 上の局所系を $f^*\underline{G}$ で表わし、f の $K_\varphi(G, n)$ への lifting の homotopy class 全体の集合を $[X, K_\varphi(G, n)]_f$ で表わせば

$$H^n(X ; f^*\underline{G}) = [X, K_\varphi(G, n)]_f$$

が成立する。これは既に知られている結果であるが、その一つの証明である。

文献

[1] J. C. Becker, Extending of cohomology theories, Illinois J. Math. 14 (1970), 551 – 584.

[2] E. Dyer, Cohomology Theories.