

## 三点曲げを受ける積層はりの支持点中央に位置する 界面はく離の進展解析\*

戸 谷 眞 之<sup>\*1</sup>, 小 野 孝<sup>\*2</sup>  
宮 脇 正<sup>\*2</sup>, 桐 岡 健<sup>\*1</sup>

### Analyses of Delamination Located at the Center of Supports of a Laminated Beam Subjected to Three-Point Bending

Masayuki TOYA, Takashi ONO,  
Tadashi MIYAWAKI and Ken KIRIOKA

Delamination or interfacial cracking in a two-layer laminated beam subjected to three-point bending is analyzed. The initial partial debonding is assumed to locate at the center of the beam and to symmetrically spread toward both ends along the bond-line. The compliance and energy release rate are derived on the basis of an elementary beam theory. The results are shown to compare well with those based on the finite-element method. It is also shown that the delamination process is generally of a mixed-mode type; i. e., both mode I and II deformation near the crack tips contribute to the cracking process.

**Key Words:** Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Beam, Beam Theory, Three-Point Bending, Energy Release Rate, Finite-Element Method

#### 1. 結 言

せん維強化材料は重ね合わせて積層板として用いられることが多いが、このような積層板はせん維方向の引張りには強いが板の面に垂直に作用する荷重に対しては比較的弱く、例えば衝撃荷重によってたやすく層間はく離が生じる。積層板を実際の構造部材に用いる際にはあらかじめこのような層間はく離の存在を仮定しそれがいかなる負荷のもとで拡がるかを把握しておくことが重要である。この理由から積層はりのはく離に関して、破壊力学に基礎をおく多くの研究が行われるようになった。

従来の研究対象の多くは、はく離が材端を起点としはりの軸方向に中央部に向かって進行する試験片(DCB, ENF試験等)に向けられてきた<sup>(1)</sup>。積層板の材端の界面は、応力の特異場となっているから材端を起点とするこれらのはく離モデルは、実際の構造部材への応用上重要である。著者らは、接着された補修板のはがれのモデルとして接着部の両端を起点とするはく離の曲げによる進展の解析を行った<sup>(2)</sup>。

一方、はく離が板の中央部に存在し、それが材端に向かって左右に進展するモデル(図1参照)も初期はく離のモデルとして重要である。しかしこのモデルの解析は、はりの軸方向の圧縮や板の二軸圧縮のもとで、はく離部分が挫屈を起こして進展する場合<sup>(3)(4)</sup>やブリストア試験<sup>(5)</sup>、および Maikuma らによる最近の研究例<sup>(6)(7)</sup>を除いては、十分なされているとは言えない。

そこで本論文では、図1に示す積層はりの中央部にあるはく離の三点曲げによる進展を解析する。最初にオイラー・ベルヌーイのはり理論(以下単純はり理論)によりコンプライアンスおよびエネルギー解放率の理論式を導く。次に有限要素法解析により理論の妥当性とその限界を調べる。図1のはく離進展は、本質的にモードI形とII形の混じり合った混合モードであることが明らかにされる。

#### 2. 単純はり理論に基づくはく離解析

**2.1 コンプライアンスの導出** 図1に示すような中央部に中心対称なはく離(界面き裂)を有する2本のはりを接着して作られた積層はりの三点曲げを考える。等方弾性体を仮定し、ヤング率および断面二次モーメントは上のはりについてはそれぞれ  $E_1, I_1$ 、下のはりについては  $E_2, I_2$  とする(なお直交異方性弾性

\* 原稿受付 平成3年7月29日。

<sup>\*1</sup> 正員、鹿児島大学工学部 (〒890 鹿児島市郡元1-21-40)。

<sup>\*2</sup> 学生員、鹿児島大学大学院。

体に対しても弾性主軸がはりの軸方向に一致する場合  
には以下の解析はそのまま成立する)。支点間距離を  $l$ 、  
上下のはりの厚さをそれぞれ  $h_1, h_2$ 、幅はともに  $b$  と  
し、界面に沿って中心対称に長さ  $c$  にわたってはく離  
しているものとする。荷重  $P$  が中央に負荷されている  
ときの負荷点のたわみ  $\delta$  を求めよう。この問題は  $E_1$   
 $=E_2, h_1=h_2$  の特別な場合につき最初 Maikuma ら<sup>(6)</sup>  
により解析された。

まずはく離部分 BD のたわみ曲線について考える。  
この部分を、図 2 (a) のようにヒンジで止められた重  
ねばりとみなすことにする。ヒンジの作用は上のはり  
に対しては、はりの両下すみ部に作用する水平方向の  
集中圧縮軸力 ( $Z$  とする)、下のはりに対しては、両上  
すみ部に作用する集中引張軸力 ( $-Z$ ) におきかえる  
ことができる。対称性を考慮して上下のはりの左半分  
だけを取り出した自由体線図を考えると図 2 (b) のよ  
うになる。上下のはりは、互いに接して分布荷重  
 $q(x)$  を及ぼしている (座標  $x$  は左端から測る)。この  
ほか、上下のはりには左端 ( $x=0$ ) に材端モーメント  
 $M_{10}, M_{20}$ 、せん断力  $\alpha'P/2, \beta'P/2$ 、右端 ( $x=c/2$ ) に材端  
モーメント  $M_{1c}, M_{2c}$ 、およびせん断力  $\alpha'P/2, \beta'P/2$  が  
作用している。ここで  $M_{10}, M_{20}, M_{1c}, M_{2c}, \alpha, \beta, \alpha', \beta'$   
は未知であり、これらの値はたわみ曲線を求める過程  
で決定される。ただし全体の釣合いを満足するため以  
下の関係式が成り立っている。

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha' + \beta' = 1$$

$$M_{10} + M_{20} = P(l - c)/4$$

$$M_{1c} + M_{2c} = Pl/4$$

..... (1)

上下のはりのそれぞれの中立軸の  $x$  点の断面に作用  
するモーメントを  $M_{x1}, M_{x2}$ 、たわみをそれぞれ  $y_1(x),$   
 $y_2(x)$  とすると (後の便宜のためにここでは上下のは  
りのたわみを区別しておく。また左端のたわみを零と  
する)

$$M_{x1} = M_1 + \alpha Px/2 + Zy_1$$

$$+ \int_0^x q(x')(x-x')dx' \dots\dots\dots (2)$$

$$M_{x2} = M_2 + \beta Px/2 - Zy_2$$

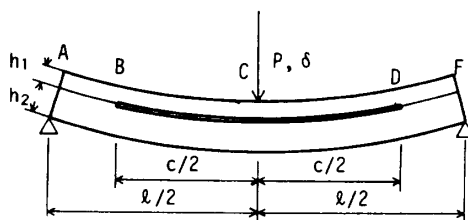


図 1 三点曲げによるはく離進展モデル

$$- \int_0^x q(x')(x-x')dx' \dots\dots\dots (3)$$

ここで

$$M_1 = M_{10} - h_1 Z/2, \quad M_2 = M_{20} - h_2 Z/2 \dots\dots\dots (4)$$

は、各はりの中立軸に関する材端モーメントである。  
したがってたわみの微分方程式は以下ようになる。

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M_{x1}}{D_1}, \quad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{M_{x2}}{D_2} \dots\dots\dots (5)$$

ただし

$$D_1 = E_1 I_1, \quad D_2 = E_2 I_2 \dots\dots\dots (6)$$

上下のはりのたわみ曲線は等しいとし (等しくない場  
合の解析は 4 章で行う)  $y_1 = y_2 = y$  とする。次に式 (5)  
を  $x$  で 2 階微分することにより、以下の式が得られ  
る。

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$q(x) = -Z \frac{d^2 y}{dx^2} \dots\dots\dots (8)$$

式 (7) の一般解は以下になる。

$$y = s_1 x^3 + s_2 x^2 + s_3 x \dots\dots\dots (9)$$

なお  $y$  は左端の支点から測るものとしてあるので定  
数項は零とおいてある。また  $x=c/2$  で傾きが零とい  
う条件より

$$3s_1 c^2/4 + s_2 c + s_3 = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式 (9) を式 (2), (3), (5) に代入して

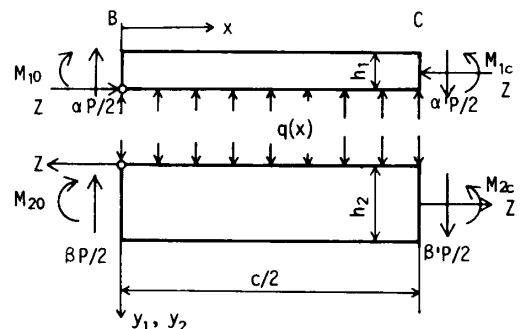
$$s_1 = -\alpha' P/(12D_1) = -\beta' P/(12D_2) \dots\dots\dots (11)$$

$$s_2 = -M_1/(2D_1) = -M_2/(2D_2) \dots\dots\dots (12)$$

式 (11), (12) および式 (1) より  $\alpha', \beta', M_1, M_2$  が決  
定され、それらの結果を再び式 (11), (12) に持ち込ん  
で  $s_1, s_2$  が決定される。すなわち



(a) 両端をヒンジで止められた重ねばりによるモデル化



(b) はく離部分の左半分の自由体線図

図 2 はく離部分の解析モデル

$$s_1 = -P/(12D) \quad \cdots \cdots \cdots (13)$$

$$s_2 = -\bar{M} \quad \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで

$$D = D_1 + D_2 \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$\bar{M} = \{-2hZ + P(l-c)\}/(8D) \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

$$h = h_1 + h_2$$

したがって式(10)より

$$s_3 = Pc^2/(16D) + c\bar{M} \quad \cdots \cdots \cdots (17)$$

最後に軸力  $Z$  を求めよう。上下のはりの互いに接している面の縦せん維の全伸びは等しいから

$$2 \int_0^{c/2} \epsilon_1 dx - \frac{Zc}{E_1 h_1 b} = 2 \int_0^{c/2} \epsilon_2 dx + \frac{Zc}{E_2 h_2 b} \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

ここで  $\epsilon_1, \epsilon_2$  は上下のせん維の伸びひずみで

$$\epsilon_1 = -\frac{h_1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \epsilon_2 = -\frac{h_2}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

で与えられる。式(9)および(13), (14), (17)を式(18)に代入すると以下の式が得られる。

$$\frac{Z}{P} = \frac{h(2l-c)D_0}{4(4D+h^2D_0)} = \frac{3}{4h}(2l-c) \left/ \left[ \left( \eta + \frac{1}{\zeta} \right) \times (1 + \zeta\eta^3) / \{ \eta(1+\eta)^2 + 3 \} \right] \right. \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

ここで

$$D_0 = b / \{ (E_1 h_1)^{-1} + (E_2 h_2)^{-1} \} \\ \zeta = E_1/E_2, \quad \eta = h_1/h_2 \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

すなわち軸力  $Z$  は荷重  $P$  に比例し、幅  $b$  に無関係で、またはく離長さ  $c$  の増大に比例して減少する。

着力点におけるたわみ、 $\delta_1$  は

$$\delta_1 = s_1 c^3/8 + s_2 c^2/4 + s_3 c/2 \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

に式(13), (14), (17)および式(20)を代入して求められる。

次に、接着部分のたわみを考える。図1のA点を原点にとった  $(x, y)$  座標系において、たわみの微分方程式は

$$d^2 y/dx^2 = -Px/(2D') \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

で与えられる。ここで、

$$D' = E_1 I_1' + E_2 I_2' \quad \cdots \cdots \cdots (24)$$

は積層はりの曲げ剛性で、 $I_1', I_2'$  は各はりの中立軸に関する断面二次モーメントである。すなわち

$$I_1' = bh_1^3/12 + (\bar{y} - h_1/2)^2 bh_1 \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

$$I_2' = bh_2^3/12 + (h_1 + h_2/2 - \bar{y})^2 bh_2 \quad \cdots \cdots \cdots (26)$$

なお  $\bar{y}$  は上のはりの上面より測った中立軸までの距離であり以下のように与えられる。

$$\bar{y} = \frac{E_1 h_1^3 + E_2 (h^2 - h_1^3)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad \cdots \cdots \cdots (27)$$

$x=0$  で  $y=0$ , および右端  $x=(l-c)/2$  での傾きは、

はく離部分の左端(B点)の傾き角、 $s_3$  に等しいという条件のもとで式(23)を積分し、右端の変位( $\delta_2$  とする)が得られる。着力点の変位は式(22)で与えられる  $\delta_1$  と  $\delta_2$  の和であり以下ようになる。

$$\delta = P(l-c)^3/(48D') + (l-c)c\{-4hZ + P(2l-c)\}/(32D) + Pc^2(3l-c)/(96D) - Zhc^2/(16D) \quad \cdots \cdots \cdots (28)$$

したがってはりのコンプライアンスすなわち  $\Phi = \delta/P$  は式(28)に式(20)を代入して以下のように計算される。

$$\Phi = \frac{\delta}{P} = \frac{-h^2(2l-c)^2 c}{64(4D/D_0 + h^2)D} + \frac{(l-c)^3}{48D'} + \frac{c}{48D}(c^2 + 3l^2 - 3lc) = \frac{c^3}{192} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) + \frac{l^3}{48D'} \quad \cdots \cdots \cdots (29)$$

上式において  $E_1 = E_2, h_1 = h_2$  とおくと Maikuma ら<sup>(6)</sup>の結果と一致する。

**2.2 はく離の進展条件** はく離の進展は界面き裂の進展と等価であり、したがってエネルギー解放率が重要なパラメータとなる。よく知られているように、エネルギー解放率( $G$ )はコンプライアンスのき裂長さに対する変化率に比例し、外部荷重一定の場合に対し以下のように与えられる。

$$G = \frac{P^2}{2b} \frac{d\Phi}{dc} \quad (\text{一定荷重}) \quad \cdots \cdots \cdots (30)$$

また着力点変位を一定に保つ様式に対しては、上式の  $P$  を  $\delta/\Phi$  で置き換えた式で与えられる。式(29)を式(30)に代入することによりエネルギー解放率は  $P$  = 一定の条件に対し

$$G = \frac{P^2}{2b} \left\{ -\frac{h^2(2l-c)(2l-3c)}{64(4D/D_0 + h^2)D} + \frac{(l-c)^2}{16} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \right\} = \frac{P^2 c^2}{128b} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

となる。

実験により、限界荷重  $P$  または限界着力点変位  $\delta$  がわかれば接着面の破壊靱性  $G_c$  は、 $G = G_c$  として得られる。式(31)ははく離長さ  $c$  の2次関数で、 $c$  の増大とともに増大する(図6参照)。それゆえもし  $G_c$  が  $c$  によらない定数のときには、はく離は不安定に進展する。

図1のモデルと ENF 試験片との類似からはく離進展はモードII形(せん断形)の変形様式で起こり、したがって式(31)の  $G$  は純粋なモードII形のエネルギー解放率( $G_{II}$ )であるように思えるが、実際には一般にモードI形の解放率( $G_I$ )をも含む(次節以下を参照)。

この場合は  $G_c$  は  $G_1$  と  $G_2$  の混合比によって変化すると考えられるので、前述の結論はこの混合比が  $c$  の増大に対し変化しないときにのみ正しい。

**2.3 界面における接触応力分布** 界面上の応力分布  $q(x)$  は、式(8), (11), (12)によって以下のように  $x$  の1次関数として与えられる。

$$q(x) = (PZ/4D)(2x - 2hZ/P + l - c) \quad \cdots \cdots (32)$$

ここで問題となるのは  $q(x)$  の符号である。我々の解析モデルにおいては、はく離の両面が互いに接触しているという仮定から出発した。したがって式(32)が最初の仮定と矛盾しないためには、 $0 < x < c$  の任意の  $x$  について  $q(x) > 0$  が要求される。しかしこの条件は常に満たされているわけではない。例えば同種材料の組合せ ( $\xi = E_1/E_2 = 1$ ) で厚さ比  $h_1/h_2$  が1の場合には式(32)は以下ようになる。

$$q(x) = (PZ/4D)(2x + l/4 - 5c/8) \quad \cdots \cdots (33)$$

したがって  $x < (5c/8 - l/4)/2$  の部分において  $q(x)$  は負となる。 $x > 0$  であるから負の応力分布は、 $c > 2l/5$  の場合にははく離端側で起こる。このような場合に厳密には、現モデルは適用できないということになる。また上のはりにアクリル、下のはりにアルミニウム ( $\xi = 0.04$ ) を仮定すると、 $h_1/h_2 = 1$  および2のそれぞれの場合に適用範囲は  $c = 0.818l, 0.090l$  と計算される。このように本モデルで矛盾が生じると予想される場合についての式(29), (31)の適用の妥当性については、次章の有限要素法解析により調べることにする。

またはく離端近辺での負の  $q(x)$  の出現は、現実にははく離端に近いところで  $y_1 = y_2$  ではなく、はく離端で開口変位 (モードI形の変形) が生じていることを意味する。つまり適用限界より長いはく離の進展は、モードIとモードII (せん断形) の両方が寄与するところの混合モードで起こることを示唆する。このことについても次章で詳しく調べる。

### 3. 有限要素法 (FEM) によるはく離解析

本章では有限要素法 (FEM) により軸力 ( $Z$ ), コンプライアンス ( $\Phi$ ), エネルギー解放率 ( $G$ ) 等を求め理論と比較する。

我々の問題においては、少なくともも着重点に近い部

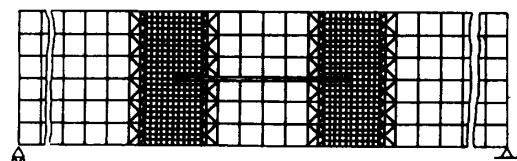


図3 有限要素分割の模式図

分の相対するはく離面間は互いに滑り得るが、垂直方向の相対変位は零という条件が課せられている。そこでこのような接触条件を簡単に考慮し得る大草<sup>(8)</sup>の開発したプログラムを使用した。このプログラムにおいては、要素として一次式の変位関数を仮定する三角形要素と積  $xy$  の項をも含む長方形要素 (各辺は直交座標軸にそれぞれ平行) が用いられている。まず長さが550 mm, 高さが10 mmの比較的細長比の大きい一様なはりの三点曲げについていくつかの分割を試み単純はり理論に基づく値と比較した。その結果横5分割、縦220分割 (要素のサイズが2.0 mm  $\times$  2.5 mm) のとき、着重点の変位として単純はり理論の結果の97.5%の値が得られた。したがって同程度の大きさの要素を基本として分割を行った。ただし、図3の模式図に示すようにはく離端周りの要素は、一辺の大きさが  $1/4$  (要素のサイズが0.5 mm  $\times$  0.625 mm) ないし  $1/8$  になるように細かくした。材料として、アクリル ( $E = 2.94$  GPa, ポアソン比  $= 0.35$ ) とアルミニウム ( $E = 73.5$  GPa, ポアソン比  $= 0.345$ ) を取り、上下のはりともにアクリルの場合 (以下同種材はり) と上のはりがアクリル、下のはりがアルミニウム (以下異種材はり) の2種類のはりを考えた。形状は、全長 (= 支点間距離)  $l$  を300 mm, 幅を30 mmと固定し  $h_1, h_2$  および  $c$  を変化させて計算した。なお平面応力条件を仮定した。

まずはく離部分 (界面き裂) の相対する面では  $x$  方向のすべりは許すが  $y$  方向の相対変位は零という拘束条件のもとでFEM解を求めた。上のはりの着重点下の横断面における平均軸方向応力  $\sigma_x$  に断面積をかけた量と、式(20)により求めた軸力  $Z$  との比較を図4(a), (b)に示す。またコンプライアンスの理論式、式(29)との比較を図5(a), (b)に示す。両図においてははりの単純理論による解とFEM解はすべての  $c/l$  の値に対し良好な一致を示し、これにより現解析モデルの妥当性が裏付けられる。

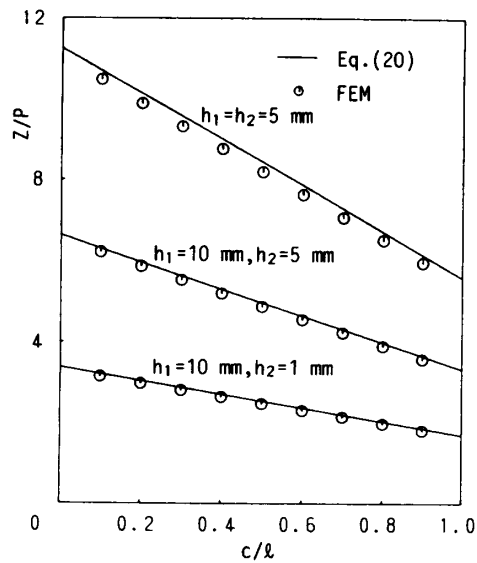
FEM解において、はく離面上で正の接触応力分布が現れた。ただ式(33)の議論による予想とは全く違い、このような現象は、同種材、異種材の両方について、計算したすべてのき裂長さ ( $c/l = 0.1 \sim 0.9$ ) において起こり、また正の応力の発生する場所もいつもはく離端近くとは限らなかった。一つの例 (異種材はり,  $h_1 = 10$  mm,  $h_2 = 5$  mm,  $c/l = 0.4$ ) について正の  $\sigma_y$  が生じた要素 (はく離面をはさんで相対する  $0 \text{ mm} \leq x \leq 48$  mm間の要素) については  $y$  方向の相対変位に対する拘束を取り去って再度計算を行ったところ、変位拘束の場合には、 $\Phi = 0.7390 \times 10^{-5}$  m/Nであったのに対し再計算の結果は、 $\Phi = 0.7396 \times 10^{-5}$  m/Nとなった。

このように界面での接触応力の分布の違いは  $Z$  と  $\phi$  にはほとんど影響を及ぼさないことがわかる。このことはまた、上下のはりの接触が着力点直下でのみ起こると仮定したモデルの解析結果（次章を参照）によっても例証される。したがって図4、5のFEM解は境界条件に不正確さを有するが、厳密解との差はごくわずかである。

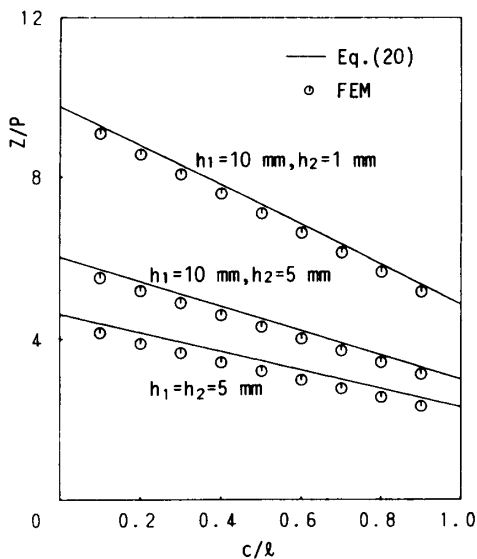
コンプライアンスが式(29)とよく一致する事実によりエネルギー解放率を与える式(31)の妥当性が裏付けられたことになる。図6に同種材はりの  $P=1\text{N}$  の場合に対し、式(31)により計算したエネルギー解放率ははく離長さによる変化を示す。 $G$  は  $c$  の増大とともに

増大し、これにより前章で述べたようにはく離の条件が  $G=\text{一定}$  として与えられる場合の一定負荷条件下での不安定な進展が予想される。

我々が今回計算したFEM解において、同種材はりでははく離長さや高さ比  $h_1/h_2$  の値のいかんにかかわらず、き裂端と着力点の中間付近で開口変位(正の  $\sigma_y$ )が生じたが、き裂端近くでは相対する面は常に接触していた。すなわちこの場合き裂進展は純粹にモードII形の様式でおこり  $G_{II}=G$ ,  $G_I=0$  である。しかし異種材はりの  $h_1=5\text{ mm}$ ,  $h_2=10\text{ mm}$  の場合について調べ

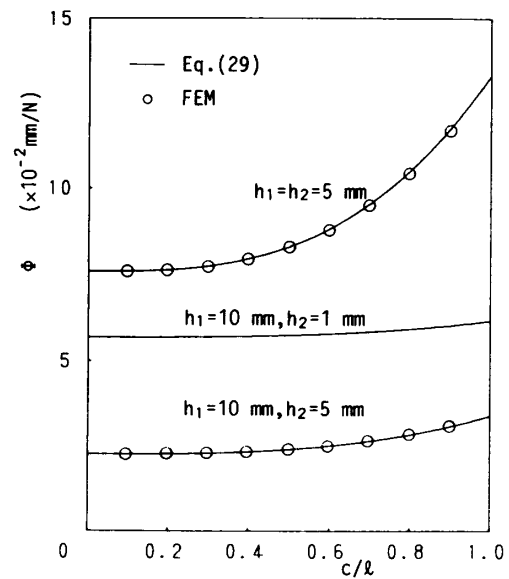


(a) アクリル/アクリル

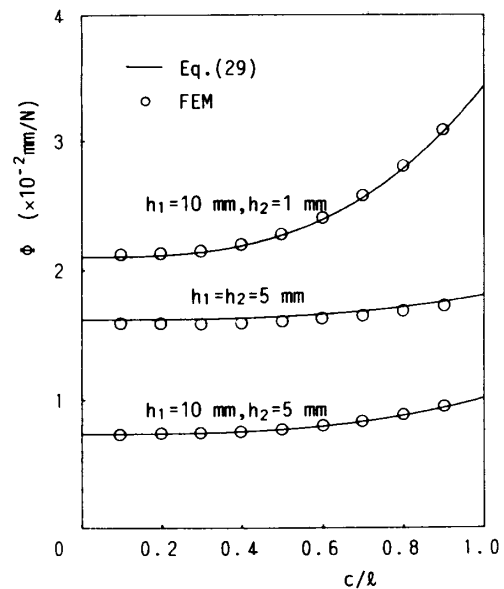


(b) アクリル/アルミニウム

図4 軸力( $Z$ )の理論値と有限要素法解との比較 ( $l=300\text{mm}$ ,  $b=30\text{mm}$ )



(a) アクリル/アクリル



(b) アクリル/アルミニウム

図5 コンプライアンス( $\phi$ )の理論値と有限要素法解との比較 ( $l=300\text{mm}$ ,  $b=30\text{mm}$ )

たところ  $c=30\sim 270$  mm の範囲でき裂端近傍で正の応力が生じ、この部分における拘束を取り去って再計算した結果予想どおり開口変位が得られた。このようなき裂開口変位が存在する場合は、き裂進展は混合モードとなりモード I, II 形のエネルギー解放率  $G_I, G_{II}$  の全エネルギー解放率  $G$  に占める割合を決定することがはく離条件を研究する際に重要となる。そこで以下にこの例について  $G_I$  と  $G_{II}$  を分離評価する。

まずき裂の微小進展距離  $\Delta$  に対し解放されるエネルギーを考える。微小進展後のき裂先端に座標系の原点を取り、上下のはく離面の相対変位の  $x$  方向成分（せん断変位）を  $u, y$  方向成分（開口変位）を  $v$  とすると解放されるエネルギーは、これらモード I, II 形のそれぞれの分離様式に対し、

$$\begin{aligned} G_I^{\Delta} &= \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} \sigma_y(\Delta-x)v(x)dx \\ G_{II}^{\Delta} &= \frac{1}{2} \int_0^{\Delta} \tau_{xy}(\Delta-x)u(x)dx \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (34)$$

で与えられる。異種材界面のき裂先端における周知の振動する特異性のために、 $\Delta \rightarrow 0$  のとき  $G_I^{\Delta}/\Delta, G_{II}^{\Delta}/\Delta$  は、一定の値に収束しないことが最近現著者らによって明らかにされた<sup>(9)(10)</sup> [なお  $(G_I^{\Delta} + G_{II}^{\Delta})/\Delta$  は収束し従来どおりのエネルギー解放率が定義できた<sup>(11)</sup>]。

各モードのエネルギー解放率は、一定の有限な値  $\Delta/c$  に対して

$$G_I = G_I^{\Delta}/\Delta, G_{II} = G_{II}^{\Delta}/\Delta \quad \dots\dots\dots (35)$$

として定義しなければならず  $\Delta$  の選び方に対し任意性

が生じる。しかし、振動する特異性の領域よりは十分大きく、き裂長さに比べれば十分小さな値として、 $\Delta/c$  を  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  に選べば、力学的に意味のあるエネルギー解放率が定義できよう。

図 7 にははく離端近くのメッシュを示す。このとき各モードのエネルギー解放率は、式(35)を FEM に適用した次式、

$$\begin{aligned} G_I &= Y(v_a - v_b)/(2b\Delta) \\ G_{II} &= X(u_a - u_b)/(2b\Delta) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

で与えられる。ここで  $\Delta$  はメッシュの幅、 $Y, X$  はき裂を  $\Delta$  の長さだけ閉じ合わせるために節点  $a, b$  に加えるべき  $y, x$  方向の節点力、 $v_a - v_b, u_a - u_b$  は  $y, x$  方向の節点  $a, b$  間の相対変位である。節点力  $y, x$  はローカルコンプライアンス法〔例えば文献(2)参照〕を用いて決定される。計算例を図 8 に示す。各モードの解放率の和 ( $G = G_I + G_{II}$ ) と式(31)による結果がよく一致していることから計算の精度が確かめられる。なお式(36)を計算するに当たって用いたメッシュ幅は

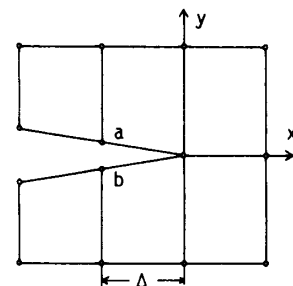


図 7 はく離端近くのメッシュ

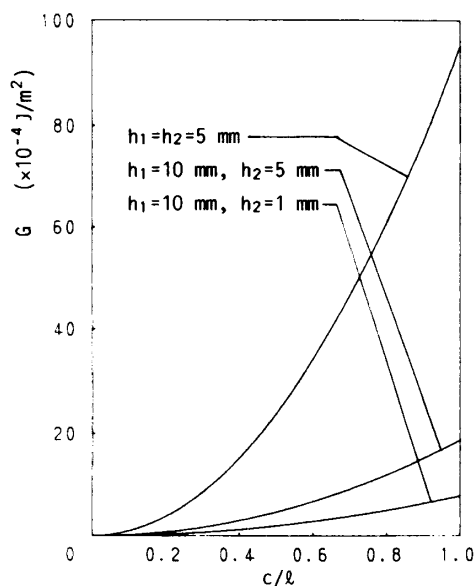


図 6 エネルギー解放率 ( $G$ ) のはく離長さによる変化例 (アクリル/アクリル,  $P=1$  N,  $l=300$  mm,  $b=30$  mm)

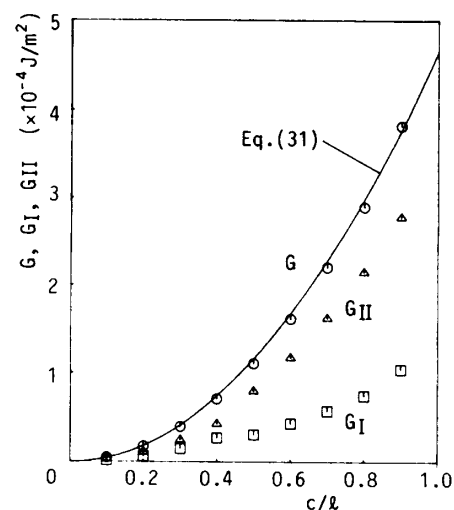


図 8 異種材はり (アクリル/アルミニウム) における  $G_I, G_{II}$  のはく離長さによる変化 ( $P=1$  N,  $l=300$  mm,  $b=30$  mm,  $h_1=10$  mm,  $h_2=5$  mm), および  $G_I + G_{II}$  と理論値との比較。

0.3125 mm であり、き裂長さとの比  $\Delta/c$  は、0.010～0.0012 まで変化している。 $G_I, G_{II}$  の定義の任意性および  $\Delta/c$  がき裂長さに対して一定ではないことによる任意性を考慮しても、図 8 の結果より  $G_I$  は全エネルギー解放率に対しかなり大きな割合 ( $G_I/G=0.26\sim 0.39$ ) を占めることがわかる。したがって異種材からなる積層はりのはく離は本質的に混合モードであるといえる。

#### 4. 議 論

前述したようにはく離部の相対する面は常に接しているとは限らず、一般には開口部分を有する。このように理論解  $q(x)$  と実際 (FEM 解) との不一致にもかかわらず軸力  $Z$ , コンプライアンス  $\phi$ , エネルギー解放率  $G$  に関しては理論と FEM 解とは良好な一致を示した。このことから接触応力分布の詳細は  $Z, \phi, G$  に対して大きな影響を及ぼさないことがわかる。そこでより単純なモデルとして、き裂端および着力点直下においては上下のりは接しているが、残りの部分では、はりのたわみは上下で異なっていたとしたモデルが考えられる。以下このモデルを解析しよう。

上下のりのたわみの微分方程式は  $q(x)=0$  とおいた式 (2), (3) を式 (5) に代入して得られる。計算の結果は付録に示す。付録の式 (38), (39) を式 (18) に代入して軸力  $Z$  に対する方程式として次式を得る。

$$2h_1x\{K_1\sin x+K_2(\cos x-1)\}+2h_2\lambda\{K_3(e^{\lambda}-1)-K_4(e^{-\lambda}-1)\}+Zc^2/[b\{(E_1h_1)^{-1}+(E_2h_2)^{-1}\}]=0 \quad \cdots\cdots (37)$$

定数  $K_i (i=1\sim 4)$  および  $x, \lambda$  は、式 (40)～(45) に与えられている。これらの式に見るように  $K_i$  および  $x, \lambda$  もまた  $Z$  の関数であるので式 (37) は数値計算によって解くことになる。著者らは数値解は式 (20) と極めて良く一致することを確認した。次に 1 章と同じくはく離部分と接着部分の境界 (B 点) での、たわみ角と変位の連続条件から  $\delta_2$  を求める。着力点における変位  $\delta$  は、この  $\delta_2$  と付録の式 (38) に  $x=c/2$  を代入して得られるたわみ  $\delta_1$  との和として得られる。このようにして計算されたコンプライアンスもまた式 (29) と良く一致することを確認した。以上のことから、二つのモデルはほぼ等しい結果を導くこと、したがって、 $q(x)$  の分布の当否は、はり全体の変形には大きな寄与をしないことが確かめられる。ただ、この章で扱ったモデルは当初の期待とは逆に、解析は数値解析に頼らねばならぬかえって面倒であった。したがって、1 章のモデルのほうが見通しの良い解を与えるという点で優れていることがわかる。

#### 5. 結 論

積層はりの中央に位置する界面はく離の三点曲げによる進展について、単純はり理論に基づくモデルを解析し、有限要素法による解析と比較し、次の知見が得られた。

(1) はく離部分をヒンジで止められた全面で接触している重ねばりとみなすモデル化により、コンプライアンスとエネルギー解放率は単純はり理論により容易に導かれる。式 (29), (31) は、有限要素法解と良く一致し、したがって両式はコンプライアンスとエネルギー解放率の簡便公式を与える。

(2) 有限要素法解により、界面き裂の相対する面には、一般に非接触の部分があることがわかった。したがって、接触応力分布に対する理論解は実際とは大きく違っている。しかし、この違いはコンプライアンスやエネルギー解放率には大きな影響を及ぼさない。

(3) 非接触部分を考慮に入れた有限要素法解析を行った。その結果、異種材はりのき裂には一般に開口変位が存在することがわかった。この開口変位は、エネルギー解放率の内容に大きな影響を及ぼし、はく離進展は本質的に混合モードで起こることがわかった。なお同種材はりにおいてははく離進展は純粋なモード II 形でおこる。

(4) き裂端と着力点直下においては上下のりは接しているが、残りの部分でははりのたわみは上下で異なっていたとしたモデルについても解析した。解析結果は、き裂全面での接触を仮定したモデルとほぼ一致した。しかしこのモデルは数値解析が必要であり、この点で、全面接触を仮定したモデルのほうが優れている。

#### 付 録

式 (5) において、 $q(x)=0$  とおいた微分方程式の解はそれぞれ以下のように与えられる。

$$y_1=K_1\cos(2\lambda x/c)+K_2\sin(2\lambda x/c)-\alpha Px/(2Z)-M_{10}/Z+h_1/2 \quad \cdots\cdots (38)$$

$$y_2=K_3\exp(2\lambda x/c)+K_4\exp(-2\lambda x/c)+\beta Px/(2Z)+M_{20}/Z-h_2/2 \quad \cdots\cdots (39)$$

ここで

$$x=(c/2)(Z/D_1)^{1/2}, \lambda=(c/2)(Z/D_2)^{1/2} \quad \cdots\cdots (40)$$

定数  $K_i (i=1\sim 4)$  は、 $x=0$  で  $y_1=y_2=0$ , および  $x=c/2$  で  $y'_1=y'_2=0$ , という 4 つの条件から以下のように定められる。

$$K_1=M_{10}/Z-h_1/2 \quad \cdots\cdots (41)$$

$$K_2=K_1\tan x+\alpha Pc/(4xZ\cos x) \quad \cdots\cdots (42)$$

$$K_3 = g\{ke^{-\lambda} - \beta P/(2Z)\} \quad \dots\dots\dots (43)$$

$$K_4 = g\{ke^{\lambda} + \beta P/(2Z)\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここで

$$k = \lambda(h_2 - 2M_{20}/Z)/c, \quad g = c/(4\lambda \cosh \lambda) \quad \dots\dots\dots (45)$$

次に、条件、 $x=0$  で  $dy_1/dx = dy_2/dx$ ,  $x_1 = c/2$  で  $y_1 = y_2$ , およびせん断力とモーメントの釣合い条件、

$$\alpha + \beta = 1, \quad M_{10} + M_{20} = N \quad \dots\dots\dots (46)$$

ただし

$$N = P(l - c)/4$$

の4つの式から  $\alpha, \beta, M_{10}, M_{20}$  が決定される。すなわち、

$$\alpha = \frac{2Z}{Q_7} \left\{ \frac{2Q_1}{c} (x Q_3 \tan x + \lambda Q_4 \tanh \lambda) + \frac{P}{2Z} (Q_2 Q_6 - Q_3 Q_5) - \frac{h_1}{c} (Q_2 Q_4 + x Q_5 \tan x) \right\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$M_{10} = \frac{Z}{Q_7} \left\{ Q_1 (Q_6 \tanh \lambda - Q_3 Q_5) + \frac{Pc}{4Z} (Q_3 - Q_5) Q_6 + \frac{h_1}{c} (x Q_6 \tan x + Q_4 Q_5) \right\} \quad \dots\dots\dots (48)$$

ここで

$$Q_1 = \frac{N}{Z} - \frac{h_2}{2}, \quad Q_2 = x \tan x + \lambda \tanh \lambda$$

$$Q_3 = 1 - \operatorname{sech} \lambda, \quad Q_4 = 1 - \sec x$$

$$Q_5 = \sec x - \operatorname{sech} \lambda, \quad Q_6 = \frac{1}{x} \tan x - \frac{1}{\lambda} \tanh \lambda$$

$$Q_7 = P(Q_2 Q_6 - Q_5^2)$$

軸力  $Z$  を決定するために条件(18)を用いる。解(38), (39)よりひずみ  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  を求め式(18)に代入することにより本文の式(37)が得られる。

## 文 献

- (1) 例えば, Whitney, I. M. 編 Composite Materials; Testing and Design, ASTM STP, 893(1984).
- (2) 戸谷・小野・宮脇・桐岡, 機論, 57-540, A(1991), 136.
- (3) Chai, H., Babcock, C. D. and Knauss, W. G., *Int. J. Solids Struct.*, 17(1981), 1069.
- (4) Bottega, W. J. and Maewal, A., *J. Appl. Mech.*, 50(1983), 184.
- (5) Williams, M. L., *J. Appl. Polym. Sci.*, 14(1970), 1121.
- (6) Maikuma, H., ほか2名, *J. Compos. Mater.*, 23(1989), 756.
- (7) Maikuma, H., ほか2名, *J. Compos. Mater.*, 24(1990), 124.
- (8) 大草, 鹿児島大学農学部演習林報告, 11(1983), 1.
- (9) Toya, M., *JSME Int. J.*, Ser. I, 33(1990), 413.
- (10) 戸谷・桐岡, 日本機械学会九州支部講演論文集 No. 918-1(1991-3), 21. または *Int. J. Fract.* (1992), 印刷中.
- (11) Malyshev, B. M. and Salganik, R. L., *Int. J. Fract. Mech.*, 1(1965), 114.