

高速度衝撃荷重をうける軟鋼ばりの塑性挙動について

田 中 豊
(受理 昭和 48 年 5 月 31 日)

PLASTIC BEHAVIOUR OF MILD STEEL BEAMS UNDER HIGH SPEED TRANSVERSE IMPACT

Yutaka TANAKA

This paper presents the results of experimental investigation on the plastic behaviour of long mild steel beams which are subjected to a high speed transverse impact.

Using Bohnenblust's theory, in which the deformation due to the shearing force and the rotary inertia of cross section of beams, the theoretical deflection curve of beams are computed, these compared with the experimental results obtained during impact test.

Much clear difference, especially as to propagation velocity of plastic deformation, are found between experimental and theoretical results, and they tend to be enlarged by the increment of impact velocity.

These discrepancy may be caused by neglecting the shearing force, rotary inertia and strain rate effects, and on discussion about plastic deformation under high speed transverse impact, therefore, we must consider these factors.

1. ま え が き

横衝撃荷重をうけるはりの塑性域における動的挙動解析に関する理論的、実験的研究は近年盛んに行なわれ、数多くの研究報告が発表されている。この種の変形解析においては、弾性衝撃の場合と異なり、曲げモーメント-曲率関係が非線形である上に、ひずみ履歴現象や、更に高速衝撃の場合には、高速変形にともなうひずみ速度の影響等が相互に影響し合う結果、解析も容易ではない。これまでの衝撃をうけるはりの弾塑性挙動に関する解析方法には、弾性ばりの横振動方程式を塑性域に拡張したものが用いられて来たが、この方法は立脚する基礎方程式に従って次の二つに分けることが出来る。

一つは、はりの横振動方程式にはり断面の回転慣性とせん断変形を考慮した Timoshenko¹⁾ の方程式を用いたものと、今一つは、これ等を省略した Bernoulli-Euler の方程式を用いたもので、いずれもこれを塑性域に拡張して、衝撃をうけるはりの弾塑性挙動を説明しようとするものである。Timoshenko の方程式を拡張したものは、特に高速衝撃時のはりの挙動解析に有

効であると思われるが、数値計算がはな難であるために実用的でないと思われる。一方、Bernoulli-Euler の方程式は波動が無限大の速度ではりを伝ばするという物理的な矛盾を含むにもかかわらず、計算が簡単であるためによく用いられる。

Bohnenblust²⁾ らは Boussinesq の手法を用いて、この方程式を塑性域まで拡張し、同時に行なわれた実験結果と比較して、よい近似を得たことを報告している。しかし、Bohnenblust らの行なった実験は衝撃速度が約 30m/sec 程度のものであり、これより衝撃速度が増大するにつれて、はり断面の回転慣性、せん断変形およびひずみ速度の影響が顕著にあらわれてくると考えられるので、Bohnenblust の理論と実験結果とは次第に合わなくなることが予想される。しかし、このことを立証すべき実験資料は極めて少なく、筆者の知る限りでは、前記 Bohnenblust らの実験の他、河島・大久保³⁾ の行なったアルミニウムはりについての実験以外にその例はほとんど見当たらない。

本研究は、この点に着目し、まず軟鋼ばりについての高速度衝撃実験を行ない、その結果を Bohnenblust の理論と比較することにより、ひずみ速度、回転慣性

およびせん断変形の影響を考慮することの必要性の可否について検討を加えたものである。なお、解析においては無限長ばりおよび半無限長ばりを仮定している。

2. 実験装置と方法

2.1 試験ばりおよび実験装置

衝撃実験は両端支持ばり、および片持ばりについて行なわれた。実験に使用した試験ばりは、いずれも軟鋼棒で両端支持用のものは、9mm 角、長さ 2500mm、片持ばり用のものは、10mm 角、長さ 1250mm のもので、両方とも熱処理を施して、残留応力は除去してある。表1(a), (b) にそれぞれの、化学成分、および

表1-a 試験ばりの化学成分(%)

	C	S	P	Mn	Si
両端支持ばり	0.18	0.010	0.017	0.44	0.005
片持ばり	0.17	0.027	0.026	0.49	0.188

表1-b 試験ばりの機械的性質

	両端支持ばり	片持ばり
縦弾性係数 (kg/cm ²)	2.08×10^6	2.09×10^6
降伏応力 (kg/cm ²)	2475	2396
弾性極限モーメント (kg-cm)	294.7	396.9
降伏モーメント (kg-cm)	442.1	595.5
降伏曲率 (1/cm)	4.00×10^{-3}	3.44×10^{-3}

機械的性質を示す。試験ばりは何れも測定時間中の支持端の影響を受けないように十分に長くとり、理論計算における境界条件を満足するようにしてある。

実験装置は九州大学工学部航空工学科の高速度衝撃装置⁶⁾を使用した。図1にその概要を示す。100~150気圧に充てんされたボンベ中の空気は、減圧弁を経て、一旦蓄気槽に導かれ、蓄気槽内の空気圧は槽付属の排気弁を作動することにより、所要の圧力に調整される。電源スイッチを入れて電磁弁を開くと、空気は装てん部に流れこみ、同室内に装てんしてある衝撃棒が発射され、銃口付近に水平におかれた試験ばりに衝撃を加える。衝撃棒には機械構造用鋼 S45C 材の丸棒で直径 26.9mmφ、長さ 60mm および 150mm の2種類を焼入れて用いた。

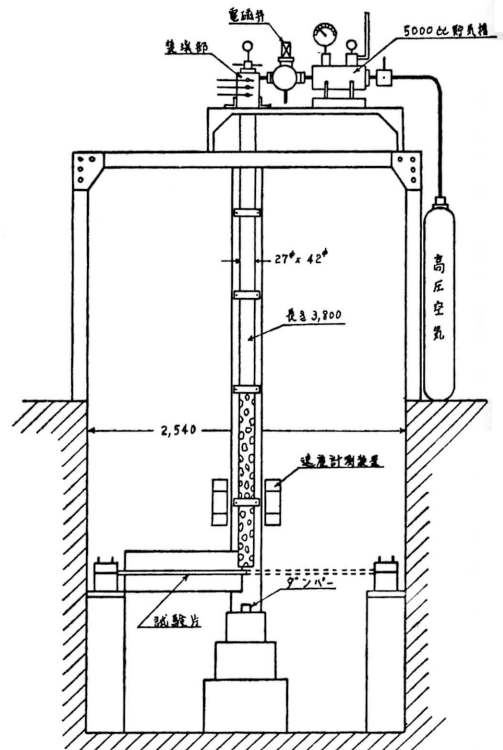


図1 高速度衝撃実験装置

2.2 実験方法

2.2.1 瞬間写真撮影装置

衝撃を受けたはりの挙動を観察するためには、衝撃後のはりのたわみ曲線を 200μsec 程度の間隔で数回、瞬間撮影する必要がある。従来このような場合には、高速度カメラを使用するのが普通であるが、市販されている高速度カメラは一般に画面が小さく、特に回転プリズム式のものはプリズムの回転にともなう像のずれもあって、フィルムを拡大して読みとるには、解像力が必ずしも十分でない。本実験では、より解像度の高い写真を撮影するために、発光時間の極めて短い4個の Xe ガスを封入したストロボ放電管（以後単に放電管という）をそれぞれ指定した時刻に発光させて、はりを照明し、各時刻におけるはりのたわみ曲線を1コマのフィルム上に重ねて撮影する方法をとったが、その結果非常に鮮明な瞬間写真をとることができた。使用したストロボ放電管は市販のもので、通常のストロボとしての機能の他に外部トリガ電圧による単発の発光が可能なので、そのときの発光時間は、1~3μ

sec 程度のものである。次に第2図に放電管を発光させるためのトリガ遅延装置のブロック・ダイアグラムを示す。この装置は本学部電子工学科の南竹 力氏の製作になるもので約 $70 \mu\text{sec} \sim 1000 \mu\text{sec}$ 程度までの遅延を行なわせることが出来る。衝撃棒が試験ばりに衝突すると、両者の接触によって、トリガ回路が働

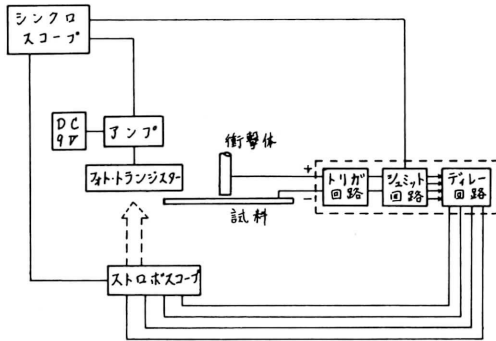


図2 ブロックダイアグラム

き、ここで発生した信号はシュミット回路を通過した後、二つに分かれ、一方はフリップ・フロップを経て4個の独立の遅延回路に、又他方は放電管の発光時刻監視用のシンクロスコープの単掃引トリガ入力に送られる。遅延回路に入った信号はここで指定の時間だけ遅らされて、4個の放電管のトリガ入力に送られ、放電管を指定した時刻に、それぞれ発光させる。これ等放電管の発光は試験ばりの後方に置かれたフォト・トランジスタによって検出され、シンクロスコープに送られる。シンクロスコープは衝撃棒とはりとの接触によって単掃引を始めているのでそのブラウン管面上に画かれた発光波形の尖頭位置を知ることによって、衝撃開始から放電管の発光までの時間および発光間隔を知ることが出来る。実験における所要遅延時間は上記発光波形の尖頭位置をシンクロスコープで観察しつつ遅延装置を調整することによって得られた。

一般に放電管をトリガした場合に、放電開始までに若干の時間遅れを生ずるもので、これには形成の時間遅れと統計的時間遅れがあるとされている。本実験においてもわずかながらその傾向が認められたので、各実験毎に発光波形を撮影し、発光時刻の決定に正確を期した。

2・2・2 衝撃速度の調整

本実験におけるはりの衝撃速度は、それぞれ約毎秒 35m, 55m, 75m, 95m の4段階に亘って行なう予定で

あったので所要の発射速度を得るために、貯気槽の空気圧と銃口付近における衝撃棒の速度との関係及びその再現性を確認する必要があった。そのために2組の投光器と受光器とを銃身をはさんで約 5 cm 間隔で正対させて配置し、衝撃棒がその間を通過する時間をカウンターで測定して衝撃棒の速度を測定した。その結果同一の発射空気圧の下では、衝撃速度は実験誤差内で一定になることが判った。

2・2・3 写真撮影の概要

第3図は撮影に当たっての、カメラおよび放電管等の

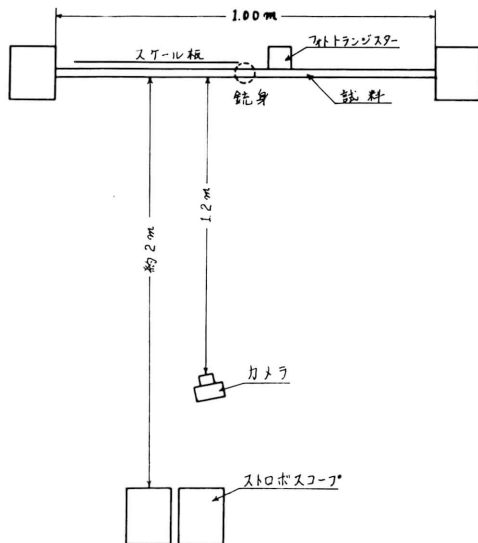


図3 カメラ配置図

配置図を示す。銃口の真下に両端を支持した試験ばりを配し、その前方1.2mにカメラを、その後方に4個の放電管が2個ずつ積み重ねて置かれている。はりの後方にははりのたわみ量を読みとるための scale 板が置かれ、又、発光時刻を検出するフォト・トランジスタも配置されている。以上の部分は暗幕で完全に外部から光をさえぎられていて、衝撃直前にカメラのシャッターを開放し、衝撃終了直後にシャッターを閉じる。このシャッターの閉閉は air release で外部から操作できる。

さて、貯気槽の空気圧を衝撃速度に相当する圧力に調整した後カメラのシャッターを開放し、電磁弁のスイッチを押して衝撃棒を発射する。衝撃が始まると、前述の遅延装置が動作し、指定されたそれぞれの時刻に放電管が発光してはりを照明する。はりには巾2mm

の白色反射テープがはりの長さに沿って平行に貼付されていて、放電管のフラッシュをうけて、一種のハレーション状態で撮影される。このときフィルム1コマに撮影され得るたわみ曲線の数4本まで可能であるが、曲線が交錯して読み取りに困難を生ずるのを避けるため、はりの全景の撮影は2本にとどめ、他の2本の曲線の撮影範囲は衝撃点付近に限定し、これは後に述べる衝撃速度の検定に用いた。

3. 実験結果と考察

3.1 実験結果

まず、衝撃をうけるはりの塑性挙動を解析する上に必要なデータとして、静的な曲げモーメント-曲率曲線を求めた。図4にこれを示す。いずれも試験ばりの引張試験結果を Nadai の方法により、曲げモーメント-曲率曲線に換算したもので、図中の実線はこれを示している。なお、解析でははりは弾完全塑性体と仮

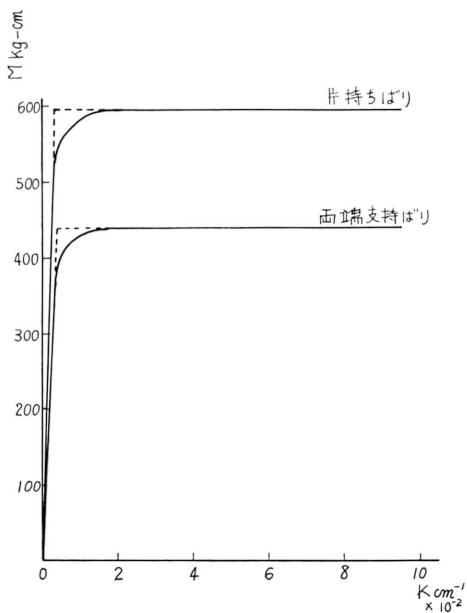


図4 M-K 曲線

定しているので、図中の破線で示すような近似を行った。

つぎに、衝撃試験の結果、撮影された結果を第5図第6図に示す。第5図は両端支持ばり、第6図は片持ばりのたわみ写真の一例を示したものである。写真の右端が衝撃点であり、その付近に銃口の一部、衝撃棒、試験ばり直ぐ後方に配置されたスケール板等と共に

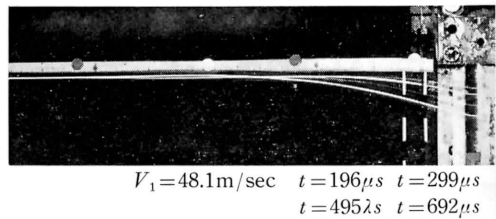


図5 両端支持ばりのたわみ

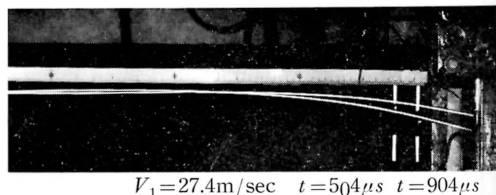


図6 片持ばりのたわみ

りに貼付された白色反射テープで示されるたわみ曲線が衝撃端から約40cmの範囲まで写し出されている。又第5図の衝撃点付近に4本のたわみ曲線が撮影されているが、これは前述したように、はりの衝撃点におけるたわみ速度を測定するために写されたものである。又、第7図はシンクロ스코プのブラウン管面で撮影

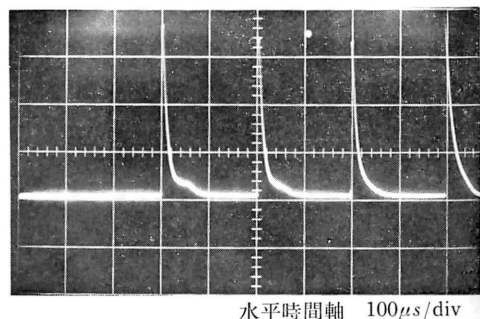


図7 ストロボ放電管の発光波形

された放電管の発光を示す波形であるが、遅延回路が正確に働いていることがよくわかる。この写真をみると放電管の発光時間はその半巾値をとって見ても、若干長いように見受けられるが、これはフォト・トランジスタとその増巾器の特性によるものであり、実際の発光時間はかなり短いものである。このことは、90m/secの衝撃速度の下におけるたわみ写真の鮮明度からみても明らかである。

次に、第8、第9図に衝撃点における試験ばりのたわみ量の時間的变化を示す。時間の原点は衝撃開始の瞬間をとっている。これは前出の衝撃点付近に写し出

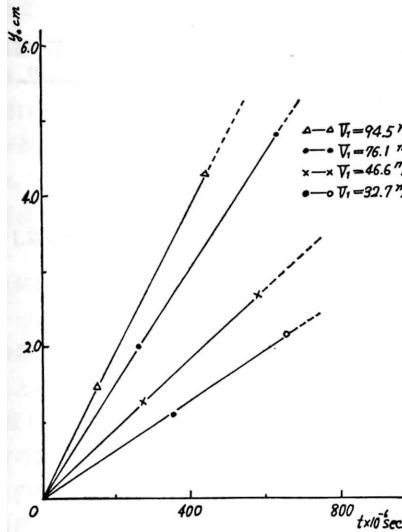


図8 片持ばりの速度検定曲線

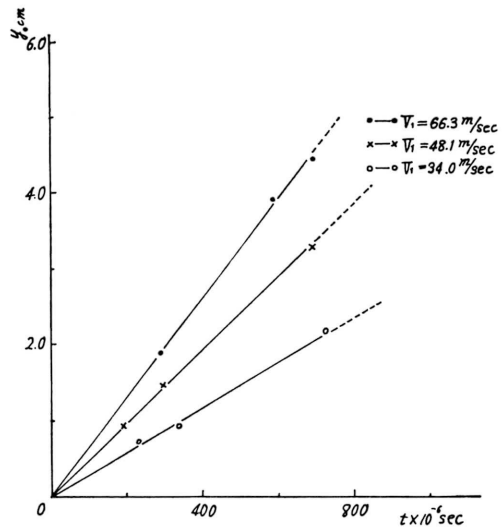


図9 両端支持ばりの速度検定曲線

されている4本のたわみ曲線から、はりの中央点のたわみを測定し、これ等の曲線に対応する衝撃後の経過時間を放電管の発光写真から求め、横軸に経過時間縦軸にたわみ量 y_0 をとって、プロットしたものである。この図を見ると、両端支持ばりは $700\mu\text{sec}$ 、片持ばりは $900\mu\text{sec}$ 付近までは、ほとんど直線をなしており、この程度の時間までは衝撃点のたわみ速度(衝撃速度)は一定であるとして差支えないことがわかる。衝撃速度はこの線図の勾配から決定された。試験ばりの中央点(又は自由端)に上述の衝撃速度を与えたときのはりのたわみ量をはりの長さに沿って、プロットして得られた、たわみ曲線を第10図から第16図までに実線で示してある。これははりのたわみ写真のフィルムを投影機にかけ、はりの後方に配置してある scale をもとにして、たわみを $1/10\text{mm}$ まで正確に測定した結果得られたものである。どの図も、はりのたわみ量を $V_i t$ で除したものを縦座標にとっている。ここで V_i は衝撃速度、 t は衝撃後の経過時間である。

3.2 結果の考察

第10, 11, 12図は両端支持ばり第13, 14, 15, 16図は片持ばりのたわみ曲線である。この実験から求められたたわみ曲線は中央点(若しくは自由端)に一定の衝撃速度を与えられたはりの塑性挙動をよく表わしている。すなわち、両端支持ばりも片持ばりも衝撃点ではりは垂直軸と鋭角をなしており、たわみ曲線は上方

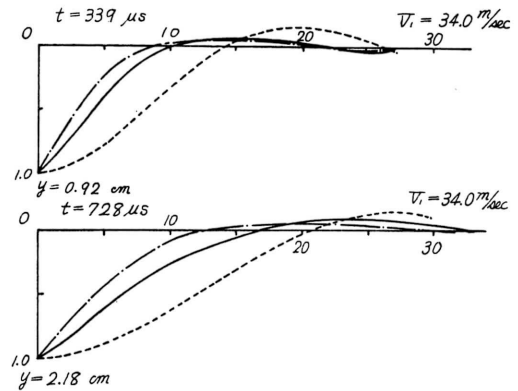


図10 両端支持ばりのたわみ曲線

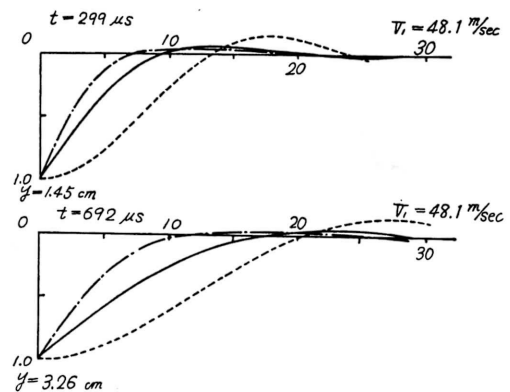


図11 両端支持ばりのたわみ曲線

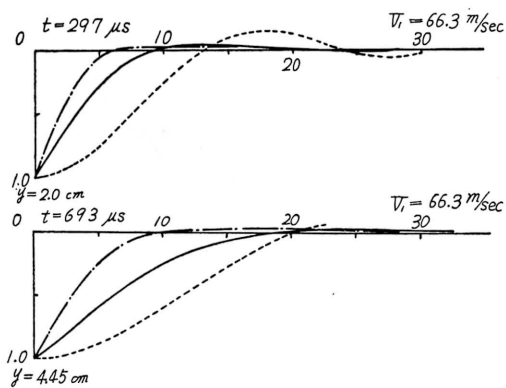


図12 両端支持ばりのたわみ曲線

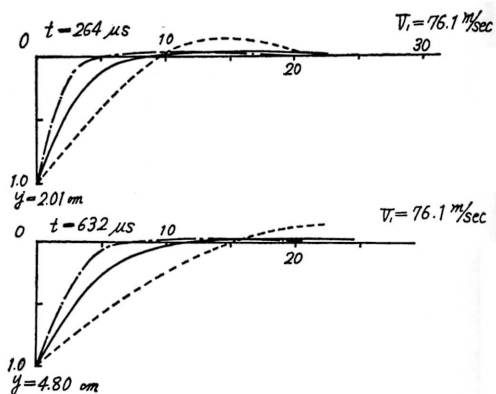


図15 片持ばりのたわみ曲線

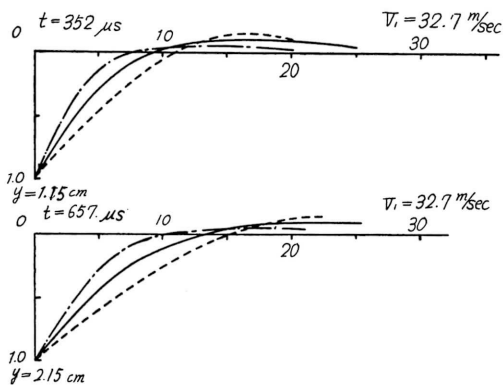


図13 片持ばりのたわみ曲線

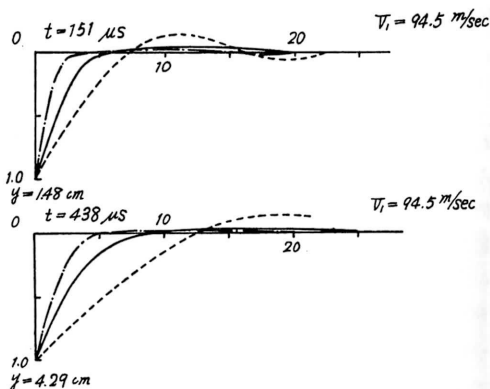


図16 片持ばりのたわみ曲線

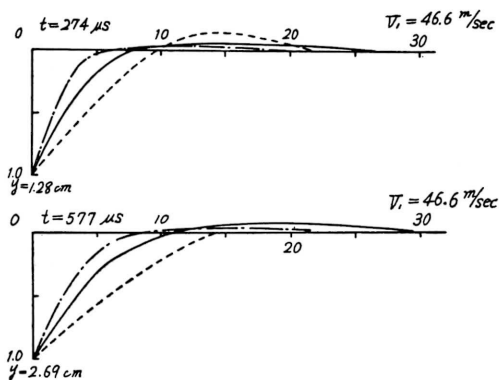


図14 片持ばりのたわみ曲線

に凸形にわん曲している。このことは衝撃点で大きな塑性変形を生じていることを示している。この傾向は衝撃速度の増大につれて、強くあらわれている。又、水平軸より上部のたわみは衝撃速度の増大と伴って益々小さくなり、特に片持ばりにおいてはほとんど直線に近い形状を示している。これ等のことから、このような弾完全塑性材のはりは、その塑性変形が、衝撃点付近のみで強く起り、衝撃点から遠ざかるにつれて変形量は小さくなって行くことがわかる。又同一の衝撃速度を受けるはりについて観察すると、最初静止の状態にあったはりは、衝撃により衝撃点にたわみを生ずると、そのたわみははりの長さに沿って支持端に向かって次々に伝ばしていくことがわかる。このたわみ波の伝ばは波頭付近のたわみが小さい為に、写真からその移動を知ることは出来ないが、たわみ曲線が最初に水

平軸と交わる点（衝撃点を原点とし、支持端方向に x 軸をとったとき、この点の座標を x_0 とする）を目安にとり、この点の移動からその伝ば状態を調べて見ると、図11と図12からわかるように、衝撃速度が異なるにもかかわらず、衝撃後の経過時間が同一であれば両者の x_0 はほとんど等しい値をもつ。このことは、塑性変形波の伝ば速度は衝撃速度とは無関係であることを示している。このたわみ波は更に進行して、本実験のように試験ばりが有限長であるならばその支持端に達し、ついで反射して、又、衝撃点に向って逆行し、はりの各点は進行波と反射波の干渉によるたわみを生ずることになる。しかし、解析でははりは無無限長はり（片持ばりにあっては半無限長ばり）を考慮しており、反射波の影響は無視しているので、反射波の到来以前のはりの挙動だけがこの度の議論の対象になる。

このはりの挙動と比較するために Bohnenblust の理論に基づく計算結果を同じ図上に一点鎖線で示した。なお破線で示した線は、はりが同一の衝撃速度をうけて全く弾性的に挙動したと仮定したときのたわみ曲線で参考までに付したものである。Bohnenblust の弾塑性理論から計算されたたわみ曲線を実験結果のそれと比較すると、水平軸より上部のたわみ量や、衝撃速度の増加に伴い、このたわみ量が減少していく傾向等はよく一致しているが、衝撃点に近い部分では、計算によるたわみは常に実験値より過小にあらわれているし、衝撃点でははりのキンク角は実験のそれよりも鋭くなっていて実験と合わない。この傾向は衝撃速度が増大するに従って益々著しくなることがわかる。又、前述の x_0 について両者を比較してみると、実験結果にみられる x_0 は常に計算値における x_0 よりも常に大である。すなわち、曲げ塑性変形波の伝ば速度は計算値の方が常に小さくあらわれていることがわかる。実際に Bohnenblust の理論を調べてみると、塑性変形波の伝ば速度は η_1 なる量の平方根に比例している。衝撃速度の大きな所では $\eta_1 \approx 3V_e/V_1$ であらわされる。ここに V_1 は衝撃速度、 V_e は弾性限界速度である。これによると η_1 は衝撃速度の関数であり、伝ば速度は η_1 の関数であるから、変形波の伝ば速度は V_1 によって左右されることになる。衝撃速度が増大するにつれて η_1 は減少するので変形波の伝ば速度は衝撃速度が増大するにつれて変形波の伝ば速度は小さくなるということになる。しかし、前にも指摘した通り x_0 の実験値は衝撃速度の大きさとはいくつも無関係である。この点にも Bohnenblust の理論と実験値の不一

致が見られる。

この実験結果と理論との違いは主としてはり断面の回転慣性、せん断変形の省略および、ひずみ速度効果の無視に起因するものと思われる。はりが高速変形を行なう際に前者の影響は強くあらわれることが考えられるので、これ等を省略することは合理的でない。これまで Timoshenko theory は数値計算がやっかいであるとされているが、Plass¹⁾ の提案した特性曲線法による解法を試みるのも一つの方法であろう。

又、ひずみ速度効果については、考慮の必要性については、多くの研究者が、指摘するところである。もし、上記理論にこの影響が合理的にとり入れられるならば、その修正された理論の実験値に対する近似度はかなり改善されるであろう。

しかし、これらの何れの要因がどれだけ理論の近似度を高めるに役立つかは、今の所明らかでないが、この2つの要因の影響をそれぞれ別個に考察することはこの種の研究を進める上に必要なことであろう。

4. 結 語

高速度衝撃荷重をうけるはりの過渡的挙動を観察するため、遅延回路とストロボ放電管とを組み合わせた瞬間撮影装置を使って、実験を行ない、この装置が十分実用に供し得ることを示した。又、実験結果と、Bohnenblust の理論値とをたわみ曲線について比較したが、両者の間には明らかな不一致が認められた。この両者の差は衝撃速度の増大とともに拡大する傾向があるがその原因としては、はり断面の回転慣性、せん断変形の省略とひずみ速度の効果の無視等が考えられる。これらの要因を合理的にとり入れた理論は実験値に対して良好な近似を与えるであろう。

終りに、本実験を行なうに当り、衝撃装置を下させて頂き、かつ、色々と便宜をお計り頂いた九州大学工学部航空工学科の皆様へ深甚の謝意を表したい。又、本学部電子工学科の南竹 力技官には遅延装置その他の製作に御尽力頂いた。厚く御礼申し上げる次第である。なお、本実験に協力を得た大内田信幸、金山昭博、ならびに野西利次の諸君に感謝の意を表する。

文 献

- 1) Timoshenko, S.P. On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross Section. Phil. Mag. Ser. 6, 43, 1922.

- 2) Duwez, P. E., Clark, D. S. and Bohnenblust, H. F.: The Behaviour of Long Beams Under Impact Loading. J. Appl. Mech. (1950).
- 3) 河島・大久保: 高速度横衝撃をうけるアルミニウムはりの塑性変形について, 九州大学工学集報第42巻第3号.
- 4) Plass, H. J. Jr.: Theory of Plastic Bending Waves in a Bar of Strain-rate Material, Proc. 2nd Midwestern Conf. on Solid Mech. Purdue Univ. (1955).
- 5) Aspden, R. J. and Compbell, J. D.: The Effect of Loading Rate on the Elasto-plastic Flexure of Steel Berms. Proc. Roy. Soc. 266, (1966).
- 6) 河島, ほか6名: 起高速空力熱弾性実験設備について, 九州大学工学集報第44巻第5号.

付 録

Bohnenblust の理論 (無限長ばりの衝撃理論)

1. 基礎方程式

はりの横振動方程式には, 断面の回転慣性とせん断変形を省略した Bernoulli-Euler の方程式を用いる.

はりの衝撃点を原点にとり, はりの長さに沿って支持点方向に x 軸をとる, 鉛直下方に y 軸をとると

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

ここに Q , M , ρ , A , t はそれぞれせん断力, 曲げモーメント, 密度, 断面積, 時間である. 又, 曲率は $K = \partial^2 y / \partial x^2$ であらわされ, 弾性の場合は $M = EIK$ となる. ただし, E は材料の縦弾性係数, I は断面の慣性モーメントである.

Boussinesq が弾性衝撃の問題の解を求めた際に得られた結果から, y/t は x^2/t のみの関数であることが知られている. そこで, η なるパラメータを導入して, 次のようにおく.

$$\eta = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x^2}{t} \quad (3)$$

ただし,

$$a^2 = \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \quad (4)$$

ここで $y = tf(\eta)$ とおくと

$$K = \frac{1}{2a^2} [f'(\eta) + 2\eta f''(\eta)] \quad (5)$$

又,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\eta}{t} f''(\eta) \quad (6)$$

$$Q = \frac{1}{a\sqrt{t}} \sqrt{\eta} \frac{dM}{d\eta} \quad (7)$$

偏微分方程式を常微分方程式に書き改めるために次の S なる変数を導入する.

$$S = \frac{2a^2}{EI} \sqrt{t} Q = \frac{2a^2}{EI} \sqrt{\eta} \frac{dM}{d\eta} \quad (8)$$

(2) 式に代入して

$$S' + \eta^{1/2} \{2a^2 K - f'(\eta)\} = 0 \quad (9)$$

上式を微分して, (5) と (7) を使って

$$S'' + EIS \frac{dK}{dM} = 0 \quad (10)$$

(10) をといて, S を求めると, 曲げモーメント, せん断力, 曲率およびたわみは, $x = \infty$ で 0 になるという条件から

$$M = -\frac{EI}{2a^2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{S(\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta \quad (11)$$

$$Q = \frac{EI}{2a^2} \frac{1}{\sqrt{t}} S(\eta) \quad (12)$$

$$K = \frac{1}{2a^2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{S'(\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta \quad (13)$$

$$y = -\frac{t}{2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{S'(\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta + \frac{t}{2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{S'(\eta)}{\eta^{3/2}} d\eta \quad (14)$$

衝撃点における衝撃速度を V_1 とすると(14)から

$$V_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{S'(\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta$$

2. 無限長ばりの場合

2・1 弾性変形の場合

この場合は(9)に $M = EIK$ という関係を代入して,

$$S'' + S = 0 \quad (15)$$

$x = 0$ ではりのこう配は 0 であるから, $S'(0) = 0$ とおき

$$S = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} V_1 \cos \eta \quad (16)$$

又、衝撃点における曲率は

$$K(0) = V_1 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$$

Ke を降伏曲げモーメントに対応する曲率であるとすると、

$$Ve = Ke \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (17)$$

Ve は、はりに塑性変形を生じ始める限界速度である。

2・2 塑性変形の場合

弾完全塑性材のはりに対しては、曲げモーメント—曲率線図を第4図のように近似する。衝撃速度が十分に大きいときは塑性曲げを生じ、 η_1 なる点で急激な曲率の変化を生じ、曲率は η_1 で不連続となり(15)の解は次の二つの領域に分けて求められる。

$$S = -B \sin(\eta - \eta_1) \quad 0 \leq \eta < \eta_1$$

$$\text{Plastic hinge} \quad \eta = \eta_1$$

$$S = -D \sin(\eta - \eta_1) \quad \eta > \eta_1$$

ここで、衝撃点の速度が V_1 であるということ、 η_1 の曲げモーメントが降伏モーメントに等しいということ、およびはりは η_1 で Me に達した後、 $2Me$ だけ除荷を行うという条件から

$$\left. \begin{aligned} 2D \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\sin(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta \\ = -B \int_0^{\eta_1} \frac{\sin(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta = 4Ve \\ B \int_0^{\eta_1} \frac{\cos(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta \\ + D \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\cos(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta = 2V_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで B と D とは未知定数である。上式を解いて η_1 , B および D を求めて S を決定する。上式は解析的に解くことは難しいので数値計算によらねばならないが、速度 V_1 が大であるときには、 $\eta_1 \div 3Ve/V_1$ で与えられるから B, D はこれから容易に求められる。

3. 半無限長ばりの場合

3・1 弾性変形の場合

この場合にも(15)が成立する。すなわち $S'' + S = 0$

この式に $M(0) = 0$ なる条件を入れると

$$S = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} V_1 \sin\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (19)$$

$$M = \frac{EI}{a^2} \frac{V_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\sin\left(\eta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\eta}} d\eta \quad (20)$$

となり、 M は $\eta = \pi/4$ で最大値をとる。 M の最大値を

$$M_{\max} = 0.4877 \sqrt{EI \rho A} V_1$$

となる。したがって Ve は

$$Ve = \frac{Me}{0.4877 \sqrt{EI \rho A}} \quad (21)$$

3・2 塑性変形の場合

無限長ばりの場合と同様にして

$$S = -B \sin(\eta - \eta_1) \quad 0 \leq \eta < \eta_1$$

$$\text{Plastic hinge} \quad \eta = \eta_1$$

$$S = -D \sin(\eta - \eta_1) \quad \eta > \eta_1$$

又、 B, D および η_1 を求める式も同様にして

$$\left. \begin{aligned} 2D \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\sin(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta \\ = -B \int_0^{\eta_1} \frac{\sin(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta = 0.9754 Ve \\ B \int_0^{\eta_1} \frac{\cos(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta \\ + D \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{\cos(\eta - \eta_1)}{\sqrt{\eta}} d\eta = 2V_1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。

(18), (22) から求められた B, D および η_1 を(14)に代入してそれぞれのたわみ曲線を決定することが出来る。

なお、数値計算に使用した基礎値は次の通りである。

()内は片持ばりのもの。

無限長ばりの場合

$$E = 2.08 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2,$$

$$I = 0.0547 (0.0833) \text{ cm}^4$$

$$\rho = 0.807 \times 10^{-8} \text{ Kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$$

$$A = 0.81 (1.00) \text{ cm}^2$$

$$Me = 442.1 (597.0) \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

$$Ke = 4.001 (3.446) \times 10^{-8} 1/\text{cm}$$