

代数における誤りモデルと生成過程について

真田 克彦

(1992年10月15日 受理)

On Models and Process of Errors in High School Algebra

Katsuhiko SANADA

はじめに

人間が数学に興味を持ち、それを理解していく過程はどのようなものであろうか。それを探るための数少ない手がかりの一つは、数学の問題を解くときに犯す誤りを調べることである。重要なことは、誤りには規則性があることである。未熟な学習者が犯す誤りにも一定の型があり、ある程度の熟練者がたまたま不注意で犯す誤りにもまた決まった型がみられる。このことは、人間が数学を思考する過程に対する興味深いヒントを提供してくれているわけで、数学的能力の理論的な説明の可能性を示すものである。

これまでに、数学教育における誤りについての研究は多くの研究がなされてきている。その研究の目的は次の5つに絞られる。³⁾

- ①すべての段階での誤りの仕方を記録する
- ②誤りの仕方の頻度の分布を調べる
- ③特に難しい点を分析する
- ④個人の誤りの仕方の共通点を見つける
- ⑤誤りを分類しグループ分けする

一方誤りについての認知科学研究はつぎのように要約できる。^{2) 4)}

①バグ理論 (引き算のモデル)

引き算の過程を手続きネットワークで表現し、バグはネットワークの一部の手続きに誤りがある場合であることを示した。

②2段階理論 (引き算のモデル)

(a)Brown & Vanlehn の Repair 理論

第1段階：行き止まり (impass) 状態

第2段階：間に合わせ (repair) 行為

(b)Matzのプロセスモデル (代数のモデル)

第1段階：基礎的な規則 (base rule) の集まりを既習の知識から思い浮かべる

第2段階：幾つかの類推技法 (extrapolation technique) を用いて問題の答を予測する

Matzのプロセスモデルは、代数の問題解決法においてよく見られる体系的な誤りを統一的に説明しようとするものである。誤りの原因を、新しい問題に対する学習者の発見的な問題解決行動として説明するもので、かなりの説得力があるが、コンピューターモデルの構成のためには、なお不十分な面がある。

本研究では、Matzのプロセスモデルを基にして、代数の学習における誤りのコンピューターモデルを作ることを目標としている。しかし、最初の試みとして、実際に誤答例を集めて、数学教育的な面と認知科学的な面の両面から検討してみた。

1. MATZの誤りの生成モデル

Matzのプロセスモデルは、代数における問題解決法においてよく見られる体系的な誤りを統一的に説明するものである。ここでは、Matzの理論の概要を述べるとともに、これからの研究の方法と方向を示す。

1.1 プロセスモデル

Matzは、代数の問題に範囲を限定し、解答を得る過程で生じるいくつかの体系的な誤りを統一的に説明する試みを行っている。¹⁾

ここでの誤りは新しい状況に直面して以前から持っている知識を適用しようとして発生するものである。問題を解くときには、次の2つの要素を用いる。

- ①既知の基礎的な規則 (base rule) の集まり
- ②知っている規則と見なれない問題とのギャップを埋めるための幾つかの類推技法 (extrapolation technique)

多くの共通的な誤りは、既知の規則をそのまま新しい状況に不当使用したときや、新しい問題を解くために誤用したときに生ずるが、これらの処理は、次の意味で、それなりに合理的なものである。

- ①類推に使える規則は、それを導いた手本とほとんど同じ形をした問題にしばしば正しく働く。
- ②基礎的な規則を適用したり拡張したりする方法である類推技法は、他の多くの状況においては正しく運用される有用な技法である。つまり問題は類推技法にあるのではなく、この技法をある特殊な状況においても間に合わせに適用してしまうところに問題がある。

代数における誤りの多くは、少数の類推技法を用いて既知の知識への系統だった適用の結果であ

るとみられる。一般的に出現する誤りを次の3つに分類することができる。

- [1] 類推技法の不正確な適用によって生じる誤り
- [2] 基礎となる知識が、正しいが貧弱であることに起因する誤り
- [3] 解法の手続きを実行する途中に発生する誤り

(1) [1] の誤り

既知の規則をそのまま適用できないときに、それを適用する誤りである。

(a) 線形性

線形性とは各部分が独立に扱えるように対象を分割する操作法である。ある演算を対象に適用した最終結果が、対象の各々の部分にその演算を適用して得られた結果をそのまま結合したものになっているとき、その演算を線形という。

(例1) 一般化された分配による誤り

[類推技法の図式化の例]

2項演算子 (Δ), 単項演算子 (\square) に対して

$$\text{SCH 1: } \square (X \Delta Y) = \square X \Delta \square Y$$

2つの2項演算子に対して

$$\text{SCH 2: } (X \square Y) \Delta Z = (X \Delta Z) \square (Y \Delta Z)$$

$$\text{SCH 3: } X \square (Y \Delta Z) = (X \square Y) \Delta (X \square Z)$$

上記の図式の誤った適用により次のような誤りが出現する。

$$\sqrt{(AB)} = \sqrt{A} \times \sqrt{B} \rightarrow (\text{SCH 1}) \rightarrow \sqrt{(A+B)} \Rightarrow \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

$$(AB)^2 = A^2 B^2 \rightarrow (\text{SCH 2}) \rightarrow (A+B)^2 \Rightarrow A^2 + B^2$$

$$A(B+C) = AB + AC \rightarrow (\text{SCH 3}) \rightarrow A(BC) \Rightarrow AB \times AC$$

(注：記号 \Rightarrow は間違った等式を示す)

(例2) 繰り返し適用による誤り

方程式 $\frac{1}{X} = \frac{1}{2} \therefore X = 2$ より類推して

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{X} + \frac{1}{7} \quad 3 = X + 7 \quad \therefore X = -4$$

分数式の約分 $\frac{AX}{X} = A$ より類推して

$$\frac{AX + BY}{X + Y} = A + B$$

逆数や約分の誤りなど、一般化された分配の誤りすべては、演算子や計算手続などが必ずしも線形ではないことを、学習者がはっきりとは理解していないことによる。

(b) 一般化

一般化とは、解いたことのある例題から規則の抽象化によって引き出された誤りである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(例)} \quad (X-3)(X-4) = 0 \\ \quad \quad X-3=0, X-4=0 \\ \quad \quad X=3, X=4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (X-5)(X-7) = 3 \\ X-5=3, X-7=3 \\ X=8, X=10 \end{array} \right.$$

(2) [2] の誤り

新しい概念の獲得に要求される基礎知識の質的变化がなされないために生みだされる誤りである。算数から代数への変換について、記号値、表記法、同等、解法の本質的变化等をあげることができる。1. 2で更に詳しく述べる。

(3) [3] の誤り

これは、解法の本質的变化に起因する。すなわち、算数において問題を解くことは、アルゴリズムを実行することであるが、代数においては、アルゴリズムの実行の他に多くの処理が含まれている。

(a) 計画と計画上の誤り

目標は何であるかを知ることが必要である。すなわち目標に向けて考えられる処理、代数問題の目標に到達したかどうかの決定が必要である。例えば、「因数分解せよ」にはその本質的な意味が含まれている。 $X^2 + \frac{5}{6}X + \frac{1}{6}$ の因数分解は、 $X(X + \frac{5}{6}) + \frac{1}{6}$ では適切ではない。

(b) 処理上の誤り

この誤りは手続きの実行上のしくじり (slip) である。例えば、分数方程式を解く際、左辺だけに共通分母を掛け、右辺に掛けるのを忘れる場合である。

また、文字式における不完全な分配の場合がある。例えば、 $a(b+c)$ を $ab+c$ とするなど。

1. 2 概念の変化に伴う誤り

Matz の誤りの分類における [1], [3] については、かなり明確であり、コンピュータモデル化することができるが、[2] については不明確な点が多い。[2] に関連する誤りの原因は、学習者の持つ不完全な知識であり、必要な概念変化がなされていないとみなすことができる。しかし、なぜこのような概念変化がなされないのかについては示されていない。したがって、算数から代数への移行に伴う概念の変化を分析して、代数の概念形成について検討することは、誤りの原理や代数の能力についてのコンピュータモデルを作るのに役立つものと思われる。

そのため、中学校、高校の代数の範囲の誤答データを集めてデータベースを構築することにし、それを基にして分析を進めている。ここでは Matz の例と、集めたデータの中からの例を示す。

(a) 記号値：文字は数を代表する

文字が数の代表であることを認識しない誤りがある。例えば、「Xが何であるか分からないから、

Xを掛けることはできない」などである。さらに、記号値の抽象性は、数式から方程式へ移行するにしたがって、抽象化の性質が変化するという微妙で複雑な性質を持っている。

(b) 表記法：代数においては特有の規則がある。等号、接続、プラスおよびマイナスなどの例がある。

①接続を位取りとみなした例

$X = 6$ のとき $4X = 46$ とする

② $A \times 5 - 8 \times B$ の計算 (正解は $5A - 8B$ のつもり)

答 $-3AB$ ($A \times (5 - 8) \times B$ として計算している)

答 $-40AB$ ($A \times 5 \times (-8) \times B$ として計算している)

③ A について解くとき

$C = 2(A + B)$ $2A = C - 2B \rightarrow A = C - 2B - 2$ (2だけを移項した)

(c) 同等：算数における同等“=”の意味は換算 (reduction) の意味であり、代数においては恒等式や方程式 (制約式) においても使用される。

これらの知識は、比較的定式化しやすい手続きの知識よりも、概念的知識から構成されている部分が多いと考えられる。概念的知識は情報のネットワークとも考えられ、その習得には、いくつかの情報間の関係を構成することによって達成される。したがって、それらを含むモデル化は非常に難しい問題である。

1. 3 誤りデータベースの開発

中学、高校の代数の範囲 (正負の計算, 文字式の計算, 方程式, 不等式等) に限って、誤りのデータを集めている。それらは生徒の答案であったり、誤答を抽出して整理したものもある。また、集めたデータは、これまで学校現場で行われたテストやこの調査のために実施されたテストなどで、問題は統一されたものでなく色々なものが混ざっている。これら多数のデータを多方面から検討するためにデータベースを構築することにした。データベース構築の目的は、得られたデータには色々な問題が混ざっていること、またそれらのデータだけを基にして各種の検討を行わなければならないため、データの様子を把握し易くすることである。さらに、このデータベースを基にして、算数から代数への概念形成の変化を調べ、コンピュータモデルの作成のための検討を行うことである。

このデータベースには、得られた客観的なデータはすべて入力する。すなわち、ある問題に対する途中経過や誤答が複数ある場合にはそれらの全てを入力する。誤答に対する個人を特定できる場合には、個人 NO 及びその属性 (学校, 学年) も入力する。さらに、各誤答に対して、こちらで検討して判断できる情報も入力する。例えば、Matz のプロセスモデルによる誤答分類の該当項目、解答者に欠落している知識、その誤答がどんな問題に対して正しい答となるか、誤答と正解との距離等を入力する。

このデータベースを基にして、次のような事項について検討している。

- ①誤答原因の解析を行う (Matz の理論による)
- ②誤りによる問題の分類を行う (経験的 분류を含む)
- ③問題の複雑さ, 難しさの測度について検討する
- ④概念知識の変化について調べる

2. 文字式における誤りモデル

代数の解答例を集めてそのデータベースを構築し, それによって誤答原因など分析を進めているが, ここでは, 現段階までに得られた結果である, 文字式の導入段階における誤りモデルについて分析した結果を報告する。文字式は算数から代数への最初の移行段階であり, 代数の概念形成を調べるためにも重要である。

2. 1 モデル生成の重要性

算数から代数への概念の変化を分析することは, 誤りのモデルを作り, さらに代数学習のコンピュータモデルを構築するために重要である。¹⁾

- ①能力についてのモデルを作るためには, それを構成する技能や概念が何であるかを知る必要がある。
- ②代数の習得法のモデルは, 平凡でない問題を解ける程度には十分強力であるが, 習得できないはずの知識まで仮定するほど強力ではないことが要求される。
- ③学習者が概念の変化の判断を誤るのは, 新しい状況において使用するには不適切な旧知の知識を間に合わせに使うときである。

2. 2 算数から代数への概念の変化

(1) 記号値 (文字) の概念

- ①代数における文字は, 数の代わりであるが, 具体的な整数, 小数, 分数でなく, より抽象的なものである。
- ②文字は未知数, 定数及び変数と呼ばれることがあるが, 場合によっては, 一つの文字が未知数, 定数及び変数の中の二者あるいは三者を表すことがある。
- ③算数では二つの数の計算結果を一つの数で表すのに対し, 文字式では二つの文字を計算した結果を第三の文字にはまとめられない。すなわち, 式 $a + b$ は a に b を足す意味を表していると同時に, 文字式の計算結果をも表している。

(2) 表記法

代数における表記法のあいまいさと2重性は, 記号上の評価と数値的な評価の間の関連をわかり

にくくしている。例えば、等号、接続、プラス、マイナスなどは、いくつかの意味を持っており、その区別は前後関係から判断される。

2.3 文字式の計算における誤りモデル

今回の調査対象とした問題を表1に示す。以下の誤りモデルは、これらの問題に関する誤りを分析して得られたものである。

[A] 文字式概念形成がほとんどできていない段階の誤り

(a1) 文字を捨てる

$$9a - 8 - 6a \rightarrow -5$$

$$3xy - 4xy + 10xy \rightarrow 11$$

$$5a^2 - a^2 \rightarrow 4$$

このモデルをもつ学習者は、文字の存在を認めず、文字を捨てる。まだ文字の概念形成をしていない。

(a2) 引き算のとき文字も引き去る(取り去る)

$$5y - 4y \rightarrow 1$$

$$5a^2 - a^2 \rightarrow 5$$

このモデルの学習者は、 $5y$ を $5 \times y$ と認めず、 5 と y の集まりとみている。文字式の表記法をまだ理解していない。

(a3) 数同士しか計算できない

$$9a - 8 - 6a \rightarrow (9 - 8 - 6)a \rightarrow -5a$$

$$(3x + 2) + (4x - 5) \rightarrow (3 + 2 + 4 + 5)x \\ \rightarrow 14x$$

$$4(x - 2) \rightarrow (4 - 2)x \rightarrow 2x$$

このモデルの学習者は、数の計算だけしかしない。文字の存在は認めるが、文字は意味の無いものだとみている。

[B] 文字式概念形成が少しできかかっている段階の誤り

(b1) 非同類項の演算をさらにまとめる

$$(4x - 3) - (5x - 7) = 4x - 5x - 3 + 7 \rightarrow -1x + 10 \\ \rightarrow -11x$$

$$4(x - 2) = 4x - 8 \rightarrow -32x$$

このモデルの学習者は、旧知の数の計算の知識を間に合わせに適用し、一つの結果になるまで実行する。演算記号(+, -)が残っていると、まだ結果とは認めない。

表1 調査対象とした問題

問題番号	問題式
212	$a \times 5 - 8 \times b$
211	$2x + 3x$
101	$5y - 4y$
321	$5a^2 - a^2$
105	$3xy - 4xy + 10xy$
103	$9a - 8 - 6a$
104	$8a - 7b - a + b$
213	$4x - 7 + 2x - 6$
130	$4(x - 2)$
133	$2(3a - 5b + 1)$
313	$-4(-3x - 5)$
215	$-5(3x - 2)$
109	$(3x + 2) + (4x - 5)$
322	$(3x + 2y) + (4x - 6y)$
311	$(3x - 2) - (2x - 5)$
110	$(4x - 3) - (5x - 7)$
112	$(m - 2n) + (3m + 4n)$
113	$-(2a - b) - (-3a + 5b)$
214	$(-2a - 4) - (4 - 2a)$
142	$5(x - 2) + (2x - 3)$
315	$2(x - 5) - 3(2x - 1)$
218	$3(2a - 4) - 4(a - 5)$
217	$3(x + 2) + 2(2x - 3)$

(b 2) 括弧を外すとき, それをまとめて計算する

$$(3x + 2) + (4x - 5) \rightarrow 5x + 1x \rightarrow 6x$$

$$(4x - 3) - (5x - 7) \rightarrow 1x - 2x \rightarrow 1x^2$$

$$(m - 2n) + (3m + 4n) \rightarrow 1mn + 7mn \rightarrow 8mn^2$$

このモデルの学習者は, 計算における括弧内を先に計算するというシエマを間に合わせに適用したものとみられる。

(b 3) 足し算を掛け算にする

$$AX + B \Rightarrow (A + B)X \quad (*)$$

$$AX + BY \Rightarrow (A + B)XY \quad (**)$$

$$AX + BX \Rightarrow (A + B)X^2 \quad (***)$$

$$8a - 7b - a + b \rightarrow 1a^2b^2$$

$$3xy - 4xy + 10xy \rightarrow 1xy^2 + 10xy \rightarrow 11xy^3$$

$$(4x - 3) - (5x - 7) \rightarrow 1x - 2x \rightarrow 1x^2$$

$$(m - 2n) + (3m + 4n) \rightarrow 1mn + 7mn \rightarrow 8mn^2$$

(*) は非同類項の演算をまとめたものであるが, このシエマに従って (**), (***) が類推されたとみられる。従って, このモデルの学習者は (b 1), (b 2) の誤りモデルも持っている。

[C] 文字式概念形成が不完全な誤り

(c 1) $O \cdot A \Rightarrow A$

$$(-2a - 4) - (4 - 2a) \rightarrow a - 8$$

このモデルの学習者は, 数値の一般化に慣れているので, 重要な意味を持つ特別な数値を含む型の問題において誤りを犯す。

$$A \times 1 = A, A + 0 = A \quad \text{より}$$

$A \triangle [\text{特別な数}] = A$ のように一般化し $A \times 0 \Rightarrow A$, $A \times 0 = 0$ などを類推する。これより, 同じ学習者がときには正しくときには誤った行動をする理由が分かる。

(c 2) 計算が不完全 (途中で終わっている)

$$5y - 4y \rightarrow 1y$$

$$3xy - 4xy + 10xy \rightarrow -xy + 10xy$$

$$(-2a - 4) - (4 - 2a) \rightarrow 2a - 2a$$

このモデルの学習者は, どこまで計算すれば良いのか分からない。文字式の表記法に慣れていない。あるいはこれ以上計算すると未知の結果になるなどの場合とみられる。

[D] 括弧を外すときの誤り

Dの誤りは, 括弧を外すときに関係した誤りであり, 多種にわたる。この誤りは, 文字式概念

形成が十分にできていても不注意で犯すこともよくある。しかし文字式の概念形成がまだ不十分で、次のような誤りモデルをもった学習者もいる。

(d 1) 分配が不完全

$$A(B+C) \Rightarrow AB+C$$

$$4(x-2) \rightarrow 4x-2$$

このモデルの学習者は、括弧を無視しているとみられる。

(d 2) 括弧を無視

$$-(A-B) \Rightarrow -A-B$$

$$(4x-3) - (5x-7) \rightarrow 4x-3-5x-7 \rightarrow -x-10$$

$$(-2a-4) - (4-2a) \rightarrow -2a-4-4-2a \rightarrow -4a-8$$

$$(4x-3) - (5x-7) \rightarrow 4x-5x-3-7 \rightarrow 9x-10$$

このモデルの学習者も、(d 1)と同様に括弧を無視しているとみられる。

(d 3) +を分配する

$$+(A-B) \Rightarrow A+B$$

$$(3x+2) + (4x-5) \rightarrow 3x+2+4x+5 \rightarrow 7x+7$$

このモデルの学習者は、+を分配してどちらも+にする。

(d 4) 負号を付ける

$$+(A+B) \Rightarrow A-B$$

$$(m-2n) + (3m+4n) \rightarrow -m+2n+3m-4n \rightarrow 2m+2n$$

このモデルの学習者は、括弧を外すと-を付ける。

(d 5) すべて正符号にする

$$-(A-B) \Rightarrow A+B$$

$$(4x-3) - (5x-7) \rightarrow -4x+3+5x+7 \rightarrow x+10$$

$$(-2a-4) - (4-2a) \rightarrow -2a-4+4+2a \rightarrow 0$$

このモデルの学習者は、括弧の前に-があると、すべて+にする。

(d 6) 負号の位置を変える

$$(A-B) \Rightarrow -A+B$$

$$(4x-3) - (5x-7) \rightarrow -4x+3+5x+7 \rightarrow x+10$$

$$(m-2n) + (3m+4n) \rightarrow -m+2n+3m-4n \rightarrow 2m+2n$$

このモデルの学習者は、括弧を外すとき負号の位置を変える。

[E] 負号に関係した誤り

Eの誤りは、負号が付いている式に関連して犯す誤りである。この種の誤りも、文字式の概念形成ができていても、不注意で犯すことがよくある。しかし、文字式の概念形成が不十分で、次のよ

うな誤りモデルをもった学習者もいる。

(e 1) 移項すると符号を変える

$$8a - 7b - a + b \rightarrow 8a + a - b + 7b \rightarrow 9a - 8b$$

$$(4x - 3) - (5x - 7) \rightarrow 4x + 5x - 7 + 3 \rightarrow 9x - 10$$

$$(m - 2n) + (3m + 4n) \rightarrow m - 3m - 4n + 2n \rightarrow -2m - 6n$$

このモデルの学習者は、移項すると符号を変えるとみられる。

(e 2) 負号を忘れる

$-A + B$ あるいは $A - B$ を $A + B$ として計算する

$$3xy - 4xy + 10xy \rightarrow -xy + 10xy \rightarrow 11xy$$

$$(4x - 3) - (5x - 7) \rightarrow 4x - 5x - 3 - 7 \rightarrow 9x - 10$$

このモデルの学習者は、負号を無視して正符号として足し算にするとみられる。

(e 3) 負号を付ける

$A - B$ を $-(A + B)$ として計算する

$$3xy - 4xy + 10xy \rightarrow -7xy + 10xy \rightarrow 3xy$$

このモデルの学習者は、一方に符号が付いていると、もう一方にも符号を付けて計算する。すなわち、数値の計算は足し算をして、結果に符号を付けることになる。

(e 4) 負号を付ける (括弧があるかのように計算する)

$-A + B$ を $-(A + B)$ として計算する

$$8a - 7b - a + b \rightarrow 8a - a - 7b + b \rightarrow 7a - 8b$$

$$3xy - 4xy + 10xy \rightarrow -xy + 10xy \rightarrow 11xy$$

$$(m - 2n) + (3m + 4n) = m + 3m - 2n + 4n \\ \rightarrow 4m - 6n$$

このモデルの学習者は、一方に負号があるともう一方にも負号を付けて計算する。すなわち、あたかも括弧でくくられているかのような計算をする。この場合も (e 3) と同様に数値の計算は、足し算をして結果に負号を付けることになる。

[F] 計算の誤り

Fの誤りモデルは、数の計算の誤りに基づくものであり、この誤りも不注意による場合が多い。しかし、数の計算の段階から、この種の誤りモデルをもち続けている学習者もいる。(f 2), (f 3) は明らかに不注意による誤りであり、モデルとしてあげたものではない。

(f 1) 引き算 $A X - B X$ の結果の符号の誤り

$A > B$ のときに

$$A X - B X \Rightarrow - | A - B | X$$

