

三点曲げを受ける異種材積層はりのはく離の局所座屈*

深川 和良^{*1}, 小田 美紀男^{*2}
有富 正男^{*2}, 戸谷 眞之^{*2}Local Delamination Buckling of a Laminated Beam Due to
Three-Point BendingKazuyoshi FUKAGAWA^{*3}, Mikio ODA,
Masao ARITOMI and Masayuki TOYA^{*3} Production Technology Department, Kumamoto Industrial Research Institute,
3-11-38 Higashimachi, Kumamoto-shi, Kumamoto, 862-0901 Japan

Asymmetric three-point bending of a layered beam containing an interior interface crack is analyzed on the basis of classical beam theory. The point of load application is assumed to lie on the delaminated part, so that a part of the crack faces is contacting one another, while the remaining part of the crack faces is open. Axial compressive and tensile forces are induced by bending in the parts of the beam above and below the delamination and they are determined by modeling the cracked part as two lapped beams hinged at both ends. When the magnitude of the applied load is small, the beam deflects retaining mutual contact of whole crack faces, but as the applied load reaches a critical value, local delamination buckling occurs. The relation between the magnitude of the applied load and the deflection at the point of load application is found to be nearly bilinear. The validity of this prediction is confirmed by experiments. It is also shown that once the delamination buckling occurs, energy release rate generally becomes larger as compared with the case of perfect contact of delaminated surfaces.

Key Words: Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Construction, Three-point Bending, Buckling, Energy Release Rate

1. 緒言

積層はりや積層板においては、製造工程中の不具合や積層材表面に垂直に加えられた低速度衝撃により、接着面(界面)のはく離が容易に生じることが知られている。破壊力学の観点からは、積層材を使用するにあたっては、あらかじめはく離の存在を想定し、それがいかなる条件のもとで進展するかを把握しておくことが不可欠である。

Maikumaら⁽¹⁾は対称三点曲げを受ける二枚の等方性同質材で作られた積層はり中央の界面はく離を研究した。SuemasuとMajima^{(2),(3)}は、中心に集中力を受ける多層円板中の多重円形界面はく離の進展を扱っている。HutchinsonとLu⁽⁴⁾は直交異方性はり中の界面はく離が温度こう配下にあるときのエネルギー解放率を導

いた。Toyaら⁽⁵⁾は、界面はく離を有する異種材からなる積層はりが非対称三点曲げを受ける場合の解析を行った。はり理論に基づき、負荷点のたわみを外力とはく離長さの関数として得、これより、はく離端におけるエネルギー解放率とそのモードI、モードII成分を導いた。

Toyaら⁽⁵⁾の解析モデルでは、はく離面が全面接触していることが仮定されていた。しかしながら、この仮定は小さな負荷に対しては正しいが、大きな曲げのもとでは、曲げに起因する圧縮力によりはく離部分で座屈が生じる。荒井ら⁽⁶⁾は、四点曲げのもとで基材に施された皮膜が座屈を起こし、界面に沿ってはく離が進展することを実験的に明らかにした。座屈が起こる場合は、はく離面上下のはりのたわみは異なっているものとして、解析をする必要がある。戸谷ら⁽⁷⁾は三点、および四点曲げを受ける積層はり中のはく離部分が座屈を起こす場合についてたわみの解析と実験を行った。ただし、この取り扱いでは負荷点は接着部分上にあることが仮定されており、解析結果の適用範囲は限定さ

* 原稿受付 2006年4月18日。

^{*1} 正員、熊本県工業技術センター(☎862-0901 熊本市東町3-11-38)。^{*2} 正員、鹿児島大学工学部(☎890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。

れている。現実には、例えば低速度衝撃によるはく離進展問題においては、はく離は負荷点直下の界面で生じる(図1参照)。したがって一般には、はく離の上下面の一部は互いに接触し、他の部分で座屈を起こすと考えられる。

本論文では、三点曲げによるはく離部の局所座屈問題を一般的に扱うために、この接触とはく離の混合問題について解析し、ついで実験により理論の精度を確認する。また、座屈時のエネルギー解放率を計算し、接触解のそれと比較し、座屈によりはく離進展がどれほど容易になるかを定量的に明らかにする。

2. 局所座屈の解析

2.1 集中力がはく離部分上に作用する場合の局所座屈 モデルを図1に示す。上下のはりは等方弾性体であると仮定するが、異方性の主軸がはりの軸に一致する場合は以下の理論は直交異方性のはりに対しても適用できる。二本の異種材からなる矩形断面のはりを接着して作られたはく離(界面クラック)を含む積層はりを考え、このはりが非対称三点曲げを受ける場合について解析する。はりの長さ(=支点間距離)を L 、はりの幅、厚さ、ヤング率及び断面二次モーメントは、それぞれ b_i, h_i, E_i, I_i ($i=1,2$) とする。添字の1, 2 はそれぞれ上層, 下層を意味する。今、長さ c のはく離が含まれていると仮定し、左右のはく離端のはりの端からの距離はそれぞれ a_L および a_R であるとする。またはく離左端から負荷点までの距離(BC)を c_L 、右端から負荷点までのそれ(CD)を c_R とする ($c = c_L + c_R$)。集中力 P が左の支持点から距離 d (または右の支持点から距離 $d' = L - d$) の位置に作用している。負荷点のはく離部分上にあり(すなわち $d > a_L$)、しかも $c_L < c_R$ なる場合を考える。

はく離部分BD間において、仮想的にはりを点B, Dで切り離し、全体のはりを三つの要素AB, BD, DFに分離する。はく離部分BD間は両端がヒンジで止められた重ねばりとみなすことができる⁽⁵⁾。二つのヒンジ

の作用は、上のはりに対しては、はりの両下すみ部に未知の水平方向圧縮力、 $-Z$ 、及び垂直上向きに作用する反力 R_B, R_D 、下のはりに対しては、はりの両上すみ部に作用する引張力 Z 及び垂直下向きの反力、 R_B, R_D に置き換えられる。はく離部分BD間の上下のはりの自由体線図を図2に示す。

最初に、これら上下のはりのたわみを解析する。座標軸は左端(B点)を原点にとり、 x は右向きを、 y は下向きを正にとる。負荷点Cは、B点寄りにあるとして、はく離部分の局所座屈は区間CDで起り、区間BCにおいては、はく離面は相互接触しているとする。この相互接触力を $\pm q(x)$ とする。このほか左端(B点)にモーメント M_{1B}, M_{2B} 、せん断力 $\alpha_1 F_B, \beta_1 F_B$ 、右端(D点)にモーメント M_{1D}, M_{2D} 、せん断力 $\alpha_3 F_D, \beta_3 F_D$ が作用している。 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$ は定数であり $\alpha_1 + \beta_1 = 1, \alpha_3 + \beta_3 = 1$ を満足している。

正確には接触区間の長さを最初は未知として取り扱わなければならないが、解析は非常に面倒になるであろう。そこで、前述のように単純化のために、相互接触はBC間に生じると仮定したわけであるが、この仮定の導入にあたっては、本来上層のみに作用している外力 P を分割し、上層に $\alpha_2 P$ 、下層に $\beta_2 P$ の力 ($\alpha_2 + \beta_2 = 1$) が作用するものとしなければならない。 α_2, β_2 は問題を解く過程で決定される。なお、後述する実験値との比較から、この荷重の分割は結果的に大きな誤差を生じさせないことがわかる。

力とモーメントのつり合いより次式が得られる。

$$F_B = Pd'/L, F_D = Pd/L \dots\dots\dots(1)$$

$$M_{1B} + M_{2B} = F_B a_L, M_{1D} + M_{2D} = F_D a_R$$

上下のはりのそれぞれの x 点断面における中立軸回りのモーメントを M_{x1}, M_{x2} 、たわみを y_1, y_2 とする。

最初にはく離部分のBC間について考える。曲げモーメントは下向きに凸に曲げるように作用するときを正とすると以下ようになる。

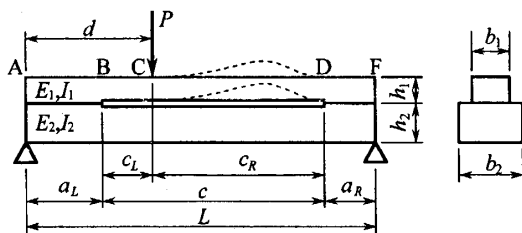


Fig. 1 Three-point bending of a laminated beam containing a delamination

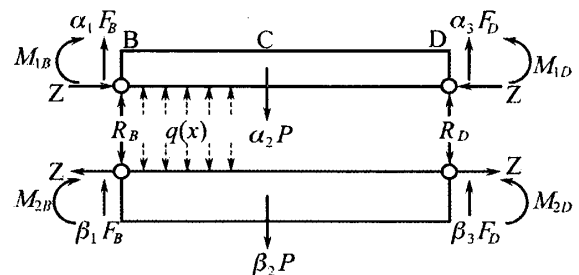


Fig. 2 Free-body diagrams for the interval BD

$$M_{x1} = M_1 + \alpha_1' F_B x + Z y_1 + \int_0^x q(x')(x-x') dx' \dots\dots\dots(2)$$

$$M_{x2} = M_2 + \beta_1' F_B x - Z y_2 - \int_0^x q(x')(x-x') dx' \dots\dots\dots(3)$$

ここで、

$$\alpha_1' F_B = \alpha_1 F_B + R_B, \quad \beta_1' F_B = \beta_1 F_B - R_B, \\ (\alpha_1' + \beta_1' = 1), \dots\dots\dots(4)$$

$$M_1 = M_{1B} - Zh_1/2, \quad M_2 = M_{2B} - Zh_2/2 \dots\dots\dots(5)$$

上下それぞれのたわみの微分方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = -\frac{M_{x1}}{D_1}, \quad \frac{d^2 y_2}{dx^2} = -\frac{M_{x2}}{D_2} \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 D_1, D_2 は上下それぞれのはりの曲げ剛性で $D_i = E_i I_i, I_i = b_i h_i^3/12 (i=1, 2)$. 上下のはりのたわみは等しい ($y_{BC} = y_1 = y_2$) とおき、 $x=0$ で $y_{BC} = 0$ とすると BC 間のたわみは次式で与えられる。

$$y_{BC} = s_1 x^3 + s_2 x^2 + s_3 x \dots\dots\dots(7)$$

ここで、

$$s_1 = -F_B/(6D) \dots\dots\dots(8)$$

$$s_2 = (-F_B a_L + \frac{1}{2} hZ)/(2D) \dots\dots\dots(9)$$

$D = D_1 + D_2, h = h_1 + h_2$ であり、 s_3 は未定定数である。相互接触力は Z の関数として次式で与えられる。

$$q(x) = -Z \frac{d^2 y_{BC}}{dx^2} = \frac{d'PZ}{LD} \left(x + a_L - \frac{LhZ}{2d'P} \right) \dots\dots\dots(10)$$

また式 (5) で与えられる材端モーメント $M_i (i=1,2)$ も Z の関数として表され、次式となる。

$$M_i = -D_i y_{BC}'|_{x=0} = D_i (F_B a_L - hZ/2)/D \dots\dots\dots(11) \\ (i=1,2)$$

次に、はく離部分 CD 間について考える。この区間では局所座屈が起こり上下のはりは、互いに接しておらず、相互接触力は存在しない。上下のはりのそれぞれの x 点断面における中立軸回りのモーメント M_{x1}, M_{x2} は式 (10) を用いて計算すると以下のようになる。

$$M_{x1} = M_1 + \alpha_1' F_B x + f_1 Z - f_2 Z x \\ + Z y_1(x) - \alpha_2 P(x-d+a_L) \dots\dots\dots(12)$$

$$M_{x2} = M_2 + \beta_1' F_B x - f_1 Z + f_2 Z x \\ - Z y_2(x) - \beta_2 P(x-d+a_L) \dots\dots\dots(13)$$

ここで、

$$f_1 = \frac{-F_B(d-a_L)^2}{D} \left[\frac{d-a_L}{3} + \frac{1}{2} \left(a_L - \frac{hZ}{2F_B} \right) \right] \dots\dots\dots(14)$$

$$f_2 = \frac{F_B(d-a_L)}{2D} \left(-d - a_L + \frac{hZ}{F_B} \right) \dots\dots\dots(15)$$

式 (6) に式 (12), (13) を代入して解くと、上下層それぞれのたわみは以下の式で与えられる。

$$y_1 = A_1 \sin(k_1 x) + B_1 \cos(k_1 x) - (M_1 + \alpha_1' F_B x)/Z \\ - f_1 + f_2 x + \alpha_2 P(x-d+a_L)/Z \dots\dots\dots(16)$$

$$y_2 = A_2 \exp(k_2 x) + B_2 \exp(-k_2 x) + (M_2 + \beta_1' F_B x)/Z \\ - f_1 + f_2 x - \beta_2 P(x-d+a_L)/Z \dots\dots\dots(17)$$

ここで、

$$k_1 = \sqrt{Z/D_1}, \quad k_2 = \sqrt{Z/D_2} \dots\dots\dots(18)$$

次に、図 1 の接着部分 AB, DF 間のたわみを考える。AB, DF 間のたわみをそれぞれ y_{AB}, y_{DF} とし x 座標の原点を A 点にとると、たわみは以下のように与えられる。

$$y_{AB} = -F_B x^3/(6D') + s_4 x \dots\dots\dots(19)$$

$$y_{DF} = \frac{Pd}{6LD'} x^3 - \frac{Pd}{2D'} x^2 + s_5 x + s_6 \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 D' は接着はりの曲げ剛性であり次式により与えられる。

$$D' = D + h^2 D_0/4 \dots\dots\dots(21)$$

ここで、

$$D_0 = 1/\left[(b_1 E_1 h_1)^{-1} + (b_2 E_2 h_2)^{-1} \right] \dots\dots\dots(22)$$

さらに、 $y_{DF}|_{x=L} = 0$ を考慮すると次式が得られる。

$$s_6 = \frac{PdL^2}{3D'} - s_5 L \dots\dots\dots(23)$$

九つの未定定数 $A_i, B_i (i=1,2), s_3 \sim s_5, \alpha_1', \alpha_2,$ は B, C, および D 点におけるたわみとたわみ角の連続条件から Z の関数として決定される。これらは付録に示してある。

最後に、軸力 Z を求める。上下のはりの中立面の長さは、変形以前には同一であり、変形後もそれぞれの中立面は、はりの垂直断面と直交しているという条件から、以下の方程式を得る。

$$F(Z) = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、

$$F(Z) = \frac{Zc}{E_1 h_1 b_1} + \frac{Zc}{E_2 h_2 b_2} + \frac{1}{2} \int_{d-a_L}^c (y_1')^2 dx - \frac{1}{2} \int_{d-a_L}^c (y_2')^2 dx - \frac{h}{2} (\theta_L + \theta_R) \quad (25)$$

上式において、 θ_L 、 θ_R はそれぞれ B 点、D 点におけるはりの傾きである。すなわち

$$\theta_L = \frac{dy_{BC}}{dx} \Big|_{x=0} = s_3', \quad \theta_R = -\frac{dy_1}{dx} \Big|_{x=c} \quad \dots\dots (26)$$

また、式中に現れる積分は簡単に計算できる。式(24)は Z に対する非線形方程式であり、数値的に解く必要がある。 Z を求めることで全ての未定定数が決まる。そして負荷点におけるたわみは次式から得られる。

$$\delta = y_{AB} \Big|_{x=a_L} + y_{BC} \Big|_{x=c_L} \quad \dots\dots\dots (27)$$

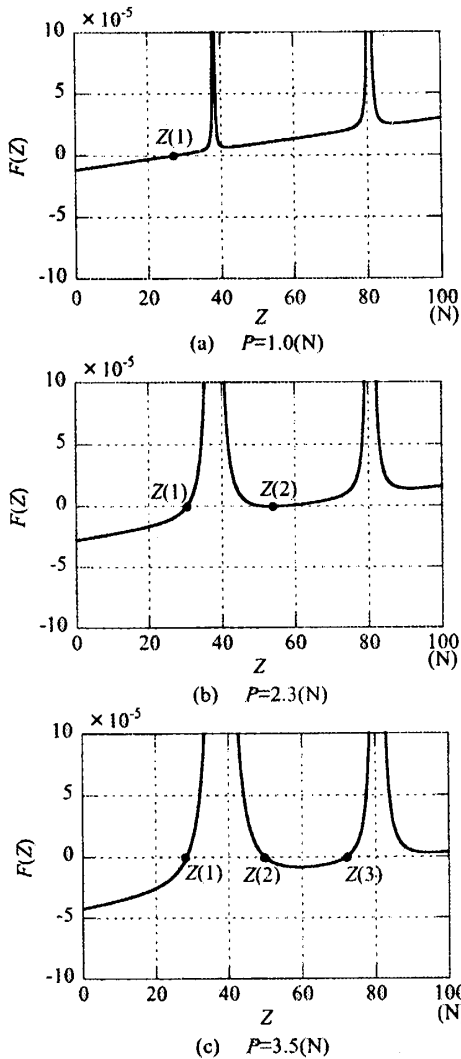


Fig.3 Plots of $F(Z)$ for several values of the applied force

2・2 軸力 Z の数値解 ここでモデルはりとして、上層が厚さ $h_1=0.5\text{mm}$ 、幅 $b_1=20\text{mm}$ のステンレス鋼はり、下層が厚さ $h_2=2\text{mm}$ 、幅 $b_2=30\text{mm}$ のアルミニウムはりである積層はり (支点間距離は $L=400\text{mm}$) を例にとって計算する。ヤング率はそれぞれ $E_1=195.2\text{GPa}$ 、 $E_2=72.4\text{GPa}$ とする (これらの値は現著者らの実測値である)。はく離長さを $c=240\text{mm}$ 、また $a_R=50\text{mm}$ 、 $d=150\text{mm}$ とし、荷重 P を変化させる。

ここで、解くべき方程式 $F(Z)=0$ の解の挙動を調べるために $F(Z)$ を Z に対してプロットする。図3(a)~(c)に、荷重 P がそれぞれ、1.0N、2.3N、3.5N の場合に対する $F(Z)$ のグラフを示す。荷重が小さい場合、解は一つだけ存在し、荷重が増加するにつれて解の個数も二個 (図3(b))、三個 (図3(c)) と増加する。図3(a)~(c)の解 $Z(1)$ 、 $Z(2)$ 、 $Z(3)$ に対応するたわみ曲線を描いてみたところ、 $Z(1)$ に対しては CD 間の上下のはりの位置関係が逆転し、また $Z(3)$ に対しては CD 間の一部で上のはりが下のはりの下側に来るたわみ曲線となり、したがって解 $Z(1)$ と $Z(3)$ は不適当であることがわかった。一方、 $Z(2)$ に対するたわみ曲線は矛盾を含まない。すなわち、 $Z(2)$ が我々の求める座屈後の軸力となる。また、この二番目の解が初めて現れる時の荷重が臨界座屈荷重となる。今の場合、図3(b)より臨界座屈荷重は $P \approx 2.3\text{N}$ である。

臨界座屈荷重より小さい荷重に対しては、座屈解は存在しないから、はく離面の相互接触を仮定しなければならない。この場合の解析はすでになされている。負荷点におけるたわみ δ は荷重 P に比例し、はりのコンプライアンス $\Phi (= \delta/P)$ は次式で与えられる⁽⁵⁾。

$$\Phi = -\frac{1}{3L^2} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \left[d^2 (d' - c_R)^3 + d'^2 (d - c_L)^3 \right] - \frac{1}{4c} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) f^2 + \frac{d^2 d'^2}{3LD} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで、

$$f = [(2a_L + c_L)c_L d' + (c_R + 2a_R)c_R d] / L \quad \dots\dots\dots (29)$$

図4に P と δ の関係を示す。 $P - \delta$ 関係はほぼバイリニアであり、座屈後にはりがたわみやすくなることがわかる。またこの図では実験値もプロットしてあるが、実験の詳細については4章で述べる。

2・3 集中力が接着部分上に作用する場合の局所座屈 座屈によるはく離進展の一般的挙動を調べるためには、負荷点 C が AB 間にある場合 ($d < a_L$) も扱う必要があるが、この場合の解析はすでになされてい

る⁽⁷⁾。解析は接触部分がないので2.1節の計算より簡単であった。問題は式(24)、(25)と類似の非線形方程式を解くことに帰せられるが、この非線形方程式の解の挙動は、前節と同様であり、二番目に小さい解 $Z(2)$ が座屈後に対応する唯一の解となり、臨界座屈荷重 P_{cr} は二番目に小さい解が初めて現れるときの荷重となる。前節のモデルはりを対象に、また同様に $a_R=50\text{mm}$ 、 $d=150\text{mm}$ として、はく離長さを 100mm から 280mm と変化させて、 P_{cr} を計算した。結果を図5に示す。 $c/L > 0.5$ の領域は負荷点のはく離部内にある場合であるが、この領域において、座屈する区間 CD は一定であるが、はく離長さの増大と共に座屈荷重はわずかではあるが減少している。

一方、荷重が臨界座屈荷重 P_{cr} より小さいとき、はく離面は相互接触をし、負荷点のたわみ δ は荷重 P に比例する。はく離部外部に荷重が作用する場合、コンプライアンスは次式で与えられている⁽⁵⁾。

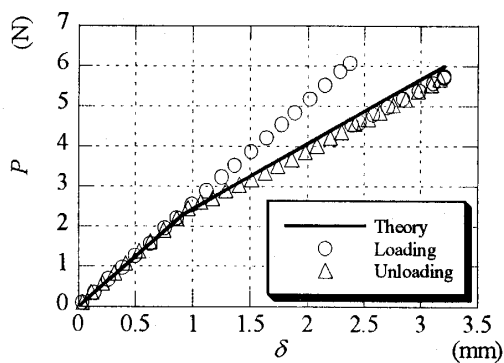


Fig.4 Relation between the applied load P and the deflection at the point of load application δ for $c=240\text{mm}$ ($d>a_L$)

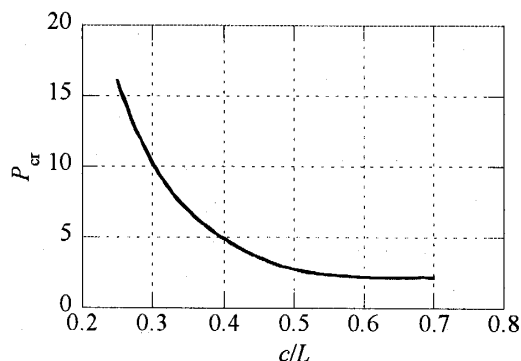


Fig.5 Critical buckling load P_{cr} plotted for crack length c/L ($a_R = 50\text{mm}$, $d = 150\text{mm}$)

$$\Phi = \frac{d^2 c^3}{12L^2} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) + \frac{d^2 d'^2}{3DL} \dots\dots\dots(30)$$

すでに文献(7)で示されたように、負荷点のはく離部外にある場合でも、 $P - \delta$ 関係はほぼバイリニアとなる。前出のモデルはりに対し座屈前後の $P - \delta$ 直線のコンプライアンス (座屈後に対しては傾きの逆数) を負荷点のはく離内および外にある場合について計算し、実験 (詳細については4章参照) と比較した結果を図6に示す。負荷点のはく離部外にある場合、はく離長さが短いことを反映し、座屈前後のコンプライアンスの差は図4に比べて小さくなっている。

3. エネルギー解放率

この章では上下層のはりの幅が等しい ($b_1 = b_2 = b$) として、座屈がエネルギー解放率に対して与える影響を調べる。よく知られているように、負荷点におけるたわみと荷重が比例するとき、エネルギー解放率 G は、荷重一定条件の下のクラック進展に対して

$$G = (P^2 / 2b) d\Phi / dc \dots\dots\dots(31)$$

で与えられる (コンプライアンス法)。この式を適用すると、負荷点のはく離部分上にあり、かつはく離表面が相互接触しながら進展する場合、はく離左端、右端のそれぞれのエネルギー解放率 G_{aL} 、 G_{aR} は式(28)より以下のように得られる⁽⁵⁾。

$$G_{aL} = \frac{P^2}{2b} \frac{d\Phi}{dc_L} = \frac{P^2 c^2}{8b} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \left[\frac{d'}{L} - \left(\frac{c_R}{c} \right)^2 \right]^2 \dots\dots\dots(32)$$

$$G_{aR} = \frac{P^2 c^2}{8b} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \left[\frac{d}{L} - \left(\frac{c_L}{c} \right)^2 \right]^2 \dots\dots\dots(33)$$

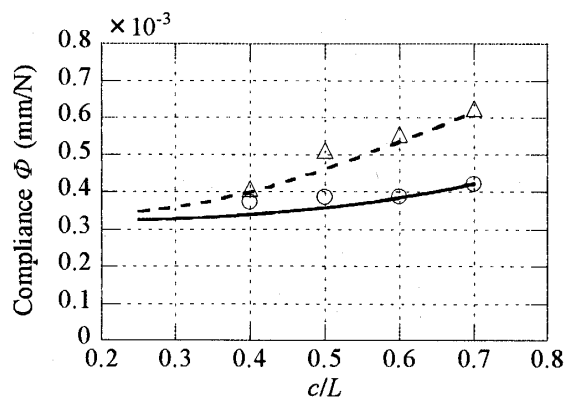


Fig.6 Comparison of the compliances between theory and experiments ($a_R = 50\text{mm}$, $d = 150\text{mm}$)

負荷点が接着部分上にある場合、クラック両端に対し式(30)から次式を得る。

$$G_{aL} = G_{aR} = \frac{P^2 d^2 c^2}{8bL^2} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \dots\dots\dots(34)$$

座屈後の状態におけるエネルギー解放率の計算には、コンプライアンス法は使えない。そこで、Suo と Hutchinson⁽⁸⁾の結果を用いる。彼らは図7に示されるようなモーメントと軸力による負荷を受ける単位幅の積層はり中の界面クラックに対し、エネルギー解放率の公式を導いた。平面応力条件を仮定し、彼らの結果を本論文の座屈モデルに適用すると、エネルギー解放率は次式で与えられる。

$$G = \frac{1}{2E_1} \left[\frac{P_0^2}{Ah_1} + \frac{M_0^2}{Bh_1^3} + \frac{2P_0M_0}{\sqrt{AB}h_1^2} \sqrt{\frac{(D'-D)D_1}{(D'-D_1)D}} \right] \dots\dots\dots(35)$$

ここで

$$M_0 = (M_1^* - D_1 M_3 / D') / b \dots\dots\dots(36)$$

$$P_0 = [Z - hD_0 M_3 / (2D')] / b \dots\dots\dots(37)$$

M_1^* と M_3 はクラック左端または右端それぞれに対応するモーメントであり、図7に示す向きに作用するときを正とする。定数 A と B は次式で与えられる。

$$A = \frac{D_0 D_2}{bE_1 h_1 (D' - D_1)}, \quad B = \frac{D_2}{12D} \dots\dots\dots(38)$$

負荷点のはく離部分上にある場合、はく離左端に対して式(11)より次式が得られる。

$$M_1^* = D_1 (F_B a_L - hZ/2) / D, \quad M_3 = F_B a_L \dots\dots\dots(39)$$

同様にはく離右端に対しては、 M_1^* は式(12)の x に c を代入することで得られ、また $M_3 = F_D a_R$ となる。接着部分上に荷重が作用する場合も同様にして M_1^* 、 M_3 が得られる。

例として、前章で用いたはり ($L=400\text{mm}$, $d=150\text{mm}$, $a_R=50\text{mm}$) について数値計算を行った。た

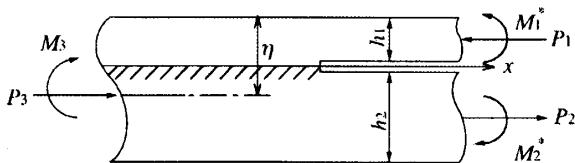


Fig.7 Split-beam element under general loading condition (η is the distance of the neutral axis of the bonded beam from the top surface)

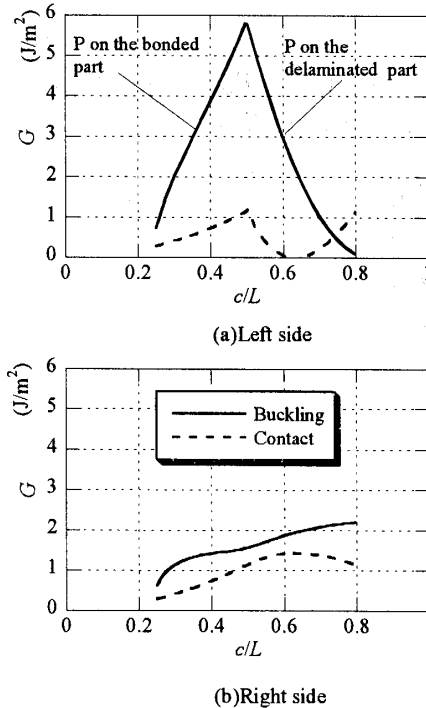


Fig.8 Energy release rates ($P=11\text{N}$, $a_R=50\text{mm}$, $d=150\text{mm}$, $b_1=b_2=30\text{mm}$, $h_1=0.4\text{mm}$)

だし、二つのはりの幅は同じ ($b_1=b_2=30\text{mm}$) とし、上層の厚さを 0.4mm としている。はく離長さは $100\text{mm} \sim 320\text{mm}$ に変化させている。荷重 P としては $c=100\text{mm}$ のはく離の臨界座屈荷重である 11N を用いた。

はく離左端および右端の座屈前後のエネルギー解放率とはく離長さ (c/L) の関係を図8(a), (b)に示す。左端での $c/L > 0.74$ なる範囲を除いては、座屈によってエネルギー解放率が增大することがわかる。またこの効果ははく離左端、すなわち負荷点に近いはく離端、において顕著である。

また図8(a)に着目すると、座屈モデルと接触モデルの両者ともはく離長さ c/L が0.25から0.5まで増大するのに伴い、言い換えるとはく離左端の位置が負荷点と一致するまでは、エネルギー解放率は増大している。さらにはく離長さが増加するとエネルギー解放率は減少に転じる。この現象は外荷重によりはく離先端付近ではく離面が閉じられることによるものと考えられる。

図8(a), (b)を比較してわかるように、初期はく離長さ c/L が0.65より短い場合は、はく離左端のエネルギー解放率は右端のそれより大きい。したがって、界面の破壊じん性値が比較的大きく、はく離進展が座屈によって起こる場合は、例えば初期はく離 $c=120\text{mm}$ に対して、はく離右端は停留したまま、左端だけが座屈により負荷点方向へ進展すると考えられる。破壊じん性が大きな界面においては、一般にはく離進展は座

屈が生じた後に生じると予想される。したがって、はく離進展の評価は座屈を考慮した上で行うべきである。

4. 実験

ここで 2.2 節で用いたモデルと同じステンレス鋼とアルミニウムで作られた積層はりを使用して実験を行った。厚さ 0.08mm の薄い PTFE テープをステンレスはりのはく離先端となるべき箇所に貼り、はく離端がはりの軸に垂直かつ直線状になるようにした。また直径 0.04mm のステンレスワイヤーを二本、8mm の間隔で、アルミニウムの接着面側に全長にわたって張った。この作業は、薄いステンレス層のはく離部分において自重による初期たわみが生じないようにするためである。はく離部を除いて二枚のはりをエポキシ系接着剤（アラルダイト）で接着した。はく離長さがそれぞれ $c=160, 200, 240, 280\text{mm}$ の 4 種類の積層材料を作製した。全てのはりのはく離右端の位置は、はり右端から 50mm ($=a_R$) としている。これらの試験片に対して万能試験機を用いて三点曲げ試験を行った。負荷点は、はりの左端から 150mm ($=d$) である。負荷点変位はレーザー変位計により測定した。

はく離長さ $c=240\text{mm}$ に対する荷重 P と負荷点たわみ δ の関係の実験結果は前出の図 4 に示した。このグラフからわかるように実験の負荷時において得られた臨界座屈荷重は理論値のそれより二倍程大きい。この傾向は他の試験片に対しても同様であった。座屈後は直ちに荷重は減少し、理論で得られた $P-\delta$ 関係に近い値になる。一方、除荷時においては臨界座屈荷重も含め、荷重とたわみの関係は理論と実験が非常によく一致していることがわかる。

全ての実験において、図 4 のように $P-\delta$ 関係はほぼバイリニアであった。はく離部分が接触している状態と座屈を起こしている状態に対するコンプライアンス ϕ とはく離長さ c/L の関係についての理論と実験の比較は図 6 に示してある。この図から荷重-たわみ関係の傾きは実験値と理論値でよく一致していることがわかる。

なお、負荷点直下でのみはく離面が接触し、図 1 の BC および CD 間の両部分で座屈が起こるといった現象は、実験においては観察されなかった。したがって左右対称な場合を除けば今回のモデルは十分な一般性を有していることが確認された。

5. 結言

非対称三点曲げを受ける内部界面はく離を有する積層はりの解析を行った。負荷点がはく離部分上にある

場合、荷重が臨界値に達すると、負荷点と負荷点からより離れたはく離端の間で、はく離部分上層部が局所座屈を起こす。一方、負荷点と負荷点に近い方のはく離端の間では上下のはく離面は相互接触を保つ。軸力に対する非線型方程式を導き、解の挙動を調べた。その結果、臨界座屈荷重は二番目の解が初めて現れるときの荷重であることがわかった。これより小さい荷重下では Toya ら⁽⁵⁾のはく離面が全面接触していると仮定した解析が有効である。荷重と負荷点におけるたわみの関係は、実験で得られた関係と良く一致している。ただし、負荷時における臨界座屈荷重は、理論と実験値では二倍程度の違いが見られた。この違いの原因の解明は将来の課題として残っている。

エネルギー解放率に対する座屈の影響についても解析を行った。エネルギー解放率ははく離面が全面接触している場合と比較して一般に座屈により増大する。このことは積層はりの界面強度の評価は座屈を考慮して行わなければならないことを意味している。

最後に、本研究は文部科学省科学研究費補助金 [基盤研究 (C) 17560073] の援助を受けて実施されたことを付記し、謝意を表す。

付録

B, C, D 点でのたわみとたわみ角の連続条件から以下の式を得る。B 点で

$$\frac{dy_{AB}}{dx}\Big|_{x=a_L} = \frac{dy_{BC}}{dx}\Big|_{x=0} \quad \dots\dots\dots(40)$$

C 点で、

$$y_{BC}\Big|_{x=d-a_L} = y_1\Big|_{x=d-a_L} = y_2\Big|_{x=d-a_L} \quad \dots\dots(41)$$

$$\frac{dy_{BC}}{dx}\Big|_{x=d-a_L} = \frac{dy_1}{dx}\Big|_{x=d-a_L} = \frac{dy_2}{dx}\Big|_{x=d-a_L} \quad \dots\dots(42)$$

D 点で、

$$y_1\Big|_{x=c} = y_2\Big|_{x=c}, \quad y_{AB}\Big|_{x=a_L} + y_1\Big|_{x=c} = y_{DF}\Big|_{x=a_L+c} \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$\frac{dy_1}{dx}\Big|_{x=c} = \frac{dy_2}{dx}\Big|_{x=c} = \frac{dy_{DF}}{dx}\Big|_{x=a_L+c} \quad \dots\dots\dots(44)$$

式 (41)₂, (42)₂, (43)₁, および(44)₁ は A_1, B_1 ($i=1, 2$)のみを未知数として含んでいる。そこで、(41)₂ と (42)₂ を解いて A_1 と B_1 を A_2 と B_2 で表す。次に (43)₁ と (44)₁ に代入して解くと A_2 と B_2 が得られる。このようにして、

$$A_2 = (\delta_1 a_{22} - \delta_2 a_{12})/\Delta, \quad B_2 = (-\delta_1 a_{21} + \delta_2 a_{11})/\Delta \quad \dots\dots\dots(45)$$

$$A_1 = a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta - a_3 \cos \theta \quad \dots\dots\dots(46)$$

$$B_1 = a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta + a_3 \sin \theta \quad \dots\dots\dots(47)$$

ここで,

$$\theta = k_1(d - a_L) \quad \dots\dots\dots(48)$$

$$a_1 = A_2 \Gamma + B_2 / \Gamma + [M - F_B(d - a_L)] / Z \quad \dots\dots(49)$$

$$a_2 = (k_2 / k_1) A_2 \Gamma - B_2 / \Gamma \quad \dots\dots\dots(50)$$

$$a_3 = (P - F_B) / k_1 Z \quad \dots\dots\dots(51)$$

$$a_{11} = [\cos k_1 \bar{e} + (k_2 / k_1) \sin k_1 \bar{e}] \Gamma - \exp(k_2 c) \quad \dots\dots\dots(52)$$

$$a_{12} = [\cos k_1 \bar{e} - (k_2 / k_1) \sin k_1 \bar{e}] / \Gamma - \exp(-k_2 c) \quad \dots\dots\dots(53)$$

$$a_{21} = [\sin k_1 \bar{e} - (k_2 / k_1) \cos k_1 \bar{e}] \Gamma + (k_2 / k_1) \exp(k_2 c) \quad \dots\dots\dots(54)$$

$$a_{22} = [\sin k_1 \bar{e} + (k_2 / k_1) \cos k_1 \bar{e}] / \Gamma - (k_2 / k_1) \exp(-k_2 c) \quad \dots\dots\dots(55)$$

$$\delta_1 = [M + cF_B - \bar{e}P + (P - F_B)(\sin k_1 \bar{e}) / k_1 - \{M + F_B(d - a_L)\} \cos k_1 \bar{e}] / Z \quad \dots\dots(56)$$

$$\delta_2 = -\{[M + F_B(d - a_L)] / Z\} \sin k_1 \bar{e} + [(P - F_B) / (k_1 Z)] (1 - \cos k_1 \bar{e}) \quad \dots\dots(57)$$

$$\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad \dots\dots\dots(58)$$

ここで,

$$\Gamma = \exp[k_2(d - a_L)], \quad \bar{e} = a_L + c - d, \\ M = M_1 + M_2 = F_B a_L - Zh / 2 \quad \dots\dots(59)$$

他の未知定数は、残りの方程式からすぐに得られる。このようにして、 $s_3 \sim s_5$, α'_1 , α_2 は Z の関数として以下のように得られる。

$$s_3 = J_1 - \alpha'_1 F_B / Z \quad \dots\dots\dots(60)$$

$$s_4 = s_3 + F_B a_L^2 / (2D') \quad \dots\dots\dots(61)$$

$$s_5 = k_1 (A_1 \cos k_1 c - B_1 \sin k_1 c) + f_2 + \\ + (-\alpha'_1 F_B + \alpha_2 P) / Z - [Pd(a_L + c)^2] / (2LD') \\ + Pd(a_L + c) / D' \quad \dots\dots\dots(62)$$

$$\alpha_2 = \frac{Z}{P} [J_1 + 3s_1(d - a_L)^2 + 2s_2(d - a_L) - f_2 \\ - k_1 (A_1 \cos \theta - B_1 \sin \theta)]$$

$$\alpha'_1 = -ZJ_2 / (F_B L), \quad \beta'_1 = 1 - \alpha'_1 \quad \dots\dots\dots(63)$$

$$\alpha'_1 = -ZJ_2 / (F_B L), \quad \beta'_1 = 1 - \alpha'_1 \quad \dots\dots\dots(64)$$

ここで,

$$J_1 = [A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta - M_1 / Z - f_1] / (d - a_L) \\ + f_2 - s_1(d - a_L)^2 - s_2(d - a_L) \quad \dots\dots\dots(65)$$

$$J_2 = \frac{Pd(a_L + c)^3}{6LD'} - \frac{Pd(a_L + c)^2}{2D'} + \\ + [k_1 (A_1 \cos(k_1 c) - B_1 \sin(k_1 c)) + f_2 + \alpha_2 P / Z \\ - Pd(a_L + c)^2 / (2LD') + Pd(a_L + c) / D'] \\ \times (a_L + c - L) + \frac{PdL^2}{3D'} + \frac{F_B a_L^3}{6D'} - \left(J_1 + \frac{F_B a_L^2}{2D'} \right) a_L \\ - A_1 \sin(k_1 c) - B_1 \cos(k_1 c) + (M_1 - \alpha'_2 P \bar{e}) / Z \\ + f_1 - f_2 c \quad \dots\dots\dots(66)$$

文 献

- (1) Maikuma, H. et al., Analysis and Experimental Characterization of the Center Notch Flexural Test Specimen for Mode II Interlaminar Fracture, *Journal of Composite Materials*, Vol.23, No. (1989), pp.756-786.
- (2) Suemasu, H. and Majima, O., Multiple Delaminations and Their Severity in Circular Axisymmetric Plates Subjected to Transverse Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 4 (1996), pp.441-453.
- (3) Suemasu, H. and Majima, O., Multiple Delaminations and Their Severity in Nonlinear Circular Plates Subjected to Concentrated Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol. 32, No. 2 (1998), pp.123-140.
- (4) Hutchinson, J. W. and Lu, T. J., Laminar Delamination Due to Thermal Gradients, *Transactions of the ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 117, October (1995), pp.386-390.
- (5) Toya, M., et al., Energy Release Rates for an Interface Crack Embedded in a Laminated Beam Subjected to Three-Point Bending, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, June (1997), pp.375-382.
- (6) Arai, M, et al., Observation of Delamination Process and Its Evaluation in Coating Materials under Compressive Stress, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 66, No.641 (2000), pp.144-150.
- (7) Toya, M, et al., Local Delamination Buckling of a Laminated Beam Caused by Bending, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 62, No.602 (1996), pp.2242-2249.
- (8) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., Interface Crack Between Two Elastic Layers, *International Journal of Fracture*, Vol. 43, No.1 (1990), pp.1-18.