単口木オートマトンと正規表現

修士論文

単口木オートマトンと正規表現

永山 和彦

鹿児島大学大学院 理工学研究科
数理情報科学専攻 博士前期課程

平成22年2月

指導教官　古澤 仁 准教授

目次

第1章　はじめに

有限オートマトンとは，有限個の状態を持ち，外界からの「入力」に応じて1つの状態から次の状態へと「制御」が移動し，その「入力」を「受理する」か否か決定する機械である．有限オートマトンは「入力」として文字列を受け取る．有限オートマトン$\boldsymbol{A}$が受理する文字列全体の集合を$T(\boldsymbol{A})$と書く．有限オートマトンには,「制御」の移動先が必ず存在してかつ一意に定まる「決定性」と,「制御」の移動先が存在しないかまたは存在しても一意に定まらないかもしれない「非決定性」がある.「決定性」は「非決定性」の特別な場合だといえる．また，非決定性オートマトン$\boldsymbol{A}$に対して$T(\boldsymbol{A}) = T(\boldsymbol{A}')$となるような決定性オートマトン$\boldsymbol{A}'$が存在することが知られている．このことから，決定性オートマトンと非決定性オートマトンの受理能力は等しいことがわかる．一方，正規表現とは文字列パターンを記述する代数的な記法で，オートマトンとは異なる考え方で言語を正確に表現するためのものである．正規表現Eが表す文字列全体の集合を$|E|$と書く．オートマトンと正規表現については，能力が等しいこと，つまり，

- オートマトン$\boldsymbol{A}$に対して正規表現Eが存在して，$T(\boldsymbol{A}) = |E|$が成り立ち，
- 正規表現Eに対してオートマトン$\boldsymbol{A}$が存在して，$|E| = T(\boldsymbol{A})$が成り立つ

ということが知られている [6]．この性質は Kleene[3] が示したことからクリーニの定理と呼ばれる．

木オートマトンとは，通常の有限オートマトンを拡張したもので，有限個の状態を持ち,「入力」を「受理する」か否か決定する機械であるということは通常の

有限オートマトンと同じであるが,「入力」として木を受け取ることが通常の有限オートマトンとは異なる.「決定性」と「非決定性」についても通常の有限オートマトンと同様で受理能力は等しい．木オートマトンの定義は [4] にあるように，通常の有限オートマトンによく似た形式のものや普遍代数によるもの [2]，書き換え系によるもの [1] などが知られているが，いずれも同値である．正規木表現は正規表現と同様の記法であるが，記述する対象が木であるという点と，連接を表わす記号と閉包を表す記号がそれぞれ複数あるという点で正規表現と異なる．木オートマトンと正規木表現についても，能力が等しいこと，つまり，

1. 木オートマトン $\boldsymbol{A}$ に対して正規木表現 E が存在して，$T(\boldsymbol{A}) = |E|$ が成り立ち，
2. 正規木表現 E に対して木オートマトン $\boldsymbol{A}$ が存在して，$|E| = T(\boldsymbol{A})$ が成り立つ

ということが知られている．

木オートマトンにある制限を加えたものを考え，これを単口木オートマトンと呼ぶことにする．本論文では，非決定性単口木オートマトンが通常の有限オートマトンや木オートマトンが持つ諸性質をみたすかどうか調べ，次を示す.

1. 非決定性単口木オートマトンの受理言語全体が，単口木言語上の主要な演算について閉じていること
2. 非決定性単口木オートマトンと等価な文脈自由文法
3. 正規表現に対して同等の非決定性単口木オートマトンが存在すること

非決定性単口木オートマトンに関するクリーニの定理を示すには，3 に加えて非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ に対して $|E| = T(\boldsymbol{A})$ となるような正規表現 E を構成してみせれば良い．本論文では,

- 通常の有限オートマトンの場合と同様の構成法では非決定性単口木オートマトンと等価な正規表現が得られないこと

- 初期状態のみに注目して上記の構成法を拡張した方法でも等価な正規表現が得られないこと

を反例を挙げることにより示す．これらの事実は，構成法のさらなる拡張が必要なことを示唆しているため，反例を参考にさらなる拡張を加えた新しい構成法を与え，これによって得られる正規表現 E の表す単口木言語 $|E|$ と構成元である非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ の受理言語 $T(\boldsymbol{A})$ との等価性を調べている．

本論文の構成は以下のとおりである．第 2 章で，単口木言語の定義と単口木言語上の演算，性質について述べる．第 3 章では，正規表現と単口木オートマトンの定義，単口木オートマトンが単口木言語上の演算に閉じていることを述べ，単口木オートマトンと正規表現が等価であるかどうかについて考察する．第 4 章では，第 2 章，第 3 章で述べたことについてまとめるとともに，今後の課題について議論する．

第2章　単口木言語について

まず，木言語を定義する．ランク付けされたアルファベットの有限集合を Σ で表し，Σ に含まれるランク m のアルファベット全体の集合を Σ_m で表す．有限集合 X は $X \cap \Sigma = \emptyset$ とする．

定義 2.1. **木**を次のように帰納的に定義する．

- $x \in X$ は木である．
- $\sigma \in \Sigma_0$ は木である．
- $m > 0$ かつ $\sigma \in \Sigma_m$ で，$t_1, \cdots, t_m$ が木ならば，$\sigma(t_1, \cdots, t_m)$ も木である．

Σ 上の木全体の集合を $F_\Sigma(X)$ で表し，$F_\Sigma(X)$ の部分集合を**木言語**と呼ぶ．

次に，単口木言語を定義する．$\Box \notin \Sigma$ を唯一の代入定数とし，$m \geq 2$ を固定，$\Sigma = \Sigma_m$ とする．

定義 2.2. **単口木**を次のように帰納的に定義する．

- $\Box$ は単口木である．
- $f \in \Sigma_m$ で，$t_1, \cdots, t_m$ が単口木ならば，$f(t_1, \cdots, t_m)$ も単口木である．

Σ 上の単口木全体の集合を F_Σ で表し，F_Σ の部分集合を**単口木言語**と呼ぶ．このように定義すると，ある $m \geq 2$ について $\Sigma = \Sigma_m$ の場合，$F_\Sigma = F_\Sigma(\{\Box\})$ が成り立つ．

単口木言語上の二項演算 $\cdot$ と単項演算 * について述べる．まず，二項演算 $\cdot$ を定義する．

定義 2.3. $t \in F_\Sigma$，$T \subseteq F_\Sigma$ とするとき，$t(\Box \leftarrow T)$ を次のように定義する．

- $t = \Box$ のとき，$t(\Box \leftarrow T) = T$
- $f \in \Sigma_m$，$t_1, \cdots, t_m \in F_\Sigma$，$t = f(t_1, \cdots, t_m)$ のとき，

$$t(\Box \leftarrow T) = \{f(s_1, \cdots, s_m) \mid s_i \in t_i(\Box \leftarrow T)\}$$

定義 2.4. $S, T \subseteq F_\Sigma$ とする．S と T の連接を次で定義する．

$$S \cdot T = \bigcup_{t \in T} t(\Box \leftarrow S)$$

$\bigcup_{t \in T} t(\Box \leftarrow S)$ を $T(\Box \leftarrow S)$ と略記することがある．二項演算 $\cdot$ について，次のような命題が成り立つ．

命題 2.5. $S, S', T, T' \subseteq F_\Sigma$，$t \in F_\Sigma$ とするとき，次が成り立つ．

1. $\{\Box\} \cdot S = S = S \cdot \{\Box\}$
2. $S \subseteq S' \implies t(\Box \leftarrow S) \subseteq t(\Box \leftarrow S')$
3. $S \subseteq S', T \subseteq T' \implies S \cdot T \subseteq S' \cdot T'$
4. $S \cdot (T \cup T') = S \cdot T \cup S \cdot T'$

証明. まず，1 については，

$$\{\Box\} \cdot S = \bigcup_{s \in S} s(\Box \leftarrow \{\Box\}) = \bigcup_{s \in S} \{s\} = S = \Box(\Box \leftarrow S) = \bigcup_{\Box \in \{\Box\}} \Box(\Box \leftarrow S) = S \cdot \{\Box\}$$

より成り立つ．次に，2 を t の構造に関する帰納法により示す．$t = \Box$ のとき，

$$\Box(\Box \leftarrow S) = S \subseteq S' = \Box(\Box \leftarrow S')$$

より成り立つ．$t = f(t_1, \cdots, t_n)$ のとき，帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} f(t_1, \cdots, t_n)(\square \leftarrow S) &= \{ f(s_1, \cdots, s_n) \in F_\Sigma \mid s_i \in t_i(\square \leftarrow S)\} \\ &\subseteq \{ f(s_1, \cdots, s_n) \in F_\Sigma \mid s_i \in t_i(\square \leftarrow S')\} \\ &= f(t_1, \cdots, t_n)(\square \leftarrow S') \end{aligned}$$

となるので成り立つ．3 は 2 より，

$$S \cdot T = \bigcup_{t \in T} t(\square \leftarrow S) \subseteq \bigcup_{t \in T} t(\square \leftarrow S') \subseteq \bigcup_{t \in T'} t(\square \leftarrow S') = S' \cdot T'$$

となり成り立つ．4 は，

$$S \cdot (T \cup T') = \bigcup_{t \in T \cup T'} t(\square \leftarrow S) = \bigcup_{t \in T} t(\square \leftarrow S) \cup \bigcup_{t \in T'} t(\square \leftarrow S) = S \cdot T \cup S \cdot T'$$

より成り立つ． □

次に，単項演算 * を定義する．

定義 2.6. $T \subseteq F_\Sigma$ に対して，

$$T^0 = \{\square\}, \quad T^{n+1} = T^n \cdot T \cup T^n$$

とおく．このとき，

$$T^* = \bigcup_{n \geq 0} T^n$$

と定める．

この定義と命題 2.5 の 3 より

$$S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad S^* \subseteq T^*$$

が成り立つ．木に対して，その葉の数を与える関数 *leaf* を定義する．

定義 2.7. X を $\square \notin X$ であるような有限集合とする．関数 $leaf : F_\Sigma(\{\square\} \cup X) \to \mathbb{N}$ を次のように帰納的に定義する．

- $t = \Box$ のとき，$leaf(\Box) = 1$
- $t \in X$ のとき，$leaf(t) = 1$
- $f \in \Sigma_m$，$t_1, \cdots, t_m \in F_\Sigma(\{\Box\} \cup X)$，$t = f(t_1, \cdots, t_m)$ のとき，

$$leaf(t) = \sum_{1 \le i \le m} leaf(t_i)$$

木 t が $leaf(t) = n$ のとき，つまり n 個の葉を持つとき，葉に n 個の木 $t_1, \cdots, t_n$ を代入することにより得られる木を取り扱う必要があるので，これを次のように定める．

定義 2.8. X を $\Box \notin X$ であるような有限集合とする．木 $t, t_1, \cdots, t_{leaf(t)} \in F_\Sigma(\{\Box\} \cup X)$ に対して，木 $t[t_1, \cdots, t_{leaf(t)}]$ を次のように帰納的に定義する．

- $t = \Box$ のとき，$\Box[t_1] = t_1$
- $t \in X$ のとき，$t[t_1] = t$
- $f \in \Sigma_m$，$s_1, \cdots, s_m \in F_\Sigma(\{\Box\} \cup X)$，$t = f(s_1, \cdots, s_m)$ のとき，

$$\begin{aligned} & f(s_1, \cdots, s_m)[t_1, \cdots, t_{leaf(f(s_1, \cdots, s_m))}] \\ &= f(s_1[t_1, \cdots, t_{leaf(s_1)}], \cdots, s_m[t_{\Sigma_{1 \le i \le m-1} leaf(s_i)+1}, \cdots, t_{\Sigma_{1 \le i \le m} leaf(s_i)}]) \end{aligned}$$

$f \in \Sigma_m$，$s_1, \cdots, s_m \in F_\Sigma(\{\Box\} \cup X)$ のとき，定義より明らかに

$$f(\Box, \cdots, \Box)[s_1, \cdots, s_m] = f(s_1, \cdots, s_m)$$

が成り立つ．二項演算 $\cdot$ と単項演算 * について，次のような命題が成り立つ．

命題 2.9. $S, T, U \subseteq F_\Sigma$ とするとき，次が成り立つ．

1. $(S \cdot T) \cdot U = S \cdot (T \cdot U)$
2. $T^* \cdot T \subseteq T^*$

3. ${}^{\forall}n \geq 0.\ T \cdot T^n \subseteq T^{n+1}$

4. $T \cdot T^* \subseteq T^*$

5. $T \cdot S \subseteq T \Rightarrow T \cdot S^* \subseteq T$

6. $T^* \cdot T^* \subseteq T^*$

7. $t^{**} \subseteq T^*$

証明. まず，1 を示す．$x \in (S \cdot T) \cdot U$ とすると，

$$u \in U \quad \text{かつ} \quad x_1, \cdots, x_{l_u} \in S \cdot T \quad \text{かつ} \quad x = u[x_1, \cdots, x_{l_u}]$$

となるような $u, x_1, \cdots, x_{l_u} \in F_\Sigma$ が存在する．ここで，$l_u = leaf(u)$ とする．さらに，$x_1, \cdots, x_{l_u} \in S \cdot T$ より各 $i = 1, \cdots, l_u$ について，

$$t_i \in T \quad \text{かつ} \quad s_{i1}, \cdots, s_{il_i} \in S \quad \text{かつ} \quad x_i = t_i[s_{i1}, \cdots, s_{il_i}]$$

となるような $t_i, s_{i1}, \cdots, s_{il_i} \in F_\Sigma$ が存在する．ここで，$l_i = leaf(t_i)$ とする．このとき，$u[t_1, \cdots, t_{l_u}] \in T \cdot U$ であり，$u[t_1, \cdots, t_{l_u}][s_{11}, \cdots, s_{l_u l_{l_u}}] \in S \cdot (T \cdot U)$ となる．

$$\begin{aligned} u[t_1, \cdots, t_{l_u}][s_{11}, \cdots, s_{l_u l_{l_u}}] &= u[t_1[s_{11}, \cdots, s_{1l_1}], \cdots, t_{l_u}[s_{l_u 1}, \cdots, s_{l_u l_{l_u}}]] \\ &= u[x_1, \cdots, x_{l_u}] \\ &= x \end{aligned}$$

であるから $(S \cdot T) \cdot U \subseteq S \cdot (T \cdot U)$ が成り立つ．逆も同様に成り立つ．次に，2 を示す．$t \in T^* \cdot T$ とすると，

$$t' \in T \quad \text{かつ} \quad t_1, \cdots, t_l \in T^* \quad \text{かつ}\ t = t'[t_1, \cdots, t_l]$$

となるような $t', t_1, \cdots, t_l \in F_\Sigma$ が存在する．ここで，$l = leaf(t')$ とする．各 $i = 1, \cdots, l$ について，$T^* = \bigcup_{n \geq 0} T^n$ より $t_i \in T^{n_i}$ となる $n_i \geq 0$ が存在する．$m = \max\{n_1, \cdots, n_l\}$

とすると $T^k \subseteq T^{k+1}$ より $t_1,\cdots,t_l \in T^m$ となる．このとき $t'[t_1,\cdots,t_l] \in T^m \cdot T$ なので，$T^m \cdot T \cup T^m = T^{m+1} \subseteq T^*$ より，$t'[t_1,\cdots,t_l] \in T^*$ が成り立つ．3 は $n \geq 0$ に関する帰納法により示す．$n = 0$ のとき，

$$T \cdot T^0 = T \cdot \{\square\} = T \subseteq \{\square\} \cdot T \cup \{\square\} = T^1$$

より成り立つ．$n = k$ のとき成り立つと仮定する．$n = k+1$ のとき，1 より

$$T \cdot T^{k+1} = T \cdot (T^k \cdot T \cup T^k) = T \cdot T^k \cdot T \cup T \cdot T^k \subseteq T^{k+1} \cdot T \cup T^{k+1} = T^{k+2}$$

となり成り立つ．4 は

$$\begin{aligned} T \cdot T^* &= T \cdot \textstyle\bigcup_{n\geq 0} T^n \\ &= \textstyle\bigcup_{n\geq 0} T \cdot T^n \quad (\text{命題 2.5 の 4 より}) \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{n\geq 1} T^n \qquad (3\text{ より}) \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{n\geq 0} T^n \\ &= T^* \end{aligned}$$

より成り立つ．5 を示すには,

$$T \cdot S \subseteq T \;\Rightarrow\; {}^{\forall} n \geq 0.\, T \cdot S^n \subseteq T$$

を示せばよいので，$n \geq 0$ に関する帰納法により示す．$n = 0$ のときは $T \cdot S^0 = T$ より成り立つ．$n = k$ のとき成り立つと仮定する．$n = k+1$ のとき,

$$T \cdot S^{k+1} = T \cdot (S^k \cdot S \cup S^k) = (T \cdot S^k) \cdot S \cup T \cdot S^k \subseteq T \cdot S \cup T \subseteq T$$

より成り立つ．次に，6 を示す．$T^* \subseteq T^* \cdot T^*$ は明らか．$T^* \cdot T^* \subseteq T^*$ は 2 と 5 より成り立つ．次に，7 を示す．5 と 6 より $T^* \cdot T^{**} \subseteq T^*$．さらに $\{\square\} \subseteq T^*$ なので，命題 2.5 の 1 および 3 より次を得る．

$$T^{**} = \{\square\} \cdot T^{**} \subseteq T^* \cdot T^{**} \subseteq T^*$$

$\square$

第3章　正規表現と単口木オートマトン

3.1　正規表現

正規表現を定義し，単口木言語に対応させる．

定義 3.1. 集合 Σ 上の**正規表現**を次のように帰納的に定義する．

- 0 は正規表現である．
- $\Box$ は正規表現である．
- $f \in \Sigma$ は正規表現である．
- E_1, E_2 が正規表現ならば，$E_1 + E_2$ も正規表現である．
- E_1, E_2 が正規表現ならば，$E_1 \cdot E_2$ も正規表現である．
- E_1 が正規表現ならば，E_1^* も正規表現である．

定義 3.2. 正規表現 η で表される単口木言語 $|\eta|$ は次のように帰納的に定義される．

- $|0| = \emptyset$
- $|\Box| = \{\Box\}$
- $|f| = \{f(\Box, \cdots, \Box)\}$
- $|\zeta + \eta| = |\zeta| \cup |\eta|$

- $|\zeta \cdot \eta| = |\zeta| \cdot |\eta|$
- $|\eta^*| = |\eta|^*$

3.2　単口木オートマトン

非決定性単口木オートマトンと決定性単口木オートマトンをそれぞれ次のように定義する．

定義 3.3. 以下の条件を満たす組 $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を**非決定性単口木オートマトン**という．

- Q は空でない有限集合
- $\Delta \subseteq (\Sigma \times Q) \times Q$
- $S, F \subseteq Q$

Δ の拡張 $\hat{\Delta} \subseteq F_\Sigma \times Q$ を以下のように定義する．

- $\hat{\Delta}(\square) = S$
- $\hat{\Delta}(f(t_1, \cdots, t_m)) = \bigcup_{p \in \bigcap_{1 \leq i \leq m} \hat{\Delta}(t_i)} \Delta(f, p)$

集合 $\{t \in F_\Sigma \mid \hat{\Delta}(t) \cap F \neq \emptyset\}$ を $\boldsymbol{A}$ により**受理される言語**または $\boldsymbol{A}$ の**受理言語**と呼び，$T(\boldsymbol{A})$ で表す．

例 3.4. 次で定められる非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を考える．

- $Q = \{p, q, r\}$
- $\Sigma = \Sigma_2 = \{f, g, h\}$
- $S = \{p, q\}$

- $F = \{q\}$
- $\Delta = \{((f,r),q),((g,p),r),((h,q),r)\}$

このとき，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ は,

$$\hat{\Delta}(\square) = \{p,q\}$$
$$\hat{\Delta}(g(\square,\square)) = \textstyle\bigcup_{x\in\hat{\Delta}(\square)}\Delta(g,x) = \Delta(g,p) = \{r\}$$
$$\hat{\Delta}(h(\square,\square)) = \textstyle\bigcup_{x\in\hat{\Delta}(\square)}\Delta(h,x) = \Delta(h,q) = \{r\}$$
$$\hat{\Delta}(f(g(\square,\square),h(\square,\square))) = \textstyle\bigcup_{x\in\hat{\Delta}(g(\square,\square))\cap\hat{\Delta}(h(\square,\square))}\Delta(f,x) = \Delta(f,r) = \{q\}$$

より $\hat{\Delta}(f(\square,g(h(\square,\square),h(\square,\square))))\cap F \neq \emptyset$ なので，単口木 $f(g(\square,\square),h(\square,\square))$ を受理する．

例 3.5. 次で定められる非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma,Q,\Delta,S,F)$ を考える．

- $\Sigma = \Sigma_2 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$
- $Q = \{a,b,p,q\}$
- $S = \{p\}$
- $F = \{q\}$
- $\Delta = \{((f_1,a),q),((f_2,p),a),((f_3,b),a),((f_4,p),b),((f_5,a),b)\}$

このとき，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ は,

$$\hat{\Delta}(\square) = \{p\}$$
$$\hat{\Delta}(f_2(\square,\square)) = \textstyle\bigcup_{x\in\hat{\Delta}(\square)}\Delta(f_2,x) = \Delta(f_2,p) = \{a\}$$
$$\hat{\Delta}(f_4(\square,\square)) = \textstyle\bigcup_{x\in\hat{\Delta}(\square)}\Delta(f_4,x) = \Delta(f_4,p) = \{b\}$$
$$\hat{\Delta}(f_5(f_2(\square,\square), f_2(\square,\square))) = \textstyle\bigcup_{x\in\hat{\Delta}(f_2(\square,\square))}\Delta(f_5,x) = \Delta(f_5,a) = \{b\}$$
$$\begin{aligned}&\hat{\Delta}(f_3(f_4(\square,\square), f_5(f_2(\square,\square), f_2(\square,\square))))\\ &\quad = \textstyle\bigcup_{x\in\hat{\Delta}(f_4(\square,\square))\cap\hat{\Delta}(f_5(f_2(\square,\square),f_2(\square,\square)))}\Delta(f_3,x) = \Delta(f_3,b) = \{a\}\end{aligned}$$

$$\hat{\Delta}(f_1(f_3(f_4(\square,\square), f_5(f_2(\square,\square), f_2(\square,\square))), f_2(\square,\square)))$$
$$= \bigcup_{x \in \hat{\Delta}(f_3(f_4(\square,\square), f_5(f_2(\square,\square), f_2(\square,\square)))) \cap \hat{\Delta}(f_2(\square,\square))} \Delta(f_1, x) = \Delta(f_1, a) = \{q\}$$

より $\hat{\Delta}(f_1(f_3(f_4(\square,\square), f_5(f_2(\square,\square), f_2(\square,\square))), f_2(\square,\square))) \cap F \neq \emptyset$ なので，単口木 $f_1(f_3(f_4(\square,\square), f_5(f_2(\square,\square), f_2(\square,\square))), f_2(\square,\square))$ を受理する．

定義 3.6. 以下の条件をみたす組 $\boldsymbol{D} = (\Sigma, Q, \delta, s, F)$ を**決定性単口木オートマトン**という．

- Q は空でない有限集合
- $\delta : \Sigma \times Q \to Q$
- $s \in Q$，$F \subseteq Q$

δ の拡張 $\hat{\delta} : F_\Sigma \to Q$ を以下のように定義する．

- $\hat{\delta}(\square) = s$
- $\hat{\delta}(f(t_1, \cdots, t_m)) = \begin{cases} \delta(f, q) & (q = \hat{\delta}(t_1) = \cdots = \hat{\delta}(t_m) \text{ のとき}) \\ \text{未定義} & (\text{その他のとき}) \end{cases}$

集合 $\{t \in F_\Sigma \mid \hat{\delta}(t) \in F\}$ を $\boldsymbol{D}$ により**受理される言語**または $\boldsymbol{D}$ の**受理言語**と呼び，$T(\boldsymbol{D})$ で表す．

非決定性単口木オートマトンと決定性単口木オートマトンについて，次のことが成り立つ．

命題 3.7. 決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{D}$ に対して，$T(\boldsymbol{A}) = T(\boldsymbol{D})$ となるような非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ が存在する．

証明. 与えられた決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{D} = (\Sigma_D, Q_D, \delta, s, F_D)$ に対して，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma_A, Q_A, \Delta, S, F_A)$ を次のように定義する．

- $\Sigma_A = \Sigma_D$,
- $Q_A = Q_D$,
- $\Delta = \{((f,p),q) \mid \delta(f,p) = q\}$,
- $S = \{s\}$,
- $F_A = F_D$.

このとき，$\{\hat{\delta}(t)\} = \hat{\Delta}(t)$ を t に関する帰納法により示す．簡単の為に $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_2$ の場合を考える．$t = \square$ のとき，$\{\hat{\delta}(\square)\} = \{s\} = \hat{\Delta}(\square)$ となり成り立つ．$t = f(t_1,t_2)$ のとき，$\hat{\delta}$ の定義より $\{\hat{\delta}(f(t_1,t_2))\} = \{\delta(f,p)\}$ かつ $p = \hat{\delta}(t_1) = \hat{\delta}(t_2)$ である．帰納法の仮定より $\hat{\Delta}(t_1) = \hat{\Delta}(t_2) = \{p\}$ であり，Δ の定義より $\{\delta(f,p)\} = \Delta(f,p)$ であるから，

$$\{\delta(f,p)\} = \Delta(f,p) = \bigcup_{x \in \hat{\Delta}(t_1) \cap \hat{\Delta}(t_2)} \Delta(f,x) = \hat{\Delta}(f(t_1,t_2))$$

が成り立つ．よって，$\{\hat{\delta}(f(t_1,t_2))\} = \hat{\Delta}(f(t_1,t_2))$ となる．以上より $\{\hat{\delta}(t)\} = \hat{\Delta}(t)$ が成り立ち，これにより，

$$\begin{aligned} t \in T(\boldsymbol{D}) &\iff \hat{\delta}(t) \in F \\ &\iff \{\hat{\delta}(t)\} \subseteq F \\ &\iff \hat{\Delta}(t) \cap F \neq \emptyset \\ &\iff t \in T(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

が成り立つ．　□

この命題の逆は一般に成り立たないことが，次の例からわかる．

例 3.8. $f \in \Sigma_2$ とするとき，$f(\square, f(\square,\square))$ を受理するような決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{D} = (\Sigma_2, Q, \delta, s, F)$ を考える．$\boldsymbol{D}$ が $f(\square, f(\square,\square))$ を受理することから，

$$\hat{\delta}(f(\square, f(\square,\square))) = \delta(f,p) \quad \text{かつ} \quad p = \hat{\delta}(\square) = \hat{\delta}(f(\square,\square))$$

である．$\hat{\delta}$ の定義より $\hat{\delta}(\square) = s$ であり，これより $\hat{\delta}(f(\square,\square)) = \delta(f,s)$ となる．よって，$\delta(f,s) = s$ であるので，$\hat{\delta}(f(\square, f(\square,\square))) = \delta(f,s) = s$ が成り立ち，$s \in F$ なので $\boldsymbol{D}$ は $\square$ を受理する．つまり，$f(\square, f(\square,\square))$ を受理するが，$\square$ を受理しないような決定性単口木オートマトンは存在しない．一方，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\{f\}, Q, \Delta, \{s\}, \{p\})$ で，Δ が

$$
\begin{aligned}
&\Delta(f,s) = \{s,p\} \\
&\Delta(f,x) = \emptyset \qquad (x \in Q, x \neq s)
\end{aligned}
$$

であるようなものを考えると，

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}(f(\square,\square)) &= \bigcup_{q \in \hat{\Delta}(\square) \cap \hat{\Delta}(\square)} \Delta(f,q) \\
&= \Delta(f,s) \\
&= \{s,p\}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}(f(\square, f(\square,\square))) &= \bigcup_{q \in \hat{\delta}(\square) \cap \hat{\delta}(f(\square,\square))} \Delta(f,q) \\
&= \bigcup_{q \in \{s\} \cap \{s,p\}} \Delta(f,q) \\
&= \Delta(f,s) \\
&= \{s,p\}
\end{aligned}
$$

となる．従って，$\hat{\Delta}(f(\square, f(\square,\square))) \cap \{p\} = \{p\} \neq \emptyset$ であるから，$\boldsymbol{A}$ が $f(\square, f(\square,\square))$ を受理することがわかる．また，$\hat{\Delta}(\square) = \{s\}$ であるので，$\hat{\Delta}(\square) \cap \{p\} = \emptyset$ となり，$\boldsymbol{A}$ は $\square$ を受理しない．つまり，$f(\square, f(\square,\square))$ を受理するが，$\square$ を受理しない非決定性単口木オートマトンは存在する．

よって，決定性単口木オートマトンの受理能力が非決定性単口木オートマトンの受理能力に劣ることが示された．また，次の例から決定性単口木オートマトンの受理能力が正規表現の表現能力に劣ることがわかる．

例 3.9. 例 *3.8* と同様に $f \in \boldsymbol{\Sigma}_2$ とすると，

$$
\begin{aligned}
|(\Box + f)\cdot f| &= |\Box + f|\cdot|f| \\
&= (|\Box| \cup |f|)\cdot|f| \\
&= (\{\Box\} \cup \{f(\Box,\Box)\})\cdot\{f(\Box,\Box)\} \\
&= \{\Box, f(\Box,\Box)\}\cdot\{f(\Box,\Box)\} \\
&= \{f(\Box,\Box), f(\Box, f(\Box,\Box)), f(f(\Box,\Box),\Box), f(f(\Box,\Box), f(\Box,\Box))\}
\end{aligned}
$$

となる．よって，$f(\Box, f(\Box,\Box))$ を含むが $\Box$ を含まない単口木言語を表現する正規表現は存在する．

以上のことから決定性単口木オートマトンの受理能力は低く，正規表現の表現能力とは明らかに同値でない．これ以降は非決定性単口木オートマトンについて考える．

3.3　単口木上の演算と単口木オートマトン

定理 3.10. 非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が与えられたとする．このとき，$T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) \cup T(\boldsymbol{B})$，$T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) \cap T(\boldsymbol{B})$，$T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) - T(\boldsymbol{B})$ となるような非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{C}$ がそれぞれ存在する．

証明. $T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) \cap T(\boldsymbol{B})$ となるようなオートマトン $\boldsymbol{C} = (\Sigma, Q_C, \Delta_C, S_C, F_C)$ は，与えられたオートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q_A, \Delta_A, S_A, F_A)$ と $\boldsymbol{B} = (\Sigma, Q_B, \Delta_B, S_B, F_B)$ から以下のように構成すればよい．

- $Q_C = Q_A \times Q_B$
- $\Delta_C = \Delta_A \times \Delta_B$
- $S_C = S_A \times S_B$

- $F_C = F_A \times F_B$

実際に，オートマトン $\boldsymbol{C}$ が $T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) \cap T(\boldsymbol{B})$ をみたすことを示す．まず，$\hat{\Delta}_C$ が任意の $t \in F_\Sigma$ に対して

$$\hat{\Delta}_C(t) = \hat{\Delta}_A(t) \times \hat{\Delta}_B(t)$$

をみたすことを t の構造に関する帰納法により示す．$t = \square$ のときは

$$\hat{\Delta}_C(\square) = S_C = S_A \times S_B = \hat{\Delta}_A(\square) \times \hat{\Delta}_B(\square)$$

より成り立つ．$t = f(t_1, \cdots, t_m)$ のとき，定義と帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_C(f(t_1, \cdots, t_m)) &= \textstyle\bigcup_{x \in \bigcap_i \hat{\Delta}_C(t_i)} \Delta_C(f, x) \\
&= \textstyle\bigcup_{x \in \bigcap_i \hat{\Delta}_A(t_i) \times \hat{\Delta}_B(t_i)} \Delta_A(f, x) \times \Delta_B(f, x) \\
&= \textstyle\bigcup_{y \in \bigcap_j \hat{\Delta}_A(t_j)} \Delta_C(f, y) \times \bigcup_{z \in \bigcap_k \hat{\Delta}_B(t_k)} \Delta_B(f, z) \\
&= \hat{\Delta}_A(f(t_1, \cdots, t_m)) \times \hat{\Delta}_B(f(t_1, \cdots, t_m))
\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，$\hat{\Delta}_C(t) = \hat{\Delta}_A(t) \times \hat{\Delta}_B(t)$ が成り立つことが証明できた．このことから，任意の $t \in F_\Sigma$ に対して，

$$\begin{aligned}
t \in T(\boldsymbol{C}) &\iff \hat{\Delta}_C(t) \cap F_C \neq \emptyset \\
&\iff (\hat{\Delta}_A(t) \times \hat{\Delta}_B(t)) \cap (F_A \times F_B) \neq \emptyset \\
&\iff (\hat{\Delta}_A(t) \cap F_A \neq \emptyset) \text{ かつ } (\hat{\Delta}_B(t) \cap F_B \neq \emptyset) \\
&\iff t \in T(\boldsymbol{A}) \cap T(\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

なので $T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) \cap T(\boldsymbol{B})$ が成り立つ．$T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) - T(\boldsymbol{B})$ となるようなオートマトン $\boldsymbol{C}$ を構成するには，F_C 以外は上と同様に定め，$F_C = F_A$ とすればよい．実際，任意の $t \in F_\Sigma$ に対して，

$$\begin{aligned}
t \in T(\boldsymbol{C}) &\iff \hat{\Delta}_C(t) \cap F_C \neq \emptyset \\
&\iff (\hat{\Delta}_A(t) \times \hat{\Delta}_B(t)) \cap (F_A \times (Q_B - F_B)) \neq \emptyset \\
&\iff (\hat{\Delta}_A(t) \cap F_A \neq \emptyset) \text{ かつ } (\hat{\Delta}_B(t) \cap (Q_B - F_B) \neq \emptyset) \\
&\iff t \in T(\boldsymbol{A}) \text{ かつ } t \notin T(\boldsymbol{B}) \\
&\iff t \in T(\boldsymbol{A}) - T(\boldsymbol{B})
\end{aligned}$$

なので，$T(C) = T(A) - T(B)$ が成り立つ．次に，$T(\boldsymbol{C}) = T(\boldsymbol{A}) \cup T(\boldsymbol{B})$ となるようなオートマトン $\boldsymbol{C}$ を構成する．この場合も F_C 以外は上と同様に構成し，F_C を $F_A \times Q_B \cup Q_A \times F_B$ とすればよい．実際，任意の $t \in F_\Sigma$ に対して，

$$
\begin{aligned}
t \in T(\boldsymbol{C}) &\iff \hat{\Delta}_C \cap F_C \neq \emptyset \\
&\iff (\hat{\Delta}_A(t) \times \hat{\Delta}_B(t)) \cap (F_A \times Q_B \cup Q_A \times F_B) \neq \emptyset \\
&\iff (\hat{\Delta}_A(t) \times \hat{\Delta}_B(t)) \cap (F_A \times Q_B) \neq \emptyset \text{ または} \\
&\qquad (\hat{\Delta}_A(t) \times \hat{\Delta}_B(t)) \cap (Q_A \times F_B) \neq \emptyset \\
&\iff (\hat{\Delta}_A(t) \cap F_A \neq \emptyset) \text{ または } (\hat{\Delta}_B(t) \cap F_B \neq \emptyset) \\
&\iff t \in T(\boldsymbol{A}) \text{ または } t \in T(\boldsymbol{B}) \\
&\iff t \in T(\boldsymbol{A}) \cup T(\boldsymbol{B})
\end{aligned}
$$

なので，$T(C) = T(A) \cup T(B)$ が成り立つ．

□

定義 3.11. 以下の条件を満たす組 $\boldsymbol{G} = (N, \Sigma, \square, P, A')$ を**単口木文法**という．

- N は非終端記号の集合である．
- $A' \subseteq N$ は初期記号の集合である．
- P は生成規則の集合で，

  1. $a \to \square \quad (a \in N)$，又は
  2. $a \to f(a', \cdots, a') \quad (f \in \Sigma_m,\ a, a' \in N)$

  のいずれかの形の生成規則だけから成る集合である．

$\to_G$ と $\to_G^*$ を次で定義する．

$$
\begin{aligned}
p \to_G q &\iff {}^\exists a \in N. {}^\exists r \in F_\Sigma(\{\square\} \cup N). {}^\exists u, v \in (\Sigma \cup N \cup \{(,),,,\square\})^*. \\
&\qquad p = uav \text{ かつ } q = urv \text{ かつ } a \to r \in P \\
p \to_G^* q &\iff {}^\exists n \geq 0.\ p \to_G p_1 \to_G \cdots \to_G p_{n-1} \to_G q
\end{aligned}
$$

集合 $\{t \in F_\Sigma \mid a \in A', a \to_G^* t\}$ を $\boldsymbol{G}$ で生成される言語と呼び，$T(\boldsymbol{G})$ でこれを表す.

定理 3.12. 単口木文法 $\boldsymbol{G}_A$ と $\boldsymbol{G}_B$ に対して，$T(\boldsymbol{G}_A) \cdot T(\boldsymbol{G}_B) = T(\boldsymbol{G}_C)$ となるような単口木文法 $\boldsymbol{G}_C$ が存在する.

証明. 単口木文法 $\boldsymbol{G}_C = (N_C, \Sigma, \{\square\}, P_C, C')$ を，単口木文法 $\boldsymbol{G}_A = (N_A, \Sigma, \{\square\}, P_A, A')$ と $\boldsymbol{G}_B = (N_B, \Sigma, \{\square\}, P_B, B')$ から次のように構成する.

- $N_C = N_A \cup N_B \quad (N_A \cap N_B = \emptyset)$
- $P_C = P_C' \cup \{a_A \to a_B \mid a_A \to \square \in P_A, a_B \in B'\} \cup P_B$
  P_C' は P_A から $a \to \square \ (a \in N_A)$ の形の生成規則を全て消したもの
- $C' = A'$

上で構成した文法は単口木文法である．これが，$T(\boldsymbol{G}_A) \cdot T(\boldsymbol{G}_B) = T(\boldsymbol{G}_C)$ をみたすことを示すには,

$$^\exists a \in C'.\, a \to_{G_C}^* t \iff {}^\exists p \in F_\Sigma.\, a \to_{G_A}^* p \text{ かつ } t \in p(\square \leftarrow T(\boldsymbol{G}_B))$$

を示せばよい．まず，$(\Rightarrow)$ を t の構造に関する帰納法により示す．$t = \square$ のとき，任意の $a_A \in C'$ に対して $a_A \to_{G_C}^* \square$ とすると，$C' = A'$ なので $\boldsymbol{G}_C$ での a_A から $\square$ への導出は全て

$$a_A \to_{G_C} a_B \to_{G_C} \square$$

の形をしている．よって，$a_A \to a_B$ かつ $a_B \to \square \in P_C$ となる $a_B \in B'$ が存在する. $a_A \to a_B \in P_C$ より $a_A \to \square \in P_A$ かつ $a_B \to \square \in P_B$ なので，$\square$ が求める単口木である．$t = f(t_1, \cdots, t_m)$ のとき，任意の $a_A \in C'$ に対して $a_A \to_{G_C}^* f(t_1, \cdots, t_m)$ とする. このとき,

1. $a_A \to_{G_C} a_B \to_{G_C}^* f(t_1, \cdots, t_m)$
2. $a_A \to_{G_C} f(a_{B_1}, \cdots, a_{B_m}) \to_{G_C}^* f(t_1, \cdots, t_m)$

の二通りが考えられる．1 のとき，

$$a_A \to a_B \in P_C \quad かつ \quad a_B \to^*_{G_C} f(t_1, \cdots, t_m)$$

である．$a_A \to a_B \in P_C$ と P_C の定義より $a_A \to \square$ かつ $a_B \in B'$ で，$a_B \to^*_{G_C} f(t_1, \cdots, t_m)$ より $a_B \to^*_{G_B} f(t_1, \cdots, t_m)$ となる．よって，$p = \square$ とすればよい．2 のとき，

$$a_A \to f(a_{A_1}, \cdots, a_{A_m}) \in P_A \quad かつ \quad a_{A_i} \to^*_{G_C} t_i$$

である．ここで，$a_{A_i} \in N_A$．帰納法の仮定より $a_{A_i} \to^*_{G_A} p_i$ かつ $t_i \in p_i(\square \leftarrow T(\boldsymbol{G}_B))$ となる $p_i \in F_\Sigma$ が存在するので，$p = f(p_1, \cdots, p_m)$ とすればよい．次に，$(\Leftarrow)$ を t の構造に関する帰納法により示す．$t = \square$ のとき，$\square \in p(\square \leftarrow T(\boldsymbol{G}_B))$ より，$p = \square$ かつ $\square \in T(\boldsymbol{G}_B)$ でなければならない．$\square \in T(\boldsymbol{G}_B)$ より $a_B \to^*_{G_B} \square$ となる $a_B \in B'$ が存在し，$\boldsymbol{G}_B$ が単口木文法であることから $a_B \to \square \in P_B$ となる．$\boldsymbol{G}_A$ も単口木文法なので $a_A \to^*_{G_A} \square$ より $a_A \to \square \in P_A$ となる．これらのことと P_C の定義から $a_A \to a_B \in P_C$ が導かれるので，$a_A \to_{G_C} a_B \to_{G_C} \square$ が成り立つ．よって，a_A が求める初期記号である．$t = f(t_1, \cdots, t_m)$ のとき，p は $\square$ の場合と $f(t_{A_1}, \cdots, t_{A_m})$ の場合の二通りが考えられる．$p = \square$ のとき，

$$a_A \to^*_{G_A} \square \quad かつ \quad t \in \square(\square \leftarrow T(\boldsymbol{G}_B))$$

である．$\boldsymbol{G}_A$ が単口木文法であることから，$a_A \to \square \in P_A$ かつ $t \in T(\boldsymbol{G}_B)$ となる．$t \in T(\boldsymbol{G}_B)$ より $a_B \to^*_{G_B} t$ となる $a_B \in B'$ が存在し，P_C の定義から $a_A \to a_B \in P_C$ となる．よって，$a_A \to_{G_C} a_B \to^*_{G_C} t$ が成り立つので，a_A が求める初期記号である．$p = f(t_{A_1}, \cdots, t_{A_m})$ のとき，

$$a_A \to^*_{G_A} f(t_{A_1}, \cdots, t_{A_m}) \quad かつ \quad f(t_1, \cdots, t_m) \in f(t_{A_1}, \cdots, t_{A_m})(\square \leftarrow T(\boldsymbol{G}_B))$$

である．$\boldsymbol{G}_A$ が単口木文法であることから $a_A \to^*_{G_A} f(t_{A_1}, \cdots, t_{A_m})$ は

$$a_A \to_{G_A} f(a_{A_1}, \cdots, a_{A_m}) \to^*_{G_A} f(t_{A_1}, \cdots, t_{A_m})$$

の形をしていなければならない．これより各 $i = 1, \cdots, m$ について，

$$a_{A_i} \to^*_{G_A} t_{A_i} \quad \text{かつ} \quad t_i \in t_{A_i}(\square \leftarrow T(\boldsymbol{G}_B))$$

である．これと帰納法の仮定から $a_{A_i} \to^*_{G_C} t_i$ となるので，

$$a_A \to_{G_C} f(a_{A_1}, \cdots, a_{A_m}) \to^*_{G_C} f(t_1, \cdots, t_m)$$

が成り立つ．よって，a_A が求める初期記号である． □

定理 3.13. 単口木文法 $\boldsymbol{G}_A$ に対して，$T(\boldsymbol{G}_A)^* = T(\boldsymbol{G})$ となるような単口木文法 $\boldsymbol{G}$ が存在する．

証明. 単口木文法 $\boldsymbol{G} = (N, \Sigma, \{\square\}, P, A'')$ を，単口木文法 $\boldsymbol{G}_A = (N_A, \Sigma, \{\square\}, P_A, A')$ から次のように構成する．

- $N = N_A \cup \{d\} \quad (d \notin N_A)$
- $P = P_A \cup \{d \to \square\} \cup \{a \to r \mid a \to \square \in P_A(a \in N_A), a_A \to r \in P_A(a_A \in A')\}$
- $A'' = A' \cup \{d\}$

上で構成した文法は単口木文法である．$T = T(\boldsymbol{G}_A)$ とするとき，単口木文法 $\boldsymbol{G}$ が $T^* = T(\boldsymbol{G})$ みたすことを示すには，

$$^\exists a \in A''.\, a \to^*_G t \iff {}^\exists n \geq 0.\, t \in T^n$$

を示せばよい．まず，(⇒) を示す．$a = d$ のとき，P の定義より $d \to^*_G t$ となるのは $t = \square$ のときだけであるから $n = 0$ とすればよい．$a \in A'$ のとき，$a \to^*_G$ と P の定義より

$$a \to^*_{G_A} r \to^*_G t$$

となる $r \in F_\Sigma(\{\square\} \cup N)$ が存在する．r の葉は $leaf(r)$ 個あり，i 番目の葉を r_i とおくと，すべての $i = 1, \cdots, leaf(r)$ について $r_i \in \{\square\} \cup N_A$ である．各 $i = 1, \cdots, leaf(r)$

について，$r_i \in N_A$ であるとき，P の定義より $r_i \to \Box \in P_A$ である．よって，r の葉を全て $\Box$ で置き換えたものを r' とおくと，

$$a \to_{G_A}^{*} r' \quad \text{かつ} \quad r' \in T$$

となる．また，$r \to_G^* t$ より

$$r'[t_1, \cdots, t_{leaf(r)}] = t$$

となる $t_1, \cdots, t_{leaf(r)} \in F_\Sigma$ が存在する．各 $i = 1, \cdots, leaf(r)$ について，$r_i \in N_A$ のとき，$r_i \to_G^* t_i$ である．これより $r_i \to_G r_i' \to_G^* t_i$ となる $r_i' \in F_\Sigma(\{\Box\} \cup N)$ が存在する．P の定義と $a \to_{G_A}^* r \to_G^* t$ より，$a_i' \to r_i' \in P_A$ となる $a_i' \in A'$ が存在して，$a_i' \to_G^* t_i$ である．これと帰納法の仮定より $t_i \in T^{k_i}$ となるような $k_i \geq 0$ が存在する．$r_i = \Box$ のときは $t_i = \Box$ なので $k_i = 0$ とすればよい．$\max\{k_1, \cdots, k_{leaf(r)}\} = k_{\max}$ とおくと，任意の $i = 1, \cdots, leaf(r)$ について $t_i \in T^{k_{\max}}$ となる．よって，$r'[t_1, \cdots, t_{leaf(r)}] \in T^{k_{\max}} \cdot T$ であり $T^{k_{\max}} \cdot T \subseteq T^{k_{\max}+1}$ なので，$n = k_{\max} + 1$ とすればよい．$(\Leftarrow)$ は $n \geq 0$ に関する帰納法により示す．$n = 0$ のとき，$t \in T^0$ であり $T^0 = \{\Box\}$ なので $t = \Box$ である．P の定義より $d \to \Box$ であるから $d \to_G^* \Box$ が成り立つ．$n = k$ のとき成り立つと仮定する．$n = k+1$ のとき，$T^{k+1} = T^k \cdot T \cup T^k$ より

$$t \in T^k \cdot T \quad \text{または} \quad t \in T^k$$

である．$t \in T^k$ のときは帰納法の仮定より成り立つ．$t \in T^k \cdot T$ のとき，

$$t' \in T \quad \text{かつ} \quad t_1, \cdots, t_{leaf(t')} \in T^k \quad \text{かつ} \quad t = t'[t_1, \cdots, t_{leaf(t')}]$$

となるような $t', t_1, \cdots, t_{leaf(t')} \in F_\Sigma$ が存在する．$t' \in T$ より $a \to_{G_A}^* t$ となる $a \in A'$ が存在する．このとき，t' の $leaf(t')$ 個の葉はすべて $\Box$ なので，任意の $i = 1, \cdots, leaf(t')$ に対して，$\boldsymbol{G}_A$ が単口木文法であることから $b_i \to \Box \in P_A$ となるような $b_i \in N_A$ が存在するので，

$$a \to_{G_A}^* t'[b_1, \cdots, b_{leaf(t')}]$$

である．また，任意の $i=1,\cdots,leaf(t')$ について，$t_i \in T^k$ と帰納法の仮定より $a_i \to_G^* t_i$ となる $a_i \in A''$ が存在する．これより，$a_i \to_G r_i \to_G^* t_i$ となるような $r_i \in F_\Sigma(\{\Box\} \cup N_A)$ が存在し，$a_i \to r_i \in P$ である．P の定義より

$$a_i \to r_i \in P_A \quad \text{または}$$

$$a_i \to r_i \in \{a \to r \mid a \to \Box \in P_A(a \in N_A), a_A \to r \in P_A(a_A \in A')\}$$

である．$a_i \to r_i \in P_A$ のときは $b_i \to r_i \in P$ で，$b_i \to_G^* t_i$ となる．$a_i \to r_i \in P_A$ でないとき，$a_i \to \Box \in P_A$ かつ $c_i \to r_i \in P_A$ となるような $c_i \in A'$ が存在するので，$b_i \to r_i \in P$ で $b_i \to_G^* t_i$ となる．よって，

$$a \to_{G_A}^* t'[b_1,\cdots,b_{leaf(t')}] \to_G^* t$$

が成り立つので，a が求める初期記号である．

$\Box$

定理 3.14. 非決定性単口木オートマトンで受理される言語は単口木文法で生成される．

証明. $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を非決定性単口木オートマトンとする．これに対して，単口木文法 $\boldsymbol{G} = (N, \Sigma, \Box, P, A')$ を以下のように構成する．

- $N = Q$
- $A' = F$
- $P = \{a \to \Box \mid a \in \hat{\Delta}(\Box)\} \cup \{a \to f(p,\cdots,p) \mid \Delta(f,p) = a\}$

上で定義した文法は定義より単口木文法である．これが，$T(\boldsymbol{A}) = T(\boldsymbol{G})$ を満たすことを示すには，

$$a \in \hat{\Delta}(t) \iff a \to_G^* t$$

を示せばよい．これを t の構造に関する帰納法により示す．$t = \square$ のとき，

$$a \in \hat{\Delta}(\square) \iff a \to \square \in P \iff a \to_G^* \square = t$$

である．$t = f(t_1, \cdots, t_m)$ のとき，まず $(\Rightarrow)$ を示す．$\hat{\Delta}$ の定義より，

$$a \in \hat{\Delta}(f(t_1, \cdots, t_m)) \iff a \in \bigcup_{p \in \bigcap_{1 \le i \le m} \hat{\Delta}(t_i)} \Delta(f, p)$$

であるから，$a \to f(p', \cdots, p') \in P$ かつ $p' \in \bigcap_{1 \le i \le m} \hat{\Delta}(t_i)$ となる $p' \in Q$ が存在する．各 $i = 1, \cdots m$ について，帰納法の仮定より $p' \to_G^* t_i$ となるので，

$$a \to_G f(p', \cdots, p') \to_G^* f(t_1, \cdots, t_m)$$

が成り立つ．次に $(\Leftarrow)$ を示す．$\boldsymbol{G}$ が単口木文法であることから $a \to_G^* f(t_1, \cdots, t_m)$ となるためには

$$a \to_G f(a', \cdots, a') \to_G^* f(t_1, \cdots, t_m)$$

の形でなければならない．すなわち，

$$a \to f(a', \cdots, a') \in P \quad \text{かつ} \quad a' \to_G^* t_i$$

である．このとき，$a \in \Delta(f, a')$ かつ各 $i = 1, \cdots, m$ について $a' \in \hat{\Delta}(t_i)$ であるから，$\hat{\Delta}$ の定義より $a \in \hat{\Delta}(f(t_1, \cdots, t_m))$ が成り立つ．以上のことから，

$$a \in \hat{\Delta}(t) \iff a \to_G^* t$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} t \in T(\boldsymbol{A}) &\iff \hat{\Delta}(t) \cap F \neq \emptyset \\ &\iff F = A' \text{ かつ } {}^\exists a \in F.\ a \in \hat{\Delta}(t) \\ &\iff {}^\exists a \in A'.\ a \to_G^* t \\ &\iff t \in T(\boldsymbol{G}) \end{aligned}$$

が成り立つ．　□

定理 3.15. 単口木文法で生成される言語を受理する非決定性単口木オートマトンが存在する．

証明. $\boldsymbol{G} = (N, \Sigma, \Box, P, A')$ を単口木文法とする．これに対して，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を以下のように構成する．

- $Q = N$
- $F = A'$
- $\Delta = \{((f, p), q) \mid f \in \Sigma_m,\ p, q \in Q,\ q \to f(p, \cdots, p) \in P\}$
- $\hat{\Delta}(\Box) = \{a \in Q \mid a \to \Box \in P\}$

上で定義したオートマトンは定義から非決定性単口木オートマトンである．これが，$T(\boldsymbol{G}) = T(\boldsymbol{A})$ を満たすことを示すには,

$$a \to_G^* t \iff a \in \hat{\Delta}(t)$$

を示せばよい．これを t の構造に関する帰納法により示す．$t = \Box$ のとき,

$$a \to_G^* \Box \iff a \to \Box \in P \iff a \in \hat{\Delta}(\Box)$$

なので成り立つ．$t = f(t_1, \cdots, t_m)$ のとき，まず $(\Rightarrow)$ を示す．単口木文法であることから $a \to_G^* f(t_1, \cdots, t_m)$ となるためには

$$a \to_G f(a', \cdots, a') \to_G^* f(t_1, \cdots, t_m) \quad (a' \in N)$$

の形でなければならないので，$a \to f(a', \cdots, a') \in P$ かつ，各 $i = 1, \cdots, m$ について $a' \to_G^* t_i$ である．このとき，$a \to f(a', \cdots, a') \in P$ より $a \in \Delta(f, a')$ である．また，各 $i = 1, \cdots, m$ について，$a' \to_G^* t_i$ と帰納法の仮定により $a' \in \hat{\Delta}(t_i)$ である．よっ

て，$\hat{\Delta}$ の定義から $a \in \hat{\Delta}(f(t_1, \cdots, t_m))$ が成り立つ．次に $(\Leftarrow)$ を示す．$\hat{\Delta}$ の定義より $a \in \bigcup_{p \in \bigcap_{1 \le i \le m} \hat{\Delta}(t_i)} \Delta(f, p)$ なので，

$$a \in \Delta(f, p') \quad \text{かつ} \quad p' \in \bigcup_{1 \le i \le m} \hat{\Delta}(t_i)$$

となる $p' \in Q$ が存在する．$a \in \Delta(f, p')$ より $a \to f(p', \cdots, p') \in P$ であり，任意の $i = 1, \cdots, m$ について $p' \in \hat{\Delta}(t_i)$ と帰納法の仮定により，$p' \to_G^* t_i$ である．よって，

$$a \to_G f(p', \cdots, p') \to_G^* f(t_1, \cdots, t_m)$$

となる．以上のことから，

$$a \to_G^* t \iff a \in \hat{\Delta}(t)$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} t \in T(\boldsymbol{G}) &\iff {}^{\exists} a \in A' = F.\, a \to_G^* t \\ &\iff {}^{\exists} a \in F.\, a \in \hat{\Delta}(t) \\ &\iff \hat{\Delta}(t) \cap F \neq \emptyset \\ &\iff t \in T(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

となる．□

定理 3.14 と定理 3.15 より，次のことが言える．

系 3.16. 非決定性単口木オートマトンと単口木文法は能力が等しい．

系 3.16 と定理 3.12，定理 3.13 より，

系 3.17. 任意の非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}_1$ と $\boldsymbol{A}_2$ に対して，

$$T(\boldsymbol{A}) = T(\boldsymbol{A}_1) \cdot T(\boldsymbol{A}_2)$$

となるような非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ と，

$$T(\boldsymbol{B}) = T(\boldsymbol{A}_1)^*$$

となるような非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{B}$ が存在する．

以上のことから，次が成り立つ．

定理 3.18. 非決定性単口木オートマトンの受理言語全体のなす集合は $\cup, \cap, -, \cdot, ^*$ について閉じている．

3.4　正規表現から単口木オートマトン

この節では，正規表現に対して能力が等しい非決定性単口木オートマトンが存在することを，前節までに述べたことを用いて示す．

定理 3.19. 任意の正規表現 η に対して，$T(\boldsymbol{A}) = |\eta|$ となる非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ が存在する．

証明. η に関する帰納法により示す．$\eta = 0$ のときは $F = \emptyset$ とすれば，$|\eta| = \emptyset = T(\boldsymbol{A})$ が成り立つ．$\eta = \square$ のとき，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を次のように構成する．

- $\Sigma = \Sigma_2 = \{f\}$
- $Q = \{s, q\}$
- $S = \{s\}$
- $F = \{s\}$
- $\Delta(f, x) = \{q\} \quad (x \in Q)$

このとき，Δ の定義から $\hat{\Delta}(\square) = \{s\}$ かつ任意の $t_1, t_2 \in F_\Sigma$ について $\hat{\Delta}(f(t_1, t_2)) = \{q\}$ である．よって，$T(\boldsymbol{A}) = \{\square\} = |\square|$ が成り立つ．$\eta = f(\square, \cdots, \square)$ のとき，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を次のように構成する．

- $\Sigma = \Sigma_m = \{f\}$

- $Q = \{s,q,r\}$
- $S = \{s\}$
- $F = \{q\}$
- $\Delta(f,s) = \{q\}$，$\Delta(f,x) = \{r\} \quad (x \in \{q,r\})$

このとき，Δ の定義より，$\hat{\Delta}(\square) = \{s\}$，$\hat{\Delta}(f(t_1,\cdots,t_m)) \subseteq \{q,r\}$ であり，$\hat{\Delta}$ の定義より，

$$t \in T(\boldsymbol{A}) \iff \hat{\Delta}(t) \cap F \neq \emptyset \iff q \in \hat{\Delta}(t)$$

である．明らかに $\square \notin T(\boldsymbol{A})$ である．$q \in \hat{\Delta}(f(t_1,\cdots,t_m))$ となるためには，$\hat{\Delta}$ の定義より $s \in \bigcap_{i=1,\cdots,m} \hat{\Delta}(t_i)$ でなければならない．オートマトン $\boldsymbol{A}$ の定義から，全ての i について $t_i = \square$ でなければならない．よって，$T(\boldsymbol{A}) = \{f(\square,\cdots,\square)\} = |f|$ が成り立つ．$\eta = e + e'$，$\eta = e \cdot e'$，$\eta = e^*$ のときはいずれも定理 3.18 より成り立つ．　□

3.5　単口木オートマトンから正規表現

この節では，非決定性単口木オートマトンに対して能力が等しい正規表現が存在するかどうかを考える．まず，正規表現の構成法について，通常の有限オートマトンの場合と同様に考えてみる．

定義 3.20. 非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ と $p, q \in Q$，$X \subseteq Q$ が与えられているとする．このとき，正規表現 β_{pq}^X を次のように帰納的に定義する．

1. $|X| = 0$ のとき，

$$p \neq q \text{ のとき，} \quad \beta_{pq}^{\emptyset} = \begin{cases} \sum E'_{pq} & (E'_{pq} \neq \emptyset) \\ 0 & (E'_{pq} = \emptyset) \end{cases}$$

$$p = q \text{ のとき，} \quad \beta_{pq}^{\emptyset} = \begin{cases} (\sum E'_{pq})^* & (E'_{pq} \neq \emptyset) \\ \square & (E'_{pq} = \emptyset) \end{cases}$$

2. $|X| \geq 1$ のとき，

$$\beta_{pq}^{X} = \beta_{pq}^{X-\{x\}} + \beta_{px}^{X-\{x\}} \cdot (\beta_{xx}^{X-\{x\}})^{*} \cdot \beta_{xq}^{X-\{x\}}$$

ただし，$E'_{pq} = \left\{ f \in \Sigma \mid q \in \Delta_{pq}^{\emptyset}(f, p) \right\}$ とし，$\Delta_{pq}^{\emptyset} = ((\Sigma \times \{p\}) \times \{q\}) \cap \Delta$ とする．

次の例は，ある非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ に対して，$T(\boldsymbol{A})$ に含まれるが，$|\sum_{s \in S, f \in F} \beta_{sf}^{Q}|$ には含まれない単口木が存在することを示している．

例 3.21. 例 *3.4* の非決定性単口木オートマトンを考える．この非決定性単口木オートマトンは単口木 $f(g(\square, \square), h(\square, \square))$ を受理する．しかし，

$$\sum_{s \in S, f \in F} \beta_{sf}^{Q} = \sum_{s \in S} \beta_{sq}^{Q} = \square + g \cdot (f \cdot h)^{*} \cdot f + h \cdot (f \cdot h)^{*} \cdot f$$

なので，これが表す単口木言語 $|\sum_{s \in S, f \in F} \beta_{sf}^{Q}|$ は，単口木 $f(g(\square, \square), h(\square, \square))$ を含まない．

このことから，通常のオートマトンの場合と同じ構成法では，非決定性単口木オートマトンの受理言語を表す正規表現を必ずしも得られないことがわかる．そこで次のような構成法を考える．

定義 3.22. 非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ と空でない集合 $P \subseteq Q$, $q \in Q$，$X \subseteq Q$ が与えられているとする．このとき，正規表現 γ_{Pq}^{X} を次のように帰納的に定義する．

1. $|X| = 0$ のとき，

$$q \notin P \text{ のとき，} \quad \gamma_{Pq}^{\emptyset} = \begin{cases} \sum_{p \in P} \sum E_{pq} & (\sum_{p \in P} E_{pq} \neq \emptyset) \\ 0 & (\sum_{p \in P} E_{pq} = \emptyset) \end{cases}$$

$$q \in P \text{ のとき，} \quad \gamma_{Pq}^{\emptyset} = \begin{cases} \square + \sum_{p \in P} \sum E_{pq} & (\sum_{p \in P} E_{pq} \neq \emptyset) \\ \square & (\sum_{p \in P} E_{pq} = \emptyset) \end{cases}$$

2. $|X| \geq 1$ のとき，

$$\gamma_{Pq}^{X} = \sum_{x \in X} \left(\gamma_{Pq}^{X-\{x\}} + \gamma_{Px}^{X-\{x\}} \cdot (\gamma_{\{x\}x}^{X-\{x\}})^{*} \cdot \gamma_{\{x\}q}^{X-\{x\}} \right)$$

ただし，$E_{pq} = \{ f \in \Sigma \mid q \in \Delta_{Pq}(f, p) \}$ とし，$\Delta_{Pq} = ((\Sigma \times P) \times \{q\}) \cap \Delta$ とする．

このとき，例 3.21 で示した問題点が改善されていることが次の例からわかる．

例 3.23. 例 *3.4* の非決定性単口木オートマトンを考える．

$$\gamma_{Sq}^{Q} = (g+h) \cdot (f \cdot h)^{*} \cdot f + (\Box + (g+h) \cdot f) \cdot (h \cdot f)^{*}$$

なので，正規表現 γ_{Sq}^{Q} が表す単口木言語 $|\gamma_{Sq}^{Q}|$ は単口木 $f(g(\Box,\Box),h(\Box,\Box))$ を含む．

しかし，次の例は，ある非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ に対して $T(\boldsymbol{A})$ に含まれるが，$|\sum_{f \in F} \gamma_{Sf}^{Q}|$ には含まれない単口木が存在することを示している．

例 3.24. 例 *3.5* の非決定性単口木オートマトンを考える．この非決定性単口木オートマトンは単口木 $f_1(f_3(f_4(\Box,\Box), f_5(f_2(\Box,\Box), f_2(\Box,\Box))), f_2(\Box,\Box))$ を受理する．しかし，

$$\begin{aligned} \sum_{f \in F} \gamma_{Sf}^{Q} &= \gamma_{Sq}^{Q} \\ &= (f_4 + f_2 \cdot f_5) \cdot (f_3 \cdot f_5)^{*} \cdot f_3 \cdot f_1 + (f_2 + f_4 \cdot f_3) \cdot (f_5 \cdot f_3)^{*} \cdot f_1 \end{aligned}$$

なので，単口木 $f_1(f_3(f_4(\Box,\Box), f_5(f_2(\Box,\Box), f_2(\Box,\Box))), f_2(\Box,\Box))$ は $\sum_{f \in F} \gamma_{Sf}^{Q}$ が表す単口木言語 $|\sum_{f \in F} \gamma_{Sf}^{Q}|$ に含まれない．

以上のことから，次のような正規表現の構成を考えることにする．

定義 3.25. 非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ と空でない集合 $P \subseteq Q$，$q \in Q$，$X \subseteq Q$ が与えられているとする．このとき，正規表現 α_{Pq}^{X} を次のように帰納的に定義する．

1. $|X| = 0$ のとき，

$$q \notin P \text{ のとき，} \quad \alpha^{\emptyset}_{Pq} = \begin{cases} \sum_{p \in P} \sum E_{pq} & (\sum_{p \in P} E_{pq} \neq \emptyset) \\ 0 & (\sum_{p \in P} E_{pq} = \emptyset) \end{cases}$$

$$q \in P \text{ のとき，} \quad \alpha^{\emptyset}_{Pq} = \begin{cases} \square + \sum_{p \in P} \sum E_{pq} & (\sum_{p \in P} E_{pq} \neq \emptyset) \\ \square & (\sum_{p \in P} E_{pq} = \emptyset) \end{cases}$$

2. $|X| \geq 1$ のとき，

$$\alpha^{X}_{Pq} = \sum_{x \in X} \Big(\alpha^{X-\{x\}}_{Pq} + \Big(\sum_{y \in X-\{x\}} \alpha^{X-\{y\}}_{Py} \cdot (\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}y})^{*} \cdot \alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}x} \\ + \alpha^{X-\{x\}}_{Px} \cdot (\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}x})^{*} \Big) \cdot \alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}q} \Big)$$

このとき，各非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ について，明らかに

$$|\sum_{f \in F} \gamma^{Q}_{Sf}| \subseteq |\sum_{f \in F} \alpha^{Q}_{Sf}|$$

が成り立つ．よって，定義 3.25 で与えた構成法については，例 3.21 で示した問題が生じないことがわかる．さらに，例 3.24 で示した問題点が改善されていることが次の例からわかる．

例 3.26. 例 *3.5* の非決定性単口木オートマトンを考える．

$$\begin{aligned}
&\sum_{f \in F} \alpha^{Q}_{Sq} \\
=&\alpha^{Q}_{Sq} \\
=&((f_2 + f_4 \cdot f_3) \cdot (f_5 \cdot f_3)^{*} \cdot f_5 + (f_4 + f_2 \cdot f_5) \cdot (f_3 \cdot f_5)^{*}) \cdot f_3 \cdot f_1 \\
&+ ((f_4 + f_2 \cdot f_5) \cdot (f_3 \cdot f_5)^{*} \cdot f_3 + (f_2 + f_4 \cdot f_3) \cdot (f_5 \cdot f_3)^{*}) \cdot f_1 \\
&+ (((f_2 + f_4 \cdot f_3) \cdot (f_5 \cdot f_3)^{*} \cdot f_5 + (f_4 + f_2 \cdot f_5) \cdot (f_3 \cdot f_5)^{*}) \cdot (\square + f_3 \cdot f_5) \\
&\quad + ((f_4 + f_2 \cdot f_5) \cdot (f_3 \cdot f_5)^{*} \cdot f_3 + (f_2 + f_4 \cdot f_3) \cdot (f_5 \cdot f_3)^{*}) \cdot f_5) \cdot f_3 \cdot f_1 \\
&+ (((f_2 + f_4 \cdot f_3) \cdot (f_5 \cdot f_3)^{*} \cdot f_5 + (f_4 + f_2 \cdot f_5) \cdot (f_3 \cdot f_5)^{*}) \cdot f_3 \\
&\quad + ((f_4 + f_2 \cdot f_5) \cdot (f_3 \cdot f_5)^{*} \cdot f_3 + (f_2 + f_4 \cdot f_3) \cdot (f_5 \cdot f_3)^{*}) \cdot (\square + f_5 \cdot f_3)) \cdot f_1
\end{aligned}$$

なので，単口木 $f_1(f_3(f_4(\Box,\Box),f_5(f_2(\Box,\Box),f_2(\Box,\Box))),f_2(\Box,\Box))$ は $\sum_{f\in F}\alpha^Q_{Sf}$ が表す単口木言語 $|\sum_{f\in F}\alpha^Q_{Sf}|$ に含まれる．

非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}=(\Sigma,Q,\Delta,S,F)$ の空でない集合 $P,X\subseteq Q$ と $q\in Q$ に対して，言語 $T(\boldsymbol{A}(P,q,X))$ を定める．このとき，特に $P=S$，$X=Q$ とした場合に $T(\boldsymbol{A})=\bigcup_{q\in F}T(\boldsymbol{A}(P,q,X))$ となるように注意する．通常の有限オートマトンに対しても，同様の構成が知られている．これを素直に踏襲すると次のようになる．

定義 3.27. 非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}=(\Sigma,Q,\Delta,S,F)$ と $p,q\in Q$，$X\subseteq Q$ が与えられているとする．このとき，言語 $T'(\boldsymbol{A}(P,q,X))$ を次のように定める．

$$T'(\boldsymbol{A}(P,q,X))=\bigcup_{p\in P}\{t\in F_\Sigma\mid q\in\hat{\Delta}^X_{pq}(t)\}$$

ここで，$\Delta^X_{pq}=((\Sigma\times(X\cup\{p\}))\times(X\cup\{q\}))\cap\Delta$ であり，$\hat{\Delta}^X_{pq}\subseteq F_\Sigma\times Q$ は次のように定義する．

- $\hat{\Delta}^X_{pq}(\Box)=\{p\}$
- $\hat{\Delta}^X_{pq}(f(t_1,\cdots,t_m))=\bigcup_{x\in\bigcup_i\hat{\Delta}^X_{pq}(t_i)}\Delta^X_{pq}(f,x)$

しかし，この構成法では $P=S$，$X=Q$ の場合に等式 $T(\boldsymbol{A})=\bigcup_{q\in F}T'(\boldsymbol{A}(P,q,X))$ をみたさない．

例 3.28. 例 *3.4* の非決定性単口木オートマトンについて考える．この非決定性単口木オートマトンは単口木 $f(g(\Box,\Box),h(\Box,\Box))$ を受理する．一方，

$$\hat{\Delta}^Q_{pq}(\Box)=\{p\}$$

$$\hat{\Delta}^Q_{pq}(g(\Box,\Box))=\bigcup_{x\in\hat{\Delta}^Q_{pq}(\Box)}\Delta^Q_{pq}(g,x)=\Delta^Q_{pq}(g,p)=\{r\}$$

$$\hat{\Delta}^Q_{pq}(h(\Box,\Box))=\bigcup_{x\in\hat{\Delta}^Q_{pq}(\Box)}\Delta^Q_{pq}(h,x)=\Delta^Q_{pq}(h,p)=\emptyset$$

$$\hat{\Delta}^Q_{pq}(f(g(\Box,\Box),h(\Box,\Box)))=\bigcup_{x\in\hat{\Delta}^Q_{pq}(g(\Box,\Box))\cap\hat{\Delta}^Q_{pq}(h(\Box,\Box))}\Delta^Q_{pq}(f,x)=\emptyset$$

より $q \notin \hat{\Delta}^Q_{pq}(f(g(\square,\square),h(\square,\square)))$ となり，

$$\begin{aligned}
&\hat{\Delta}^Q_{qq}(\square) = \{q\} \\
&\hat{\Delta}^Q_{qq}(g(\square,\square)) = \bigcup_{x\in\hat{\Delta}^Q_{qq}(\square)} \Delta^Q_{qq}(g,x) = \Delta^Q_{qq}(g,q) = \emptyset \\
&\hat{\Delta}^Q_{qq}(h(\square,\square)) = \bigcup_{x\in\hat{\Delta}^Q_{qq}(\square)} \Delta^Q_{qq}(h,x) = \Delta^Q_{qq}(h,q) = \{r\} \\
&\hat{\Delta}^Q_{qq}(f(g(\square,\square),h(\square,\square))) = \bigcup_{x\in\hat{\Delta}^Q_{qq}(g(\square,\square))\cap\hat{\Delta}^Q_{qq}(h(\square,\square))} \Delta^Q_{qq}(f,x) = \emptyset
\end{aligned}$$

より $q \notin \hat{\Delta}^Q_{qq}(f(g(\square,\square),h(\square,\square)))$ となるので

$$f(g(\square,\square),h(\square,\square)) \notin \bigcup_{f\in F} T'(\boldsymbol{A}(S,f,Q))$$

である．

この例で示した問題点を改善したものが次の構成法である．

定義 3.29. 非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma,Q,\Delta,S,F)$ が与えられているとする．このとき，空でない $P \subseteq Q$，$q \in Q$，$X \subseteq Q$ に対して，

$$\begin{aligned}
\Delta^X_P &= ((\Sigma\times(X\cup P))\times X)\cap\Delta \\
\Delta^X_q &= ((\Sigma\times X)\times\{q\})\cap\Delta \\
\Delta_{Pq} &= ((\Sigma\times P)\times\{q\})\cap\Delta
\end{aligned}$$

と定義し，$\tilde{\Delta}^X_{Pq} \subseteq F_\Sigma(\{\square\}\cup Q)\times Q$ を次で定義する．

- $t \in Q$ のとき，$\tilde{\Delta}^X_{Pq}(t) = \{t\}$
- $t = \square$ のとき，$\tilde{\Delta}^X_{Pq}(t) = P$
- $f \in \Sigma_n$，$t_1,\cdots,t_n \in F_\Sigma(\{\square\}\cup Q)$，$t = f(t_1,\cdots,t_n)$ のときで，
  - $^\forall i \in \{1,\cdots,n\}.\ t_i = \square$ のとき，$\tilde{\Delta}^X_{Pq}(t) = \bigcup_{p\in P}\Delta_{Pq}(f,p)$

– $^{\exists}i \in \{1,\cdots,n\}.\, t_i \neq \Box$ のとき，$\tilde{\Delta}^X_{Pq}(t) = \bigcup_{p \in \bigcap_i \hat{\Delta}^X_P(t_i)} \Delta^X_q(f,p)$

$\hat{\Delta}^X_P \subseteq F_\Sigma(\{\Box\} \cup Q)$ は次のように定義する．

- $t \in Q$ のとき，$\hat{\Delta}^X_P(t) = \{t\}$
- $t = \Box$ のとき，$\hat{\Delta}^X_P(t) = P$
- $f \in \Sigma_n$，$t_1,\cdots,t_n \in F_\Sigma(\{\Box\} \cup Q)$，$t = f(t_1,\cdots,t_n)$ のとき，

$$\hat{\Delta}^X_P(f(t_1,\cdots,t_n)) = \bigcup_{p \in \bigcap_{i\in\{1,\cdots,n\}} \hat{\Delta}^X_P(t_i)} \Delta^X_P(f,p)$$

このとき，言語 $T(\boldsymbol{A}(P,q,X))$ を

$$t \in T(\boldsymbol{A}(P,q,X)) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad q \in \tilde{\Delta}^X_{Pq}(t)$$

と定める．

補題 3.30. $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を非決定性単口木オートマトンとする．このとき，任意の $t \in F_\Sigma$ に対して

$$\hat{\Delta}(t) = \hat{\Delta}^Q_S(t)$$

が成り立つ．

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ とし，t の構造に関する帰納法で示す．$t = \Box$ のときは

$$\hat{\Delta}(\Box) = S = \hat{\Delta}^Q_S(\Box)$$

より成り立つ．$t = f(t_1,t_2)$ のとき，$\Delta = \Delta^Q_S$ であることと帰納法の仮定から

$$\hat{\Delta}(f(t_1,t_2)) = \bigcup_{x \in \hat{\Delta}(t_1) \cap \hat{\Delta}(t_2)} \Delta(f,x) = \bigcup_{x \in \hat{\Delta}^Q_S(t_1) \cap \hat{\Delta}^Q_S(t_2)} \Delta^Q_S(f,x) = \hat{\Delta}^Q_S(f(t_1,t_2))$$

が成り立つ． □

命題 3.31. 非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ に対して

$$T(\boldsymbol{A}) = \bigcup_{f \in F} T(\boldsymbol{A}(S, f, Q))$$

が成り立つ.

証明. $T(\boldsymbol{A}) = \bigcup_{f \in F} T(\boldsymbol{A}(S, f, Q))$ を示すには

$$q \in \hat{\Delta}(t) \iff q \in \tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(t)$$

を示せばよい．簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ の場合を考える．まず，$(\Rightarrow)$ を t の構造に関する帰納法により示す．$t = \Box$ のときは，$\hat{\Delta}(\Box) = S$ より $q \in S$ であり，$\tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(\Box) = S$ なので $q \in \tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(\Box)$ が成り立つ．$t = f(\Box, \Box)$ のとき，

$$\hat{\Delta}(f(\Box, \Box)) = \bigcup_{x \in \hat{\Delta}(\Box)} \Delta(f, x) = \bigcup_{x \in S} \Delta(f, x)$$

より $q \in \bigcup_{x \in S} \Delta(f, x)$ なので，$q \in \Delta(f, p)$ となるような $p \in S$ が存在する．このとき，$q \in \Delta_{Sq}(f, p)$ であり，$\tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(f(\Box, \Box)) = \bigcup_{s \in S} \Delta_{Sq}(f, s)$ なので，$q \in \tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(f(\Box, \Box))$ が成り立つ．t_1 と t_2 のいずれかが $\Box$ と異なり，かつ $t = f(t_1, t_2)$ のとき，$\hat{\Delta}$ の定義より $q \in \bigcup_{x \in \hat{\Delta}(t_1) \cap \hat{\Delta}(t_2)} \Delta(f, x)$ である．これより

$$q \in \Delta(f, p) \quad \text{かつ} \quad p \in \hat{\Delta}(t_1) \cap \hat{\Delta}(t_2)$$

となる $p \in Q$ が存在する．$q \in \Delta(f, p)$ より $q \in \Delta^{Q}_{q}(f, p)$ であり，補題 3.30 より $p \in \hat{\Delta}^{Q}_{S}(t_1) \cap \hat{\Delta}^{Q}_{S}(t_2)$ である．これより $q \in \bigcup_{x \in \hat{\Delta}^{Q}_{S}(t_1) \cap \hat{\Delta}^{Q}_{S}(t_2)} \Delta^{Q}_{q}(f, x)$ であり，$\tilde{\Delta}$ の定義より $q \in \tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(f(t_1, t_2))$ が成り立つ．次に，$(\Leftarrow)$ を t の構造に関する帰納法により示す．$t = \Box$ のときは，$\tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(\Box) = S$ より $q \in S$ であり，$\hat{\Delta}(\Box) = S$ なので $q \in \hat{\Delta}(\Box)$ が成り立つ．$t = f(\Box, \Box)$ のとき，

$$\tilde{\Delta}^{Q}_{Sq}(f(\Box, \Box)) = \bigcup_{s \in S} \Delta_{Sq}(f, s)$$

より $q \in \bigcup_{s \in S} \Delta_{Sq}(f,s)$ なので，$q \in \Delta_{Sq}(f,p)$ となるような $p \in S$ が存在する．このとき，$q \in \Delta(f,p)$ であり，$\hat{\Delta}(f(\square,\square)) = \bigcup_{s \in S} \Delta(f,s)$ なので，$q \in \hat{\Delta}(f(\square,\square))$ が成り立つ．t_1 と t_2 のいずれかが $\square$ と異なり，かつ $t = f(t_1,t_2)$ のとき，$\tilde{\Delta}^Q_{Sq}$ の定義より，$q \in \bigcup_{x \in \hat{\Delta}^Q_S(t_1) \cap \hat{\Delta}^Q_S(t_2)} \Delta^Q_q(f,x)$ である．これより，

$$q \in \Delta^Q_q(f,p) \quad \text{かつ} \quad p \in \hat{\Delta}^Q_S(t_1) \cap \hat{\Delta}^Q_S(t_2)$$

となる $p \in Q$ が存在する．$q \in \Delta^Q_q(f,p)$ より $q \in \Delta(f,p)$ であり，補題 3.30 より $p \in \hat{\Delta}(t_1) \cap \hat{\Delta}(t_2)$ である．これより $q \in \bigcup_{x \in \hat{\Delta}(t_1) \cap \hat{\Delta}(t_2)} \Delta(f,x)$ であり，$\hat{\Delta}$ の定義より $q \in \hat{\Delta}(f(t_1,t_2))$ が成り立つ．　$\square$

補題 3.32. $t \in F_\Sigma(\{\square\} \cup Q)$ とするとき，

$$q \in \hat{\Delta}^X_P(t) \quad \Longrightarrow \quad q \in \tilde{\Delta}^X_{Pq}(t)$$

が成り立つ．

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ とし，t の構造に関する帰納法により示す．$t = \square$ のときは

$$\hat{\Delta}^X_P(\square) = P = \tilde{\Delta}^X_{Pq}(\square)$$

より成り立つ．$t \in Q$ のときは

$$\hat{\Delta}^X_P(t) = \{t\} = \tilde{\Delta}^X_{Pq}(t)$$

より成り立つ．$t = f(\square,\square)$ のとき，$\hat{\Delta}^X_P(f(\square,\square)) = \bigcup_{p \in P} \Delta^X_P(f,p)$ より，$q \in \Delta^X_P(f,p')$ となるような $p' \in P$ が存在する．$q \in \Delta^X_P(f,p')$ より $q \in \Delta(f,p')$ なので，$q \in \Delta_{Pq}(f,p')$ となる．

$$\bigcup_{p \in P} \Delta_{Pq}(f,p) = \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(\square,\square))$$

であるから $q \in \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(\square,\square))$ が成り立つ．t_1 と t_2 のいずれかが $\square$ と異なり，かつ $t = f(t_1,t_2)$ のとき，

$$\hat{\Delta}^X_P(f(t_1,t_2)) = \bigcup_{p \in \hat{\Delta}^X_P(t_1) \cap \hat{\Delta}^X_P(t_2)} \Delta^X_P(f,p)$$

より $q \in \Delta_P^X(f,p')$ となる $p' \in \hat{\Delta}_P^X(t_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(t_2)$ が存在する．$\hat{\Delta}_P^X(t_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(t_2) \subseteq X$ より $p' \in X$ であり，$q \in \Delta_P^X(f,p')$ より $q \in \Delta(f,p')$ であるから $q \in \Delta_q^X(f,p')$ となる．

$$\bigcup_{p \in \hat{\Delta}_P^X(t_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(t_2)} \Delta_q^X(f,p) = \tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(t_1,t_2))$$

なので $q \in \tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(t_1,t_2))$ が成り立つ．□

補題 3.33. $t \in F_\Sigma(\{\square\} \cup Q)$ かつ $q \in X$ とするとき，

$$q \in \tilde{\Delta}_{Pq}^X(t) \quad \Longrightarrow \quad q \in \hat{\Delta}_P^X(t)$$

が成り立つ．

証明. $t = \square$ および $t \in Q$ のときは，それぞれ

$$\tilde{\Delta}_{Pq}^X(t) = \{t\} = \hat{\Delta}_P^X(t)$$

より成り立つ．$t = f(\square,\square)$ のとき，

$$\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(\square,\square)) = \bigcup_{p \in P} \Delta_{Pq}(f,p)$$

より，$q \in \Delta_{Pq}(f,p')$ となるような $p' \in P$ が存在する．これより $q \in \Delta(f,p')$ であり，$q \in X$ であるから $q \in \Delta_P^X(f,p')$ となる．$\bigcup_{p \in P} \Delta_P^X(f,p) = \hat{\Delta}_P^X(f(\square,\square))$ であるから，$q \in \hat{\Delta}_P^X(f(\square,\square))$ が成り立つ．t_1 と t_2 のいずれかが $\square$ と異なり，かつ $t = f(t_1,t_2)$ のとき，

$$\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(t_1,t_2)) = \bigcup_{p \in \hat{\Delta}_P^X(t_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(t_2)} \Delta_q^X(f,p)$$

より $q \in \Delta_q^X(f,p')$ となるような $p' \in \hat{\Delta}_P^X(t_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(t_2)$ が存在する．$\hat{\Delta}_P^X(t_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(t_2) \subseteq X$ より $p' \in X$ であり，$q \in \Delta_q^X(f,p')$ より $q \in \Delta(f,p')$ である．これより $q \in \Delta_P^X(f,p')$ であり，

$$\bigcup_{p \in \hat{\Delta}_P^X(t_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(t_2)} \Delta(f,p) = \hat{\Delta}_P^X(f(t_1,t_2))$$

なので $q \in \hat{\Delta}_P^X(f(t_1,t_2))$ が成り立つ．□

補題 3.34. $leaf(t) = l$ であるような $t \in F_\Sigma$ と $t_1, \cdots, t_l \in F_\Sigma$ に対して，

$$\hat{\Delta}_P^X(t[t_1, \cdots, t_l]) = \bigcup_{r_i \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)(1 \le i \le l)} \hat{\Delta}_P^X(t[r_1, \cdots, r_l])$$

が成り立つ.

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ とし，t の構成に関する帰納法により示す．$t = \Box$ のとき，

$$\hat{\Delta}_P^X(\Box[t_1]) = \hat{\Delta}_P^X(t_1) = \bigcup_{r \in \hat{\Delta}_P^X(t_1)} \{r\} = \bigcup_{r \in \hat{\Delta}_P^X(t_1)} \hat{\Delta}_P^X(\Box[r])$$

より成り立つ．$v_1, v_2 \in F_\Sigma$ について，

$$v_1 = v_1'[t_1, \cdots, t_m] \implies \hat{\Delta}_P^X(v_1) = \bigcup_{r_i \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)(1 \le i \le m)} \hat{\Delta}_P^X(v_1'[r_1, \cdots, r_m])$$
$$v_2 = v_2'[t_{m+1}, \cdots, t_l] \implies \hat{\Delta}_P^X(v_2) = \bigcup_{r_j \in \hat{\Delta}_P^X(t_j)(m+1 \le j \le l)} \hat{\Delta}_P^X(v_2'[r_{m+1}, \cdots, r_l])$$

が成り立つと仮定する．$t = f(v_1, v_2)$ のとき，

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}_P^X(f(v_1, v_2)) &= \bigcup_{x \in \hat{\Delta}_P^X(v_1) \cap \hat{\Delta}_P^X(v_2)} \Delta_P^X(f, x) \\
&= \bigcup_{r_i \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)(1 \le i \le l)} \bigcup_{x \in \hat{\Delta}_P^X(v_1'[r_1, \cdots, r_m]) \cap \hat{\Delta}_P^X(v_2'[r_{m+1}, \cdots, r_l])} \Delta_P^X(f, x) \\
&= \bigcup_{r_i \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)(1 \le i \le l)} \hat{\Delta}_P^X(f(v_1'[r_1, \cdots, r_m], v_2'[r_{m+1}, \cdots, r_l])) \\
&= \bigcup_{r_i \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)(1 \le i \le l)} \hat{\Delta}_P^X(f(v_1', v_2')[r_1, \cdots, r_l])
\end{aligned}$$

となり成り立つ. □

補題 3.35. $leaf(t) = l$ であるような $t \in F_\Sigma$ と $t_1, \cdots, t_l \in F_\Sigma$ に対して，

$$q \in \bigcup_{r_i \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)(1 \le i \le l)} \tilde{\Delta}_{Pq}^X(t[r_1, \cdots, r_l]) \implies q \in \tilde{\Delta}_{Pq}^X(t[t_1, \cdots, t_l])$$

が成り立つ.

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ の場合を考える．$t = \Box$ のとき $l = 1$ であり，

$$\bigcup_{r_1 \in \hat{\Delta}_P^X(t_1)} \tilde{\Delta}_{Pq}^X(\Box[r_1]) = \bigcup_{r_1 \in \hat{\Delta}_P^X(t_1)} \{r_1\} = \hat{\Delta}_P^X(t_1)$$

より $q\in\hat{\Delta}_P^X(t_1)$ となる．$t_1=\square$ のときは $\hat{\Delta}_P^X(\square)=P=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(\square[\square])$ より成り立つ．$t_1\in Q$ のときも $\hat{\Delta}_P^X(t_1)=\{t_1\}=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(\square[t_1])$ より成り立つ．$t_1=f(\square,\square)$ のとき，$\hat{\Delta}_P^X(f(\square,\square))=\bigcup_{p\in\hat{\Delta}_P^X(\square)}\Delta_P^X(f,p)$ より $q\in\Delta_P^X(f,p')$ となるような $p'\in P$ が存在する．$q\in\Delta_P^X(f,p')$ より $q\in\Delta(f,p')$ であり，これと $p'\in P$ より $q\in\Delta_{Pq}(f,p')$ となる．

$$\bigcup_{p\in P}\Delta_{Pq}(f,p)=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(\square,\square))=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(\square[f(\square,\square)])$$

なので $q\in\tilde{\Delta}_{Pq}^X(\square[f(\square,\square)])$ が成り立つ．t_{11} と t_{12} のいずれかが $\square$ と異なり，かつ $t_1=f(t_{11},t_{12})$ のとき，

$$\hat{\Delta}_P^X(f(t_{11},t_{12}))=\bigcup_{p\in\hat{\Delta}_P^X(t_{11})\cap\hat{\Delta}_P^X(t_{12})}\Delta_P^X(f,p)$$

より $q\in\Delta_P^X(f,p')$ となる $p'\in\hat{\Delta}_P^X(t_{11})\cap\hat{\Delta}_P^X(t_{12})$ が存在する．$\hat{\Delta}_P^X(t_{11})\cap\hat{\Delta}_P^X(t_{12})\subseteq X$ より $p'\in X$ であり，$q\in\Delta_P^X(f,p')$ より $q\in\Delta(f,p')$ である．これより $q\in\Delta_q^X(f,p')$ となるので，

$$\bigcup_{p\in\hat{\Delta}_P^X(t_{11})\cap\hat{\Delta}_P^X(t_{12})}\Delta_q^X(f,p)=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(t_{11},t_{12}))=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(\square[f(t_{11},t_{12})])$$

であることから，$q\in\tilde{\Delta}_{Pq}^X(\square[f(t_{11},t_{12})])$ が成り立つ．$t\in Q$ のときは明らかに成り立つ．$t=f(\square,\square)$ のとき $l=2$ で，

$$\begin{aligned}\textstyle\bigcup_{r_i\in\hat{\Delta}_P^X(t_i)(1\le i\le 2)}\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(\square,\square)[r_1,r_2]) &= \textstyle\bigcup_{r_i\in\hat{\Delta}_P^X(t_i)(1\le i\le 2)}\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(r_1,r_2))\\ &= \textstyle\bigcup_{r_i\in\hat{\Delta}_P^X(t_i)(1\le i\le 2)}\bigcup_{p\in\hat{\Delta}_P^X(r_1)\cap\hat{\Delta}_P^X(r_2)}\Delta_q^X(f,p)\\ &= \textstyle\bigcup_{p\in\bigcup_{r_1\in\hat{\Delta}_P^X(t_1)}\hat{\Delta}_P^X(r_1)\cap\bigcup_{r_2\in\hat{\Delta}_P^X(t_2)}\hat{\Delta}_P^X(r_2)}\Delta_q^X(f,p)\\ &= \textstyle\bigcup_{p\in\hat{\Delta}_P^X(t_1)\cap\hat{\Delta}_P^X(t_2)}\Delta_q^X(f,p)\end{aligned}$$

なので，$q\in\bigcup_{p\in\hat{\Delta}_P^X(t_1)\cap\hat{\Delta}_P^X(t_2)}\Delta_q^X(f,p)$ となる．$t_1\neq\square$ または $t_2\neq\square$ のとき，

$$\bigcup_{p\in\hat{\Delta}_P^X(t_1)\cap\hat{\Delta}_P^X(t_2)}\Delta_q^X(f,p)=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(t_1,t_2))=\tilde{\Delta}_{Pq}^X(f(\square,\square)[t_1,t_2])$$

より成り立つ．$t_1 = \square$ かつ $t_2 = \square$ のとき，$\hat{\Delta}^X_P(t_1) \cap \hat{\Delta}^X_P(t_2) = P$ であり，

$$q \in \bigcup_{p \in P} \Delta^X_q(f,p)$$

より $q \in \Delta^X_q(f,p')$ となるような $p' \in P$ が存在する．$q \in \Delta^X_q(f,p')$ より $q \in \Delta(f,p')$ で，これと $p' \in P$ より $q \in \Delta_{Pq}(f,p')$ となる．

$$\bigcup_{p \in P} \Delta_{Pq}(f,p) = \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(\square,\square))$$

であることから $q \in \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(\square,\square))$ が成り立つ．t_1 と t_2 のいずれかが $\square$ と異なり，かつ $t = f(t_1,t_2)$ のとき，$l_i = leaf(t_i)$ とおくと補題 3.34 より

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{r_{ij_i} \in \hat{\Delta}^X_P(t_{ij_i})(1 \le i \le 2)(1 \le j_i \le l_i)} \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1,t_2)[r_{11},\cdots,r_{1l_1},r_{21},\cdots,r_{2l_2}]) \\
= & \bigcup_{r_{ij_i} \in \hat{\Delta}^X_P(t_{ij_i})(1 \le i \le 2)(1 \le j_i \le l_i)} \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1[r_{11},\cdots,r_{1l_1}],t_2[r_{21},\cdots,r_{2l_2}]) \\
= & \bigcup_{r_{ij_i} \in \hat{\Delta}^X_P(t_{ij_i})(1 \le i \le 2)(1 \le j_i \le l_i)} \bigcup_{p \in \hat{\Delta}^X_P(t_1[r_{11},\cdots,r_{1l_1}]) \cap \hat{\Delta}^X_P(t_2[r_{21},\cdots,r_{2l_2}])} \Delta^X_q(f,p) \\
= & \bigcup_{p \in \bigcup_{r_{1j_1} \in \hat{\Delta}^X_P(t_{1j_1})} \hat{\Delta}^X_P(t_1[r_{11},\cdots,r_{1l_1}]) \cap \bigcup_{r_{2j_2} \in \hat{\Delta}^X_P(t_{2j_2})} \hat{\Delta}^X_P(t_2[r_{21},\cdots,r_{2l_2}])} \Delta^X_q(f,p) \\
= & \bigcup_{p \in \hat{\Delta}^X_P(t_1[t_{11},\cdots,t_{1l_1}]) \cap \hat{\Delta}^X_P(t_2[t_{21},\cdots,t_{2l_2}])} \Delta^X_q(f,p) \\
= & \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1[t_{11},\cdots,t_{1l_1}],t_2[t_{21},\cdots,t_{2l_2}])) \\
= & \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1,t_2)[t_{11},\cdots,t_{1l_1},t_{21},\cdots,t_{2l_2}])
\end{aligned}$$

なので $q \in \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1,t_2)[t_{11},\cdots,t_{1l_1},t_{21},\cdots,t_{2l_2}])$ が成り立つ．　$\square$

補題 3.36. $t \in F_\Sigma(\{\square\} \cup Q)$，$x \in X$ とするとき，

$$r \in \tilde{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}q}(t) \quad \Longrightarrow \quad r \in \tilde{\Delta}^X_{Pq}(t[x,\cdots,x])$$

が成り立つ．

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ とし，t の構造に関する帰納法により示す．$t = \square$ のとき，

$$r \in \tilde{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}q}(\square) \quad \text{かつ} \quad \tilde{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}q}(\square) = \{x\}$$

より $x=r$ である．このとき，$\tilde{\Delta}^X_{Pq}(\Box[x])=\tilde{\Delta}^X_{Pq}(x)=\{x\}$ となり成り立つ．$t\in Q$ のとき，

$$r\in\tilde{\Delta}^X_{\{x\}q}(t)\quad\text{かつ}\quad\tilde{\Delta}^X_{\{x\}q}(t)=\{t\}$$

より $r=t$ である．このとき，$\tilde{\Delta}^X_{Pq}(a[x])=\tilde{\Delta}^X_{Pq}(a)=\{a\}$ となり成り立つ．$t=f(\Box,\Box)$ のとき，

$$\tilde{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}q}(f(\Box,\Box))=\bigcup_{p\in\{x\}}\Delta_{\{x\}q}(f,p)=\Delta_{\{x\}q}(f,x)$$

であるから，$r=q$ かつ $r\in\Delta(f,x)$ で $r\in\Delta^X_q(f,x)$ となる．このとき，

$$\tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(\Box,\Box)[x,x])=\tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(x,x))=\bigcup_{p\in\hat{\Delta}^X_P(x)}\Delta^X_q(f,p)=\Delta^X_q(f,x)$$

であるから $r\in\tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(\Box,\Box)[x,x])$ となる．t_1 と t_2 のいずれかが $\Box$ と異なり，かつ $t=f(t_1,t_2)$ のとき，

$$\tilde{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}q}(f(t_1,t_2))=\bigcup_{p\in\hat{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}}(t_1)\cap\hat{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}}(t_2)}\Delta^{X-\{x\}}_q(f,p)$$

であることから，$r\in\Delta^{X-\{x\}}_q(f,p')$ となるような $p'\in\hat{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}}(t_1)\cap\hat{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}}(t_2)$ が存在する．$r\in\Delta^{X-\{x\}}_q(f,p')$ より $r=q$ かつ $r\in\Delta(f,p')$ であり，

$$\hat{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}}(t_1)\cap\hat{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}}(t_2)\subseteq X$$

より $p'\in X$ であるから，$r\in\Delta^X_q(f,p')$ となる．また，$t=1,2$ について，$p'\in\hat{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}}(t_i)$ と補題 3.32 より $p'\in\tilde{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}p'}(t_i)$ で，帰納法の仮定より $p'\in\tilde{\Delta}^X_{Pp'}(t_i[x,\cdots,x])$ となる．さらに，補題 3.33 より $p'\in\hat{\Delta}^X_P(t_i[x,\cdots,x])$ となる．よって，

$$\begin{aligned}\Delta^X_q(f,p') &\subseteq \textstyle\bigcup_{p\in\hat{\Delta}^X_P(t_1[x,\cdots,x])\cap\hat{\Delta}^X_P(t_2[x,\cdots,x])}\Delta^X_q(f,p)\\ &= \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1[x,\cdots,x],t_2[x,\cdots,x]))\\ &= \tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1,t_2)[x,\cdots,x])\end{aligned}$$

なので $r\in\tilde{\Delta}^X_{Pq}(f(t_1,t_2)[x,\cdots,x])$ となる． □

$T_{pq} = |E_{pq}|$ と定めると，次が成り立つ．

補題 3.37. $q \in Q$，$P \subseteq Q$，$t \in F_\Sigma$，$q \notin P$ とするとき，

$$q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t) \iff t \in \bigcup_{p \in P} T_{pq}$$

が成り立つ．

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ の場合を考える．まず，$(\Rightarrow)$ を t の構造に関して場合分けをして示す．$t = \square$ のときは，$q \notin P$ かつ $P = \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(\square)$ となり前提が成り立たないので，この命題は成り立つ．$t = f(\square,\square)$ のとき，仮定より $q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(f(\square,\square))$ であり，定義より $\tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(f(\square,\square)) = \bigcup_{p \in P} \Delta_{Pq}(f,p)$ であるから，$q \in \Delta_{Pq}(f,r)$ となるような $r \in P$ が存在する．よって $t \in \bigcup_{p \in P} T_{pq}$ が成り立つ．t_1 と t_2 のいずれかが $\square$ と異なり，かつ $t = f(t_1,t_2)$ のとき，仮定より $q \in \bigcup_{x \in \hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_1) \cap \hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_2)} \Delta^{\emptyset}_q(f,x)$ であるが，$\hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_1) \cap \hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_2) = \emptyset$ なので仮定が成り立たない．よって，この命題は成り立つ．次に，$(\Leftarrow)$ を示す．仮定より $t \in T_{pq}$ となる $p \in P$ が存在する．このとき，T_{pq} の定義より $t = f(\square,\square)$ かつ $q \in \Delta_{Pq}(f,p)$ である．$\tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t) = \bigcup_{r \in P} \Delta_{Pq}(f,r)$ なので $q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t)$ が成り立つ． $\square$

補題 3.38. $q \in Q$，$P \subseteq Q$，$t \in F_\Sigma$，$q \in P$ とするとき，

$$q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t) \iff t \in \{\square\} \cup \bigcup_{p \in P} T_{pq}$$

が成り立つ．

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ の場合を考える．まず $(\Rightarrow)$ を t の構造に関する帰納法により示す．$t = \square$ のときは明らかに成り立つ．$t = f(\square,\square)$ のとき，$\tilde{\Delta}$ の定義より $q \in \bigcup_{p \in P} \Delta_{Pq}(f,p)$ であるから，$q \in \Delta_{Pq}(f,r)$ となるような $r \in P$ が存在する．T_{rq} の定義より $t \in T_{rq}$ であり $t \in \bigcup_{p \in P} T_{pq}$ が成り立つ．t_1 と t_2 のいずれかが $\square$ と異なり，かつ $t = f(t_1,t_2)$ のとき，$\tilde{\Delta}$ の定義より $q \in \bigcup_{x \in \hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_1) \cap \hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_2)} \Delta^{\emptyset}_q(f,x)$ であるが，

$\hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_1) \cap \hat{\Delta}^{\emptyset}_P(t_2) = \emptyset$ より仮定が成り立たないので，この命題は成り立つ．次に $(\Leftarrow)$ を示す．仮定より $t \in \{\square\}$ または $t \in \bigcup_{p \in P} T_{pq}$ である．$t \in \{\square\}$ のときは $q \in P$ より $q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(\square)$ が成り立つ．$t \in \bigcup_{p \in P} T_{pq}$ のとき，$t \in T_{rq}$ となる $r \in P$ が存在する．このとき，T_{rq} の定義より $t = f(\square, \square)$ かつ $q \in \Delta_{Pq}(f, r)$ である．$\tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t) = \bigcup_{p \in P} \Delta_{Pq}(f, p)$ なので $q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t)$ が成り立つ．□

補題 3.39. $\boldsymbol{A}$ を非決定性単口木オートマトンとするとき，任意の $q \in Q$，$P, X \subseteq Q$ に対して，

$$|\alpha^X_{Pq}| \subseteq T(\boldsymbol{A}(P, q, X))$$

が成り立つ．

証明. 簡単の為に $\Sigma = \Sigma_2$ とし，$|X|$ に関する帰納法で示す．$|X| = 0$，すなわち $X = \emptyset$ のとき，$q \notin P$ と $q \in P$ の 2 通りを考える．$q \notin P$ の場合，$t \in |\alpha^{\emptyset}_{Pq}|$ とすると，定義より $t \in \bigcup_{p \in P} T_{pq}$ であるから，補題 3.37 より $q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t)$ となり，$T(\boldsymbol{A}(P, q, \emptyset))$ の定義より $t \in T(\boldsymbol{A}(P, q, \emptyset))$ となる．$q \in P$ の場合，$t \in |\alpha^{\emptyset}_{Pq}|$ とすると，定義より $t \in \{\square\} \cup \bigcup_{p \in P} T_{pq}$ であるから，補題 3.38 より $q \in \tilde{\Delta}^{\emptyset}_{Pq}(t)$ となり，$T(\boldsymbol{A}(P, q, \emptyset))$ の定義より $t \in T(\boldsymbol{A}(P, q, \emptyset))$ となる．よって，$X = \emptyset$ のときは成り立つ．$|X| = k$ のとき，$|\alpha^X_{Pq}| \subseteq T(\boldsymbol{A}(P, q, X))$ が成り立つと仮定する．$|X| = k + 1$ のとき，

$$\begin{aligned} & t \in \bigcup_{x \in X} \left(|\alpha^{X-\{x\}}_{Pq}| \cup \left(\bigcup_{y \in X-\{x\}} |\alpha^{X-\{y\}}_{Py}| \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}y}|^* \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}x}| \right.\right. \\ & \qquad\qquad \left.\left. \cup |\alpha^{X-\{x\}}_{Px}| \cdot |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}x}|^* \right) \cdot |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}q}| \right) \\ \Longrightarrow \quad & t \in T(\boldsymbol{A}(P, q, X)) \end{aligned}$$

を示せばよい．仮定より

$$\begin{aligned} t \in |\alpha^{X-\{x\}}_{Pq}| \cup & \left(\bigcup_{y \in X-\{x\}} |\alpha^{X-\{y\}}_{Py}| \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}y}|^* \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}x}| \right. \\ & \left. \cup |\alpha^{X-\{x\}}_{Px}| \cdot |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}x}|^* \right) \cdot |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}q}| \end{aligned}$$

となる $x \in X$ が存在する．$t \in |\alpha^{X-\{x\}}_{Pq}|$ のときは $|X|$ に関する帰納法の仮定より $t \in T(\boldsymbol{A}(P, q, X - \{x\}))$ であり，$T(\boldsymbol{A}(P, q, X - \{x\})) \subseteq T(\boldsymbol{A}(P, q, X))$ なので成り立つ．

$t \in \left(\bigcup_{y\in X-\{x\}} |\alpha_{Py}^{X-\{y\}}| \cdot |\alpha_{\{y\}y}^{X-\{y\}}|^* \cdot |\alpha_{\{y\}x}^{X-\{y\}}| \cup |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^*\right) \cdot |\alpha_{\{x\}q}^{X-\{x\}}|$ のとき，

$t' \in |\alpha_{\{x\}q}^{X-\{x\}}|$　かつ
$t_1, \cdots, t_l \in \bigcup_{y\in X-\{x\}} |\alpha_{Py}^{X-\{y\}}| \cdot |\alpha_{\{y\}y}^{X-\{y\}}|^* \cdot |\alpha_{\{y\}x}^{X-\{y\}}| \cup |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^*$　かつ
$t = t'[t_1, \cdots, t_l]$

となるような $t', t_1, \cdots, t_l \in F_\Sigma$ が存在する．ここで $l = leaf(t')$ である．$t' \in |\alpha_{\{x\}q}^{X-\{x\}}|$ と $|X|$ に関する帰納法の仮定より $q \in \tilde{\Delta}_{\{x\}q}^{X-\{x\}}(t')$ であり，補題 3.36 より

$$q \in \tilde{\Delta}_{Pq}^{X}(t'[x, \cdots, x])$$

である．ここで，任意の $n \geq 0$ に対して

$$s \in |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^n \quad \Longrightarrow \quad x \in \tilde{\Delta}_{Px}^{X}(s) \tag{3.1}$$

であることを n に関する帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$s \in |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}|$ であるから $|X|$ に関する帰納法の仮定より $x \in \tilde{\Delta}_{Px}^{X-\{x\}}(s)$ である．また，$\tilde{\Delta}_{Px}^{X-\{x\}}(s) \subseteq \tilde{\Delta}_{Px}^{X}(s)$ なので $x \in \tilde{\Delta}_{Px}^{X}(s)$ となる．$n = n'$ のとき，

$$s \in |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^{n'} \quad \Longrightarrow \quad x \in \tilde{\Delta}_{Px}^{X}(s)$$

が成り立つと仮定する．$n = n' + 1$ のとき，

$$|\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^{n'+1} = |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^{n'} \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}| \cup |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^{n'}$$

であるから，

$$s \in |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^{n'} \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}| \quad \text{または} \quad s \in |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^{n'}$$

である．後者の場合は，n に関する帰納法の仮定より成り立つ．前者の場合は，

$$s' \in |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}| \quad \text{かつ} \quad s_1, \cdots, s_{l'} \in |\alpha_{Px}^{X-\{x\}}| \cdot |\alpha_{\{x\}x}^{X-\{x\}}|^{n'} \quad \text{かつ} \quad s = s'[s_1, \cdots, s_{l'}]$$

となるような $s', s_1, \cdots, s_{l'} \in F_\Sigma$ が存在する．ここで $l' = leaf(s')$ である．$s' \in |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}x}|$ と $|X|$ に関する帰納法の仮定より $x \in \tilde{\Delta}^{X-\{x\}}_{\{x\}x}(s')$ であり，補題 3.36 より

$$x \in \tilde{\Delta}^X_{Px}(s'[x, \cdots, x])$$

となる．また，各 $j = 1, \cdots, l'$ について，$s_j \in |\alpha^{X-\{x\}}_{Px}| \cdot |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}x}|^{n'}$ と n に関する帰納法の仮定より $x \in \tilde{\Delta}^X_{Px}(s_j)$ となり，補題 3.33 より $x \in \hat{\Delta}^X_P(s_j)$ となる．よって，補題 3.35 より $r \in \tilde{\Delta}^X_{Px}(s)$ が成り立つ．以上のことから (3.1) が成り立つ．各 $i = 1, \cdots, l$ について，

$$t_i \in \bigcup_{y \in X-\{x\}} |\alpha^{X-\{y\}}_{Py}| \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}y}|^* \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}x}| \cup |\alpha^{X-\{x\}}_{Px}| \cdot |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}x}|^*$$

であるから，

$$t_i \in \bigcup_{y \in X-\{x\}} |\alpha^{X-\{y\}}_{Py}| \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}y}|^* \cdot |\alpha^{X-\{y\}}_{\{y\}x}| \quad \text{または} \quad t_i \in |\alpha^{X-\{x\}}_{Px}| \cdot |\alpha^{X-\{x\}}_{\{x\}x}|^*$$

である．後者の場合は，(3.1) より $x \in \tilde{\Delta}^X_{Px}(t_i)$ となる．前者の場合は，

$$t_i \in |\alpha^{X-\{y_i\}}_{Py_i}| \cdot |\alpha^{X-\{y_i\}}_{\{y_i\}y_i}|^* \cdot |\alpha^{X-\{y_i\}}_{\{y_i\}x}|$$

となるような $y_i \in X - \{x\}$ が存在する．このとき，

$$t'_i \in |\alpha^{X-\{y_i\}}_{\{y_i\}x}| \quad \text{かつ} \quad t_{i1}, \cdots, t_{il_i} \in |\alpha^{X-\{y_i\}}_{Py_i}| \cdot |\alpha^{X-\{y_i\}}_{\{y_i\}y_i}|^* \quad \text{かつ} \quad t_i = t'_i[t_{i1}, \cdots, t_{il_i}]$$

となるような $t'_i, t_{i1}, \cdots, t_{il_i} \in F_\Sigma$ が存在する．ここで $l_i = leaf(t'_i)$ である．$t'_i \in |\alpha^{X-\{y_i\}}_{\{y_i\}x}|$ と $|X|$ に関する帰納法の仮定により $x \in \tilde{\Delta}^{X-\{y_i\}}_{\{y_i\}x}(t'_i)$ であり，補題 3.36 より

$$x \in \tilde{\Delta}^X_{Px}(t'_i[y_i, \cdots, y_i])$$

となる．また，各 $j_i = 1, \cdots, l_i$ について，$t_{ij_i} \in |\alpha^{X-\{y_i\}}_{Py_i}| \cdot |\alpha^{X-\{y_i\}}_{\{y_i\}y_i}|^*$ と (3.1) により

$$y_i \in \tilde{\Delta}^{X-\{y_i\}}_{Py_i}(t_{ij_i})$$

であり，$\tilde{\Delta}_{Py_i}^{X-\{y_i\}}(t_{ij_i}) \subseteq \tilde{\Delta}_{Py_i}^{X}(t_{ij_i})$ より $y_i \in \tilde{\Delta}_{Py_i}^{X}(t_{ij_i})$ となる．$y_i \in X$ であるから補題 3.33 より $y_i \in \hat{\Delta}_P^X(t_{ij_i})$ となる．よって $x \in \bigcup_{p \in \hat{\Delta}_P^X(t_{ij_i})(1 \le j_i \le l_i)} \tilde{\Delta}_{Px}^X(t_i'[p,\cdots,p])$ であり，補題 3.35 から $x \in \tilde{\Delta}_{Px}^X(t_i)$ となる．以上のことから，全ての $i = 1,\cdots,l$ について $x \in \tilde{\Delta}_{Px}^X(t_i)$ であり，補題 3.33 より $x \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)$ となるので，$q \in \bigcup_{y \in \hat{\Delta}_P^X(t_i)(1 \le i \le l)} \tilde{\Delta}_{Pq}^X(t'[y,\cdots,y])$ である．これと補題 3.35 により $q \in \tilde{\Delta}_{Pq}^X(t)$ が成り立つ．$\square$

命題 3.31 より次が成り立つ．

定理 3.40. 任意の非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A}$ に対して，$|\eta| \subseteq T(\boldsymbol{A})$ となる正規表現 η が存在する．

未解決の問題. $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ を非決定性単口木オートマトンとするとき，任意の $q \in Q$，$P, X \subseteq Q$ に対して

$$T(\boldsymbol{A}(P,q,X)) \subseteq |\alpha_{Pq}^X|$$

が成り立つか．

これが成り立てば，$|\eta| \subseteq T(\boldsymbol{A})$ となる正規表現 η が存在することが示されるのだが，今のところ成り立つか否か明らかではない．

第4章　まとめ

本論文では制限付きの木オートマトンである単口木オートマトンの性質について調べ,

- 非決定性単口木オートマトンと同等な文脈自由文法（単口木文法）と,
- 非決定性単口木オートマトンが単口木言語上の主要な演算について閉じていること

を明らかにした．さらに，単口木オートマトンと正規表現の関連を調べるために,正規表現の単口木言語上での解釈の定義を与え,

- 正規表現に対して同等な非決定性単口木オートマトンが存在すること

を示した．また，非決定性単口木オートマトン $\boldsymbol{A} = (\Sigma, Q, \Delta, S, F)$ に対して同等な正規表現が存在することの証明を次のような手順で試みた.

1. $q \in Q$，$P, X \subseteq Q$ に対して，正規表現 $\eta^X_{P,q}$ および単口木言語 $T(\boldsymbol{A}(P, q, X))$ の構成法を与える.
2. $T(\boldsymbol{A}) = \bigcup_{f \in F} T(\boldsymbol{A}(S, f, Q))$ を示す.
3. $|\eta^X_{Pq}| \subseteq T(\boldsymbol{A}(P, q, X))$ を示す.
4. $T(\boldsymbol{A}(P, q, X)) \subseteq |\eta^X_{Pq}|$ を示す.

項目 4 まで完了すると，項目 2 より，$\sum_{f \in F} \eta^Q_{Sf}$ が所望の正規表現ということになる．通常の有限オートマトンの場合も，木オートマトンの場合も，本論文と同様

の手順で，与えられたオートマトンに対して，その受理言語を表す表現が存在することを証明できる [6, 1, 2]．これらの場合，決定性と非決定性の能力が等しいので，取り扱いが容易な決定性のオートマトンについてのみ考察することにより結論を得る．一方，単口木オートマトンの場合，非決定性の方が決定性よりも能力が高いということが [5] において示されており，この結果は本論文においても紹介した．そのため，通常の有限オートマトンや木オートマトンの場合と異なり，項目 3,4 を完了するには，取り扱いが困難な非決定性のオートマトンを相手にする必要があった．結局，本論文では項目 3 までしか至らなかった．項目 4 の包含関係が成り立つか否かについては今のところわかっていないので，これを明らかにするのが今後の課題である．

謝辞

古澤仁先生には，本稿執筆にあたり数多くの助言を与えて下さったこと，ならびに学部 4 年次からこれまでの 3 年間細やかなご指導を賜りましたことを深く感謝致します．

丸野隆明先生には，学部 4 年間ご指導いただき，その後も多くの助言や激励を賜りましたことに深く御礼申し上げます．

また，本論文の審査を担当して頂いた新森修一先生，安田健彦先生に深く御礼申し上げます．産業技術総合研究所システム検証研究センターの高井利憲氏には本研究内容について多くの有益なコメントを下さったことに心より感謝申し上げます．與倉昭治先生には 2009 年 9 月福岡で開催された第３回 論理と計算に関するセミナーにて本研究の口頭発表を行なった折，科学研究費補助金 基盤研究（C）「代数的空間および滑層空間の位相幾何的総合研究」（課題番号 21540088）より旅費の援助を頂きました．貴重な機会を与えて下さったことに深く感謝いたします．愛甲正先生には 2009 年 10 月佐賀で開催された第１２１回 数学会九州支部例会にて本研究に関する口頭発表を行なった折，個人研究費より旅費の援助を頂きました．貴重な機会を与えて下さったことに深く感謝いたします．

津曲紀宏先輩には，本稿執筆を含めこれまでに数多くの助言を与えて下さったことに心より感謝申し上げます．

他諸先生方，学科事務室，他研究室の皆様には，折に触れて様々な形でサポートして頂きましたことを心より御礼申し上げます．また，毎週のセミナーで議論に参加してくれた研究室の後輩諸子にも感謝いたします．

最後に，これまで精神的にも経済的にも支え続けてくれた家族，温かい励ましを送ってくれた友人たちに感謝します.

参考文献

[1] H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison and M. Tommasi. Tree Automata Techniques and Applications. 1997. Available on : `http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata/`.

[2] F. Gécseg and M. Steinby. Tree Automata. AKADÉMIAI KIADÓ, 1984.

[3] S. C. Kleene. Representation of events in nerve nets and finite automata. In C. E. Shannon and J.McCarthy, *Automata Studies*, Princeton Univ. Press, 1956, pp.3-42.

[4] D. Kozen. On the Myhill-Nerode theorem for trees. Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, vol.47, pp.170-173. 1992.

[5] 古澤仁, 高井利憲. 単口木オートマトンの決定化について. 応用数学合同研究集会. 2007 年 12 月.

[6] J. ホップクロフト, R. モトワニ , J. ウルマン（著）, 野崎昭弘, 高橋正子, 町田元, 山崎秀記（訳）. オートマトン 言語理論 計算論 . 第２版. サイエンス社, 2003.