

An Interface Crack Growth in a Laminated Beam Subject to Low Speed Impact

○学 吉本卓己 (鹿大院)
正 有富正男 (鹿大)

正 小田美紀男 (鹿大)
正 戸谷眞之 (鹿大)

Takumi YOSHIMOTO, Mikio ODA, Masao ARITOMI, and Masayuki TOYA
Dept. of Mechanical Engineering, Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima

Key Words : Fracture Mechanics, Impact, Delamination, Interface Crack, Energy Release Rate

1. まえがき

本研究では、異種の弾性はりを貼り合わせて作られた積層はり中の低速度衝撃による内部界面はく離の進展を扱う。はりに動的垂直集中力が加えられ、着力点がある一定速度で強制変位を受ける場合についてラプラス変換法を用いて理論的に解析し、変位、ひずみおよびエネルギー解放率の閉じた解を導く。さらに実験を行い、解析と比較する。

2. 理論解析

図1に示す様に、中心対称な界面内部はく離をもつ2層からなる積層はりを考える。はりの長さを $2l$ 、長方形断面のはりの幅を上下共に b とする。厚さ、ヤング率、密度を、 h_i, E_i, ρ_i ($i=1,2$) とする。ここで $i=1$ は上のはりを、 $i=2$ は下のはりを意味する。また、界面にそって長さ $2c$ のはく離が含まれていると仮定する。図1に示すように、接着部分とはく離部分の4つの領域に分けて解析を行う。

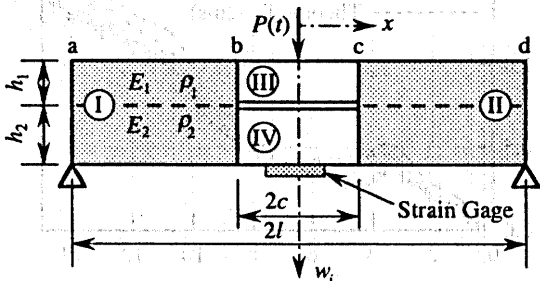


Fig.1 Bilayer beam with an interface crack

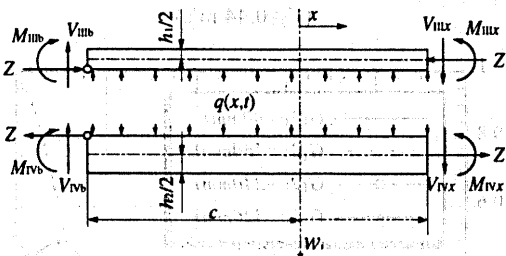


Fig.2 Free-body diagram of the delaminated part

接着部分の合成はりの単位長さ当たりの質量を m' 、曲げ剛性を D' とし、材料に関する諸量を次式に定める。

$$\left. \begin{aligned} I_i &= \frac{bh_i^3}{12}, A_i = bh_i, m_i = \rho_i A_i, D_i = E_i I_i, (i=1,2) \\ h &= h_1 + h_2, A = A_1 + A_2, m' = m_1 + m_2 \\ D &= D_1 + D_2, D' = D + \frac{E_1 h_1 E_2 h_2 bh^2}{4(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

最初にモデルはりの自由振動の解を求める。4つの部分の運動方程式は以下のようになる。接着部分については

$$D \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + m' \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = I, II) \dots\dots\dots (2)$$

はく離部分 (III, IV 領域) は両端をヒンジで止められた重ねはりとみなし、振動中上下のはりは常に接して、クラック界面に分布反力 $q(x,t)$ が作用すると仮定する。 x 座標の原点をはく離の中央部にとり、座標 x ではりをカットした自由体線図は図2のようになる。結局はく離部分の上下のはりの運動方程式はそれぞれ以下のようになる。

$$D_1 \frac{\partial^4 w_{III}}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w_{III}}{\partial t^2} + Z \frac{\partial^2 w_{III}}{\partial x^2} + q = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$D_2 \frac{\partial^4 w_{IV}}{\partial x^4} + m_2 \frac{\partial^2 w_{IV}}{\partial t^2} - Z \frac{\partial^2 w_{IV}}{\partial x^2} - q = 0 \dots\dots\dots (4)$$

上下のはりのたわみは常に等しいと仮定すると、式(3)と式(4)を足し合わせることで

$$D \frac{\partial^4 w_{II}}{\partial x^4} + m' \frac{\partial^2 w_{II}}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

変数分離形の解を仮定すると、式(2)および式(5)の一般解は次のようになる。

$$w_i = X_i(x)f(t) \quad (i = I, II, III) \dots\dots\dots (6)$$

$$f(t) = B_1 \cos pt + B_2 \sin pt \dots\dots\dots (7)$$

$$X_i(x) = C_{i1} (\sinh \xi_i x + \sin \xi_i x) + C_{i2} (\cosh \xi_i x + \cos \xi_i x) + C_{i3} (\sinh \xi_i x - \sin \xi_i x) + C_{i4} (\cosh \xi_i x - \cos \xi_i x) \dots\dots\dots (8)$$

軸力 Z は、クラック上面の繊維の伸びはクラック下面のそれと等しいという条件より

$$Z = -\frac{h}{2c} \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \frac{\partial w_{III}}{\partial x} \Big|_{x=c} \dots\dots\dots (9)$$

はりは左右対称な両端単純支持はりであるので、はりの左半分のみを解析を行う。はく離先端 b での曲げモーメント M_{IIIb} 、 M_{IVb} は図2の自由体線図より次のようになる。

$$M_{IIIb} + M_{IVb} = [M_{III}]_{x=c} + [M_{IV}]_{x=c} + \frac{h}{2} Z \dots\dots\dots (10)$$

式(8)に、はく離先端における連続条件と、支持点および $x=0$ 点における境界条件を用いることで、はりの固有振動数 p が決定される。この際、はりの左右対称の条件および $w_{III} = w_{IV}$ という仮定を適用している。

次にはりの中心軸に垂直な強制力が作用する場合を考える。強制力は $x=0$ 点にのみ作用する集中荷重 $P(t)$ である。デルタ関数 $\delta(x)$ を用いて $Q(x,t) = P(t)\delta(x)$ とすると、運動方程式は次式となる。

$$D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + m' \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = Q(x, t) \dots\dots\dots (11)$$

正規関数 $X_{in}(x)$ を用いて、一般解を次のように仮定する。

$$w_i = \sum_{n=1}^{\infty} X_{in}(x) f_n(t) \dots\dots\dots (12)$$

ここに $X_{in}(x)$ は

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} - \xi_n^4 X_n = 0 \dots\dots\dots (13)$$

およびはりの境界条件を満足している。式(12)を式(11)に代入すると、次式となる。

$$D_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 X_{in}}{dx^4} f_n + m' \sum_{n=1}^{\infty} X_{in} \frac{d^2 f_n}{dt^2} = Q(x, t) \dots\dots\dots (14)$$

上式に式(13)の関係を代入、さらに両辺に X_{in} を掛け、 $-l$ から l まで積分し、関数 X_{in} の直交性を利用すると次式となる。

$$\frac{d^2 f_n}{dt^2} + p_n^2 f_n = \frac{\int_{-l}^l Q(x, t) X_{in} dx}{m' \int_{-l}^l X_{in}^2 dx} = \frac{Q_n(t)}{m' \int_{-l}^l X_{in}^2 dx} \dots\dots\dots (15)$$

ここで Q_n は次のように与えられる。

$$Q_n(t) = \int_{-l}^l Q(x, t) X_{in}(x) dx = 2C_{III2}^{(n)} P(t) \dots\dots\dots (16)$$

結局たわみ関数は次式となる。

$$w_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{in}(x) \left[B_{1n} \cos p_n t + B_{2n} \sin p_n t + \frac{\int_0^t Q_n(\tau) \sin p_n(t-\tau) d\tau}{p_n m' \int_{-l}^l X_{in}^2(x) dx} \right] \dots\dots\dots (17)$$

この式の第3項は外力による応答を表わし、第1, 2項は初期条件によって生ずる自由振動を表わしている。

以下では衝撃速度を次のような関数を仮定して解析する。

$$v(t) = V_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_c}\right) \right\} \dots\dots\dots (18)$$

ここで V_0 は衝撃速度、 T_c はパラメータ (時定数) で、荷重点の速度が V_0 になるまでの遷移時間を表すパラメータである。このとき未定定数 B_{1n} および B_{2n} は、 $t=0$ においてたわみおよびたわみ速度が0であるという条件より、いずれも0となる。結局たわみ式は次のようになる。

$$w_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{in}(x) \cdot 2C_{III2}^{(n)}}{p_n \int_{-l}^l X_{in}^2(x) dx} \left[\frac{1}{m'} \int_0^t P(\tau) \sin p_n(t-\tau) d\tau \right] \dots\dots\dots (19)$$

$x=0$ 点でのたわみ速度は式(19)を時間 t で微分すると

$$\dot{w}_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^t P(\tau) \cos p_n(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (20)$$

$$\alpha_n = \frac{X_{in}(0) \cdot 2C_{III2}^{(n)}}{p_n \int_{-l}^l X_{in}^2(x) dx} \frac{p_n}{m'} \dots\dots\dots (21)$$

1次, 3次, 5次の振動モードによる3項近似に対しては式(20)は次のようになる。

$$\dot{w}_i(t) = \int_0^t P(\tau) [\alpha_1 \cos p_1(t-\tau) + \alpha_2 \cos p_2(t-\tau) + \alpha_3 \cos p_3(t-\tau)] d\tau \dots\dots\dots (22)$$

左辺に式(18)を代入し、両辺をラプラス変換し、さらにラプラス逆変換を行うと、 $P(t)$ は次式となる。

$$F(t) = \frac{V_0}{a_2 T_c} \left\{ \gamma_0 t - \gamma_0 T_c + \gamma_1 \exp\left(-\frac{t}{T_c}\right) + \psi_1 \cos \lambda_1 t + \frac{\psi_2}{\lambda_1} \sin \lambda_1 t + \psi_3 \cos \lambda_2 t + \frac{\psi_4}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $a_2, \lambda_1, \lambda_2, \gamma_0, \gamma_1, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ は定数である。

Suo と Hutchinson⁽¹⁾ は一般の負荷を受けている単位幅の積層はりのはく離のエネルギー解放率を与える公式を二次元弾性論に基づいて導いた。彼らの結果に基づいて、エネルギー解放率を計算した。

3. 解析および実験結果

実験は、はりに自由落下衝撃丸棒を衝突させ行った。2枚の PMMA を接着して、種々の長さの界面はく離を含む試験片を作製した。図1に示すようにはり中央下面にひずみゲージを添付した。図3に実験および解析によって得られたひずみの時間履歴の一例を示す。時定数 $T_c=1.5$ ms と選ぶと実験および解析結果は良く一致することがわかる。また、図4にエネルギー解放率 G の時間履歴を示す。エネルギー解放率の時間履歴ははく離長さ c に依存するが、一般的には振動しつつ時間と共に増大していく。

参考文献

- (1) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., Int. J. Fract., 43(1990), 1-18

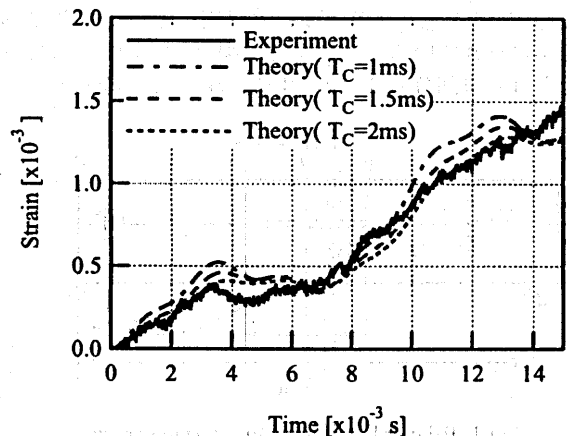


Fig.3 Relation between strain and time after impact ($V_0=0.44$ m/s)

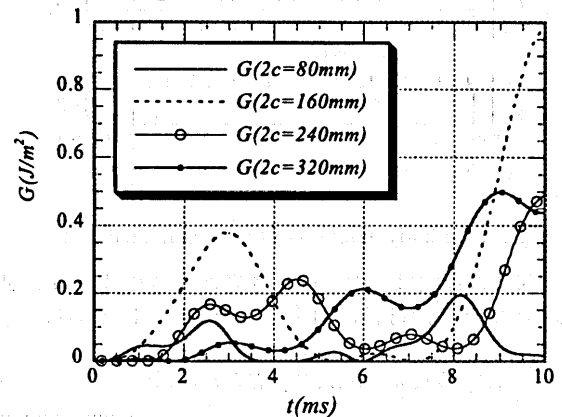


Fig.4 Relation between energy release rate and time ($V_0=0.44$ m/s)