

Free Vibrations of Circular Laminated Plates Containing Multiple Disk-Shaped Delaminations

○ 学 木村光宏 (鹿児島大) 正 有富正男 (鹿児島大)
 正 小田美紀男 (鹿児島大) 正 戸谷真之 (鹿児島大)

Mitsuhiro KIMURA, Masao ARITOMI, Mikio ODA and Masayuki TOYA
 Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima

Key Words : Free Vibration, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency

1. ま え が き

異種材からなる N 層の積層円板が、その中心部に円形の二重層間剥離を有する場合の自由振動を、面内変位が鉛直方向のたわみに比べて非常に小さく無視できるとして理論解析を行う。また、さまざまな剥離条件の異種材積層円板を製作し、振動実験を行って理論解析の妥当性を検証する。

2. 理 論 解 析

2.1 基礎式 図1に示すような半径 R の異種材からなる N 層の積層円板が、中心部の1層と2層、2層と3層の間にそれぞれ半径 c_1, c_2 の円形剥離を有する場合を考える。板の厚さ、縦弾性係数、ポアソン比、および密度は h_k, E_k, ν_k, ρ_k ($k=1,2,3,\dots,N$) とし、 N 層の積層円板の諸量を式(1)のように定める。

$$\left. \begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^N \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, C_{12} = \sum_{k=1}^N \frac{\nu_k E_k h_k}{1-\nu_k^2}, C_{r\theta} = \frac{1}{2}(C - C_{12}) \\ D &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \left[\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2} \left\{ 3 \left(\sum_{i=1}^k h_i - \eta_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-1} h_i - \eta_1 \right) + h_k^2 \right\} \right] \\ D_{12} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\nu_k E_k h_k}{1-\nu_k^2} \left\{ 3 \left(\sum_{i=1}^k h_i - \eta_1 \right) \left(\sum_{i=1}^{k-1} h_i - \eta_1 \right) + h_k^2 \right\} \right] \\ D_{r\theta} &= \frac{1}{2}(D - D_{12}), \quad h = \sum_{k=1}^N h_k, \quad \rho h = \sum_{k=1}^N \rho_k h_k \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 η_1 は上層の板の上面から基準面までの距離で

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^N \left[\frac{\alpha_k h_k}{1-\nu_k^2} \left(\sum_{j=1}^k h_j - \frac{h_k}{2} \right) \right] / \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k h_k}{1-\nu_k^2} \dots \dots \dots (2)$$

と与えられる。

まず、座標 r 、たわみ w および時間 t と各諸量を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{r}, \bar{c}_1, \bar{c}_2) &= (r, c_1, c_2) / R, \quad (\bar{w}_1, \bar{w}_4, \bar{w}_6) = (w_1, w_4, w_6) / h \\ (\bar{z}_1, \bar{z}_2) &= (z_1, z_2) R^2 / D, \quad \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \\ (\bar{q}_1, \bar{q}_2) &= (q_1, q_2) R^4 / D h, \quad \bar{h}_k = h_k / h \\ \bar{\rho}_k &= \rho_k / \rho, \quad \alpha_k = \frac{E_k}{E_1} \quad (k=1 \sim N) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

のように無次元化すると、領域⑥の鉛直方向の運動方程式は非線形項を無視して

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_6}{\partial \tau^2} + \bar{\nabla}^4 \bar{w}_6 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

と表される。

ここで

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots \dots \dots (5)$$

次に、剥離部分は円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし⁽¹⁾、上下の板のヒンジには、半径 c_1 の剥離端では Z_1 、半径 c_2 の剥離端では Z_2 の大きさの半径方向内力が作用する。また、振動中上下の板が接すると、剥離界面に相互接触力 q_1, q_2 が作用すると仮定すると、その自由体線図は図2となる。この図より、領域①、②、③の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_{11} \bar{\nabla}^4 \bar{w}_1 + \left\{ (1-\beta) \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \right\} \bar{\nabla}^2 \bar{w}_1 + \bar{q}_1 &= 0 \\ \bar{\rho}_2 \bar{h}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D}_{22} \bar{\nabla}^4 \bar{w}_2 + \left(\beta \bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 \right) \bar{\nabla}^2 \bar{w}_2 + \bar{q}_2 - \bar{q}_1 &= 0 \\ \bar{\rho}_3 \bar{h}_3 \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \bar{D}_{33} \bar{\nabla}^4 \bar{w}_3 - \bar{Z}_2 \bar{\nabla}^2 \bar{w}_3 - \bar{q}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

となる。 $\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = \bar{w}_3$ と仮定し、3つの式を加え合せると

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_{S1} \bar{\nabla}^4 \bar{w}_1 = 0, \quad \bar{D}_{S1} = (\bar{D}_{11} + \bar{D}_{22} + \bar{D}_{33}) / \bar{D} \dots (7)$$

同様に領域④、⑤において $\bar{w}_4 = \bar{w}_5$ とすると運動方程式は

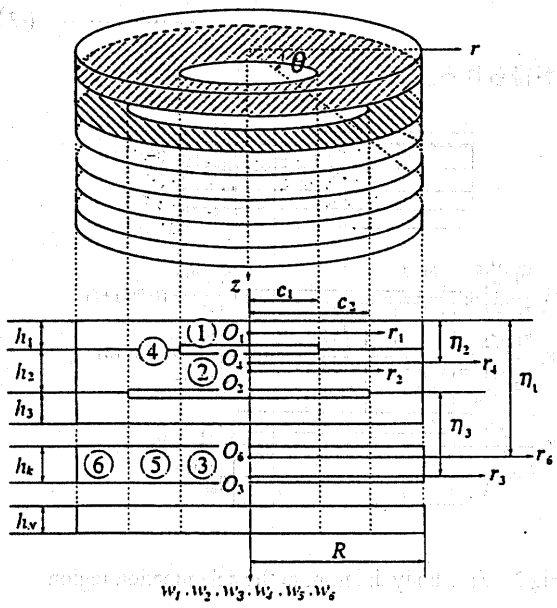


Fig.1 Geometry of a circular laminated plate containing two disk-shaped delaminations

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_4}{\partial \tau^2} + \bar{D}_{S2} \nabla^4 \bar{w}_4 = 0, \quad \bar{D}_{S2} = (D_{\text{④}} + D_{\text{⑤}}) / D \quad \dots\dots (8)$$

ここで、 D_i ($i = \text{④} \sim \text{⑤}$) は各領域の曲げ剛性である。

2.2 解法 円板は調和振動すると仮定し、鉛直方向のたわみ $\bar{w}_1, \bar{w}_4, \bar{w}_6$ および面内力 \bar{Z}_1, \bar{Z}_2 を節直径数 n を用いて

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_i(\xi, \theta, \tau) &= X_i(\xi) \cos(n\theta + \varphi) \sin(p\tau + \phi), \quad (i=1,4,6) \\ [\bar{Z}_1(\theta, \tau), \bar{Z}_2(\theta, \tau)] &= [\bar{Z}_{10}, \bar{Z}_{20}] \cos(n\theta + \varphi) \sin(p\tau + \phi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (9)$$

とおくと、正規関数 X_1, X_4, X_6 は

$$X_i(\xi) = A_{n1} J_n(\lambda \xi) + A_{n2} Y_n(\lambda \xi) + A_{n3} I_n(\lambda \xi) + A_{n4} K_n(\lambda \xi), \quad (i=1,4,6) \quad \dots\dots (10)$$

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 / \sqrt{\bar{D}_{S1}}, \quad \lambda_4^2 = \lambda^2 / \sqrt{\bar{D}_{S2}}, \quad \lambda_6^2 = \lambda^2 = \bar{p} \quad \dots (11)$$

と得られる。また、面内力 $\bar{Z}_{10}, \bar{Z}_{20}$ は剥離端間において、上下の円板で互いに接している剥離面の半径方向の伸びは等しいという条件より求められる⁽¹⁾。

次に、境界条件

$$\left. \begin{aligned} \xi=0 \text{ で } [X_1]_{\xi=0} = \text{有限より} \quad A_{n2} = A_{n4} = 0 \\ \xi=1 \text{ で } [X_6]_{\xi=1} = 0, \quad \left[\frac{dX_6}{d\xi} \right]_{\xi=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (12)$$

および剥離端 $\xi = \bar{c}_1$ と $\xi = \bar{c}_2$ における連続条件を X_1, X_4, X_6 に適用すると

$$\left. \begin{aligned} [H] \{A\} &= \{0\} \\ \{A\} &= \{A_{n1} \ A_{n13} \ A_{n41} \ A_{n42} \ A_{n43} \ A_{n44} \\ &\quad A_{n61} \ A_{n62} \ A_{n63} \ A_{n64}\}^T \\ [H] &: 10 \text{ 行 } 10 \text{ 列の正方マトリックス} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (13)$$

の関係が得られる。

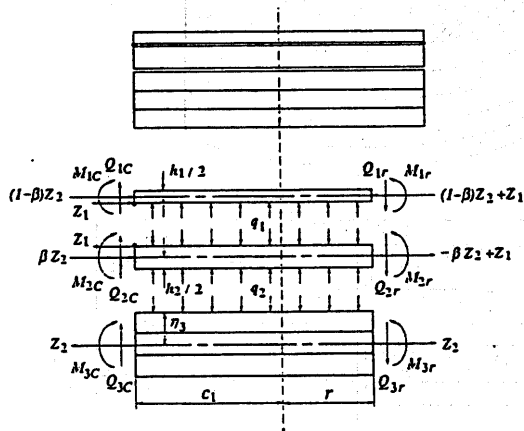


Fig.2 Free body diagram in the delamination region

これより

$$|H| = 0 \quad \dots\dots (14)$$

の振動数方程式が得られる。

4. 実験

4.1 試験片と実験要領 一辺が200mmの正方形のアルミニウム、タフピッチ銅、ステンレスばね鋼を未接着部分へ浸透することを十分考慮して、高性能エポキシ系強力接着剤で接着し、三層の積層円板の厚さが $h = 1\text{mm}$ となるように製作した。実験の手順は、まず定盤の上に設置した固定枠台に試験片を挟んだ試験片取付枠を水平に設置する。次に発振器から正弦波をパワーアンプで増幅してスピーカーに入力し、試験片を音響加振する。このとき、振動変位をレーザー変位計で測定し、測定された波形をパワーアンプの出力とともに、シンクロスコープに取り込み、リサージュ図形を描かせて共振点を検出し、固有振動数を測定した。

4.2 実験結果と考察 図3は実験で測定された固有振動数を理論値と比較したものである。実験値と理論値はほぼ一致し、実験で得られた固有振動数の値は、剥離が大きくなるにつれて理論曲線とほぼ同じ傾向で減少している。

5. まとめ

積層円板が板中心部に円形の二重層間剥離を有する場合の自由振動を理論解析し、その結果が測定した固有振動数とよく一致することを確認した。よって、今回の解析モデルは、積層円板の自由振動特性に及ぼす剥離の影響を調査する際には、簡単でしかも有効な方法といえる。

文献

- (1) 有富正男・平山将行・足立賢・戸谷真之, 機論, 67-662, C(2001), 3108-3115

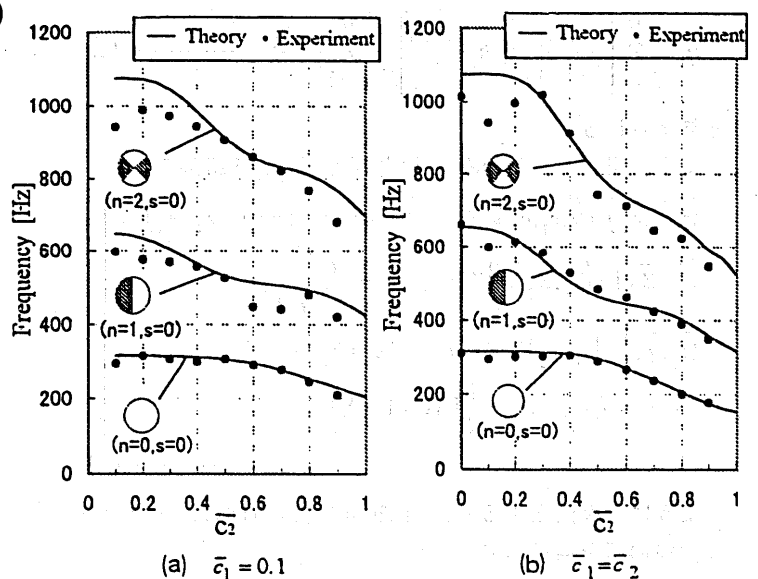


Fig.3 Comparison between experimental and theoretical frequencies