

積層円板中の円形はく離の集中力による進展*

戸谷 眞之*¹, Lalak INDIYONO*²
有富 正男*¹, 小田 美紀男*¹

Growth of a Disc-Shaped Interface Crack in a Laminated Plate Subject to a Normal Concentrated Force

Masayuki TOYA*³, Lalak INDIYONO,
Masao ARITOMI and Mikio ODA^{*3} Kagoshima University, Dept. of Mechanical Engineering, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima 890-0065, Japan

Symmetrical bending of a circular laminated plate containing a disc shaped delamination is analyzed on the basis of the theory of a small deflection of plates. The plate is assumed to be simply supported at the edge and is bent by a point normal force applied at the center. Radial inplane forces induced by bending in the parts of the plate above and below the delamination are determined by regarding the cracked part as two lapped discs hinged at both edges. The compliance of the delaminated plate and the energy release rate are then derived. It is shown that, when the critical energy release rate concept of Griffith is adopted, the disc-shaped delamination grows under steady-state condition. This prediction makes a contrast with the case of delaminations in laminated beams, where delamination grows under catastrophic manner.

Key Words: Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Construction, Disc-Shaped Interface Crack, Energy Release Rate

1. 緒 言

積層はりや積層板においては、表面に垂直に加えられた低速度衝撃により、接着面(界面)のはく離が容易に生じることが知られている。このような初期はく離がいかなる負荷のもとで進展するかは、構造物に積層材料を使用する際の強度特性、信頼性にかかわる重要な問題である。このことを反映して、積層材料のはく離は、多くの研究者の関心と呼んでいる⁽¹⁾⁽²⁾。

Maikuma ら⁽³⁾ は同種材を貼り合わせて作られた積層はりの中央に位置するはく離の三点曲げによる進展を研究した。現著者らは彼らの研究を拡張し、異種材を張り合わせて作られた積層はりの内部はく離の三点および四点曲げによる進展条件の解析を行った^{(4)~(6)}。負荷点のたわみを荷重およびはく離長さの関数として表す簡単な公式を得、ついではく離端のエネルギー解放率を導いた。これらの結果は有限要素法による数値解とよく一致することが確かめられた。著者らはさらにこのような内部はく離が、曲げによって

局所座屈を起すことを見出し、座屈の臨界荷重の理論解析、実験を行った⁽⁷⁾。Hutchinson および Lu⁽⁸⁾ は積層はりの内部はく離が、温度こう配のもとに置かれるときのエネルギー解放率を導いている。

以上の研究はいずれもはり中のはく離進展を扱ったものである。はりと同様に実用上重要な板中のはく離の解析はまだ十分ではない。Bottega および Maewal⁽⁹⁾ は、中心に円形はく離を有する同種材を貼り合わせた円板が、周辺に一樣に加えられた圧縮力により、はく離部分が局所的に座屈を起す問題を解析した。彼らの解析の一軸圧縮の場合への拡張は Madenci および Westmann⁽¹⁰⁾ によりなされた。Suemasu および Majima⁽¹¹⁾⁽¹²⁾ は、等間隔に並んだ複数個の円形はく離を有する同種材を貼り合わせた円板が、板に垂直に加えられた集中力を受ける問題を解析した。

これに対し、本論文では異種材積層円板の円形界面はく離の集中力による進展を解析する(図1参照)。以下、微小たわみの板曲げ理論により、コンプライアンスおよびエネルギー解放率の式を導き、著者らが以前行ったはりに対する結果⁽⁴⁾と比較検討する。

* 原稿受付 1999年1月18日。

^{*1} 正員、鹿児島大学工学部 (〒890 0065 鹿児島市郡元1-21-40)。^{*2} 鹿児島大学大学院。

E-mail: toyamasa@mech.kagoshima-u.ac.jp

2. 板の微小たわみ理論に基づく
はく離解析

2・1 コンプライアンスの導出 図1に示すような中央部に円形はく離(界面き裂)を有する, 2枚の異種材の円板を接着して作られた積層円板を考える. 等方弾性体を仮定し, ヤング率, ポアソン比を上上の板については, それぞれ E_1, ν_1 , 下の板については E_2, ν_2 とする. 板厚は上下の板に対しそれぞれ h_1, h_2 とする. また, 円板の半径を a , 円形はく離の半径を b とする. 境界条件は全周単純支持とし, 円板の中心に垂直に加えられた集中力 P による曲げを考える. 変形は軸対称であり, 円板のたわみは中心からの距離 r のみの関数となる. 負荷点におけるたわみ δ を求めよう.

前報の積層はりの解析^{(4)~(6)}と同様に, 図1の円板を $r=b$ で仮想的に分離し, 図2に示す円環状の接着部分と図3(a)に示す円周でヒンジ止めされた重ね板の部分に分ける.

まず, 図2の円環部分のたわみ曲線 $w_A(r)$ を考える. 積層板の厳密な曲げ理論においては, 位置の関数となる面内力を考慮に入れる必要があるが, 取扱いは極めて面倒になる. しかし, 第一近似として曲げによる半径方向の垂直応力 σ_r が零となる中立面の存在を

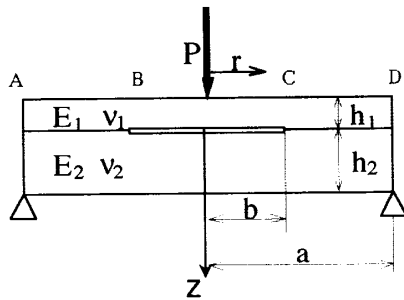


Fig. 1 Bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped crack by a concentrated force

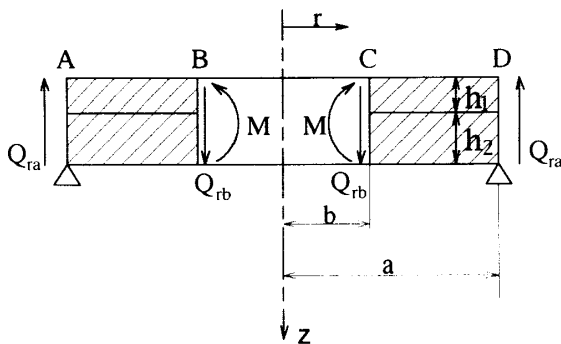


Fig. 2 Free-body diagram of the bonded part

仮定とすると, 積層板の曲げの基礎方程式は等方均質な板の微小たわみの方程式と定数を除いては全く同じになる(付録B参照). そこで本論文では取扱いの簡単化のために, この仮定を基礎に解析を進める. 式の導出過程は付録Aにゆずるが, 曲げモーメントが円板の縁に一樣に付加された場合, 上の板の上面からはかった中立面の位置は

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E_1 h_1^2}{1-\nu_1} + \frac{E_2 (h^2 - h_1^2)}{1-\nu_2} \right\} / \left(\frac{E_1 h_1}{1-\nu_1} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2} \right) \dots\dots\dots (1)$$

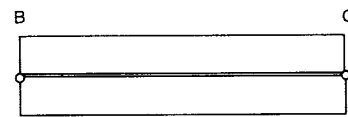
$$h = h_1 + h_2$$

で与えられる. 実際には, 我々が扱う問題は集中力による曲げであるから, 式(1)は正確なものではない. しかし, 特別な場合として, 均質な板 ($E_1 = E_2, \nu_1 = \nu_2$) のときには $\bar{z} = h/2$ となる. またどちらか一方の板の伸び剛性が他方のそれより十分大きいとき, 例えば $E_1 h_1 \gg E_2 h_2$ のときには $\bar{z} \approx h_1/2$, また $E_2 h_2 \gg E_1 h_1$ のときには $\bar{z} \approx h_1 + h_2/2$ となる. このように式(1)で与えられる \bar{z} は, 少なくともこれら特別な場合については良好な近似であることが期待される. 式(1)の適用限界についてのよりくわしい議論は, 3章で行う. また, 式(1)を基礎に置いた積層板のたわみについての基礎方程式は付録Bにまとめてある.

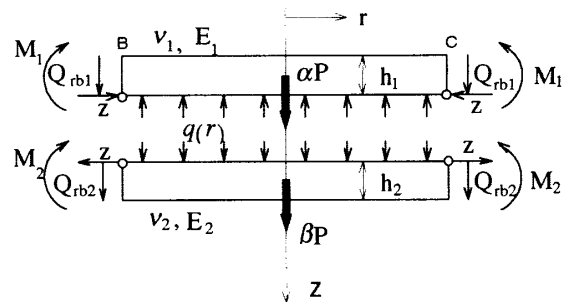
図2に示すように $r=b$ の円周上には矢印の向きに今のところ未知の単位長さ当たりのモーメント M が作用している. たわみの一般解は付録B, 式(62)より

$$w_A(r) = C_{1A} + C_{2A} \ln \frac{r}{a} + C_{3A} r^2 + C_{4A} r^2 \ln r \dots\dots\dots (2)$$

$w_A(a) = 0$ であるから



(a) Modelling by hinged lapped disks



(b) Free-body diagram

Fig. 3 Model of the delaminated part

$$C_{1A} + C_{3A}a^2 + C_{4A}a^2 \ln a = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

円環の外周にはモーメントを作用していない。すなわち $M_r(a) = 0$ であるから式(2)および付録B, 式(53)より

$$\begin{aligned} & \frac{C_{2A}}{a^2}(D_I - D_{II}) - 2C_{3A}(D_I + D_{II}) \\ & - 2\{(2 \ln a + 3)D_I + (2 \ln a + 1)D_{II}\}C_{4A} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

上式で D_I, D_{II} は付録B, 式(54)~(57)で与えられる積層板の定数であり、均質板に対しては $D_I = Eh^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$, $D_{II} = \nu D_I$ となる。一方 $M_r(b) = M$ としているから

$$\begin{aligned} & \frac{C_{2A}}{b^2}(D_I - D_{II}) - 2C_{3A}(D_I + D_{II}) \\ & - 2\{(2 \ln b + 3)D_I + (2 \ln b + 1)D_{II}\}C_{4A} = M \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

板の単位長さ当たりのせん断力を Q_r とする。任意の半径 r の円板を切り出して垂直方向の力の釣合いを考えると

$$Q(r) = -\frac{P}{2\pi r} \quad \dots\dots\dots (6)$$

したがって式(6)と式(59)より

$$C_{4A} = P / (8\pi D_I) \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(3), (5)から C_{3A} を消去して(7)を用いると C_{2A} が得られ、さらに C_{2A}, C_{4A} を式(3), (4)に代入して解くことにより、 $C_{1A} \sim C_{3A}$ が今のところ未知のモーメント M により以下のように表される。

$$C_{1A} = c_1 + a^2 c_2 - a^2 c_3 M \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$C_{2A} = -b^2 c_4 + b^2 c_5 M \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$C_{3A} = c_3 M - c_2 - c_6 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$c_1 = \frac{Pa^2(3D_I + D_{II})}{16\pi D_I D'}, \quad c_2 = \frac{Pb^2 \ln(a/b)}{8\pi D_I (a^2 - b^2)}$$

$$c_3 = \frac{b^2}{2D'(a^2 - b^2)}, \quad c_4 = \frac{Pa^2 D' \ln(a/b)}{4\pi D_I (D_I - D_{II})(a^2 - b^2)}$$

$$c_5 = \frac{a^2}{(D_I - D_{II})(a^2 - b^2)}, \quad c_6 = \frac{P \ln a}{8\pi D_I} + a^2 c_1$$

$$D' = D_I + D_{II} \quad \dots\dots\dots (11)$$

次に図3に示す円周縁でヒンジ止めされた重ね板の部分のたわみを解析する。ヒンジの作用は上の円板に対しては円板の下縁部に中心に向かって水平方向に作用する圧縮力(単位縁長さ当たり Z とする)、下の円板に対しては円板上縁部に作用する引張力($-Z$)に置き換えることができる。上の板に対しては集中力の一部分 αP が、下の板に対しては βP が作用する。ここで $\alpha + \beta = 1$ で α, β は今のところ未知である。上下の円板は互いに接していて未知の分布荷重 $q(r)$ を互い

に及ぼしているものとする。自由体線図を図3(b)に示す。上下の円板の縁に作用するモーメントを M_1, M_2 とする。これらも今のところ未知であるが、以下の条件が成り立つ。

$$M = M_1 + M_2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

また、単位長さ当たりのせん断力 $Q_{rb1}(r), Q_{rb2}(r)$ が上下それぞれの板の円周上に作用している。上下の板のたわみを両者等しく $w_B(r)$ とすると、任意の半径 r で切り出した円板の垂直方向の力の釣合いを考えることにより、上の円板に対し⁽¹³⁾

$$Q_{rb1} = -Z \frac{dw_B}{dr} - \frac{1}{r} \int_0^r r q(r) dr - \frac{\alpha P}{2\pi r} \quad \dots (13)$$

したがって付録B, 式(59)より

$$\begin{aligned} & -D_1 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_B}{dr} \right) = -Z \frac{dw_B}{dr} \\ & - \frac{1}{r} \int_0^r r q(r) dr - \frac{\alpha P}{2\pi r} \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

同様に下の円板に対し

$$\begin{aligned} & -D_2 \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_B}{dr} \right) = Z \frac{dw_B}{dr} \\ & + \frac{1}{r} \int_0^r r q(r) dr - \frac{\beta P}{2\pi r} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ここで D_1, D_2 はそれぞれ上下の板の曲げ剛性で

$$D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1 - \nu_1^2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h_2^3}{12(1 - \nu_2^2)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(14)と式(15)を足し合わせると

$$(D_1 + D_2) \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w_B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_B}{dr} \right) = \frac{P}{2\pi r} \quad \dots\dots (17)$$

積分して

$$w_B(r) = \frac{Pr^2(\ln r - 1)}{8\pi(D_1 + D_2)} + \frac{1}{4} C_{1B} r^2 + C_{2B} \ln r + C_{3B} \quad \dots\dots\dots (18)$$

を得る。ここで、 C_{1B}, C_{2B}, C_{3B} は未知定数である。 $w_B(0) =$ 有限であるから

$$C_{2B} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

また、

$$M_{r1}(b) = M_1 - \frac{h_1}{2} Z, \quad M_{r2}(b) = M_2 - \frac{h_2}{2} Z$$

であるから

$$\begin{aligned} & -D_1 \left[\frac{1}{2} C_{1B} + \frac{P(2 \ln b + 1)}{8\pi(D_1 + D_2)} + \frac{\nu_1}{b} \left\{ \frac{1}{2} C_{1B} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Pb(2 \ln b - 1)}{8\pi(D_1 + D_2)} \right\} \right] \\ & = M_1 - \frac{h_1}{2} Z \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -D_2 \left[\frac{1}{2} C_{1B} + \frac{P(2 \ln b + 1)}{8\pi(D_1 + D_2)} + \frac{\nu_2}{b} \left\{ \frac{1}{2} C_{1B} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Pb(2 \ln b - 1)}{8\pi(D_1 + D_2)} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$= M_2 - \frac{h_2}{2} Z \dots\dots\dots (21)$$

式(20)と式(21)を足し合わせて

$$C_{1B} = \frac{1}{D''} \left\{ hZ - 2M - \frac{Pb(2D'' \ln b + \bar{D})}{4\pi(D_1 + D_2)} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここで

$$D'' = D_1(1 + \nu_1) + D_2(1 + \nu_2) \dots\dots\dots (23)$$

$$\bar{D} = D_1(1 - \nu_1) + D_2(1 - \nu_2)$$

なお式(23)より

$$\bar{D} + D'' = 2(D_1 + D_2) \dots\dots\dots (24)$$

なる関係式が成り立つことに注意する。

軸力 Z は上下の円板の互いに接している面の半径方向の伸びは等しいという条件から求められる。すなわち

$$\int_0^b \varepsilon_1 dr - \frac{(1 - \nu_1)Zb}{E_1 h_1} = \int_0^b \varepsilon_2 dr + \frac{(1 - \nu_2)Zb}{E_2 h_2} \dots\dots\dots (25)$$

ここで $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は上下の円板の曲げによるひずみで

$$\varepsilon_j = \frac{1}{2} (-1)^j h_j w''_B = \frac{1}{2} (-1)^j h_j \left\{ \frac{C_{1B}}{2} + \frac{P(2 \ln r + 1)}{8\pi(D_1 + D_2)} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

($j=1, 2$)

また、式(25)の両辺の第2項は、それぞれ軸力による円板半径の縮みおよび伸び量である。式(25)、(26)より

$$Z = \frac{hD_0}{4} \left\{ \frac{P(1 - 2 \ln b)}{4\pi(D_1 + D_2)} - C_{1B} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

ここで

$$D_0 = \left(\frac{1 - \nu_1}{E_1 h_1} + \frac{1 - \nu_2}{E_2 h_2} \right)^{-1} \dots\dots\dots (28)$$

次にはく離部分と接着部分の境界での変位および傾きの連続条件、 $w_A(b) = w_B(b)$ および $w'_A(b) = w'_B(b)$

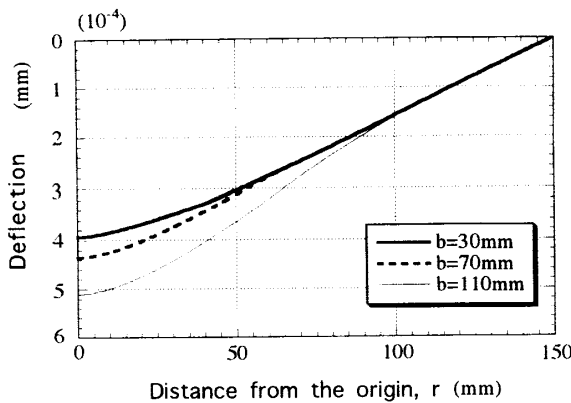


Fig. 4 Variation of deflection curve with the crack radius (Acryl-Aluminum, $P=1.0$ N, $a=150$ mm, $h_1=10$ mm, $h_2=5$ mm)

より

$$C_{3B} = C_{1A} + C_{2A} \ln \frac{b}{a} + C_{3A} b^2 + C_{4A} b^2 \ln b - \frac{b^2}{4} C_{1B} - \frac{Pb^2(\ln b - 1)}{8\pi(D_1 + D_2)} \dots\dots\dots (29)$$

$$C_{1B} = \frac{P(1 - 2 \ln b)}{4\pi(D_1 + D_2)} + \frac{2C_{2A}}{b^2} + 4C_{3A} + 2(1 + 2 \ln b)C_{4A} \dots\dots\dots (30)$$

式(22)、(27)、(29)、(30)を四つの未知量 C_{1B}, C_{3B}, M, Z について解き、さらに付録B、式(63)、(64)および関係式(24)を用いると、

$$M = \frac{c_0 D' - 2(D_1 + D_2)c_8}{1 + (2c_3 + c_5)D'} = \frac{PD' \ln(a/b)}{4\pi D_1} \dots (31)$$

$$Z = \frac{hD_0}{2} \{ c_0 - (2c_3 + c_5)M \} = (hD_0 P / 8\pi) \left(\frac{\ln(a/b)}{D_1} + \frac{1}{D'} \right) \dots\dots\dots (32)$$

$$C_{1B} = 2 \left\{ c_8(1 - 2 \ln b) - 2c_2 - c_4 - 2c_7 \ln \frac{a}{b} - c_9 \right\} = \frac{P(1 - 2 \ln b)}{4\pi(D_1 + D_2)} - \frac{P}{2\pi D_1} \ln \frac{a}{b} - \frac{P}{2\pi D'} \dots (33)$$

$$C_{3B} = c_1 + a^2 c_2 - \frac{b^2}{2} \left\{ c_4 \left(2 \ln \frac{b}{a} - 1 \right) + c_7 - c_8 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ b^2 c_5 \left(2 \ln \frac{b}{a} - 1 \right) - 2a^2 c_3 \right\} M = \frac{Pa^2(3D_1 + D_{II})}{16\pi D_1 D'} - \frac{b^2 P}{16\pi} \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_1 + D_2} \right) \dots\dots\dots (34)$$

ここで

$$c_7 = \frac{P}{8\pi D_1}, \quad c_8 = \frac{P}{8\pi(D_1 + D_2)},$$

$$c_9 = \frac{P}{4\pi(D_1 + D_{II})}$$

$$c_0 = 2c_2 + c_4 + 2c_7 \ln \frac{a}{b} + c_9 \dots\dots\dots (35)$$

式(31)~(35)より、はく離部分のたわみ $w_B(r)$ [式(18)] が決定され、また式(31)を式(8)~(10)に代入してたわみ $w_A(r)$ は以下のように求められる。

$$w_A(r) = \frac{P(3D_1 + D_{II})}{16\pi D_1 D'} (a^2 - r^2) + \frac{P}{8\pi D_1} r^2 \ln \frac{r}{a} \dots\dots\dots (36)$$

円板の中心(着力点)におけるたわみ δ は、式(18)から $\delta = C_{3B}$ で与えられる。したがって円板のコンプライアンス $\Phi (= \delta / P)$ は以下ようになる。

$$\Phi = \frac{a^2(3D_1 + D_{II})}{16\pi D_1 D'} - \frac{b^2}{16\pi} \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_1 + D_2} \right) \dots\dots\dots (37)$$

図4にはく離進展によるたわみ曲線の変化の例を示す。材料としては、上の板には厚さ1mmの亚克力、下の板には厚さ5mmのアルミニウム(ヤング率およびポアソン比がそれぞれ、 $E_1=2.94$ GPa, $E_2=$

73.5 GPa, $\nu_1=0.345$, $\nu_2=0.35$)を仮定した。円板の外径は $a=0.15$ m で、中央に 1 N の力を負荷している。はく離の進行につれ、はく離部分のたわみは増大するが、接着部分のたわみは変化していないことがわかる。

2・2 はく離の進展条件 はく離の進展は界面き裂の進展にはかならないから、エネルギー解放率が最も重要なパラメータとなる。円板き裂に対しては、エネルギー解放率はコンプライアンスのき裂半径に対する変化率に比例し、外部荷重一定の場合に対し以下のように与えられる。

$$G = \frac{P^2}{4\pi b} \frac{d\Phi}{db} \dots\dots\dots (38)$$

なお、着力点変位が一定の場合に対しては、上式の P を δ/Φ で置き換えた式で与えられる。式(37), (38)より

$$G = \frac{P^2}{32\pi} \left(\frac{1}{D_1+D_2} - \frac{1}{D_1} \right) \dots\dots\dots (39)$$

付録 B, 式(54), (56), (57)より $D_1 \geq D_1+D_2$ であり、当然のことながら G は常に零または正となる。また、はく離半径にはよらず、荷重の大きさのみに依存することがわかる。なお、Suemasu および Majima⁽¹¹⁾ は周辺固定された同種材円板中の円形はく離のエネルギー解放率を導いた。彼らの結果は式(39)と係数を除いて一致している。

著者らは以前対称三点曲げを受ける積層はりの内部はく離に対するエネルギー解放率を導いた⁽⁴⁾。その結果は以下の式で与えられる。

$$G_b = \frac{P^2 l^2}{128 W} \left(\frac{1}{D_b} - \frac{1}{D'_b} \right) \dots\dots\dots (40)$$

ここで、 l ははく離長さではく離は支持点間の中央に位置しているものとする。 P は荷重、 W ははりの幅、

また平面ひずみ条件に対して

$$D_b = W(D_1+D_2) \dots\dots\dots (41)$$

$$D'_b = D_b + (\bar{y}_b - h_1/2)^2 E_1 W h_1 / (1-\nu_1^2) + \{(h+h_1)/2 - \bar{y}_b\}^2 E_2 W h_2 / (1-\nu_2^2) \dots\dots (42)$$

式(42)において \bar{y}_b は、はり上面からはかった中立軸までの距離で、式(1)で $\nu_1=\nu_2=0$ とおいて得られる \bar{y} に等しい。式(39)と式(40)を比較すると、はりのはく離と、板の円板はく離の進展挙動に関しては質的な違いがあることがわかる。界面の破壊抵抗を G_c (一定値)とすると、はく離進展の臨界荷重は、条件 $G=G_c$ より求められる。臨界荷重は板中の円形はく離に対しては、はく離の半径によらず一定値となり、はく離進展はちょうど安定と不安定の境界にある。一方、式(40)よりはりのはく離に対しては、臨界荷重ははく離長さに反比例し、はく離進展は不安定である。

3. 議 論

3章では、はく離部分の接触力分布 $q(r)$ が、解析において仮定したように常に $q(r) \geq 0$ を満足しているかを検証する。式(14)の両辺に r を掛けて微分することにより $q(r)$ は以下のように求められる。

$$q(r) = -Z(w''_b + w'_b/r) = \frac{ZP}{2\pi} \left(\frac{\ln(b/r)}{D_1+D_2} + \frac{\ln(a/b)}{D_1} + \frac{1}{D'} - \frac{1}{2(D_1+D_2)} \right) \dots\dots\dots (43)$$

したがって $r \geq 0$ では $q(r)$ は常に正となり初期の仮定を満足するが、 $r=b$ 付近では板の性質、厚さ比等により必ずしも $q(r) > 0$ とはならない。例えば特別な場合として $a=b$ とすると、 $r=b$ では

$$q(b) = \frac{ZP\{D_1(1-\nu_1)+D_2(1-\nu_2)-h^2 D_0/4\}}{4\pi D'(D_1+D_2)} \dots\dots\dots (44)$$

さらに同一材料の組合せを仮定し、ポアソン比を 0.3 とおくと

$$q(b) = \frac{9Eh^2 ZP\{(\eta-1/2)^2-5/36\}}{64\pi D'(D_1+D_2)}, \quad \eta = h_1/h \dots\dots\dots (45)$$

$q(b)$ は $1/2(1-\sqrt{5}/3) < \eta < 1/2(1+\sqrt{5}/3)$ ($0.127 < \eta < 0.873$) において負となることがわかる。負の接触応力は現実にはあり得なくこの η の範囲では上下の板は $r \geq b$ において非接触であることが予想される。この場合、上下の板のたわみは等しい、とした2章での解析の前提条件は成り立たない。例として、図5に上下の板に半径 $a=0.15$ m のアクリル円板を仮定し、1 N の力を加えたときの、接触力分布 $q(r)$ を示す。 $h_1=h_2=5$ mm, $b=0.1$ m の場合に対し、負の $q(r)$ がは

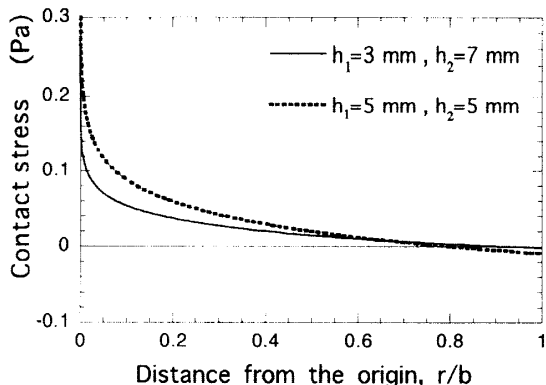


Fig. 5 Contact stress distribution along the radial direction of the crack (Acryl-Acryl, $P=1$ N, $a=0.15$ m, $b=0.1$ m)

く離端近傍に生じることがわかる。

同様な矛盾は積層はり中の内部はく離の解析においても生じた⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかし理論解は界面の非接触領域を考慮したくわしい有限要素法による G の数値解と $q(r)$ の符号の矛盾には関係なくよく一致した。このことから本論文で得られた G の式も $q(r)$ の符号に関して矛盾を有するものの、これによつてはほとんど影響されず、妥当な近似を与えるものと考えられる。

最後に、解の導出に際し基本的な仮定であった中立面の位置 \bar{z} [式(1)] について、その妥当性をより詳しく検討しよう。一般の軸対称変形においては、付録 A における曲率半径は $\rho_r = -d^2 w_A / dr^2$, $\rho_t = -r^{-1}(dw_A/dr)$ で与えられる。したがって式(36)より

$$\begin{aligned} 1/\rho_r &= -\frac{PD_{II}}{4\pi D_I D'} + \frac{P}{4\pi D_I} \ln \frac{a}{r} \dots\dots\dots (46) \\ 1/\rho_t &= \frac{P}{4\pi D'} + \frac{P}{4\pi D_I} \ln \frac{a}{r} \end{aligned}$$

上式より、付録 A で仮定した $\rho_r = \rho_t$ は実際には成り立たなく、それゆえ付録 A、式(50)も一般には成立しないことがわかる。式(50)の左辺を式(46)を用いて計算すると、 $r =$ 一定の断面に作用する単位縁長当たりの合力は、 r には無関係な以下の一定値で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{A}{\rho_r} + \frac{B}{\rho_t} &= \frac{PB}{4\pi D_I} \\ &= \frac{(\nu_2 - \nu_1)PE_1 E_2 h h_1 h_2}{8\pi D_I (1 - \nu_1^2)(1 - \nu_2^2)} \\ & \quad / \{E_1 h_1 / (1 - \nu_1) + E_2 h_2 / (1 - \nu_2)\} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

上式より $\nu_1 = \nu_2$ であれば、合力は零となり、この場合には式(1)は精度が良いものと考えられる。なお、このとき \bar{z} は積層はりの中立軸の位置に一致する。また、 $E_2 h_2 \gg E_1 h_1$ または $E_1 h_1 \gg E_2 h_2$ の特別な場合を考えると、例えば前者の条件が成立する場合は、式(47)の右辺は

$$\frac{3(1 - \nu_2)(\nu_2 - \nu_1)Ph}{2\pi(1 - \nu_1^2)h_2^2} \times 0 \left(\frac{E_1 h_1}{E_2 h_2} \right) \dots\dots\dots (48)$$

のオーダーとなり、 $h_2 \ll h$ の場合を除いては、小さな量になることが示され、これらの場合にも 2 章で論じたように式(1)は良い近似になっていることが期待される。

4. 結 言

微小たわみの板曲げ理論を積層板に拡張して、これを基礎に円形はく離の中心に加えられた集中力によるはく離進展条件の解析を行った。面内力を無視する現取扱いは、上下の積層板の組合せに対し、伸び剛性比、

$E_2 h_2 / E_1 h_1$ が零に近いまたは、非常に大きい場合、もしくは両材料のポアソン比が一致する場合のみ精度が良いものと期待される。このような適用限界はあるものの、エネルギー解放率についての簡便な公式が得られた。グリフィスの限界エネルギー解放率の条件を適用すると、円形はく離の進展は安定と不安定の境界にあること、すなわち一定荷重のもとで円形はく離は定常進展することが予想される。より厳密な取扱い、および得られた式についての実験による検証は将来の課題として残されている。

最後に、本研究は文部省科学研究費補助金 [基盤研究 C(2)09650110] の援助を受けて実施されたことを付記し、謝意を表す。また、計算および図の作製を手伝っていただいた前田義和技官、大学院生前田和孝君、竹添光広君、4 年生南英雄君 (現在鹿児島県警) に謝意を表す。

付 録 A

r 軸の曲りを表す曲率半径を ρ_r , $r =$ 一定の軸 (θ 軸)の曲りを表す曲率半径を ρ_t とする。中立面を $z = 0$ とすると、上下の各層内に生じる σ_r はそれぞれ以下のように表される。

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{E_1 z}{1 - \nu_1^2} \left(\frac{1}{\rho_r} + \nu_1 \frac{1}{\rho_t} \right) \dots\dots\dots (49) \\ \sigma_{r2} &= \frac{E_2 z}{1 - \nu_2^2} \left(\frac{1}{\rho_r} + \nu_2 \frac{1}{\rho_t} \right) \end{aligned}$$

応力成分の添字 1, 2 はそれぞれ上下の板に対応する。 $r =$ 一定の板断面の単位長さ当たりに作用する曲げ応力の総和が零となる条件は

$$\frac{A}{\rho_r} + \frac{B}{\rho_t} = 0 \dots\dots\dots (50)$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \int_{-\bar{z}}^{\bar{z} + h_1} z dz + \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \int_{-\bar{z} - h_1}^{h - \bar{z}} z dz \\ &= \frac{E_1}{2(1 - \nu_1^2)} \{ (h_1 - \bar{z})^2 - \bar{z}^2 \} + \frac{E_2}{2(1 - \nu_2^2)} \{ (h - \bar{z})^2 \\ & \quad - (h_1 - \bar{z})^2 \} \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

$$B = \frac{E_1 \nu_1}{1 - \nu_1^2} \int_{-\bar{z}}^{\bar{z} + h_1} z dz + \frac{E_2 \nu_2}{1 - \nu_2^2} \int_{-\bar{z} - h_1}^{h - \bar{z}} z dz \dots (52)$$

$$h = h_1 + h_2$$

\bar{z} は積層板の上面から中立軸までの距離である。さらに板のたわみ面は球面に近いものとして式(50)において $\rho_r = \rho_t$ とおくと $A = -B$ を得、これより本文の式(1)が得られる。

付 録 B

軸対称変形においては、曲率半径は $\rho_r = -d^2 w /$

dr^2 , $\rho_t = -r^{-1}(dw/dr)$ で与えられるから, r 軸の曲げを生じさせるモーメント M_r は, 式(49)より以下のように計算される.

$$M_r = -D_I \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{II}}{r} \frac{dw}{dr} \quad \dots\dots\dots (53)$$

ここで w は板のたわみであり z 軸方向を正とする. また

$$D_I = \frac{E_1 c}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 d}{1-\nu_2^2} \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$D_{II} = \frac{E_1 \nu_1 c}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 \nu_2 d}{1-\nu_2^2} \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$c = \frac{h_1^3}{12} + h_1 \left(\bar{z} - \frac{h_1}{2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (56)$$

$$d = \frac{h_2^3}{12} + h_2 \left(\frac{h+h_1}{2} - \bar{z} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (57)$$

上下の層が同一材料である場合, 式(53)は均質板の式に帰着する. すなわち

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots\dots\dots (58)$$

また, 軸対称変形においては r 軸に垂直な面に作用するせん断力は以下のように与えられる.

$$Q_r = -D_I \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad \dots\dots\dots (59)$$

等方弾性板に対しては上式は周知の式

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad \dots\dots\dots (60)$$

に帰着される.

均質な板に対する場合と同様にして板の z 方向の力に関する平衡, x 軸まわりおよび y 軸まわりの回転に関する平衡を考慮することにより以下の変位で表した微分方程式が得られる.

$$\nabla^2 \cdot \nabla^2 w = q_0(r, \theta) / D_I \quad \dots\dots\dots (61)$$

q_0 は板面上に作用する単位面積当たりの分布荷重である. 特に $q_0=0$ で軸対称の変形を考えると式(61)は

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (62)$$

となる. すなわち, 平衡微分方程式は均質板に対するものと同じであり, 本文式(2)の一般解を持つ.

なお, 式(54)~(57)より以下の関係式が成り立つ.

$$D' = D_I + D_{II} = D'' + h^2 D_0 / 4 \quad \dots\dots\dots (63)$$

ここで

$$D'' = (1+\nu_1)D_I + (1+\nu_2)D_2 \quad \dots\dots\dots (64)$$

D_0 は本文式(28)で定義されている. また D_I と D_2 はそれぞれ上下の板の曲げ剛性で, 式(16)で与えられている.

文 献

- (1) Hutchinson, J. W. and Suo, Z., Mixed Mode Cracking in Layered Materials, *Advan. Appl. Mech.*, **29** (1992), 63-191.
- (2) Toya, M., *JSME Int. J.*, Ser. 1, **33-4** (1990), 413-424.
- (3) Maikuma, H., Gillespie, Jr., J. W. and Whitney, J. M., *J. Comp. Mat.*, **23** (1989), 756-786.
- (4) 戸谷眞之・小野孝・宮脇正・桐岡健, 機論, **58-548**, A (1992), 599-606.
- (5) 戸谷眞之・井料健・桐岡健・有富正男, 機論, **60-578**, A (1994), 2266-2272.
- (6) Toya, M., Aritomi, M. and Chosa, A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **64** (1997), 375-381.
- (7) 戸谷眞之・深川和良・山川史慎・有富正男, 機論, **62-602**, A (1996), 2242-2249.
- (8) Hutchinson, J. W. and Lu, T. J., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **117** (1995), 386-390.
- (9) Bottega, W. J. and Maewal, A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **50** (1983), 184-189.
- (10) Madenci, E. and Westmann, A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **60** (1993), 895-902.
- (11) Suemasu, H. and Majima, O., *J. Comp. Mat.*, **30** (1996), 441-453.
- (12) Suemasu, H. and Majima, O., *J. Comp. Mat.*, **32** (1998), 123-140.
- (13) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability (second edition)*, (1961), 389, McGraw-Hill, Kogakusha, LTD.