

修正 DBCS クラックのエネルギー解放率*

戸 谷 眞 之**
Masayuki TOYA

Key Words: Fracture, Elastic-Plastic Crack, Energy, DBCS Model, Fracture Condition, Bi-Axial Tension

1. 緒 言

グリフィスのクラック進展のエネルギー論はよく知られており、破壊力学の基礎となっている。グリフィス理論は次のように述べるができる。すなわち「クラックの進展はポテンシャルエネルギー解放率 (P) が、表面エネルギー (2γ) に等しくなった時に起きる。」ここで、ポテンシャルエネルギー解放率とは、クラックの単位長さの進展の際に外部応力のなす仕事から、系の弾性エネルギーの増加分を引いた (クラック前縁の単位長さ当たりの) 量である。この量はまた、き裂進展力とも呼ばれ、クラックを進展させようとする。具体的には、クラックに対する弾性論の境界値問題を解いてその解から計算される。一方、表面エネルギーはクラックの進展を阻止する側にたつ量であって、連続体力学の取扱いは独立に得られる材料の特性エネルギー値である。

グリフィス理論を弾塑性クラックに拡張すると、き裂進展力は、ポテンシャルエネルギー解放率 (P) から塑性変形に費やされる分 (D) を差引いた量、 $P-D$ 、となる (以後この量をエネルギー解放率と呼ぶ)。一方、表面エネルギーの項は、ポイドの成長、合体、局所すべりなどのクラック表面の生成のための微視的な変形挙動を反映した量となる。

しかし、この正統的な弾塑性クラックへのアプローチは、理想塑性体に対しては、Rice⁽¹⁾ のパラドックスにより阻まれる。Rice は、この場合には、正確に $D=P$ となって、エネルギー平衡は連続体力学の範囲内で完結し、グリフィスの取扱いは不可能となることを示した。加工硬化のある場合についての $D=P$ なる証明はされてなく、この場合にはグリフィス理論の適用の可

能性はある。しかし、原理的に可能であったとしても実際問題としては、静止クラックが進展を開始した時の弾塑性問題の解析解は、モード III 形の場合に対してさえ確立されておらず、ましてエネルギー変化の計算は極めて困難であると考えられる。

このような状況においては、むしろ単純な弾塑性クラックモデルを採用し、それにエネルギー論を展開し基本的な知見を得るのが得策であろう。単純な弾塑性クラックモデルとしては DBCS モデル⁽²⁾⁽³⁾ が著名であるが、やはりエネルギー解放率は零である。Kfoury ら⁽⁴⁾ は、パラドックスを避ける方法として、クラックはある有限な幅を単位として進展するという考えを提案した。有限な長さのクラック進展に対しては、当然エネルギー解放量は有限な値になるので、エネルギー論的取扱いが可能になる。彼らはこの考え方を DBCS モデルに適用し、彼らの定義によるエネルギー解放率は有限要素法によるくわしい計算とよく合うことを見出した。

本論文では、Rice のパラドックスを避ける別のエネルギー平衡の考え方を取扱う。この考えは、クラックを非常に薄いポイドとみなすことに基礎を置いている。このような観点は実際の弾塑性クラックの状態と合致していることを強調したい。例えば、Bilby ら⁽⁵⁾ の限界き裂開口変位規準は、延性破壊においてクラックの幅が主要な役割を演じているという事実を反映している。

最初にエネルギー解放率についての一般式を検討する。次に、以前著者により提案された修正 DBCS クラックモデル⁽¹¹⁾ について説明し、このモデルにエネルギー論を適用する。クラックに平行な垂直応力は、破壊荷重に対して大きな影響を及ぼすということが結論される。

* 昭和 55 年 8 月 23 日 第 58 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 57 年 8 月 20 日。

** 正員、京都大学工学部 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

2. 弾塑性クラックのエネルギー解放率

後の応用のため、エネルギー変化について一般的に考察する。最初に図1に示されるような等方な弾性体中の二次元のポイドを考える。物体は無限遠で外部応力の下におかれていてポイドの表面では応力は零である。また応力とひずみは有限で、連続であるとする。さて、ポイドの表面の一部 ABC が外部応力一定のもとで A'B'C に移ったとしよう。この境界の変化は、弧 ABC に垂直に微小なベクトル $\delta h_i (i=1, 2)$ をたてることにより記述することができる。境界の変化 δh_i による物体のポテンシャルエネルギー変化（移動の間に外部応力のなした仕事から、弾性エネルギーの増加分を引いた量）を計算しよう。二つの異なった弾性体の境界が移動する際の最も一般的な取扱いは最初 Eshelby⁽⁶⁾ によってなされた。彼が述べているように、この方法は図1のような空孔に対しても適用できる。

図1の境界の移動 δh_i は物理的には例えば多数の原子空孔の流入によって起こるが、エネルギー変化を計算するには以下のように2段階の数学的操作を施し、各段階におけるエネルギーの増減を考える。最初に AB'C に沿って切れめを入れ、AB'CB に囲まれた部分を切離す。一方において、最初の応力状態を保つため、残された部分の新たにできた表面に沿って面力

$$X_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta h_i \frac{\delta h_j}{\delta h} + O(\delta h^2) \dots\dots\dots (1)$$

を分布させる。ここで、 σ_{ij} は最初の状態における応力、 δh はベクトル δh_i の大きさと和の規約を用いている。この段階でのエネルギー変化は切り出した部分の弾性エネルギー

$$\delta W = - \int_{\Delta A} w dA = - \int_{ABC} w \delta h dS \dots\dots\dots (2)$$

に等しい。ここで w は弾性エネルギー密度、 ΔA は AB'CB によって囲まれる面、 dA 、 dS はそれぞれ面積および線要素を表す。次の段階として、 X_i を徐々に零にまでゆるめる。最初の状態および最終状態での変位をそれぞれ u_i^i 、 u_i^f とすると、この第2段階でのエネルギー変化は

$$\frac{1}{2} \int_{ABC} X_i \left[u_i^f - \left(u_i^i + \frac{\partial u_i^i}{\partial x_j} \delta h_j \right) \right] dS \dots\dots\dots (3)$$

となる。[] の中は応力を緩和する際の変位を表す。ポテンシャルエネルギーの変化は式(2)と式(3)の和で与えられる。さて、式(3)において X_i は式(1)により δh のオーダーで、[] 内も δh のオーダーである。したがって式(3)は式(2)に比べて無視することができる。結局ポテンシャルエネルギー変化 δP は式(2)で与えられることになる。クラック先端に応力の特異性があるより一般的な場合についての式は、Rice⁽⁶⁾ により導かれた。式(2)は彼の結果の特別な場合である。

Eshelby の方法を使えば式(2)は容易に弾塑性体に拡張できる。ABCB' の部分が塑性変形領域に含まれる場合を考えてみよう。ABCB' の部分を切り出すことによるエネルギー変化は、この部分の応力を零にまで除荷する際に解放されるエネルギーに等しい。 w を仮想操作で切り出す部分に含まれる弾性エネルギー密度と解釈すると式(2)は弾塑性体に対しても成立する。結局、弾塑性体の全エネルギー変化、すなわち、ポテンシャルエネルギーの変化分 (δP) から塑性変形による消散 (δD) を引き去った量は式(2)という極めて簡単な式で与えられる。

なお、上述の説明から明らかなように「切り出す部分の体積」 ΔA は、より一般に「応力が完全に解放される領域」と定義できる。したがって、 ΔA を切り出すという操作は必ずしも実際の質量の欠損を意味しない。例えば延性破壊を念頭において、ABCB' を多数のポイドの生成により応力が解放されている領域であるとしよう。この場合は質量の出入りはないが、エネルギー変化の計算上は ABCB' 部を切り出すという操作を想定し、式(2)によって全エネルギーの解放量を定義する。

式(2)を普通の意味でのクラックに適用してみよう。ただし応力の特異性はないとする。クラックにおいては、進展を表すのに必要な仮想操作は単にクラックの前方に切れめを入れるだけであり、物質の移動(体積変化)は零である ($\Delta A=0$)。したがってエネルギー変化は零となり、このことから DBCS クラックモデルにおいても全エネルギー変化は零と予想される(厳密には後出の4章での計算から導かれる)。この結果は、外力のなす仕事、弾性エネルギー、塑性変形による消散を個別に計算し足し合せるという厳密な方法に基づいて、最初に横堀ら⁽⁷⁾ により指摘された。

クラック進展のためには、とにかく全エネルギーは減少しなくてはならないということから、Kfouri ら⁽⁴⁾ は有限なステップ幅を単位とするクラック進展という考

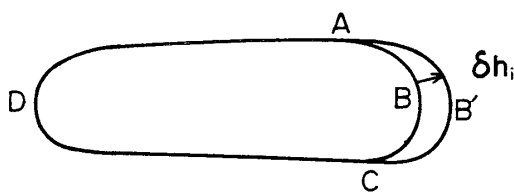


図1 小さなベクトル δh_i によるポイドの拡大の表現

えに至った。しかし式(2)にみるとおり、有限な体積変化があれば($\Delta A \neq 0$ ならば)エネルギーは解放される。したがって、クラックを進展に際し体積変化を伴う薄いポイドとみなせば、グリフィス流のエネルギー論を適用できることになる。式(2)よりエネルギー解放率を次のように定義できる。 c をクラックの長さを特長づけるパラメータとし、 $\delta h_i(x, y)$ が δc に比例すると仮定する。つまり、 $\delta h_i = q_i(x, y)\delta c$ 。この時式(2)は

$$P-D \equiv -\frac{dW}{dc} = \int_{ABC} w|q_i(x, y)|dS \quad \dots\dots\dots(4)$$

となり、エネルギー解放率はクラックの形状のパラメータ表示とクラックの面に沿う弾性エネルギー密度により決定される。

式(2)および(4)の応用例として図2に転位を放出しつつ進展するクラックのモデルを示す。最初にクラックは長さが c で幅は t ($t/c \ll 1$)であり、クラックに対称な4本のすべり線により降伏している。 δc の進展ごとに新たに4本のすべり線が生じ、それに伴いクラックの幅は増大する。すべり線上には、バーガースベクトルがすべり線の方向と一致する紙面に垂直な刃状転位が分布していて、上下の岸で変位は不連続となっている。このモデルにおいてクラック進展の際に外部応力がなした仕事は、正確に弾性エネルギーの増大とすべり線上での転位の移動に消散されるエネルギーの和に等しいはずである。一方、本論文では連続体力学の立場に立って、このような局所すべりという微視的な変形機構を考慮しない。そして、体積が拡大した部分を物質が切離された領域(または応力が解放された領域)とみなして、式(2)によってエネルギーの解放量を定義する。

さて、一様な引張外部応力、 $\sigma_{yy} = T$ のもとにある x 軸方向を向く弾性クラックにおいては、クラック面に平行に働く周方向応力 σ_{xx} は $-T$ に等しい⁽⁶⁾。すべ

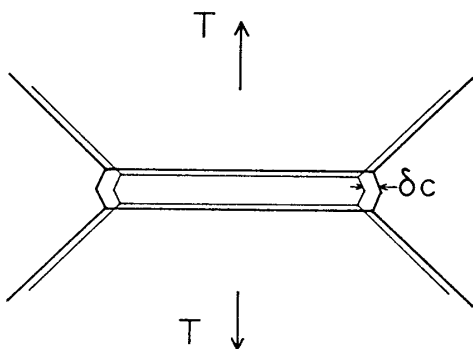


図2 新しいすべり線の発生によるクラックの幅の増大

り線がクラックの長さに比較して非常に短い場合(小規模降伏)はこの弾性解はよい近似であると考えられる。この時クラック面に沿うエネルギー密度は $(1/2)T^2/E$ (E はヤング係数)となる。クラックの拡大に際し、形状は相似のまま保たれるとする。すなわち $t/c = q = \text{一定}$ 。この時 $dt = qdc$ となるから、エネルギー解放率は式(2-d)からただちに

$$-\frac{dW}{dc} = q\left(\frac{1}{2}T^2/E\right)c \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。これを 2γ とにおいて破壊の条件式が得られる(ただし、クラック先端部のエネルギー解放率への寄与をここでは無視しているので式(5)は定性的な結果である)。この結果をグリフィス理論を小規模降伏を伴うクラックに拡張したOrowan⁽⁹⁾-Irwin⁽¹⁰⁾の条件式、 $\alpha_0\pi cT^2/E = 2\Gamma_c$ (平面ひずみの時 $\alpha_0 = 1 - \nu^2$ 、平面応力の時 $\alpha_0 = 1$)と比較してみよう。両方の結果は類似しているが、内容的には式(5)の係数 q は非常に小さいので(クラックを薄いポイドとみなしている)かなり違う。つまり破壊に使われるエネルギーはOrowan-Irwinのひずみエネルギー解放率、 $\alpha_0\pi cT^2/E$ よりずっと小さい。Orowan-Irwinの方法では、 $P-D = 2\gamma$ とする代わりに破壊時には D は限界値 D_c をとり、また $D_c (= 2\Gamma_c)$ は表面エネルギー γ よりずっと大きいとして、破壊条件として $P = 2\Gamma_c$ とされている。つまり、彼らのエネルギー解放率は、ポテンシャルエネルギー解放率 P である。一方、式(5)は $P-D$ を表す。したがって図2のクラック進展の際のポテンシャルエネルギーの減少分の大部分は塑性変形に費やされて、破壊のためにはわずかのエネルギーしか残されないということになる。

このように本論文の立場では、破壊条件は正確には $P-D$ 、および表面エネルギー γ という二つの小さなエネルギー項同士のバランスにより決定される。この見地に立つと γ を D に比べて小さいという理由で無視する仕方には疑問が残る。このことは特に、 γ の値の減少が破壊荷重の大きな減少を招くところの環境による材料のぜい化を考える時に問題となろう。この現象は、 γ を最初から無視する立場では説明できない*1。

最後に式(5)は T の増加関数であり、 $T=0$ の時零となっているが、これらのことはRice⁽¹¹⁾の議論と一致する。

3. 修正 DBCS クラックモデル

DBCSモデルは単純な描像、解析の簡単さゆえに弾

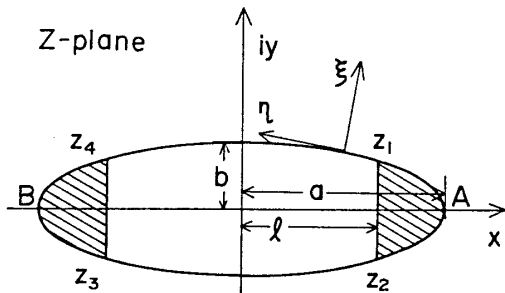
*1 表面エネルギー γ の解釈を含むより一般的な議論は、文献(1)に述べられている。

塑性クラックのモデルとしてよく使われているが、前述のようにエネルギー解放率は零である。また、モード I 形のモデルでは塑性域が無限小の厚みの領域に限られているという不自然さがある。修正 DBCS モデルはこの点を改良して、有限な厚みの塑性領域をもたせるべく著者により提案された⁽¹¹⁾もので、次節にみるように前章のエネルギー論を簡単に適用できる性質を持つ。

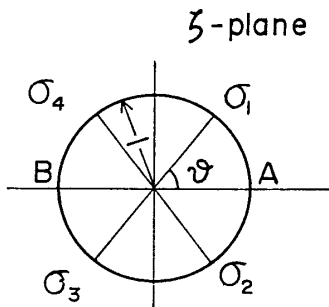
図 3 (a) に修正 DBCS クラックモデルを示す。材料は横弾性係数 μ 、ポアソン比 ν 、降伏応力 σ_y の理想塑性体とする。無限遠方の一様引張応力 $\sigma_{yy} = T$ のもとで、長さ $2l$ のクラックの両端に塑性域(斜線の部分) $z_1A z_2$, $z_4B z_3$ が形成されている。クラック表面と弾塑性域の境界を合わせてだ円形をなしているとする。だ円の半長軸の長さを a 、半短軸の長さを b とする。だ円弧の接続方向に η 、垂直方向に ξ 座標をとって、この座標系での垂直応力成分を $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ としよう。DBCS モデルに範をとって塑性域は弧 $z_1A z_2$, $z_4B z_3$ に沿って垂直応力 $\sigma_{\xi\xi} = \sigma_y$ を及ぼしていると仮定する。また塑性領域内での正確な応力、ひずみ分布などは考慮しない。このように、現モデルは DBCS モデルの簡単な一般化である。

$$z = m(\xi) = c(\xi + k/\xi), \quad \xi = \exp[\xi + i\eta] \quad \dots\dots\dots (6)$$

によりだ円周, $x = c(1+k)\cos \eta$, $y = c(1-k)\sin \eta$



(a) 修正 DBCS クラックモデル



(b) ξ -面

図 3

(ただし, $a = c(1+k)$, $b = c(1-k)$) は ξ 面内の単位円 $\sigma = \exp[i\eta]$ に移る。以後、だ円上の点 $z_i (i=1\sim 4)$ に対応する円周上の点を σ_i で表す。特に σ_1 の偏角を ϑ とする。すなわち

$$z_i = c(\sigma_i + k/\sigma_i), \quad \sigma_i = \exp[i\vartheta] \quad \dots\dots\dots (7)$$

また, $l = c(1+k)\cos \vartheta$ となる [図 3 (b)参照]。

Muskhelishvili の解⁽¹²⁾ を使って弾性域での応力関数は簡単に求めることができ

$$\begin{aligned} \phi(\xi) = & \frac{\sigma_y}{2\pi i} \left[\sum_{j=1}^4 (-1)^j \{m(\xi) - z_j\} \ln(\sigma_j - \xi) \right. \\ & \left. + 4ick\vartheta/\xi \right] + \frac{1}{4} Tc \{ \xi - (2+k)/\xi \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

右辺第 2 項は遠方で一様引張り T を受けるだ円周上で応力は零のだ円孔の解である。垂直応力の和は

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = 4 \operatorname{Re}[\phi'(\xi)/m'(\xi)] \quad \dots\dots\dots (9)$$

から計算される。Re は実部を表す。A 点においては $\sigma_{\xi\xi} = \sigma_y$ であるので、このことと式(9)から $\sigma_{\eta\eta} (= \sigma_{yy})$ はすぐ計算できる。この $\sigma_{\eta\eta}$ を σ_y とおくことにより塑性域の広がりか次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \vartheta = & \cos^{-1}(l/a) \\ = & (1/2)\pi \{ (T/\sigma_y) + (1/2)\beta \{ (T/\sigma_y) - (\alpha - 1) \} \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ただし, β は短軸と長軸の比で

$$\beta = b/a = (1-k)/(1+k) \quad \dots\dots\dots (11)$$

A 点においてトレスカの降伏条件を仮定すると、平面ひずみ状態の時には $\alpha = 2$ 、平面応力状態の時は $\alpha = 1$ となる。

式(10)は降伏領域の長さを外部応力 T の関数として定めるものであって、無限小幅のクラック ($\beta = 0$) の時には $\cos^{-1}(l/a) = (1/2)\pi(T/\sigma_y)$ となり、当然のことながら DBCS モデルと一致する。 T/σ_y が小で β が零でない場合に DBCS モデルとの挙動の違いがはっきりしてくる。特に現モデルでは、 $T = \{\beta/(2+\beta)\}\sigma_y$ に至るまで塑性変形は起こらない。

だ円周上で x -および y -方向の変位 (u, v) は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} 4\mu(u+iv) = & \frac{(1+x)\sigma_y}{\pi i} \left[\sum_{j=1}^4 (-1)^j \{m(\sigma) - z_j\} \right. \\ & \times \ln(\sigma_j - \sigma) + 4ick\vartheta/\sigma \left. \right] - 2\sigma_y c(\sigma + k/\sigma) \\ & + 2\sigma_y c(1+k)\cos \vartheta + \frac{1}{2}(1+x)Tc \{ \sigma - (2+k)/\sigma \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで平面ひずみの時は $x = 3 - 4\nu$ 、平面応力の時は $x = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ である。き裂開口変位(COD, または δ_i) は $z_1 z_2$ で定義され、これは塑性変形の規模を

表す尺度となる。式(12)で $\sigma = \sigma_1$ を代入して

$$\delta_i = 2v(\sigma_1) + 2\beta \tan \vartheta \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで

$$4\mu v(\sigma_1) = (1 + \kappa)\sigma_1 c \left\{ \frac{1}{2}(1 + \alpha)(1 - k)\pi \sin \vartheta - 2(1 + k)\cos \vartheta \ln(\cos \vartheta) \right\} / \pi - 2\sigma_1 c(1 - k) \sin \vartheta \quad \dots\dots\dots(14)$$

特に β が小であれば

$$\delta_i = (1 + \kappa)\sigma_1 l \ln(a/l) / \pi \mu + 2\beta \tan \vartheta \quad \dots\dots\dots(15)$$

第1項は DBCS モデルの COD である。次に β を外部応力 T と関連づける。 β は塑性域のクラックに垂直な方向の広がりの特長づけるパラメータである。したがって塑性領域のクラックの方向の広がりの特長づけるパラメータ ϑ が T のみの関数であると同様に、 β は T だけの関数であると考えられる。ここで、関数の形を具体的に決める方針として式(15)は広く受け入れられている DBCS モデルの結果と定性的に一致し、また δ_i の値自体も大きく違うことはないものとする。DBCS モデルでは〔式(15)の第1項〕、 $T/\sigma_v \ll 1$ の時は $\delta_i = K^2/(\sigma_v E)$ となる。ここで、 K は応力拡大係数で $K = (\pi l)^{1/2} T$ 、また平面応力状態が仮定されている。式(15)の第2項も K^2 に比例するためには

$$\beta = \beta_v T / \sigma_v \quad \dots\dots\dots(16)$$

となることが必要である。式(16)は応力がかかっていない時はクラックは理想的に薄い切れめであり、 T が増大するにつれ β もそれに比例して増大することを意味する。全面降伏時 ($T = \sigma_v$) に $\beta = \beta_v$ となる。 $T/\sigma_v \ll 1$ の時式(15)は実際

$$\delta_i = K^2/(\sigma_v E) + K^2 \beta_v / \sigma_v^2 \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。また、第2項が第1項とたかだか同じ程度の大きさであるためには、 β_v は σ_v/E のオーダーでなければならない。鋼に対しては $\sigma_v/E = (1 \sim 3) \times 10^{-3}$ である。それゆえ β は非常に小さい数となる。

4. 修正 DBCS クラックのエネルギー解放率

この章では修正 DBCS クラックに式(4)を適用し、

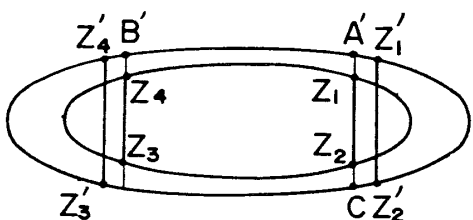


図4 修正 DBCS クラックの進展

エネルギー解放率を計算する。図4にパラメータ c および $c + \delta c$ に対応するクラックおよびそれに付随する塑性領域を示す。 $z_1 z_2 z_3 z_4$ が $z'_1 z'_2 z'_3 z'_4$ に拡大し、それに伴いクラックの長さは $2l$ から $2(l + \delta l)$ に変化している。拡大の間、荷重 T は一定に保たれるとする。この仮定のもとでは β もまた一定となる。クラックの拡大を小さいほうの円周の垂直方向にベクトル δz_e をたてて表す。 δz_e の絶対値は

$$|\delta z_e| = |m'(\sigma)\sigma| \delta \xi \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここで

$$\delta \xi = [(1 - k^2) / (1 + k^2 - k(\sigma^2 + \sigma^{-2}))] c \delta c \quad \dots\dots\dots(19)$$

また、式(8)~(10)から $\beta \ll 1$ の時は $z_1 z_4$ に沿う周方向垂直応力 $\sigma_{\eta\eta}$ は次式で与えられる。

$$\sigma_{\eta\eta} = -T + 4\beta\sigma_v \{ 2\vartheta \sin^2 \eta + (\pi A_0 - 2\vartheta)\beta \} / (\sin^2 \eta + \beta^2) \quad \dots\dots\dots(20)$$

ただし、 $\vartheta < \eta < \pi - \vartheta$ 、 $-\pi + \vartheta < \eta < -\vartheta$

ここで

$$A_0 = \frac{1}{4}(\alpha - 1) - \frac{1}{2}\vartheta/\pi$$

$\beta \ll 1$ を仮定しているので式(20)は $\sigma_{\eta\eta} \approx -T$ となり、 $z_1 z_4$ 全部に対して一定の圧縮応力、 $-T$ がかかっているとみなせる。したがってエネルギー密度も一定値、 $w = (1 + \kappa)T^2/16\mu$ となる。 $A'B'z_4 z_1$ の部分の面積も簡単に計算できて

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \int_{z_1 z_4} |\delta z_e| dS = \int_{\sigma_1}^{\sigma_4} |m'(\sigma)\sigma| \delta \xi \\ &\times [-ic(1 + k^2 - k(\sigma^2 + \sigma^{-2}))^{1/2} d\sigma/\sigma] \\ &= -ic(1 - k^2)\delta c \int_{\sigma_1}^{\sigma_4} d\sigma/\sigma = 4c\beta(\pi - 2\vartheta)\delta c \quad \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

したがって $A'B'z_4 z_1$ 部のエネルギー変化への寄与は

$$-\frac{(1 + \kappa)\beta l \sigma_v^2 (\pi - 2\vartheta)\vartheta^2}{4\mu \pi^2 \cos^2 \vartheta} \delta l \quad \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 T の代わりに $\vartheta \{ = (1/2)\pi T/\sigma_v \}$ を荷重の大きさを示すパラメータとして選んだ。

次に、クラックの先端部 $z'_1 z'_2 CA'$ を考える。物体は理想塑性体であるから弾性エネルギー密度は $A'C$ に沿って一定である。すなわち $w = (1 + \kappa)\sigma_v^2/16\mu$ 。また、面積 $A'Cz_2 z'_1$ は $4c\beta \sin \vartheta \delta l$ である。したがってこの部分のエネルギー解放率への寄与は

$$-\beta c(1 + \kappa)\sigma_v^2 \sin \vartheta \delta l / 4\mu \quad \dots\dots\dots(23)$$

式(22)と(23)を足し合わせ、 β に式(16)を代入すると

$$-\frac{dW}{dl} = (1 + \kappa)\beta_v l \sigma_v^2 F(\vartheta) / 8\mu \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここで

$$F(\vartheta) = \frac{2\vartheta}{\pi} \left\{ \tan \vartheta + \frac{2(\pi - 2\vartheta)\vartheta^2}{\pi^2 \cos^2 \vartheta} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

このようにして、 $-dW/dl$ は第 1 にクラックの長さに比例することがわかる。図 5 に $F(\vartheta)$ を示す。破壊応力は図 5 で 2γ に対応する直線を引いてそれと $F(\vartheta)$ のグラフの交点から求められる。 l が大きくなるということは、図解の際にはグラフを上方に平行移動することと同じであり、 $F(\vartheta)$ の傾きが正であるので、より大きな l に対してはグラフの交点は左に移動する。すなわち、破壊応力は l の増大に伴って減少し、したがってクラックの進展は不安定である。外部応力が小さい時の極限においては式(24)は

$$\pi(1+\kappa)\beta_y/T^2/(16\mu)$$

となり 2 章でのモデルと同様、実際に破壊に使われるエネルギーは Orowan-Irwin のひずみエネルギー解放率の $(1/2)\beta_y$ という小さな値になる。

線形破壊力学においては、エネルギー解放率はクラック先端の応力の特異性、すなわち応力拡大係数のみに依存する。クラックに平行な垂直応力を加えても応力拡大係数は変わらないので、この応力は破壊応力に影響を及ぼさない。一方、現モデルにおいては、クラックに平行に加えられた応力 σ_{xx} は破壊荷重に大きな影響を及ぼす。このことについて以下にくわしく調べる。

DBCS モデルでは塑性域の大きさは応力拡大係数にのみ依存し、したがって σ_{xx} には無関係である。それゆえ現モデルでも σ_{xx} を加えることによって β の

値は変わらないと仮定できる。 σ_{xx} が T より非常に大きくはない場合は、この仮定はよい近似であろう。また、クラック表面では応力が零だからクラック前縁での弾性エネルギー密度は変化しないとしてよい。さて、 σ_{xx} を加えると周方向応力は $-T + \sigma_{xx}$ になり $z_1 z_2$ に沿うエネルギー密度は $(1+\kappa)(\sigma_{xx} - T)^2/16\mu$ となる。式(25)は以下のように修正される。

$$F(\vartheta, \vartheta_x) = \frac{2\vartheta}{\pi} \left\{ \tan \vartheta + \frac{2(\pi - 2\vartheta)}{\pi^2 \cos^2 \vartheta} (\vartheta - \vartheta_x)^2 \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで ϑ_x は

$$\vartheta_x = \frac{1}{2} \pi \sigma_{xx} / \sigma_y \dots\dots\dots (27)$$

で定義される σ_{xx} に関する荷重パラメータである。 T を固定しておく(つまり $\vartheta = \text{一定}$) 式(26)は ϑ_x の二次関数となる。 σ_{xx} が圧縮応力の場合 ($\vartheta_x \leq 0$) はエネルギー解放率は増大する。 σ_{xx} が引張りの時 ($\vartheta_x \geq 0$) は、 $\vartheta_x = \vartheta$ (等軸引張り) になるまでエネルギー解放率は減少し、最小値に達した後は再び増大する。 $\vartheta_x = \vartheta$ の時は、 $A'Bz_1z_2$ の部分のエネルギー解放率への寄与は零である。最小値 $2\vartheta \tan \vartheta / \pi$ も図 5 に示してある。 ϑ が小さい内は二つのグラフに大きな差はないが、 $T = \sigma_y$ ($\vartheta = 90^\circ$) では等軸引張りのエネルギー解放率は単軸引張りの半分になる。

最近、三河内ら⁽¹³⁾ は二軸引張りを受ける中心にクラックを有する正方形板に対し、有限要素法を用いて J 積分を計算した。材料はひずみ-応力関係 $\varepsilon = \varepsilon_0 (\sigma / \sigma_0)^n$ に従うものと仮定し ($\varepsilon_0, \sigma_0, n$ は定数)、 J の $n, P_x/P_y$ (P_x, P_y はそれぞれクラックに垂直および平行な方向の引張応力) に対する依存性を調べた。 $n=3$ の場合の図示された結果によると J 対 P_x/P_y の曲線は放物線と類似している。しかし、最小の J は正確に $P_x = P_y$ の時ではなく、 $P_x = fP_y$ の時に起こるようである。ここで f は 1 に近い数である。限界 J 積分値による破壊条件と現論文のエネルギー条件は本来別のものである。それにもかかわらず、両方の結果が類似しているということは興味深い。このことはまた修正 DBCS モデルが弾塑性クラックの基本モデルとして使うことができるという期待をいだかせる。

5. 結 言

弾塑性クラックのエネルギー解放率を定義し、簡単な例に対して考察した。次に、著者により提案された修正 DBCS モデルについて説明し、このクラックのエネルギー解放率を計算した。その結果、実際に破壊に使われるエネルギーは解放されたポテンシャルエネルギーの

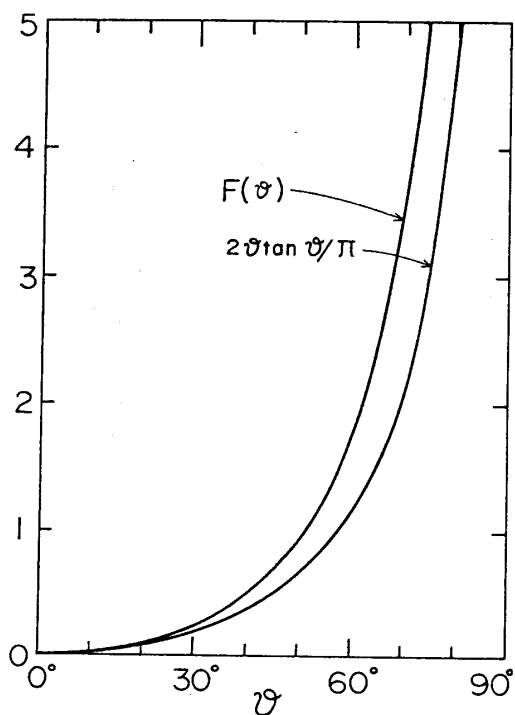


図 5 修正 DBCS クラックのエネルギー解放率

内のごくわずかの部分にすぎなく、大部分は塑性変形に費やされることがわかった。また、クラックに平行に加えられた垂直応力は、エネルギー解放率に対して大きな影響を及ぼすことがわかった。この結果は、二軸引張りの場合の J 積分の計算結果と類似している。以上のことから、本論文でのエネルギー論および修正 DBCS モデルは、結果は J 積分解析と同様であるが、より簡単な破壊モデルとしての価値を持つことが期待される。

終わりに本論文をまとめるにあたって有益な討論をしていただいた矢富盟祥博士に謝意を表す。

文 献

- (1) Rice, J. R., *Proc. Ist. Int. Conf. Fract.*, (Sendai, 1965); Yokobori, T. ほか編, 1 (1966), 309, Japanese Society for Strength and Fracture of Materials.
- (2) Dugdale, D. S., *J. Mech. Phys. Solids*, 8(1960), 100.

- (3) Bilby, B. A., ほか, *Proc. R. Soc., Ser. A*. 272(1963), 304.
- (4) Kfoury, A. P. and Rice, J. R., (Taplin, D. M. R. 編), *Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials*, 1(1977), 43, Pergamon Press.
- (5) Eshelby, J. D. (Kanninen, M. F. ほか編), *Inelastic Behavior of Solids*, (1970), 77, McGraw-Hill.
- (6) Rice, J. R. (Liebowitz, H. 編), *Fracture*, 2, *Mathematical Fundamentals*, Ch. 3(1968), 191, Academic Press.
- (7) Yokobori, T. ほか, *Rep. Res. Inst. Str. Fract. Mats*, 4 (1968), 1, Tohoku Univ.
- (8) Milne-Thomson, L. M., *Plane Elastic Systems*, (1960) Springer-Verlag.
- (9) Orowan, E., *Rep. Progr. Phys.*, 12(1948-9), 185.
- (10) Irwin, G. R., *Trans. Am. Soc. Met.*, 40(1948), 147.
- (11) Toya, M., *Int. J. Fract.*, 16(1980), R3.
- (12) Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (second edition, English translation by Radok, J. R. M.), (1953), Noordhoff.
- (13) 三河内・ほか 3 名, 機講論, No. 804-1(昭 55-3), 88.

討 論

〔質問〕 渡辺勝彦〔東京大学生産技術研究所〕

(1) 修正 DBCS モデルと呼んでおられるものについてだが、例えば図 3 (a) は外力 T が働いている状態のものを示されたものと思われるが、 $T=0$ においてはどのようなき裂を考えていることになるのか。また T が零から T となっていく変化を考える時 b/a はどのように変化していくと考えるのか。負荷を増していく過程で実質部 (体積) を取り去るモデルになっているのか。

(2) 弾塑性き裂のエネルギー解放率については質問者も論じているので(付1)(付2)ご検討いただきたい。

〔回答〕 (1) 修正 DBCS モデルは現象論的なモデルであって、パラメータ $\beta (=b/a)$ によりクラックの幅を表す。 β と外部応力 T の関係は適当に仮定されなければならない。

DBCS クラックにおいては、 K が小さい時は、き裂開口変位 (COD) は

$$\delta = K^2 / \sigma_y E \dots\dots\dots (i)$$

で与えられる (記号は本文と同じ)。本論文では、修正 DBCS クラックの COD (δ_r) は式 (i) と定性的に一致し (すなわち $\delta_r \propto K^2$)、しかも δ_r の値も δ と同じ程度であるという条件により、 β と T を関連づけている。その結果式 (3・k)、

$$\beta = \beta_y T / \sigma_y$$

(ただし、 β_y は 10^{-3} 程度の大きさの定義) が導かれる。したがって b/a は T に比例し、また $T=0$ においては無限小幅のき裂になる。

また、塑性域内の転位のバーガースペクトルが、クラックに垂直な方向の成分を持てば、クラックの体積は増大する。典型的な例は本文図 2 で示されている。修正 DBCS モデルは、き裂幅がどのような物理的な過程で有限幅になるかは問わないが、本来はこのような過程を念頭に入れて提案したものである。なおエネルギー変化の計算の際には、実質部を切離すという操作を想定するが、この仮想操作は実際の物理的な過程とは無関係に定義される。

(2) 有益な文献のご教示に感謝する。文献(付2)の骨子は、き裂開口量への弾性変形による寄与 (δ^e) を考慮すると、DBCS モデルのエネルギー解放率は零とならないということだと思ふ。しかし、質問者も文献(付2)で述べておられるように、DBCS モデルの塑性域は剛塑性体として振舞うわけで、弾性ひずみを考慮することには無理があるように思われる。修正 DBCS クラックは、このような困難を有限な幅の塑性域を考慮することによって避けることを意図したものである。

〔質問〕 横堀 寿光〔東北大学工学部〕

(1) 弾塑性き裂のエネルギー安定、不安定の問題に関しては、横堀たちが 1966 年(付3)に、 $P-D+\gamma$ の形で調べ、DBS 模形では常にエネルギー的安定 (したがっ

(付1) 渡辺, 機論, 48-433, A(昭57), 1226.

(付2) 渡辺・ほか2名, 第32回応力連合抄録集, (昭57), 259.

て解放率=0)となること,したがって不安定破壊は起こらないことを示しており,この結果は Bilby 自身もすでに認めている(付4).問題は,実際には弾塑性き裂であっても不安定破壊を起こすわけであるから,それではどういうモデルが真実なのかということになる.そこで横堀たちは,き裂端に働く凝集力 γ を考慮に入れると, γ が小さくても,加算減算式 $P-D+\gamma=0$ の条件が満たされることから,不安定破壊条件式が得られることを示している(付5).このモデルは,転位分布からいっても DBS 模型とは基本的に異なる(付6)ので横堀たちの模型と称して提案されている.その後さらに現実的な模型化も試みられている(付7).貴論文は, DBS 模型において,き裂の幅を有限とする点から現実化を試みたものと考えてよいか.

(2) 2章において $\delta h_i(xy)$ が δc に比例すると仮定しているが,その物理的意味をご説明いただきたい.

(3) 実験結果との対応について検討されていればお示し願いたい.

【回答】 (1) 有益な文献のご教示に感謝する.ご質問にあるとおり,本論文は有限幅の塑性変形領域を考えることにより,エネルギー解放率を得ようとする

(付3) Yokobori, T. and Ichikawa, M., *Rep. Res. Inst. Fract. Mats.*, 2-1(1966), 21, Tohoku Univ.

(付4) Bilby, B. and Eshelby, J. D., 1(1968), 99, Academic Press, Bilby, B., 4 ICF. 4(1978), 31.

(付5) Yokobori, T., *Int. J. Fract. Mech.*, 4-2(1968), 179; 文献の(7).

(付6) Yokobori, T., *Fracture mechanics*, (1978)91, Univ. Press, of Virginia; 横堀, 第23回強度と破壊総合シンポジウム論文集, (昭53), 49.

(付7) Yokobori, T. *Int. J. Fract. Mech.*, 5-4(1973), 819.

ものである.

(2) 3章で述べる理由により,修正 DBCS クラックの形状 b/a は荷重 T のみの関数と仮定できる.したがって一定荷重のもとでは進展の際にクラックの形状は相似に保たれ,式(18), (19)により $|\delta z_e|$ は(したがって δh_i は) δc に比例する.また,図2のモデルでも l/c が一定の時には $\delta h_i \propto \delta c$ となる.仮定, $\delta h_i \propto \delta c$ はこれらの結果を一般化したものである.

(3) 二軸引張りの場合, $k(=\sigma_{xx}/T)$, σ_{xx} はクラックと同方向に加えられた引張応力, T は垂直方向に加えられた引張応力を横軸にとり,縦軸にエネルギー解放率をプロットすると, k が零から増大するにつれグラフは減少し, $k=1$ で最小値に達し, $k>1$ で増大する.このことから,破壊荷重は k が増すにつれて増大し, $k=1$ で最大となり,ついで $k>1$ で再び減少する.以上が式(26)から得られる結論である.

最近,中央き裂を有するアルミニウム合金の薄板の二軸引張実験が(付8)報告された.横軸に k を,縦軸に破壊応力をプロットした2枚のグラフをもとに,著者の Eftis らは破壊応力は k に比例して増大する傾向があると報じている.ただし,実験範囲は $0 \leq k \leq 1.8$ と狭く,データもかなりばらついている.破壊応力は $k=1.3$ 付近で最大値をとる放物線で表すことができる,とも主張できそうである.このように現在のところ,二軸引張試験の確実で広範なデータが不足しているので,実験値と式(26)との意味のある比較,検討は将来の問題となっている.

(付8) Eftis, J. and Jones, D. L., *Int. J. Fract.*, 20(1982), 267.