

チェビシェフ多項式を用いた離散型非線形システムの同定法について

著者	新宮 忠敏, 高田 等
雑誌名	鹿児島大学工学部研究報告
巻	40
ページ	59-66
別言語のタイトル	On an Identification Method of Discrete Nonlinear Systems via Chebyshev Polynomials
URL	http://hdl.handle.net/10232/489

チェビシェフ多項式を用いた離散型非線形システムの同定法について

著者	新宮 忠敏, 高田 等
雑誌名	鹿児島大学工学部研究報告
巻	40
ページ	59-66
別言語のタイトル	On an Identification Method of Discrete Nonlinear Systems via Chebyshev Polynomials
URL	http://hdl.handle.net/10232/00003235

チェビシェフ多項式を用いた離散型非線形システムの同定法について

新 宮 忠 敏*・高 田 等**

On an Identification Method of Discrete Nonlinear Systems via Chebyshev Polynomials

Tadatoshi SHINGU and Hitoshi TAKATA

In this paper, we propose an identification method of discrete nonlinear systems by using Chebyshev polynomials. The Chebyshev interpolation is very close to the best approximation which minimizes the maximum of absolute value of errors. The nonlinear function is represented by the linear combination of some Chebyshev polynomials. Each coefficient of the Chebyshev polynomials is easily evaluated by the least squares method. An error bound of the identification is also estimated here. In addition, the optimal order of the Chebyshev polynomials is determined by using Akaike's information criterion. Numerical examples show that this identification is superior to the other methods based on polynomials for nonlinear systems.

1. まえがき

現実のシステムはそのほとんどが非線形であるため、非線形システムに対するモデリングや同定は、システムの解析、制御や予測などにおいて極めて重要な課題である^{1)~6)}。

本論文では、一入力一出力の離散型非線形システムに対し、観測データに関するチェビシェフ多項式表現を用いた同定法¹⁰⁾を提案する。チェビシェフ補間近似は、最良近似すなわちミニ・マックス法に近い近似方式であり、関数近似の際、基本閉区間 $[-1, 1]$ で誤差の絶対値の最大値を最小にする^{5), 7), 9)}。まず、与えられた非線形システムの観測データに対して座標変換を行い、データを基本区間内に変換する。次に、変換した値を利用して非線形システムをチェビシェフ多項式で近似表現する。この近似表現はチェビシェフ多項式の線形結合となっており、近似多項式の未知係数は最小二乗法により容易に求まる。よって、同定計算が極めて簡単である。しかも本チェビシェフ多項式展開型同定法は、準ミニ・マックスの性質から、他のテーラー展開やルジャンドル多項式展開等を土台にする場合と比べ、非線形関数の同定精度が一樣によく、安定したものである。

さらに、本同定手法による誤差限界式も導出した。これは関数近似評価を基に導かれたものである。その結果、平均二乗同定誤差は、指数関数的減少のチェビシェフ多項式次数項と観測雑音標準偏差項の和の2乗で押さえられることが示された。さらに本論文では赤池の情報量基準 AIC⁸⁾を用いたチェビシェフ多項式次数の最適値決定法も提示した。

以下、2節ではチェビシェフ多項式を用いた同定手法、3節では誤差限界、4節ではチェビシェフ最適次数の求め方、5節ではチェビシェフ多項式展開型同定法の特徴と検討、および6節では計算機シミュレーションによる数値実験、についてそれぞれ述べる。

2. 非線形システムの同定

次の一入力一出力の離散型非線形システムについて考察する。

$$\begin{cases} x_k + f(x_{k-1}, \dots, x_{k-n}) = u_k \\ y_k = x_k + w_k \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 x_k : 出力、 u_k : 入力、 $f(\cdot)$: 未知なる非線形関数、 y_k : 観測データ、 w_k : 観測雑音、とする。ただし w_k は平均値が $E[w_k] = 0$ で分散が $E[w_k^2] = \sigma_w^2$ および $E[w_k w_j] = 0 (k \neq j)$ の白色雑音と仮定する。本節では入力データおよび観測データから $f(\cdot)$ をチェビシェフ多項式近似を用いて同定する。

チェビシェフ多項式による近似は $D' = [-1, 1]$ で定義

平成10年5月31日受理

*博士後期課程システム情報工学専攻

**電気電子工学科

されるため、同定する前に出力データの領域 D を D' へ変換する。今、観測値 $y_k (k=1, 2, \dots, M)$ の最大値 y_{\max} と最小値 y_{\min} から領域を $D = [m-p, m+p]$ と定める。ただし $m = (y_{\max} + y_{\min})/2$, $p \geq (y_{\max} - y_{\min})/2$ である。ここで $y'_k = (y_k - m)/p$ により y_k を y'_k に変換すれば、 y'_k の領域は $D' = [-1, 1]$ となり、チェビシエフ多項式近似が適用できる。以下 y'_k , D' を改めて y , D と記し、変換後の対象システムを改めて(1)式で記述することによ

う。

さて、チェビシエフ多項式：

$$\begin{aligned} T_0(y_k) &= 1, & T_1(y_k) &= y_k \\ T_2(y_k) &= 2y_k^2 - 1 \\ T_3(y_k) &= 4y_k^3 - 3y_k \\ T_4(y_k) &= 8y_k^4 - 8y_k^2 + 1 \\ T_5(y_k) &= 16y_k^5 - 20y_k^3 + 5y_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

は次の漸化式により定まる。

$$T_{i+2}(y_k) = 2y_k T_{i+1}(y_k) - T_i(y_k) \quad (i \geq 0). \quad (2)$$

ここで、(1)式 $f(\cdot)$ の変数 $\{y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_n}\}$ が張る空間は $\mathcal{D} = D^n = \prod_{i=1}^n [-1, 1]$ である。各変数 $\{y_{k_i}\}$ ごとにチェビシエフ多項式 $\{T_{r_i}(y_{k_i})\}$ の積を

$$\begin{aligned} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y : k) &= T_{r_1}(y_{k_1}) \times \dots \times T_{r_n}(y_{k_n}) \\ &= \prod_{i=1}^n T_{r_i}(y_{k_i}) \end{aligned} \quad (3)$$

と定義すれば、(3)式の定義域は \mathcal{D} である。

(3)式を用いて(1)式の未知関数 $f(\cdot)$ を

$$\begin{aligned} f(\cdot) &\cong \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \theta_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y : k) \\ &= \Phi^T(k) \Theta \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= [T_{(0,0,\dots,0)}(y : k) \quad T_{(1,0,\dots,0)}(y : k) \quad \dots \\ &\quad T_{(r_1, \dots, r_n)}(y : k) \quad \dots \\ &\quad T_{(N_1, \dots, N_n)}(y : k)]^T \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Theta = [\theta_{(0,0,\dots,0)} \quad \theta_{(1,0,\dots,0)} \quad \dots \\ \theta_{(r_1, \dots, r_n)} \quad \dots \quad \theta_{(N_1, \dots, N_n)}]^T$$

と表現する。(4)式の小文字 n は f の要素数、および大文字 $N_j (j=1, \dots, n)$ は j 要素に関するチェビシエフ展開次数を表す。なお、 T は転置記号である。

(4)式を(1)式に代入すれば、チェビシエフ多項式による同定モデルは

$$y_k + \Phi^T(k) \Theta = u_{k-1} - \varepsilon_k \quad (6)$$

となる。ここで ε_k は関数近似誤差である。

評価として M 個データの誤差の二乗和

$$PI = W \sum_{k=1}^M \{(u_{k-1} - y_k) - \Phi^T(k) \Theta\}^2 \quad (7)$$

を導入する。ただし W は正数の規格化定数である。このとき未知係数ベクトルは

$$\hat{\Theta} = \left[\sum_{k=1}^M \Phi(k) \Phi^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^M \Phi(k) (u_{k-1} - y_k) \right] \quad (8)$$

として求まる。したがって、未知の非線形関数が

$$\begin{aligned} \hat{f}(\cdot) &= \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \hat{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y : k) \\ &= \Phi^T(k) \hat{\Theta} \end{aligned} \quad (9)$$

と同定できる。次にこの同定法の誤差限界について考察する。

3. 誤差限界

(1)の上式に対応した

$$y_k + f(y_{k_1}, \dots, y_{k_n}) - u_{k-1} = e_k \quad (10)$$

を構成する。

ここで(1)の下式を(10)式に代入し中間値の定理を用いれば、(10)式は

$$\begin{aligned} e_k &= (x_k + w_k) \\ &\quad + f(x_{k_1} + w_{k_1}, \dots, x_{k_n} + w_{k_n}) - u_{k-1} \\ &= \{x_k + f(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}) - u_{k-1}\} + \\ &\quad \left\{ w_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_{k_j}} \Big|_{y_{k_j} = \xi_j} w_{k_j} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $-1 < \xi_j < 1 (1 \leq j \leq n)$ 、となるので(1)式から

$$e_k = w_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_{k_j}} \Big|_{y_{k_j} = \xi_j} w_{k_j} \quad (12)$$

である。さて

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_k &\stackrel{\text{def}}{=} f(y_{k_1}, \dots, y_{k_n}) \\ &\quad - \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \theta_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y : k) \end{aligned}$$

と定義し、(10)式に代入すれば

$$y_k + \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \theta_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y : k) - u_{k-1} = \varepsilon_k \quad (13)$$

ただし $\varepsilon_k = e_k - \bar{\varepsilon}_k$

となり(6)式が得られる。

ここでチェビシエフ補間についての次の性質⁷⁾に注意しよう。

補助定理 1

1 変数関数 $h \in C^{N_j+1}$ に対し N_j 次チェビシェフ多項式展開は

$$h(y) = \sum_{r=0}^{N_j} \bar{\theta}_{(r)} T_r(y) + \frac{1}{2^{N_j}(N_j+1)!} T_{N_j+1}(y) h^{(N_j+1)}(\xi) \quad (14)$$

ただし、零点および展開係数は

$$Y_q = \cos\left(\frac{2q+1}{N_j+1} \frac{\pi}{2}\right) \quad (q=0, 1, \dots, N_j) \quad (15)$$

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{(0)} = \frac{1}{N_j+1} \sum_{q=0}^{N_j} h(Y_q) \\ \bar{\theta}_{(r)} = \frac{2}{N_j+1} \sum_{q=0}^{N_j} h(Y_q) T_r(Y_q) \end{cases} \quad (16)$$

であり

$$\left| h(y) - \sum_{r=0}^{N_j} \bar{\theta}_{(r)} T_r(y) \right| \leq \frac{1}{2^{N_j}(N_j+1)!} |h^{(N_j+1)}(\xi)| \quad (17)$$

が成立する。

$E(\cdot)$ を集合平均演算子とし、(7)式に対し

$$J = E(\text{PI}) / W = E\left(\sum_{k=1}^M \{(y_k - u_{k-1}) + \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k)\}^2\right) \quad (18)$$

を評価する。(7)式において、(8)式の最小二乗推定値 $\hat{\Theta}$ と、PI に関し最適とは限らない特別な係数であるチェビシェフ補間係数 $\bar{\Theta}$ との間には

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \{(u_{k-1} - y_k) - \Phi^T(k) \hat{\Theta}\}^2 \\ & \leq \sum_{k=1}^M \{(u_{k-1} - y_k) - \Phi^T(k) \bar{\Theta}\}^2 \end{aligned}$$

の関係がある。両辺の集合平均をとり、(10)式を考慮すれば(18)式は

$$J_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\theta} J = E\left(\sum_{k=1}^M \{(y_k - u_{k-1}) + \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k)\}^2\right) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \leq E\left(\sum_{k=1}^M \left\{ f(\cdot) - \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k) - e_k \right\}^2\right) \quad (20) \end{aligned}$$

となる。次に任意の $z_k \in R$ に関する

$$\sum_{k=1}^M |z_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^M |z_k| \right)^2$$

の関係を適用すれば

$$J_{\min} \leq E\left(\sum_{k=1}^M \left| f(\cdot) - \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} \times T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k) - e_k \right|^2\right) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \leq E\left(\sum_{k=1}^M \left| f(\cdot) - \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k) + \sum_{k=1}^M |e_k|^2 \right)\right) \quad (22) \end{aligned}$$

となる。

ここで(22)式内の第1項

$$\left| f(\cdot) - \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k) \right|$$

について考察する。このため次の演算子⁹⁾を導入する。関数 $g(\cdot)$ の y_{k_j} ($j=1, \dots, n$) 要素についてのみチェビシェフ近似を行う演算子を Ψ_j 、および y_{k_1} から y_{k_j} 要素に関する演算子積を $\Psi^{[j]}$:

$$\Psi^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_j \circ \dots \circ \Psi_2 \circ \Psi_1$$

と記し、それぞれ

$$\begin{aligned} \Psi_j g(\cdot) &= g(\cdot) \\ \Psi_j g(y_{k_1}, \dots, y_{k_j}^{(j)}, \dots, y_{k_n}) & \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r_j=0}^{N_j} \bar{\theta}_{(r_j)} T_{r_j}(y_{k_j}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{[n]} f(y_{k_1}, \dots, y_{k_n}) & \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r_1=0}^{N_1} \dots \sum_{r_n=0}^{N_n} \bar{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k) \end{aligned} \quad (24)$$

と定義する。ここで(23)式の上付き (j) は関数の j 番目要素に関する展開であることを示す。(15)式と(16)式より

$$Y_q^{(j)} = \cos\left(\frac{2q+1}{N_j+1} \frac{\pi}{2}\right) \quad (q=0, 1, \dots, N_j) \quad (25)$$

$$\bar{\theta}_{(0)} = \frac{1}{N_j+1} \sum_{q=0}^{N_j} g(y_{k_1}, \dots, Y_q^{(j)}, \dots, y_{k_n}) \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{(r_j)} &= \frac{2}{N_j+1} \sum_{q=0}^{N_j} g(y_{k_1}, \dots, Y_q^{(j)}, \dots, y_{k_n}) \\ & \quad \times T_{r_j}(Y_q^{(j)}) \end{aligned} \quad (27)$$

ただし $Y_q^{(j)}$ は関数 $g(\cdot)$ の j 番目の変数における N_j 次チェビシェフ多項式の零点であり、(14)式から

$$\begin{aligned} & g(y_{k_1}, \dots, y_{k_j}^{(j)}, \dots, y_{k_n}) \\ & = \Psi_j g(y_{k_1}, \dots, y_{k_j}^{(j)}, \dots, y_{k_n}) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2^{N_j}(N_j+1)!} T_{N_j+1}(y_{k_j}) g^{(N_j+1)}(\xi_j) \quad (28)$$

および

$$g^{(N_j+1)}(\xi_j) = \frac{\partial^{N_j+1}}{\partial Y_{N_j+1}} g(y_{k_1}, \dots, Y_q, \dots, y_{k_n}) \Big|_{Y_q = \xi_j}^{(j)} \quad (29)$$

である。よって特に関数 $g(\cdot)$ が y_{k_j} に関し N_j 次以下の多項式であれば $g^{(N_j+1)}(\xi_j) = 0$ となる。

(24)式に注目し、さらに $\Psi^{[j-1]}f(\cdot) = g(\cdot)$ と記せば、(28)式および(17)式から

$$\begin{aligned} & |f(y_{k_1}, \dots, y_{k_n}) - \\ & \sum_{r_n=0}^{N_n} \dots \sum_{r_1=0}^{N_1} \hat{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k)| \\ & = |f(y_{k_1}, \dots, y_{k_n}) - \Psi^{[n]}f(y_{k_1}, \dots, y_{k_n})| \\ & = |\{\Psi_0 f(\cdot) - \Psi_1 f(\cdot)\} + \\ & \quad \{\Psi_1 f(\cdot) - \Psi_2 \circ \Psi_1 f(\cdot)\} + \dots + \\ & \quad \{\Psi_{n-1} \circ \dots \circ \Psi_1 f(\cdot) - \\ & \quad \Psi_n \circ \Psi_{n-1} \circ \dots \circ \Psi_1 f(\cdot)\}| \\ & \leq \sum_{j=1}^n |\Psi^{[j-1]}f(y_{k_1}, \dots, y_{k_j}, \dots, y_{k_n}) - \\ & \quad \Psi_j \circ \Psi^{[j-1]}f(y_{k_1}, \dots, y_{k_j}, \dots, y_{k_n})| \\ & = \sum_{j=1}^n \left| \frac{1}{2^{N_j}(N_j+1)!} T_{N_j+1}(y_{k_j}) q^{(N_j+1)}(\xi_j) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{C \cdot 1_j}{2^{N_j}(N_j+1)!} \stackrel{\text{def}}{=} K(N_j) \right| \quad (30) \end{aligned}$$

ただし

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ |g^{(N_j+1)}(\xi_j)| : -1 \leq y_{k_1}, \dots, y_{k_n} \leq 1, 1 \leq j \leq n \} \quad (31)$$

$$1_j = \begin{cases} 0, & g^{(N_j+1)}(\cdot) = 0 \\ 1, & \text{その他} \end{cases} \quad (32)$$

となる。ゆえに(30)式を(32)式に代入すれば

$$\begin{aligned} J_{\min} & \leq E \left(\left\{ \sum_{k=1}^M K(N_j) + \sum_{k=1}^M |e_k| \right\}^2 \right) \quad (33) \\ & = E \left(\left\{ MK(N_j) + \sum_{k=1}^M |e_k| \right\}^2 \right) \\ & = M^2 K^2(N_j) + 2MK(N_j) \sum_{k=1}^M E|e_k| \\ & \quad + E \left(\left\{ \sum_{k=1}^M |e_k| \right\}^2 \right) \quad (34) \end{aligned}$$

となる。

任意の $z_k \in R$ に関するヘルダーの不等式

$$E[|z_k| |z_l|] \leq \sqrt{E[|z_k|^2] E[|z_l|^2]} \quad (35)$$

に注意し、 $E[w_k^2] = \sigma_w^2$ と $E(|w_k|) \leq \sqrt{E(w_k^2)} = \sigma_w$ を用いる。(12)式から

$$\begin{aligned} |e_k| & = \left| w_k + \sum_{j=1}^n F_j(\xi_j) w_{k_j} \right| \\ & \leq |w_k| + \sum_{j=1}^n |F_j(\xi_j)| |w_{k_j}| \\ & \leq |w_k| + \sum_{j=1}^n F_{sj} |w_{k_j}| \end{aligned}$$

であるので、(34)式の第2項については

$$\begin{aligned} E(|e_k|) & \leq E(|w_k|) + \sum_{j=1}^n F_{sj} E(|w_{k_j}|) \\ & \leq \left(1 + \sum_{j=1}^n F_{sj} \right) \sigma_w \quad (36) \\ & = F \sigma_w \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} F_j(\xi_j) & = \left. \frac{\partial f}{\partial y_{k_j}} \right|_{y_{k_j} = \xi_j} \quad (-1 < \xi_j < 1) \\ F_{sj} & = \sup \{ |F_j(\xi_j)| : -1 < \xi_j < 1 \} \quad (37) \end{aligned}$$

$$F = 1 + \sum_{j=1}^n F_{sj} \quad (38)$$

となる。さらに(34)式の第3項に関しては(35)式、(36)式より

$$\begin{aligned} E \left(\left\{ \sum_{k=1}^M |e_k| \right\}^2 \right) & = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M E(|e_k| |e_l|) \\ & \leq \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \sqrt{E(|e_k|^2) E(|e_l|^2)} \\ & \leq \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M F^2 \sigma_w^2 = M^2 F^2 \sigma_w^2 \quad (39) \end{aligned}$$

である。(36)式、(39)式を(34)式に代入して

$$\begin{aligned} J_{\min} & \leq M^2 K^2(N_j) + 2MK(N_j) M F \sigma_w + M^2 F^2 \sigma_w^2 \\ & = M^2 \{ K(N_j) + F \sigma_w \}^2 \quad (40) \end{aligned}$$

を得る。よって最小二乗評価 J_{\min} に $1/M^2$ を乗じて(30)式から次の定理が得られる。

定理 1

n 変数関数 $f \in C^{N'}$ (ただし $N' = \sum_{j=1}^n (N_j + 1)$) のシステム(1)式において、(9)式のチェビシエフ展開表現を用いれば、最小二乗法に対し以下が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{M^2} J_{\min} & = \frac{1}{M^2} E \left(\sum_{k=1}^M \{ (y_k - u_{k-1}) + \right. \\ & \quad \left. \sum_{r_n=0}^{N_n} \dots \sum_{r_1=0}^{N_1} \hat{\theta}_{(r_1, \dots, r_n)} T_{(r_1, \dots, r_n)}(y:k) \}^2 \right) \\ & \leq \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{C \cdot 1_j}{2^{N_j}(N_j+1)!} + F \sigma_w \right\}^2 \quad \square \quad (41) \end{aligned}$$

定理1は本同定による最小二乗誤差の平均 J_{\min} が、チェビシェフ展開近似誤差と雑音標準偏差の和の2乗の上界をもち、 $N_j \rightarrow \infty$, $\sigma_w \rightarrow 0$ とともに $J_{\min} \rightarrow 0$ になることを示している。その際 $\sqrt{J_{\min}}$ は、 N_j に関しては指数関数的に減少し、 σ_w と M に関しては少なくとも線形関数的に押さえられることがわかる。これは、本同定法の希望精度確保のための一指標となるであろう。

4. チェビシェフ多項式の最適次数の決定

チェビシェフ多項式展開による本同定法は、定理1より次数を大きくするほど近似精度がよくなるが、工学的には次数はできるだけ小さい方がよい。すなわち、適切な次数を定め、モデルの精度と複雑さのトレードオフをはかる必要がある。そこで本節ではチェビシェフ多項式の最適次数を赤池の情報量基準 AIC⁸⁾によって求める。

AICは一般に、

$$AIC = -2 \ln(\text{最大尤度}) + 2(\text{パラメータ数}) \quad (42)$$

で得られる。これを求めるためには、最尤推定法を用いてパラメータ同定を行わなければならないが、残差に正規性を仮定すれば、最尤推定法は最小二乗法と一致し、

$$-\ln(\text{最大尤度}) = \frac{M}{2} \ln \bar{e}^2 \quad (43)$$

とすることができる。ただし \bar{e}^2 は残差の二乗平均で $W=1/M$ のときの(7)式のPIである。

そこで本論文では、残差に正規性を仮定し、AICを

$$AIC(N) = M \ln \bar{e}^2 + 2N \quad (44)$$

ただし、

$$\bar{e}^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \{(u_{k-1} - y_k) - \Phi^T(k)\hat{\theta}\}^2 \quad (45)$$

$$N = \prod_{i=1}^n (N_i + 1)$$

とする。次数 N_i の種々の組合せに対して(44)式のAICを計算し、最小となる次数をもって最適次数とする。

5. チェビシェフ多項式展開型同定法の特徴と検討

一般に、非線形関数を各種多項式で近似しようとする関数近似問題は、数学で確立された方法であるが、これをいかに非線形同定の工学問題にうまく適用するかが本課題であった。

過去、時間関数 (t) に関する多項式展開による同定法としては、例えば文献⁵⁾の研究があるが、これは非線形の長時間を対象とするシステムには不向きである。

一方、非線形同定に、観測データ (y) に関する多項式展開を土台にし、そのコンピュータ計算が簡単で、し

かもその非線形の同定精度誤差限界式を定量的に導出したものはない。

そこで、観測データに関する多項式展開型同定で、上記を満足する最も合理的なもの、すなわち非線形同定の

- 1). コンピュータによる計算容易さ
- 2). 同定精度の良さ
- 3). 定量的誤差限界の導出
- 4). 計算安定の良さ、他

から、本2節のチェビシェフ多項式展開型同定法が考案された。

以下、各項ごとにこれを詳述する。

まず、現実の安定システムは入出力が有界であるということから、有限区間を対象とする多項式展開の、テーラー(級数)型、チェビシェフ型、ルジャンドル型を比較する。

変換後基本区間の $D = [-1, 1]$ で考える。その基本多項式 $\Phi(k) = [T_0(y_k) \ T_1(y_k) \ T_2(y_k) \ \dots]^T$ は具体的には以下の通りである。

テーラー型 (Tay と略記):

$$\Phi(k) = [1, y_k, y_k^2, y_k^3, \dots]^T$$

チェビシェフ型 (Che と略記):

$$\Phi(k) = [1, y_k, 2y_k^2 - 1, 4y_k^3 - 3y_k, \dots]^T$$

ルジャンドル型 (Leg と略記):

$$\Phi(k) = [1, y_k, (3y_k^2 - 1)/2, (5y_k^3 - 3y_k)/2, \dots]^T$$

1). コンピュータによる計算容易さについて

コンピュータによる計算容易さは、Tay, Che, Leg いずれの多項式も繰り返し式があるので同等である。

2). 同定精度の良さについて

同定精度の良さでは違いが生じる。

- (a)テーラー型は、 $y_k = 0$ 近傍のみ精度が良いが、それ以外の対象全領域 $D = [-1, 1]$ では良くない。
- (b)ルジャンドル型は、重み1の直交多項式 $f_i^1 T_i(y_k) \times T_j(y_k) dy_k = 0 (i \neq j)$ であるが、非線形関数 $f(y_k)$ を $\hat{f}(y_k) = \sum_{r=0}^N \theta_r T_r(y_k)$ と近似する場合、区間の最小二乗誤差を最小:

$$\min_{\theta} \int_0^1 \left\{ f(y_k) - \sum_{r=0}^N \theta_r T_r(y_k) \right\}^2 dy_k$$

にように求めるものである。これは全領域内の平均二乗誤差を最小にするものであり、極めて関数近似の悪い小領域が生じても仕方がない手法である。

- (c)本チェビシェフ型は、 y_k については重み $\frac{1}{\sqrt{1-y_k^2}}$ で

あるが, 変数変換 $y_k = \cos \theta$ で $\phi_i(\cos \theta) = c_i \cos(i\theta)$ より

$$\int_{-1}^1 T_i(y_k) T_j(y_k) \frac{1}{\sqrt{1-y_k^2}} dy_k = \int_0^\pi T_i(\cos \theta) T_j(\cos \theta) d\theta = 0 \quad (i \neq j)$$

となる。すなわち θ に関しては重みは1である。

非線形関数 $f(y_k)$ を $\hat{f}(y_k) = \sum_{r=0}^N \theta_r T_r(y_k)$ と近似する場合, ほぼミニ・マックス

$$\min_{\theta} \max_{|y_k| \leq 1} \left| f(y_k) - \sum_{r=0}^N \theta_r T_r(y_k) \right|$$

の同定法となっている。すなわち全領域で一様な関数近似誤差をもつ同定が得られる特長がある。

3). 定量的誤差限界の導出について

チェビシェフ型に対しては, 本文(7)式より既知のチェビシェフ補間関数近似の誤差評価が直接利用でき, 結果として定理1の非線形同定の誤差限界式の(4)式が導出できた。これにより一定の同定精度を保障するための, 近似次数 N_j や観測雑音の大きさ σ_w を知る指標が得られた。

4). 計算安定の良さについて

計算精度や安定性については, 次節の簡単な具体的実験例 [具体例 1] より, 本チェビシェフ多項式展開型同定法の優越性が例証される。

6. 数値実験

[具体例 1]

次の非線形システムを同定対象とする。

$$\begin{cases} x_{k+1} + f(x_k) = u_k \\ f(x_k) = \sin(x_k - 0.5) \\ y_k = x_k + w_k \end{cases}$$

$f(\cdot)$ は1変数関数であるため,

$$f(\cdot) \cong \sum_{r=0}^{N_1} \theta_{(r_1)} \phi_{(r_1)}(y; k)$$

と近似する。ここで基底関数 $\phi_{(r_1)}(y; k)$ を5節のをテーラー型, チェビシェフ型, ルジャンドル型とした場合についてシミュレーション実験を行う。

ただし, 入力信号 u_k として $[0, 0.2]$ の一様乱数, 入出力データ500個, 雑音 w_k と信号 x_k との NS (Noise/Signal) 比10%を使用した。 $N_1=60$ としたときの真の非線形関数 $f(\cdot)$ と同定による非線形関数 $\hat{f}(\cdot)$ との絶対値誤差 $|f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)|$ の包絡線を図1に示す。横軸は時刻 k ではなく, y の全区間 $[-1, 1]$ をとっている。テーラー型は同定精度が悪いことを示している。チェビ

表1 平均誤差比較

比率 次数	Leg/Che	Tay/Che
10	1.00	1.00
20	1.00	1.00
30	1.00	1.14
40	1.00	2.98
50	1.03	×
60	1.57	×

(× : very large value)

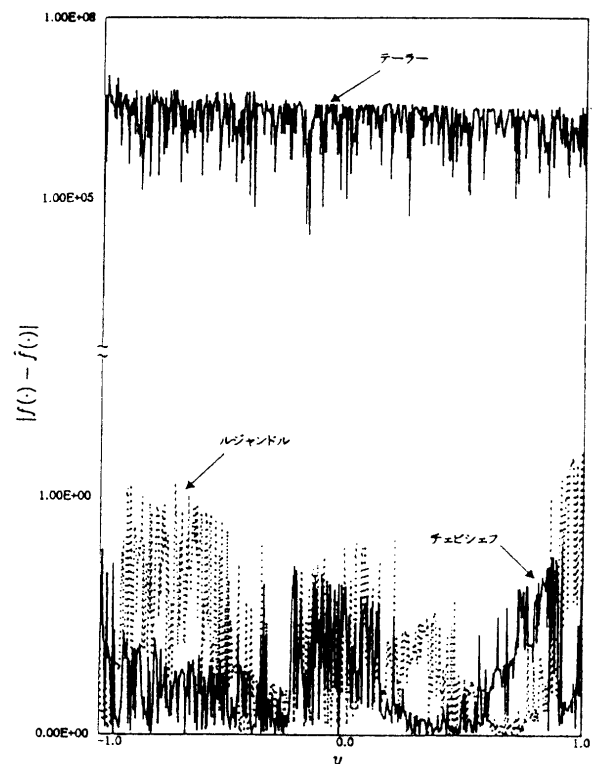


図1 誤差包絡線比較

シェフ型 (実線) は比較的一様で $\max |f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)|$ が0.8である。ルジャンドル型 (破線) は $\max |f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)|$ が1.0以上の小領域が数箇所みられる。そこで, 次数 N_1 をいろいろ変えたときの平均絶対値誤差

$$\widehat{PI} = \frac{1}{500} \sum_{k=1}^{500} |f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)|$$

の比較を表1に示す。

表1中の Leg/Che は, ルジャンドル型対チェビシェフ型の上式 \widehat{PI} の比率, Tay/Che は, テーラー型対チェビシェフ型の \widehat{PI} の比率, をそれぞれ表す。次数 $N_1=1$ から20までは3種類とも評価値がほぼ同じとなった。 $N_1=30 \sim 40$ では, チェビシェフ, ルジャンドル型の評

値はほぼ同じであるが、テーラー型の評価値が悪くなり始めた。\$N_1=50\$ 以上ではテーラー型の評価値がとて大きくなり、Leg/Che 比から、ルジャンドル型の評価値が悪くなっていく様子がわかる。

[具体例 2]

次のシステムを同定対象とする。

$$\begin{cases} x_k + f(x_{k-1}) = u_k \\ f(x_{k-1}) = \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} \\ y_k = x_k + w_k \end{cases} \quad (46)$$

入力信号 \$u_k\$ として \$[-1.0, 1.0]\$ の一様乱数を用い、出力 \$y_k\$ には NS 比 5% の白色雑音を加えた。また、入出

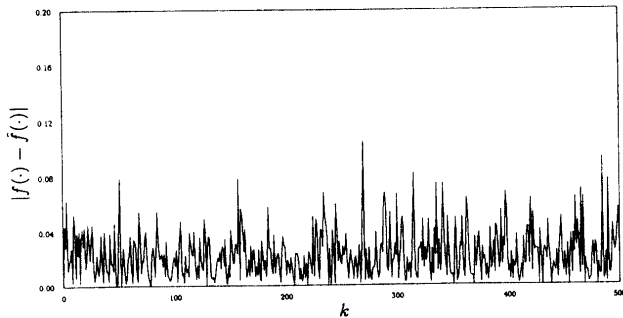


図 2 \$|f(\cdot) - \hat{f}(\cdot)|\$

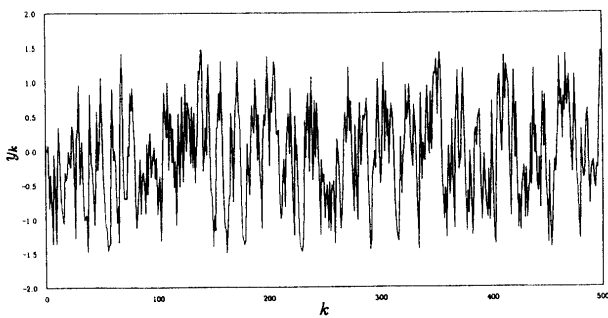


図 3 真の出力 \$y_k\$

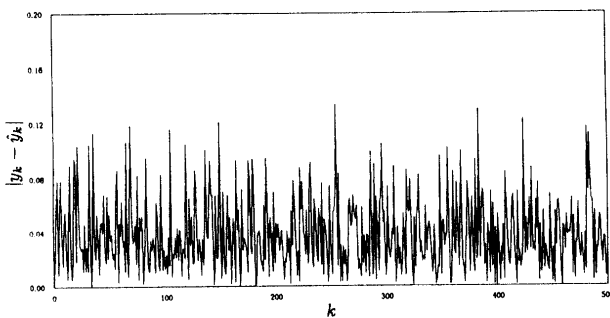


図 4 \$|y_k - \hat{y}_k|\$

力データは \$M=500\$ 個を使用した。

なお、\$f(\cdot)\$ は 1 変数関数なので、(4)式より

$$f(\cdot) \cong \sum_{r=0}^{N_1} \theta_{(r)} T_{(r)}(y:k)$$

と近似する。ただし

$$\Phi(k) = [T_{(0)}(y:k) \cdots T_{(N_1)}(y:k)]^T \quad (47)$$

$$\Theta = [\theta_{(0)} \cdots \theta_{(N_1)}]^T \quad (48)$$

である。

\$N_1\$ を 1 ~ 20 まで変化させて(44)式より AIC を計算した。その結果、\$N_1=8\$ のとき AIC が最小となり、現状でこのシステムを同定するのに最適な次数は 8 であることがわかった。

このときの推定非線形関数 \$\hat{f}(\cdot)\$ と真の非線形関数 \$f(\cdot)\$ との絶対値誤差を図 2 に示す。ほぼ全領域で \$4.0 \times 10^{-2}\$ 以内に収まっている。また、定理 1(4)式より誤差限界を求める。\$J_{\min}/M^2 = 1.67 \times 10^{-6}\$、右辺の項は \$2.44 \times 10^{-3}\$ となり、(4)式の関係を満たしている。ただし F の微分値の計算は、(48)式 \$\theta_{(0)}\$ とした。

真の出力 \$y_k\$ を図 3 に、本手法によって同定された出力 \$\hat{y}_k\$ と \$y_k\$ との絶対値誤差を図 4 にそれぞれ示す。なお、真の出力および推定出力は同定用入力データとは異なる入力に対して求めた。出力誤差は \$\{\sum_{k=1}^M (y_k - \hat{y}_k)^2\} / M = 1.02 \times 10^{-3}\$ となった。

7. あとがき

本論文では、関数近似に際して、絶対値誤差に関してきわめて優れた性質を持っている、チェビシェフ多項式を用いた離散型非線形システムの同定法を提案した。

本手法は、非線形関数のチェビシェフ多項式近似により、非線形システムの同定を線形パラメータ同定問題に帰着させているので、従来の最小二乗法が適用できる。

本手法による誤差限界式を導出した。また適切なチェビシェフ多項式の次数を求めるために、AIC を用いた。数値実験により、本手法による同定は精度がよいことを確認した。

連続時間の非線形システムの同定に適用することが今後の課題である。

参考文献

- 1) S. Chen, S. A. Billings and P. M. Grant: "Non-linear System Identification Using Neural Networks", Int. J. Control, Vol.51, No.6, pp.1191-1214, (1990)
- 2) S. Chen, S. A. Billings and P. M. Grant: "Recursive Hybrid Algorithm for Non-linear

- System Identification Using Radial Basis Function Networks”, *Int. J. Control*, Vol.55, No.5, pp.1051-1070 (1992)
- 3) D. P. Stoten and J. Harkness: “Walsh Functions for the Off-line Identification of Nonlinear Plants and Their Control”, *Int. J. Control*, Vol.60, No.6, p.1121 (1994)
 - 4) Q. M. Zhu and S. A. Billings: “Parameter Estimation for Stochastic Nonlinear Rational Models”, *Int. J. Control*, Vol.57, No.2, p.309 (1993)
 - 5) C. C. Liu and Y. P. Shih: “Analysis and Parameter Estimation of Bilinear Systems via Chebyshev Polynomials”, *Journal of Franklin Institute*, Vol.317, No.6, pp.373-382 (1984)
 - 6) 八野知博, 高田等: 「自動抽出関数と遺伝的アルゴリズムを用いた非線形システムの同定」, *電学論 C*, Vol.117-C, No.10, pp.1506~1512 (1997)
 - 7) 赤坂隆: 「数値計算」, コロナ社, (1974)
 - 8) 相良節夫, 秋月影雄, 中溝高好, 片山徹: 「システム同定」, 計測自動制御学会, (1981)
 - 9) 小松一男, 高田等, 辻輝生: 「チェビシェフ補間近似による非線形システムの形式的線形化計算法」; *電学論 C*, Vol.114-C, No.7/8, pp.835-840 (1994)
 - 10) T. Shingu, H. Takata and T. Hachino, “An Identification Method of Discrete Nonlinear Systems via Chebyshev Interpolation and its Error Bound”, *NOLTA'97*, Vol.2 of 2, T4B-5, pp.1125-1128, (1997)