

○学 鶴田 泰明 (鹿大院) 正 有富 正男 (鹿大)  
正 戸谷 眞之 (鹿大)

Yasuaki TSURUTA, Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima  
Masao ARITOMI, Masayuki TOYA, Kagoshima University

1. 緒 言

本報告では、内部にはく離をもつ2層からなる積層はり  
が温度勾配下におかれた時のはく離進展について、はく離  
部分の上下のはりが異なったたわみ曲線を有すると考えた  
解析を行う。

2. たわみの解析

内部はく離(界面き裂)を有する異種材はりを接着して作ら  
れた積層はり中のはく離の熱応力による進展の解析を行う。  
上のはりの高さ、ヤング率、熱膨張係数、熱伝導率を  $h_1, E_1,$   
 $\alpha_1, k_1$  とし、下のはりのそれぞれを  $h_2, E_2, \alpha_2, k_2$  とする。  
上のはりの上面の温度が  $T_1$ 、下のはりの下面の温度が  $T_2$  と  
保たれているとする。例えば  $T_1 > T_2$  の場合を考えると、温  
度差により上に凸になるような曲げが生ずる。界面に沿っ  
て長さ  $2c$  の層間はく離があるものとし、き裂の上面の温度  
を  $T_A$ 、下面の温度を  $T_B$  とする。Hutchinson および Lu<sup>(1)</sup>は  
同種材同士の組み合わせのはりの解析を行ったが、彼らは  
はく離面上下のはりのたわみを同一と仮定した。我々はこ  
れに対し、上下のはりのたわみは異なっているというより  
一般的な条件のもとで解析する。

まず初めに  $T_A, T_B$  をビオ数で表す式で導いておく。

$$T_A = \frac{T_1(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)}, T_B = \frac{T_2(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)} \quad (1)$$

ただし、

$$\eta = \frac{k_2 h_1}{k_1 h_2}, B_c = \frac{k_1 h_2 + k_2 h_1}{k_1 k_2} h_c \quad (2)$$

$B_c$  はビオ数と呼ばれ、き裂表面の熱の流れを支配する無次  
元数である。 $B_c = 0$  のとき、クラックは完全に熱的に絶縁  
され、 $T_A = T_1, T_B = T_2$  となる。 $B_c = \infty$  のとき、クラック  
による熱の流れの妨害がなく、 $T_A = T_B$  となる。

次に、はく離部分についてそれぞれのはりの中立軸を  $z$   
軸の原点とした時の温度分布を求めると、上のはり、下  
のはりについてそれぞれ以下の式になる。

$$T = \frac{T_1 - T_A}{h_1} z + \frac{T_1 + T_A}{2} \quad (3), T = \frac{T_B - T_2}{h_2} z + \frac{T_B + T_2}{2} \quad (4)$$

はりには一切外部モーメントや集中力などが作用せず熱  
応力によってのみ変形する状態を想定する。はりを接着部  
分とはく離部分に分けて考える。接着部分の力の釣り合い  
条件から、はく離部分と接着部分の境界面に作用する合モー  
メントは 0 であり、また、軸方向合力も 0 であることが

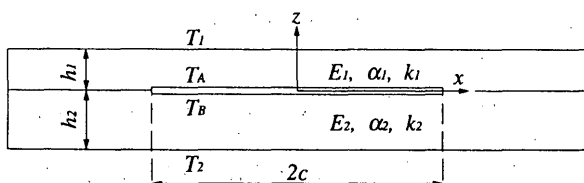


Fig.1 Model of laminated beam

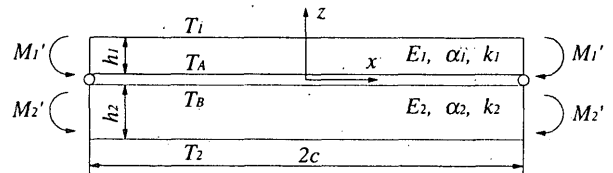


Fig.2 Modeling by hinged lapped beam of the delaminated part

導かれる。接着部分は一定の曲率半径で曲がること導か  
れている<sup>(2)</sup>。特に上下のはりが同種材料の場合には、はり  
の接着部分は曲げを受けるが、応力はいたるところで 0 と  
なる。従って、同種材同士の組み合わせ材料に対するエネ  
ルギー解放率を考察する際には接着部分のエネルギー変化  
は考慮しないで良いことがわかる。

次に、はく離部分のたわみ曲線について解析する。この  
部分は Fig.2 に示すようなヒンジで止められた重ねはりと見  
なすことができる。前述のように、この重ねはりの両端で  
は合モーメントおよび軸方向合力は 0 である。ヒンジの作  
用は上のはりに対しては、はりの両下すみ部に作用する水  
平方向の集中圧縮軸力  $P$ 、下のはりに対しては、はりの両  
上すみ部に作用する水平方向の集中引っ張り軸力  $P$  に置き  
換えることができる。さらにこれらの軸力の着点点を各は  
りの中立軸に移した力学的に等価な系を考えると、例えば  
上のはりの左端と任意の断面で切り離したはりの部分の自  
由体線図は Fig.3 のようになる。

詳細については省略するが、上下のはりのたわみを  $w_1,$   
 $w_2$  とすると、(3), (4)式で与えられる温度分布を持つはり  
について単位幅当たりのモーメントおよび軸力は、上のはり  
について、

$$M_{x1} = -D_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} - \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2}{12} (T_1 - T_A) \quad (5)$$

$$N_{x1} = \bar{E}_1 h_1 \frac{du_1}{dx} - \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1}{2} (T_1 + T_A) \quad (6)$$

下のはりについて、

$$M_{x2} = -D_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2}{12} (T_B - T_2) \quad (7)$$

$$N_{x2} = \bar{E}_2 h_2 \frac{du_2}{dx} - \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2}{2} (T_B + T_2) \quad (8)$$

と表わすことができる。ただし、 $D_i (i = 1, 2)$  ははりの曲げ  
剛性で  $D_i = \bar{E}_i h_i^3 / 12$ 、また  $\bar{E}_i = E_i / (1 - \nu_i^2)$ 、  
 $\bar{\alpha}_i = \alpha_i (1 + \nu_i)$ 。ここで  $\nu_i (i = 1, 2)$  は、ポアソン比である。モーメントの符

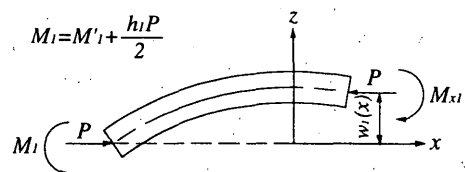


Fig.3 Free-body diagram of upper layer

号は、上向きに凸に曲げるように作用するときを正にしている。はりの両端  $x = \pm c$  で  $w_1(\pm c) = 0$  とするとき、任意の点における曲げモーメントは  $M_{x1} = M_1 + P w_1(x)$ ,  $M_{x2} = M_2 - P w_2(x)$  となるから、式(5), (7)より

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} + \frac{P}{D_1} w_1 = -\frac{1}{D_1} \left\{ M_1 + \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2}{12} \frac{B_C \eta (T_1 - T_2)}{(1 + B_C)(1 + \eta)} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{P}{D_2} w_2 = -\frac{1}{D_2} \left\{ M_2 + \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2}{12} \frac{B_C (T_1 - T_2)}{(1 + B_C)(1 + \eta)} \right\} \quad (10)$$

これより上下のはりのたわみ曲線は以下の式で与えられる。

$$w_1(x) = \frac{1}{P} (M_1 + F_1) \left\{ \frac{1}{\cos k_1 c} \cos k_1 x - 1 \right\} \quad (11)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{P} (M_2 + F_2) \left\{ -\frac{1}{\cosh k_2 c} \cosh k_2 x + 1 \right\} \quad (12)$$

ここで、

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\frac{P}{D_1}} & F_1 = \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2 B_C \eta (T_1 - T_2)}{12(1 + B_C)(1 + \eta)} \\ k_2 = \sqrt{\frac{P}{D_2}} & F_2 = \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2 B_C (T_1 - T_2)}{12(1 + B_C)(1 + \eta)} \end{cases} \quad (13)$$

また、式(11), (12)中の材端モーメント  $M_1$ ,  $M_2$  は、はく離端での上下のはりの傾きが等しいという条件とモーメントの連続条件,  $M_1 + M_2 = PH/2$ , ( $H = h_1 + h_2$ )から決定される。 $M_1$ は次のように与えられる。

$$M_1 = \frac{\left( \frac{PH}{2} + F_2 \right) k_2 \tanh k_2 c - F_1 k_1 \tan k_1 c}{k_1 \tan k_1 c + k_2 \tanh k_2 c} \quad (14)$$

最後に、ヒンジ止めされた重ねはりの各中立軸は変形前、変形後もはりの垂直断面と直交するという条件より

$$u_1(c) - \frac{1}{2} \int_0^c \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx - \left\{ u_2(c) - \frac{1}{2} \int_0^c \left( \frac{dw_2}{dx} \right)^2 dx \right\} + \frac{H}{2} \frac{dw_1}{dx} \Big|_{x=c} = 0 \quad (15)$$

ただし、

$$u_1(c) = -\frac{Pc}{\bar{E}_1 h_1} + \frac{\bar{\alpha}_1 c \left\{ T_1(1 + B_C + \eta) + \frac{B_C \eta}{2} (T_1 + T_2) \right\}}{(1 + B_C)(1 + \eta)} \quad (16)$$

$$u_2(c) = \frac{Pc}{\bar{E}_2 h_2} + \frac{\bar{\alpha}_2 c \left\{ T_2(1 + \eta + B_C \eta) + \frac{B_C}{2} (T_1 + T_2) \right\}}{(1 + B_C)(1 + \eta)} \quad (17)$$

式(15)は軸力  $P$  に関する非線形方程式である。式(15)の左辺を  $F(P)$  とおき、横軸に  $P$ , 縦軸に  $F(P)$  をとりプロットすると、横軸と  $F(P)$  の交点が  $P$  の数値解となる。

### 3. たわみ曲線の数値例とエネルギー解放率

対象を同種材同士の組み合わせに限定し、材料としてアルミナ( $Al_2O_3$ )を仮定し  $E_1 = E_2 = 200$  GPa,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 8 \times 10^{-6} / ^\circ C$  とした。上のはりの厚さ  $h_1 = 0.4$  mm, 下のはりの厚さ  $h_2 = 1.6$  mm として軸力  $P$  の数値解を求めた。得られたたわみ曲線の例を Fig.4 に、はく離部中央の上下のはりの相対変位を温度差  $T_1 - T_2$  に対してプロットしたグラフを Fig.5 に示す。Fig.5 において  $T_1 - T_2 = 6^\circ C$  付近で相対変位は

急激に大きくなっているが、このことは上のはりが座屈に類似した挙動を示すことを表している。

Suo および Hutchinson<sup>(3)</sup>は負荷を受ける積層はりの中の界面クラックのエネルギー解放率を導いた。彼らの結果より

$$G = \frac{c_1}{16} \left[ \frac{P^2}{Ah_1} + \frac{M^2}{Ih_1^3} + 2 \frac{PM}{\sqrt{AI}h_1^2} \sin \gamma \right] \quad (18)$$

上式に基づいて、エネルギー解放率を計算した例を Fig.6 に示す。上下のはりのたわみは等しいと仮定して得られた Hutchinson および Lu<sup>(1)</sup>の計算と比較して、我々の理論による  $G$  はかなり小さくなっている。

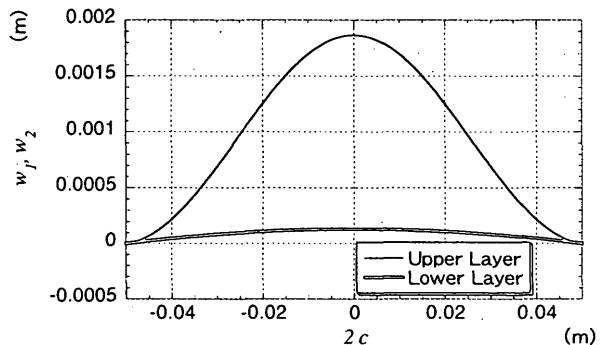


Fig.4 Deflection curves for the case of  $B_C = 0$ ,  $T_1 - T_2 = 100^\circ C$

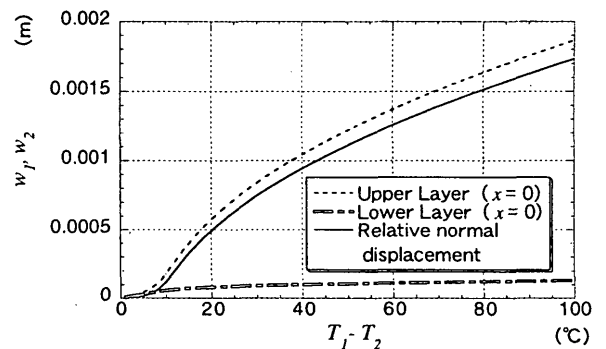


Fig.5 Variation of relative normal displacement at the center of delamination an upper and lower beam ( $2c = 100$  mm,  $B_C = 0$ )

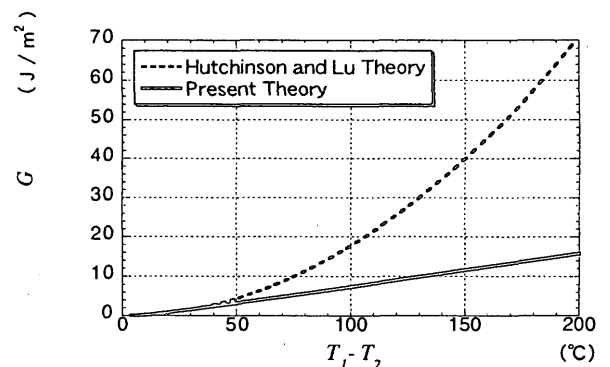


Fig.6 Variation of energy release rate with temperature difference ( $B_C = 0$ )

### 参考文献

- (1) Hutchinson, J. W. and Lu, T. J., Trans ASME, J. Eng. Mat. Tech., Vol.117, (1995), 386-390
- (2) 戸谷ほか 3 名, 機論, 66-647, A(1990), 1362-1369.
- (3) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., Int. J. Fract., Vol.43 (1990), 1-18.