

## はく離を含む積層はりの非対称三点曲げ\*

戸谷 眞之\*<sup>1</sup>, 井料 健\*<sup>2</sup>  
桐岡 健\*<sup>1</sup>, 有富 正男\*<sup>1</sup>Asymmetric Three-Point Bending of a Laminated Beam  
Containing a DelaminationMasayuki TOYA, Takeshi IRYOU,  
Ken KIRIOKA and Masao ARITOMI

Asymmetric three-point bending of a layered beam with an interface crack is analyzed on the basis of classical beam theory. Axial forces induced by bending in the parts of the beam above and below the delamination are determined by regarding the cracked part as two lapped beams hinged at both ends. The compliance and the energy release rate are then derived. Numerical analyses based on the finite-element method are carried out, which show that delamination growth occurs in a mixed mode; i. e., both the normal separation (mode I) and mutual sliding (mode II) of the crack surfaces contribute to the fracturing process. Finally the decomposition of the energy release rate into mode I and mode II components is made by combining the recent analysis for the energy release rates by Toya and two-dimensional linear beam solutions by Suo and Hutchinson.

**Key Words:** Fracture Mechanics, Laminated Beam, Delamination, Bending, Mixed Mode Fracture, Energy Release Rate, Finite-Element Method

## 1. 緒 言

積層材料においては、界面のはく離(界面クラック)が最終の破壊の主要な原因となりうる。このため多くの研究が行われるようになってきた。積層はりの理論解析においては、古典的なオイラー・ベルヌーイの理論(以下、単純はり理論)が、有効である。例えば、Kanninen<sup>(1)</sup>は二重片持ばり試験片のコンプライアンスを、弾性床の上のはりの理論に基づいて導いた。エネルギー解放率は、コンプライアンスをクラック長さで微分して得られた。Ashbyら<sup>(2)</sup>およびCharalambidesら<sup>(3)</sup>は、ノッチ底から、はりの軸方向に伸びるはく離を扱った。また単純はり理論は、ENF試験片が三点曲げを受ける場合(大草<sup>(4)</sup>)や一様な温度変化を受ける場合(Toyaら<sup>(5)</sup>)にも適用され、その有効性が確認されている。

積層はりのはく離についての従来の解析は、有効な破壊靱性試験片を研究するという立場からなされていて、おもに材端のはく離を扱っている。実際の初期は

く離は、例えば板表面に垂直に加えられた低速度衝撃により発生する。この場合、はく離の両端ともに材料中に含まれるが、このような有限長さの内部はく離の解析は最初にMaikumaら<sup>(6)</sup>によりなされた。現著者らは前報<sup>(7)</sup>において対称な三点曲げを受ける積層はりの内部はく離を解析した。本報においては、前報を拡張し、非対称三点曲げを受ける積層はり中の有限長さのはく離を解析する。さらに、界面クラックのエネルギー解放率に関するToya<sup>(8)</sup>の解析、および複素応力拡大係数に関するSuoおよびHutchinson<sup>(9)</sup>の解析を結びつけ、エネルギー解放率のモードIおよびモードII成分への分解を行い、有限要素法による解と比較する。

## 2. 理 論

解析モデルを図1に示す。モデルのはりは同じ長さ  $l$  および幅  $b$  を有する2本のはりをはりあわせたものからなっている。厚さおよびヤング率は、上のはりに対しては  $h_1$  および  $E_1$ 、下のはりに対しては  $h_2$  および  $E_2$  とする。長さが  $c$  のはく離(界面クラック)が含まれていると仮定する。左右のクラック端の材端からの距離はそれぞれ  $a_L$  および  $a_R$  であるとする。集中力  $P$  が左の支持点から距離  $d$  の点に作用している。

\* 平成5年11月20日 日本機械学会九州支部・中国四国支部合同企画 鹿児島地方講演会において講演、原稿受付 平成6年3月14日

\*<sup>1</sup> 正員、鹿児島大学工学部 (〒890 鹿児島市郡元)。

\*<sup>2</sup> 学生員、鹿児島大学大学院。

作用点のはく離部分内にある場合(すなわち,  $a_L \leq d \leq l - a_R$ ) の場合を考える。仮想的にはりを点 B および D を切り離し, 三つの要素 AB, BD, DF に分離する。はく離部分 BD は両端でヒンジで止められた重ねばりともみなすことができる(図 2 参照)。二つのヒンジの作用により上のはりに対しては, 圧縮力  $-Z$ , 下のはりに対しては引張力  $Z$  が生じる。この力の大きさは上下のはりの軸方向の伸びがクラック面上下において等しいという条件から決定される。

はりを着点 C でさらに分離し, ヒンジを力  $\pm Z$  で置き換えると図 3 に示すような自由体線図を得る。すなわち, せん断力  $\alpha F_B, \alpha' F_C$ , 曲げモーメント  $M_{1B}, M_{1C}$ , および圧縮力  $Z$  が, 上のはりに作用する。同様に, せん断力  $\beta F_B, \beta' F_C$ , モーメント  $M_{2B}, M_{2C}$ , 引張力  $Z$  が, 下のはりに作用する。ここで,  $\alpha, \alpha', \beta$  および  $\beta'$  は条件,  $\alpha + \beta = 1, \alpha' + \beta' = 1$  を満足する定数である。平衡条件より, 以下の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} F_B = F_C = Pd'/l \\ M_{1B} + M_{2B} = Pd'a_L/l \\ M_{1C} + M_{2C} = Pdd'/l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで,

$$d' = l - d \dots\dots\dots (2)$$

上下それぞれのはりの中立軸上の点  $x$  における曲げモーメント,  $M_{x1}, M_{x2}$  は以下のように与えられる。

$$M_{x1} = M_{1B} - Zh_1/2 + \alpha Pd'x/l + Zy + \int_0^x q(x')(x-x')dx' \dots\dots\dots (3)$$

$$M_{x2} = M_{2B} - Zh_2/2 + \beta Pd'x/l - Zy - \int_0^x q(x')(x-x')dx' \dots\dots\dots (4)$$

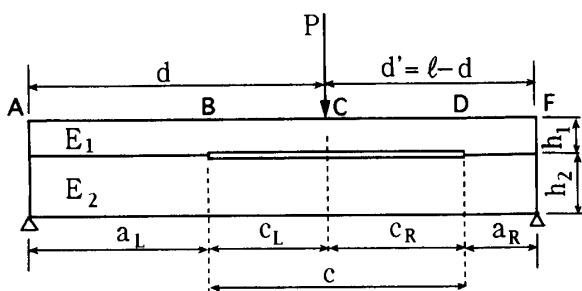


図 1 三点曲げを受ける積層はりの内部はく離

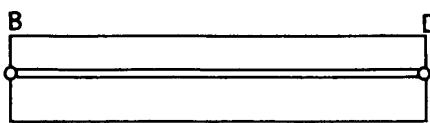


図 2 ヒンジ止めされた積層はりによるモデル化

ここで,  $y$  ははりのたわみであり, 上下のはりで等しいと仮定する。 $q(x)$  はクラック面に作用する反力分布である。たわみの方程式は

$$D_1 d^2 y/dx^2 = -M_{x1}, D_2 d^2 y/dx^2 = -M_{x2} \dots\dots (5)$$

ここで  $D_i$  ( $i=1, 2$ ) は上下のはりの曲げ剛性で  $D_i = E_i I_i, I_i = bh_i^3/12$  である。式(5)<sub>1</sub> と(5)<sub>2</sub> を足し合わせることで, BC 間のたわみは以下のように得られる。

$$y_{BC} = s_1 x^3 + s_2 x^2 + s_3 x \dots\dots\dots (6)$$

ここで

$$s_1 = -Pd'/(6Dl) \dots\dots\dots (7)$$

$$s_2 = -\left(Pa_L d'/l - \frac{1}{2} Zh\right)/(2D) \dots\dots\dots (8)$$

$$D = D_1 + D_2 \dots\dots\dots (9)$$

同様に, D 点を原点に取り左方向に正と取った座標系  $x'$  を用いると CD 間のたわみ  $y_{CD}$  は以下のような。

$$y_{CD} = s'_1 x'^3 + s'_2 x'^2 + s'_3 x' \dots\dots\dots (10)$$

ここで

$$s'_1 = -Pd/(6Dl) \dots\dots\dots (11)$$

$$s'_2 = -\left(Pa_R d/l - \frac{1}{2} Zh\right)/(2D) \dots\dots\dots (12)$$

また, 区間 AB, DF に関しては

$$y_{AB} = -Pd'x^3/(6D'l) + J_1 x \dots\dots\dots (13)$$

$$y_{DF} = -Pdx'^3/(6D'l) + J'_1 x' \dots\dots\dots (14)$$

ここで  $D'$  は付録 A に与えられる合成はりの曲げ剛性である。四つの未知定数  $s_3, s'_3, J_1, J'_1$  は B, C, D 点における傾きとたわみの連続の条件から決定することができる(付録 B 参照)。最後に, 軸力  $Z$  はクラック上面の繊維の伸びはクラック下面の繊維の伸びに等しいという条件,

$$\int_0^{c_L} \epsilon_1 dx + \int_0^{c_R} \epsilon'_1 dx' - \frac{Zc}{E_1 h_1 b} = \int_0^{c_L} \epsilon_2 dx + \int_0^{c_R} \epsilon'_2 dx' + \frac{Zc}{E_2 h_2 b} \dots\dots\dots (15)$$

から決定される。ここで  $\epsilon_i$  ( $i=1, 2$ ) は, 区間 BC でのクラックの上下の面における伸びひずみ, また  $\epsilon'_i$  は区間 CD におけるひずみを表す。すなわち,

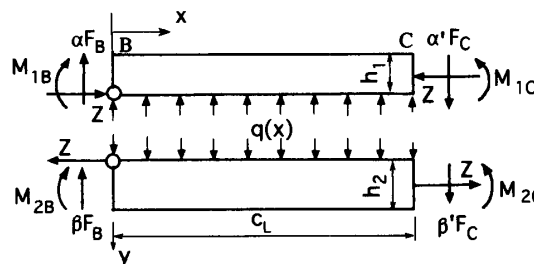


図 3 はく離部 BC の自由体線図

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}(-1)^i h_i \frac{d^2 y_{BC}}{dx^2}, \quad \epsilon'_i = \frac{1}{2}(-1)^i h_i \frac{d^2 y_{CD}}{dx^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(16)を式(15)に代入して

$$\frac{Z}{P} = \frac{hfD_0}{c(4D+h^2D_0)} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を得る。ここで

$$h = h_1 + h_2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$f = [d'(2a_L + c_L)c_L + d(c_R + 2a_R)c_R]/l \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$D_0 = b/[(E_1h_1)^{-1} + (E_2h_2)^{-1}] \quad \dots\dots\dots (20)$$

なお、簡単に確かめられる関係式、

$$D' = D + h^2D_0/4 \quad \dots\dots\dots (21)$$

を用いると、式(17)を以下のように変形することができる。

$$Z/P = f(1 - D/D')/(hc) \quad \dots\dots\dots (22)$$

着力点におけるたわみ  $\delta$  は以下のように与えられる。

$$\delta = y_{AB}|_{x=a_L} + y_{BC}|_{x=c_L} = P\phi \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで

$$\phi = -\frac{1}{3l^2} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) [d^2(d' - c_R)^3 + d'^2(d - c_L)^3] - \frac{1}{4c} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) f^2 + \frac{d^2d'^2}{3lD} \quad \dots\dots\dots (24)$$

は、はりのコンプライアンスである。これより、クラック左端、および右端のエネルギー解放率はそれぞれ以下のように得られる。

$$G_{aL} = \frac{P^2}{2b} \frac{d\phi}{dc_L} = \frac{P^2c^2}{8b} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \left[ \frac{d'}{l} - \left( \frac{c_R}{c} \right)^2 \right]^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$G_{aR} = \frac{P^2c^2}{8b} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \left[ \left( \frac{c_L}{c} \right)^2 - \frac{d'}{l} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

一方、着力点がクラック面上にない場合 ( $d \leq a_L$ )、上述と同様の解析により、コンプライアンス、エネルギー解放率は以下の式で与えられる。

$$\phi = \frac{d^2c^3}{12l^2} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) + \frac{d^2d'^2}{3D'l} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$G_{aL} = G_{aR} = \frac{P^2d^2c^2}{8bl^2} \left( \frac{1}{D'} - \frac{1}{D} \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

この場合、コンプライアンスとエネルギー解放率の両方とも、クラックの長さには依存するが、位置 ( $a_L$  および  $a_R$ ) には無関係であることがわかる。

### 3. 有限要素法(FEM)による解析

次に有限要素法を求め理論解の精度を確かめる。

はりの長さ  $l = 300$  mm、幅  $b = 30$  mm とし、 $a_R = 50$  mm に固定して、軸力、コンプライアンス、エネルギー解放率を  $h_1, h_2$  および  $c$  の関数として計算する。上下のはりを、それぞれ横方向に5分割し、また両

者ともに縦方向に120分割した長方形メッシュを分割の基本とした。クラック近傍では基本要素の1/8のサイズの要素(メッシュ幅は0.3125 mm)を用いた。メッシュ分割の概略図は、前報<sup>(7)</sup>と同様であるのでここでは省略する。

材料としては、上のはりにはアクリル(ヤング率  $E_1 = 2.94$  GPa、ポアソン比  $\nu_1 = 0.345$ )、下のはりにはアルミニウム( $E_2 = 73.5$  GPa、 $\nu_2 = 0.35$ )を選び、はりの中央に単位荷重1 Nを負荷した。はりの厚さとしては、 $h_1 = 5, 10$  mm および  $h_2 = 15, 10$  mm を選び、これらの組合せにつき平面応力条件を仮定して計算を行った。

全エネルギー解放率  $G_{aL}$  および  $G_{aR}$  のモード I およびモード II の成分  $G_I, G_{II}$  は、以下のクラック閉口のシミュレーション<sup>(7)(10)</sup>により求められる。クラック先端に隣接するメッシュの幅  $\Delta a$  に等しくとられたクラックの微小進展を想定し、これを再び元の長さに戻す操作を考える。Y および X を、二つのノードを閉じ合わせておくために必要な節点力の、クラック面に対し垂直方向および接線方向の成分とすると、エネルギー解放率の各成分は以下のように得られる<sup>(7)</sup>。

$$G_I = \frac{1}{2} \frac{Y\Delta v}{b\Delta a}, \quad G_{II} = \frac{1}{2} \frac{X\Delta u}{b\Delta a} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで  $\Delta v$  と  $\Delta u$  は節点間の相対変位の垂直および接線方向成分である。全エネルギー解放率は、 $G_I + G_{II}$  で与えられる。図4-7に軸力、コンプライアンスおよびエネルギー解放率の  $c/l$  に対する変化の様子について、はりの厚さ  $h_1, h_2$  の数種の組合せに対し計算結果と理論解の比較を示すが、両者はよく一致している。

### 4. エネルギー解放率のモード I およびモード II 成分

はく離条件の研究に際し、エネルギー解放率を開口(モード I)成分とせん断(モード II)成分に分解することが重要であるが、このためにはクラック近傍での応力と変形の解析が必要となる。

クラック端近傍の接着面上の特異応力場は、Malyshvら<sup>(11)</sup>の定義による複素応力拡大係数  $K = K_I + iK_{II}$  により以下のように与えられる。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = K(r/h_1)^{ie}/(2\pi r)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $r$  はクラック端からの距離である。また、

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - \beta^*}{1 + \beta^*} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 $\beta^*$  は Dundurs<sup>(12)</sup> の二つのパラメータの内の一つで、

$$\beta^* = \frac{\Gamma(x_2 - 1) - (x_1 - 1)}{\Gamma(x_2 + 1) + (x_1 + 1)} \quad \dots\dots\dots (32)$$

添字 1 と 2 は、それぞれ上下の層に関する量を示し、平面応力の場合、 $x_i = (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i)$ 、平面ひずみの場合  $x_i = 3 - 4\nu_i$  ( $\nu_i$  はポアソン比) である。また、 $\Gamma = \mu_1 / \mu_2$  で、ここに  $\mu_i$  はせん断弾性係数を表す。

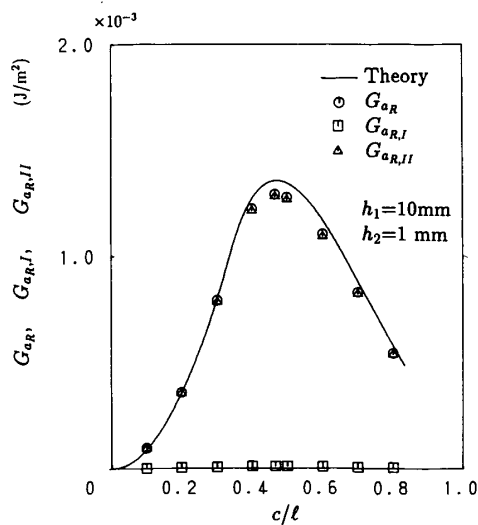
クラックの上下の面の相対変位の  $y$  方向成分は次式で与えられる。

$$v = m \left[ (K_I + 2\epsilon K_{II}) \cos \left( \epsilon \ln \frac{r}{2h_1} \right) - (K_{II} - 2\epsilon K_I) \sin \left( \epsilon \ln \frac{r}{2h_1} \right) \right] \sqrt{r} \dots (33)$$

ここで

$$m = \frac{[(x_1 + 1) / \mu_1 + (x_2 + 1) / \mu_2]}{[2\sqrt{2\pi}(1 + 4\epsilon^2) \cosh(\pi\epsilon)]} \dots (34)$$

クラックの微小進展  $\Delta a$  に際し解放されるエネルギーは最近 Toya<sup>(6)</sup> により計算された。モード I とモード II の各成分は以下のように与えられる。



(a)  $h_1 = 10 \text{ mm}, h_2 = 1 \text{ mm}$

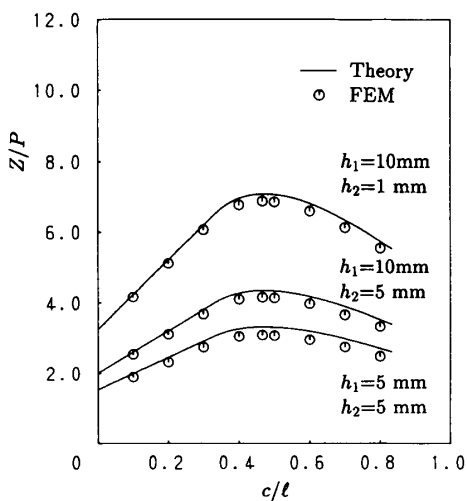
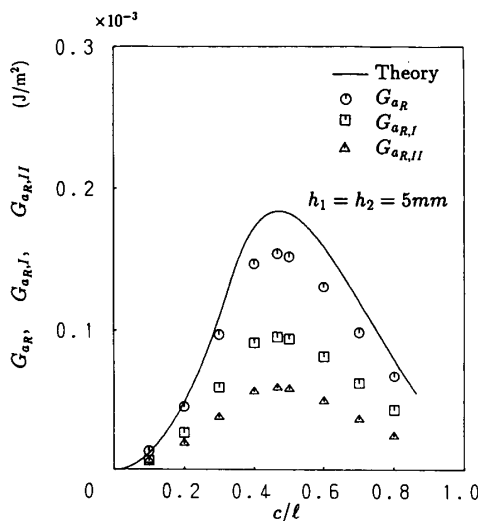


図 4 軸力のクラック長さによる変化



(b)  $h_1 = 5 \text{ mm}, h_2 = 5 \text{ mm}$

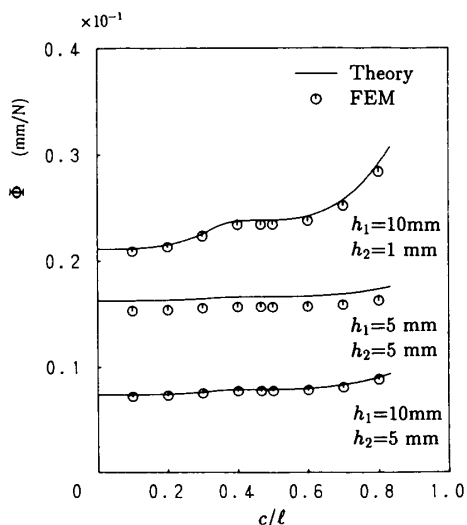
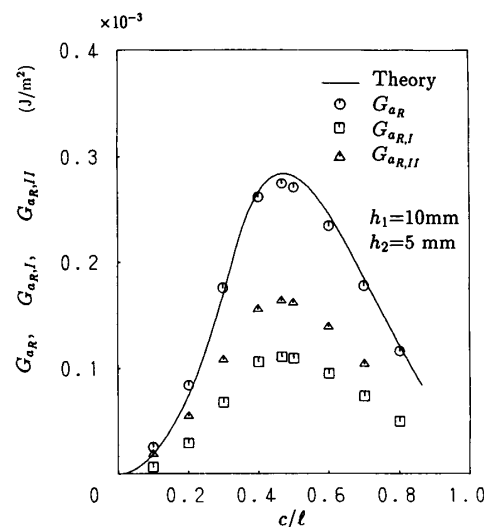
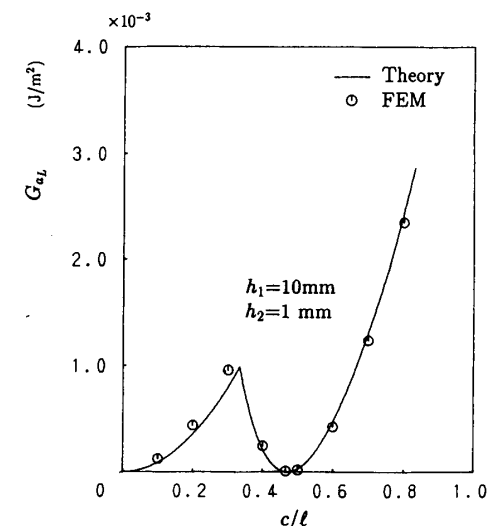


図 5 コンプライアンスのクラック長さによる変化

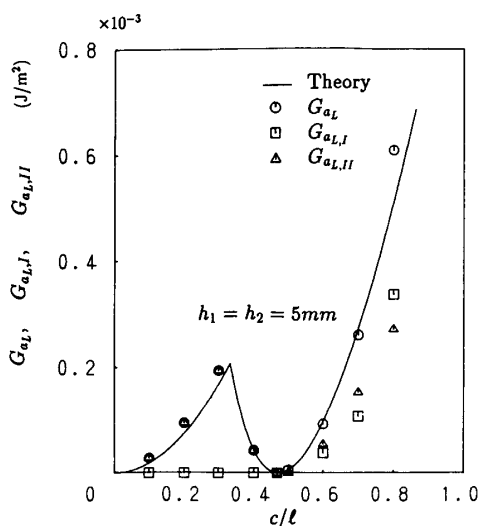


(c)  $h_1 = 10 \text{ mm}, h_2 = 5 \text{ mm}$

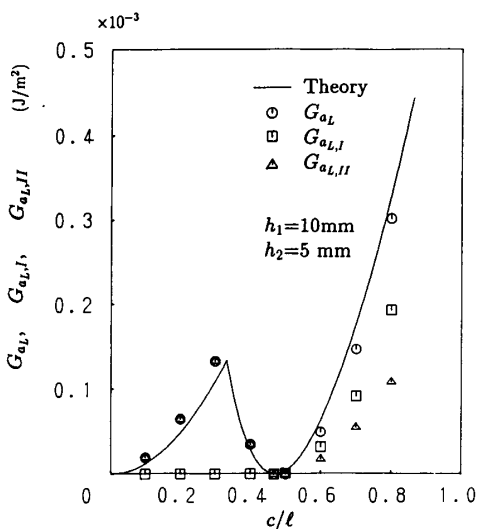
図 6 はく離右端におけるエネルギー解放率とその成分



(a)  $h_1=10\text{ mm}, h_2=1\text{ mm}$



(b)  $h_1=5\text{ mm}, h_2=5\text{ mm}$



(c)  $h_1=10\text{ mm}, h_2=5\text{ mm}$

図 7 はく離左端におけるエネルギー解放率とその成分

$$G_I^d = \frac{1}{2} G \Delta a [1 + F(\epsilon) \cos(2\epsilon a' + \varphi(\epsilon) + \theta_0)] \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$G_{II}^d = \frac{1}{2} G \Delta a [1 - F(\epsilon) \cos(2\epsilon a' + \varphi(\epsilon) + \theta_0)] \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここで

$$F(\epsilon) = \left[ \frac{\sinh(2\pi\epsilon)}{2\pi\epsilon(1+4\epsilon^2)} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$a' = \ln[\Delta a / (2h_1)] \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\varphi(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \tan^{-1} \frac{\epsilon}{1+n} - \tan^{-1} \frac{\epsilon}{\frac{1}{2}+n} \right) \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$\theta_0 = \begin{cases} \tan^{-1} [(1-k^2+4\epsilon k)/k_0], & k_0 > 0 \\ \tan^{-1} [(1-k^2+4\epsilon k)/k_0] + \pi, & k_0 \leq 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (40)$$

$$k = K_{II}/K_I, k_0 = 2[k + \epsilon(k^2 - 1)] \quad \dots\dots\dots (41)$$

$\varphi(\epsilon)$  の値はすでに与えられている<sup>(8)</sup>。また、 $G$  は全エネルギー解放率で

$$G = \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) (K_I^2 + K_{II}^2) / [16 \cosh^2(\pi\epsilon)] \quad \dots\dots\dots (42)$$

式(35)、(36)および式(38)から明らかなように、従来のエネルギー解放率の定義、 $\lim_{\Delta a \rightarrow \infty} G^d / \Delta a$  等に従って界面クラックのエネルギー解放率の成分を定義しようとしても、極限值が存在しないので不可能である。それゆえ、界面クラックのエネルギー解放率の各成分は有限な進展距離  $\Delta a$  に対して

$$G_I \equiv G_I^d / \Delta a, \quad G_{II} \equiv G_{II}^d / \Delta a \quad \dots\dots\dots (43)$$

として定義する必要がある。これらの量は3章で有限要素法により計算したエネルギー解放率成分にほかならない。明らかに、比  $G_I/G_{II}$  は、比  $K_{II}/K_I$  を通してのみ複素応力拡大係数に依存する。

一方、Suo および Hutchinson<sup>(9)</sup> は最近図 8 に示す一般の負荷を受ける積層はり中の界面クラックについて、二次元弾性論に基づく解析を行った。彼らの結果は以下のように与えられる。

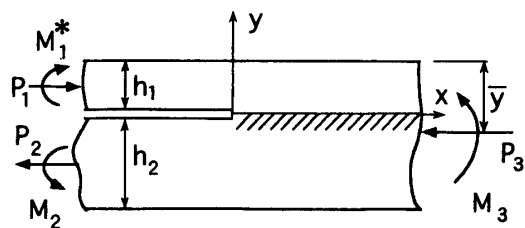


図 8 一般的な力の作用下における積層はりのはく離<sup>(9)</sup>

$$K_I = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ \frac{P_0}{\sqrt{A_0 h_1}} \cos \omega + \frac{M_0}{\sqrt{I h_1^3}} \sin(\omega + \gamma) \right] \dots\dots\dots (44)$$

$$K_{II} = \frac{p}{\sqrt{2}} \left[ \frac{P_0}{\sqrt{A_0 h_1}} \sin \omega - \frac{M_0}{\sqrt{I h_1^3}} \cos(\omega + \gamma) \right] \dots\dots\dots (45)$$

ここで

$$P_0 = P_1 - C_1 P_3 - C_2 M_3 / h_1 \dots\dots\dots (46)$$

$$M_0 = M_1^* - C_3 M_3 \dots\dots\dots (47)$$

定数  $p, A_0, I, \gamma$  および  $C_i (i=1, 2, 3)$  は付録 C に与えられる定数である。また、 $\omega$  は比  $\eta = h_1/h_2$  および Dundurs のパラメータ  $\alpha^*$  および  $\beta^*$  にのみ依存する角度である ( $\alpha^*$  に関しては付録 C 参照)。関数  $\omega(\alpha^*, \beta^*, \eta)$  は文献(9)の表 1-4 に種々の  $\alpha^*$  および  $\beta^*$  の組合せにつき、 $\eta=0, 0.1, 0.5, 1.0$  の各値に対して与えられている。式(44)と式(45)より式(41)<sub>1</sub>の  $k$  が得られ、これよりエネルギー解放率の各成分が式(35)、(36)より求められることになる。

ここで、Suo らの結果<sup>(9)</sup>を、現論文で扱っている問題に適用してみよう。図 1 のはく離の左端に対して、以下の式を得る。

$$M_1^* = (D_1/bD) \left( P a_L d' / l - \frac{1}{2} Zh \right) \dots\dots\dots (48)$$

$$M_3 = P a_L d' / (bl) \dots\dots\dots (49)$$

右端の  $M_1^*$  および  $M_3$  は、 $a_L$  と  $d'$  を、それぞれ  $a_R$  と  $d$  で置き換えて得られる。両方の場合につき、

$$M_0 = -D_1 h P_0 / (2D) \dots\dots\dots (50)$$

が成り立っていることが確かめられる。したがって、比  $k = K_{II}/K_I$  ははく離の両端に対して等しく、しかもはく離長さに依存しない。

着重点がはく離上にない場合には

$$M_1^* = (D_1/bD) \left[ P d(l - a_L) / l - \frac{1}{2} Zh \right] \dots\dots (51)$$

$$M_3 = (P d / bl)(l - a_L) \dots\dots\dots (52)$$

となるが、この場合もやはり式(50)で与えられる一定の比  $M_0/P_0$  を得る。このことから、式(35)-(41)および

式(44)、(45)を参照すると、エネルギー解放率の成分比  $G_I/G_{II}$  は一端が純粋なモード II 形で進展し、他端は混合モードで進展する場合を除き、はく離の両端で等しく、しかもこの比はクラック長さやその位置、また着重点の位置に無関係に一定であるということがわかる。なお、式(42)で与えられる全エネルギー解放率は、平面応力条件の場合には、式(25)、(26)および式(28)と一致することが確かめられる。

ここで、3章で扱ったモデルについて、比  $G_I/G_{II}$  を計算してみよう。Suo ら<sup>(9)</sup>において  $\omega$  の表は  $h_1 \leq h_2$  の場合のみについて計算されている。それゆえ、3章の問題に彼らの結果を適用するためには、モデルのはりの上下を逆にする必要がある。すなわち、アルミニウムはりを上のはりに、アクリルはりを下のはりに選び、また負荷の方向も逆にする。アルミニウム/アクリルの組合せに対し、Dundurs のパラメータは  $\alpha^* = 0.923, \beta^* = 0.300$  となる。Suo ら<sup>(9)</sup>の表から、角度  $\omega$  は  $\eta=1, 0.5, 0.1$  に対して  $\omega \cong 45^\circ, 50^\circ, 58^\circ$  となる。これらの値を用いて  $K_I$  と  $K_{II}$  を計算し、まず式(33)に代入し、 $r = \Delta a$  における  $v$  の正負をチェックする。もし、 $v$  が負であれば、この場合は、純粋のモード II によるクラック進展を意味する。もし、正なら、この場合は混合モードであるので、各エネルギー解放率成分を  $\Delta a = 0.3125 \text{ mm}$  に対し計算する。

アクリルの厚さが  $h_1 = 10 \text{ mm}$ 、アルミニウムの厚さが  $h_2 = 1 \text{ mm}$  の場合に対し、 $v$  は調べたすべてのクラック長さに対し負となった。この結果は  $c/l \approx 0.5$  における  $G_{ax}$  の場合を除き数値解と一致する [図 6 (a) に見るように、わずかではあるが  $G_I$  成分が  $c/l \approx 0.5$  に対して存在する]。

$h_1 = h_2 = 5 \text{ mm}$  および  $h_1 = 10 \text{ mm}, h_2 = 5 \text{ mm}$  の場合に対する  $G_I/G_{II}$  の理論値と FEM 値の比較を、表 1 に示す。Suo ら<sup>(9)</sup>の解析においては、はく離部分および接着部分のはり長さは、無限大と仮定されている。したがって、厳密にはこれらの長さのどちらか、また

表 1 エネルギー解放率の成分比  $G_I/G_{II}$  [%]

$c/l$	$h_1 = 5 \text{ mm (Acryl)}$ $h_2 = 5 \text{ mm (Al)}$				$h_1 = 10 \text{ mm (Acryl)}$ $h_2 = 5 \text{ mm (Al)}$			
	left-hand tip		right-hand tip		left-hand tip		right-hand tip	
	FEM	theory	FEM	theory	FEM	theory	FEM	theory
0.1	0/100		50.3/49.7		0/100		25.8/74.2	
0.2	0/100		58.5/41.5		0/100		34.7/65.3	
0.3	0/100	0/100	61.0/39.0		0/100	0/100	38.6/61.4	
0.4	0/100		61.9/38.1		0/100		40.5/59.5	
0.467	0/100		61.8/38.2	65.9/34.1	0/100		40.4/59.6	46.3/53.7
0.5	0/100		61.8/38.2		0/100		40.4/59.6	
0.6	64.6/35.4		62.2/37.8		41.5/58.7		40.7/59.3	
0.7	62.4/37.6	65.9/34.1	63.1/36.9		41.3/58.7	46.3/53.7	41.4/58.6	
0.8	64.2/35.8		64.1/35.9		55.3/44.7		42.8/57.2	

は双方が、はり理論の適用限界以下の場合(例えば,  $c \leq 5h$ , または  $a_L, a_R \leq 5h$  の場合)には精度は悪くなる。このことを反映して,  $c/l=0.1-0.3, 0.8$  の場合に対して理論と FEM の差は大きくなっている。これらの範囲を除くと, 比  $G_I/G_{II}$  は理論の予測と合致して, クラックの左右端ではほぼ等しくなっていることが確かめられる。 $G_I/G_{II}$  の値自体の一致は, よいとはいえない。しかし, FEM の計算に用いたメッシュ分割がやや粗いことを考えると理論と数値解の一致は満足すべき範囲におさまっているとしてよいであろう。より細かいメッシュ分割を用いれば, よりよい一致が期待できると思われる。以上のことから, はく離部分および接着部分が十分長い場合には, Toya<sup>(6)</sup> と Suo<sup>(9)</sup> の解析を結びつけることにより, エネルギー解放率の各成分を精度よく見積もることが可能であること, また逆に有限要素法でエネルギー解放率の各成分を精度よく計算できれば, 式(35)および式(36)を利用して複素応力拡大係数を決定できるということがわかる。

付 録 A

合成はりの曲げ剛性は以下の式で与えられる。

$$D' = E_1 I_1 + E_2 I_2 \quad \dots\dots\dots (53)$$

ここで  $I_1$  および  $I_2$  は, 合成はりの中立軸に関する上のはりの断面二次モーメントである。すなわち,

$$I_1 = bh_1^3/12 + (\bar{y} - h_1/2)^2 bh_1 \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$I_2 = bh_2^3/12 + (h_1 + h_2/2 - \bar{y})^2 bh_2 \quad \dots\dots\dots (55)$$

ここで  $\bar{y}$  は, 上のはりの上面からはかった中立軸までの距離で,

$$\bar{y} = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad \dots\dots\dots (56)$$

付 録 B

式(6), (10), (13), (14)に現れる定数  $s_3, s'_3, J_1, J'_1$  は以下のように与えられる。

$$s_3 = Ac_L^2(c_L + 3d') + Bc_R^2(3d' - c_R)/(lD) - s_2 c_L(c_L + 2d')/l - s'_2 c_R(-c_R + 2d')/l + 2(Ba_R^3 - Aa_L^3)/(lD') \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$J_1 = s_3 + 3a_L^2 A/D' \quad \dots\dots\dots (58)$$

$$s'_3 = -Ac_L^2(c_L - 3d) + Bc_R^2(3d + c_R)/(lD)$$

$$+ s_2 c_L(c_L - 2d)/l - s'_2 c_R(c_R + 2d)/l - 2(Ba_R^3 - Aa_L^3)/(lD') \quad \dots\dots\dots (59)$$

$$J'_1 = s'_3 + 3a_R^2 B/D' \quad \dots\dots\dots (60)$$

ここで

$$A = Pd'/(6l), \quad B = Pd/(6l) \quad \dots\dots\dots (61)$$

付 録 C

式(44)-(47)に現れる定数は以下のように定義される<sup>(9)</sup>。

$$p = \sqrt{\frac{1 - \alpha^{*2}}{1 - \beta^{*2}}} \quad \dots\dots\dots (62)$$

ここで

$$\alpha^* = \frac{\Gamma(x_2 + 1) - (x_1 + 1)}{\Gamma(x_2 + 1) + (x_1 + 1)} \quad \dots\dots\dots (63)$$

は Dundurs のパラメータである。また現論文の記号を用いると, 平面応力条件のもとで

$$A_0 = \frac{D_0 D_2}{b E_1 h_1 (D' - D_1)} \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$\sin \gamma = \sqrt{\frac{(D' - D) D_1}{(D' - D_1) D}} \quad \dots\dots\dots (65)$$

$$I = D_2/(12D), \quad C_1 = D_0/(b E_2 h_2) \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$C_2 = h_1 h D_0/(2D'), \quad C_3 = D_1/D' \quad \dots\dots\dots (67)$$

文 献

- (1) Kanninen, M. F., *Int. J. Fract.*, **9**(1973), 83.
- (2) Ashby, M. F., Easterling, K. E., Harryson, R. and Maiti, K., *Proc. R. Soc. Lond.*, **A, 398**(1985), 261.
- (3) Charalambides, P. G., Lund, J., Evans, A. G. and Mcmeeking, R. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **56**(1989), 77.
- (4) 大草, 鹿児島大学演習林報告, **11**(1983), 1.
- (5) Toya, M., Miyawaki, T. and Kirioka, K. (Hashiguchi, T.編), *Proc. 18th Inter. Symp. Space Tech. and Sci.*, (1992), 527.
- (6) Maikuma, H., Gillespie, Jr, J. W. and Whitney, J. M., *J. Compos. Mater.*, **23**(1989), 756.
- (7) 戸谷・小野・宮脇・桐岡, *機論*, **58-548, A**(1992), 599.
- (8) Toya, M., *Int. J. Fract.*, **56**(1992), 345.
- (9) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., *Int. J. Fract.*, **43**(1990), 1.
- (10) Rybicki, E. F. and Kanninen, M. F., *Eng. Fract. Mech.*, **9**(1977), 931.
- (11) Malyshev, B. M. and Salganik, R. L., *Int. J. Fract. Mech.*, **1**(1965), 114.
- (12) Dundurs, J., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **36**(1969), 650.