

はく離を有する積層はりの曲げによる局所座屈*

戸谷 眞之*¹, 深川 和良*²
山川 史慎*², 有富 正男*¹

Local Delamination Buckling of a Laminated Beam Caused by Bending

Masayuki TOYA, Kazuyoshi FUKAGAWA,
Fuminori YAMAKAWA and Masao ARITOMI

Three- and four-point bending of a layered beam with a delamination are analyzed on the basis of classical beam theory. Axial tensile and compressive forces are induced by bending in the parts of the beam above and below the delamination. When one of the constituent beams is thin enough, the axial compression causes local delamination buckling. The problem of determining the critical buckling load is reduced to the solution of a characteristic equation. The critical load and the relation between the magnitude of the applied load and the deflection at the point of load application predicted from the analyses are shown to agree well with experiments. The nonzero energy release rates are also predicted for four-point bending, which implies that the delamination can spread via local buckling.

Key Words: Laminated Beam, Delamination, Local Buckling, Bending, Energy Release Rate

1. 緒 言

繊維強化材料は、はりあわせて積層板にして使用されることが多いが、板表面に垂直に加えられた低速度衝撃により、接着部分にはく離が生じやすい。このような初期はく離(界面クラック)がいかなる負荷のもとで進展するかは、構造物の安全性にかかわる重要な問題である。このことを反映し、最近、積層板のはく離が多く研究者の関心を呼んでいる⁽¹⁾。しかし、従来の研究対象は、はりの端から入ったはく離についてのものが多く、内部はく離の研究は、はく離部が軸方向の圧縮を受けて座屈する場合を除けばあまりなされていない。Maikumaら⁽²⁾⁽³⁾は、同種材をはりあわせて作られた積層はりの中央に位置するはく離の三点曲げによる進展を研究した。前報⁽⁴⁾⁽⁵⁾において現著者らは、彼らの研究を拡張し、異種材をはりあわせて作られた積層はりの内部はく離についての解析を行った。はり理論に基づいた簡単な解析により、負荷点のたわみを荷重およびはく離長さの関数として表す簡単な公式を

得、ついでにはく離端のエネルギー解放率を導いた。これらの結果は有限要素法による数値解とよく一致することが確かめられた。

前モデルでははく離部分は相互に接触していることが仮定されていた。実際には、現著者らは実験により大きな曲げモーメントのもとでは、または、はく離している部分のはりの一方が特に薄い場合には、はく離部は座屈を起こすことを見出した。したがって、前報の結果は座屈するまでの小さな負荷に対しては正しいが、座屈後は相互接触という仮定はもはや成立しないので、新たに局所座屈の問題の解析を行う必要がある。積層はりが軸方向の圧縮負荷を受けて、はく離部分で座屈を起こす場合については多くの研究がなされているが⁽⁶⁾⁻⁽⁸⁾、曲げにより座屈が起こる場合の研究は、著者らが知るかぎりではまだなされていない。

本報では、前の解析を進めて、積層はりのはく離部分が三点および四点曲げを受け、局所的に座屈を起こす場合について単純はり理論に基づいた解析を行う。最初に、はく離部の上下のはりに作用する軸方向の力に対する非線形方程式が導かれる。この方程式は、負荷が小さいあいだは、ただ一つの解を有するが、負荷が増大すると二つ以上の解を有するようになる。各解に対応するはりのたわみを調べることにより、座屈は

* 1994年7月14日 日本機械学会九州支部沖繩地方講演会において講演、原稿受付 1995年8月17日。

¹ 正員、鹿児島大学工学部(〒890 鹿児島市郡元1-21-40)。

² 学生員、鹿児島大学大学院。

二つめの解が出現する場合に起きることがわかった。モデルはりについて、臨界座屈荷重を求め、ついで、座屈後のはりのコンプライアンスがはく離長さによりいかに変化するかを計算し、エネルギー解放率に及ぼす座屈の影響について検討する。

2. 非対称三点曲げによる座屈の解析

最初に最も一般的な非対称三点曲げの場合を考える。解析モデルを図1に示す。はりの長さ(=支点間距離)を L 、はりの幅は上下ともに b とし、はりの厚さ、ヤング率および断面二次モーメントは、上のはりについてはそれぞれ h_1, E_1, I_1 、下のはりについては h_2, E_2, I_2 とする。いま、長さ c のはく離(界面クラック)が含まれていると仮定し、左右のはく離端のはりの端からの距離はそれぞれ a_L および a_R であるとする。集中力 P が左の支持点から距離 d の位置に作用している。 $d \leq a_L$ の場合を考える。

仮想的にはりを点BおよびDで切り離し、三つの要素AB, BD, DFに分離する。はく離部分BDは両端がヒンジで止められた重ねばりとみなすことができる⁽⁴⁾⁽⁵⁾。二つのヒンジの作用により上のはりに対しては、今のところ未知の圧縮力 $-Z$ 、下のはりに対しては引張力 Z が生じる。ヒンジを力 $\pm Z$ で置き換えると、BD部に対して図2に示すような上下のはりそれぞれに対する自由体線図を得る。図2中 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ は、条件 $\alpha + \beta = 1, \alpha' + \beta' = 1$ を満足する定数である。平衡条件より、以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} F_B = F_D = -Pd/L, \quad M_{1B} + M_{2B} = dP(L - a_L)/L \\ M_{1D} + M_{2D} = dPa_R/L \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$M_{1B}, M_{2B}, \alpha, \beta$ 等は、今のところ未知であり、これらの値はたわみ曲線を求める過程で決定される。上下のはりのそれぞれのたわみを y_1, y_2 とする。中立軸の x 点断面に作用するモーメント M_{x1}, M_{x2} は以下のように与えられる。

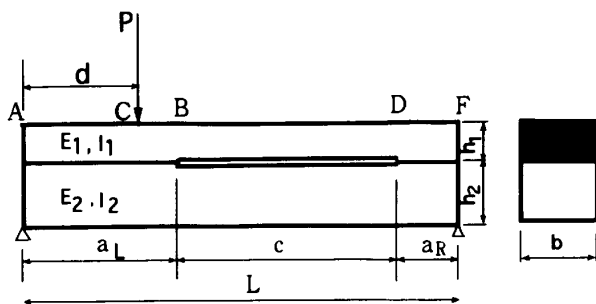


Fig. 1 Model of local delamination buckling of a layered beam subjected to three-point bending

$$\begin{aligned} M_{x1} = M_1 + \alpha F_B x + Zy_1 \\ M_{x2} = M_2 + \beta F_B x - Zy_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで $M_1 = M_{1B} - (1/2)h_1Z$, $M_2 = M_{2B} - (1/2)h_2Z$ は上下それぞれのはりの中立軸に関する材端モーメントである。上下それぞれのたわみの微分方程式、

$$d^2y_1/dx^2 = -M_{x1}/D_1, \quad d^2y_2/dx^2 = -M_{x2}/D_2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

[D_1, D_2 は上下それぞれのはりの曲げ剛性で、 $D_i = E_i I_i, (i=1, 2)$] を解くことにより、たわみの一般解は次のようになる。

$$y_1 = A_1 \cos k_1 x + B_1 \sin k_1 x - \frac{M_1}{Z} + \frac{dP}{LZ} \alpha x \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$y_2 = A_2 \cosh k_2 x + B_2 \sinh k_2 x + \frac{M_2}{Z} - \frac{dP}{LZ} (1 - \alpha)x \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで

$$k_1 = \sqrt{\frac{Z}{D_1}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{Z}{D_2}}$$

以下の五つの条件、 $x=0$ で $y_1=y_2=0, dy_1/dx = dy_2/dx$ 、および $x=c$ で $y_1=y_2, dy_1/dx = dy_2/dx$ から、定数 $A_1, A_2, B_1, B_2, M_1, M_2$ を Z で表すことができる。結果は付録Aにまとめられている。

次に図1の接着部分AC, CB, DF間のたわみをそれぞれ y_{AC}, y_{CB}, y_{DF} とすると、A点を原点にとった x 座標系においてこれらは以下のようになる。

$$y_{AC} = -\left(1 - \frac{d}{L}\right) \frac{P}{6D'} x^3 + j_1 x \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$y_{CB} = \frac{dP}{6LD'} x^3 - \frac{dP}{2D'} x^2 + j_2 x + j_3 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$y_{DF} = \frac{dP}{6LD'} x^3 - \frac{dP}{2D'} x^2 + j_4(x - L) + \frac{dPL^2}{3D'} \quad \dots\dots\dots(8)$$

D' は接着はりの曲げ剛性(付録B参照)である。ここで、C, B, D点におけるたわみと、たわみ角の連続条件

$$[y_{AC}]_{x=d} = [y_{CB}]_{x=d} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\left[\frac{dy_{AC}}{dx}\right]_{x=d} = \left[\frac{dy_{CB}}{dx}\right]_{x=d} \quad \dots\dots\dots(10)$$

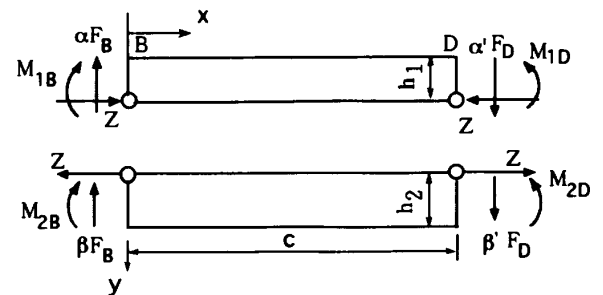


Fig. 2 Free-body diagram of the delaminated part BD

$$\left[\frac{dy_{CB}}{dx} \right]_{x=a_l} = \left[\frac{dy_1}{dx} \right]_{x=0} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left[\frac{dy_1}{dx} \right]_{x=c} = \left[\frac{dy_{DF}}{dx} \right]_{x=a_l+c} \dots\dots\dots (12)$$

$$[y_{DF}]_{x=a_l+c} = [y_{CB}]_{x=a_l} + [y_1]_{x=c} \dots\dots\dots (13)$$

を適用し、五つの未知数 $\alpha, j_1, j_2, j_3, j_4$ が Z の関数として決定される。結果は付録 C にまとめられている。最後に、軸力 Z を求めよう。クラック左端でのはり

のたわみ角を θ_L 、右端でのたわみ角を θ_R (ともに正とする) とすると、上下のはりの無負荷時における長さは等しいことから

$$\frac{Zc}{E_1 h_1 b} + \frac{1}{2} \int_0^c \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx = -\frac{Zc}{E_2 h_2 b} + \frac{1}{2} \int_0^c \left(\frac{dy_2}{dx} \right)^2 dx + \frac{h}{2} (\theta_L + \theta_R) \dots\dots\dots (14)$$

ここで $h = h_1 + h_2$ 。積分は容易に実行でき(具体的な式については付録 D を参照)、 Z に対する非線形方程式を得る。 Z の数値解が求められると、負荷点におけるたわみ δ は

$$\delta = [y_{AC}]_{x=d} = -\left(1 - \frac{d}{L}\right) \frac{Pd^3}{6D'} + j_1 d \dots\dots\dots (15)$$

として得られる。

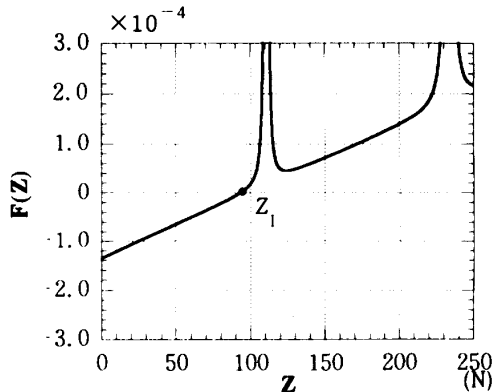
3. Z の数値解

材料として、上のはりが厚さ $h_1 = 1$ mm のアルミニウム材 ($E_1 = 73.5$ GPa)、下のはりが厚さ $h_2 = 10$ mm のアクリル材 ($E_2 = 2.94$ GPa) である積層はり为例にとって計算する。ただし、幅はともに $b = 30$ mm とする。はりの全長は $L = 400$ mm、負荷点は $d = 50$ mm と固定し、はく離長さ c (中心対称を仮定し $a_L = a_R$ とする) および、荷重 P を変化させる。

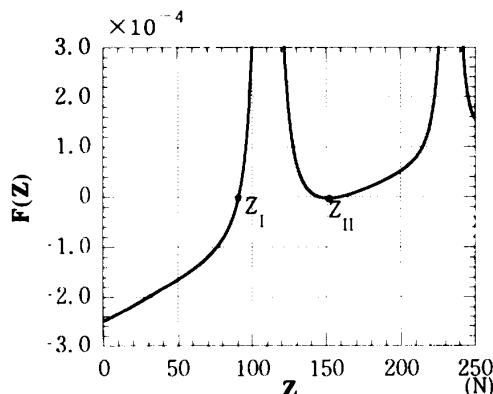
ここで、解くべき方程式 [$F(Z) = 0$ とする] の解の挙動を調べるために $F(Z)$ を Z に対してプロットする。図 3 (a)-(c) に $c = 250$ mm に対して、荷重 P がそれぞれ 30 N、55 N、70 N の場合に対する $F(Z)$ のプロットを示す。荷重が小さい間は、解は一つ存在し、荷重が増加するにつれ解が三つまたはそれ以上に増加することがわかる。ここで、図 3 (c) の三つの解 Z_I, Z_{II}, Z_{III} に対応する上のはりと下のはりのたわみ曲線をそれぞれ図 4 (a)-(c) に示す。図 4 (a) および (c) では、上のはりが下のはりよりも下にオーバーラップしているため、解 Z_I と Z_{III} は不適切であることがわかる。

一方、図 4 (b) のたわみ曲線は矛盾を含まない。したがって、 Z_{II} が、我々の求めている座屈に対応する解であることがわかる。すなわち、解 Z_{II} が初めて現れる荷重を臨界座屈荷重とみなすことができる。臨界座屈荷重は $c = 250$ mm、200 mm、150 mm に対してそれぞれ $P = 55$ N、84 N、148 N となった。予想どおり、はく離長さ c が長いほど、座屈しやすくなることがわかる。

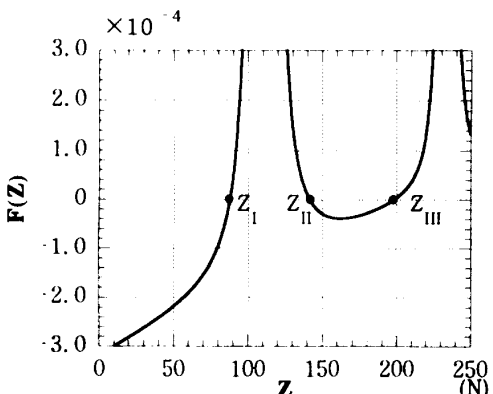
臨界座屈荷重以下の範囲では、座屈は起こらず、はく離部分は相互に全面接触しつつたわむことになる。この場合(すなわち、 $y_1 = y_2$ である場合には前報⁽⁵⁾で求めた結果が有効である。コンプライアンス $\phi (=$



(a) $P = 30$ N



(b) $P = 55$ N



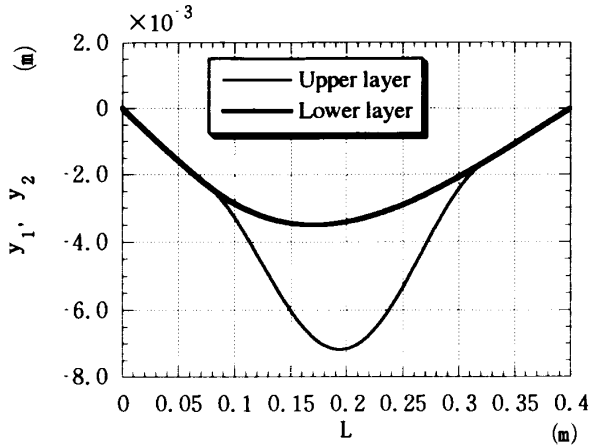
(c) $P = 70$ N

Fig. 3 Change of the number of roots of $F(z) = 0$ when the load P is increased

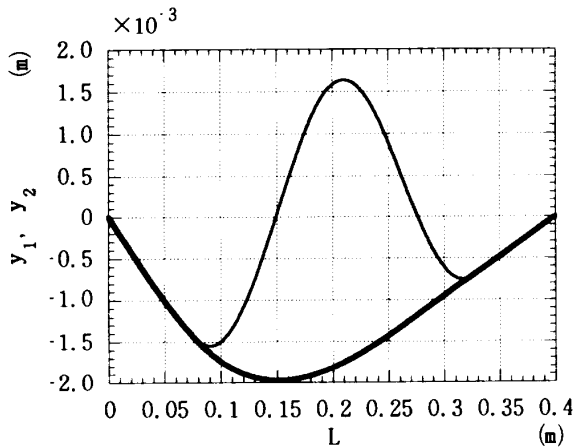
δ/P は次式で与えられている。

$$\phi = \frac{d^2 c^3}{12L^2} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) + \frac{L^3}{3D'} \left(1 - \frac{d}{L} \right)^2 \left(\frac{d}{L} \right)^2 \dots\dots\dots (16)$$

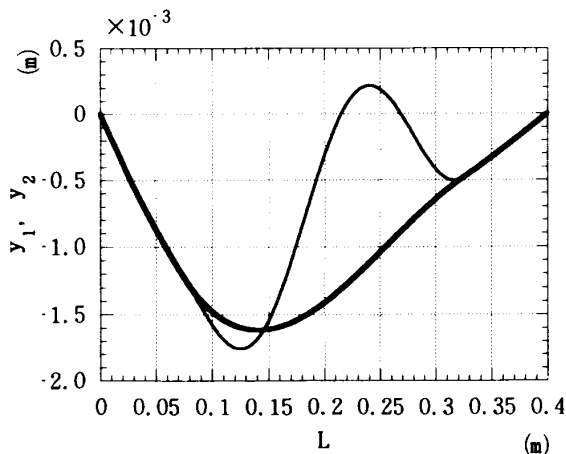
ここで



(a) Deflection curve corresponding to Z_I



(b) Deflection curve corresponding to Z_{II}



(c) Deflection curve corresponding to Z_{III}

Fig. 4 Deflection curve corresponding to $Z_I \sim Z_{III}$ ($c = 250$ mm, $P = 70$ N)

$$D = D_1 + D_2$$

臨界荷重を越えて荷重を増大させるときのはりの荷重-負荷点変位関係(P - δ 曲線)は、いくつかの荷重 P に対して非線形方程式(14)の数値解 Z を求め、式(15)に代入して得られる。後出の図8に見られるように、 P - δ 曲線はほぼbilinearのグラフとなり、座屈後のはりはたわみやすくなること、すなわちコンプライアンスは増大することがわかる。

はく離の進展条件を調べる際にもっとも重要なパラメータはエネルギー解放率である。周知のように、荷重-負荷点変位の関係が線形である試験片において、エネルギー解放率はコンプライアンスのはく離長さによる変化率に比例する。はく離面が接触しつつ進展が起きる場合には、はく離の左右端におけるエネルギー解放率 G は次式により与えられる⁽⁵⁾。

$$G = \frac{P^2}{2b} \frac{d\phi}{dc} \dots\dots\dots (17)$$

したがって座屈前のはく離進展に対しては、はく離の両端で

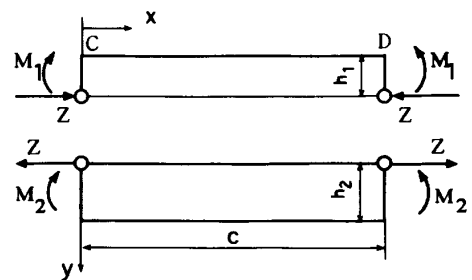
$$G = \frac{P^2 d^2 c^2}{8bL^2} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D'} \right) \dots\dots\dots (18)$$

が得られる⁽⁵⁾。

座屈後は、 P - δ は、bilinear関数となるので、式(17)を適用してエネルギー解放率を求めるわけにはいかない。この場合は、別的手段を用いる必要がある。座屈後のエネルギー解放率が座屈前と比較して増大するかどうかの問題になるが、このことについては4章で



(a) Model for four-point bending



(b) Free-body diagram for the delaminated part CD

Fig. 5 Local delamination buckling under four-point bending

議論する。

4. 四点曲げによる座屈

四点曲げ(純粋曲げ)の場合に対しても同様の解析を行うことができる。解析モデルおよび自由体線図を図5(a), (b)に示す。このモデルにおいては、はく離ははり中央に位置し、また、 $s \leq (L-c)/2$ を仮定している。詳細は省略するが結果を示すと以下ようになる。上のはりの端におけるモーメント M_1 は、

$$M_1 = \frac{k_2(M_f - M_2)\tanh(k_2c/2) + k_1M_1'\tan(k_1c/2)}{k_1\tan(k_1c/2) + k_2\tanh(k_2c/2)} \dots\dots\dots(19)$$

ここで

$$M_1' = h_1Z/2, M_2' = h_2Z/2, M_f = P_s = M_1 + M_2 \dots\dots\dots(20)$$

上式に現れる Z を決定する方程式は以下のように、与えられる。

$$F(Z) = Z - f(Z) = 0 \dots\dots\dots(21)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{f(Z)}{D_0} = & -\frac{1}{4} \left\{ \frac{(M_1 - M_1')k_1}{Z \cos(k_1c/2)} \right\}^2 \left(1 - \frac{\sin k_1c}{k_1c} \right) \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \frac{(M_2 - M_2')/k_2}{Z \cosh(k_2c/2)} \right\}^2 \left(\frac{\sinh k_2c}{k_2c} - 1 \right) \\ & + \frac{hk_1}{c} \frac{M_1 - M_1'}{Z} \tan \frac{k_1c}{2} \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

ただし

$$D_0 = b / \{ (E_1h_1)^{-1} + (E_2h_2)^{-1} \} \dots\dots\dots(23)$$

また、負荷点におけるたわみは以下ようになる。

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{Ps^3}{6D'} + \frac{k_1s(M_1 - M_1')}{Z} \tan \frac{k_1c}{2} \\ & + \frac{Ps^2}{D'} \left(\frac{L-c-s}{2} \right) \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

一方、座屈前に対しては前報⁽⁵⁾と同様の解析により、

$$\delta = \frac{Ps^2}{6D'}(3L-4s) \dots\dots\dots(25)$$

が得られる。この場合、たわみは完全に接着されたはりのそれと等しく、コンプライアンスははく離長さには依存しない。したがって、はく離面が接触する場合

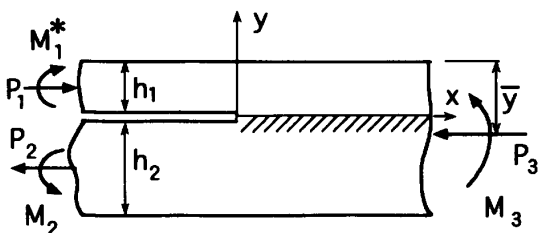


Fig. 6 Split-beam element with unit width under general loading condition

は式(17)にしたがって、エネルギー解放率はつねに零となる。

一方、Suo と Hutchinson⁽⁹⁾ は、図6に示すような一般の負荷を受けている場合のエネルギー解放率を与える公式を導いた。彼らの結果を適用すると、座屈する場合のエネルギー解放率 G は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} 16G \cosh^2(\pi\epsilon) / \left(\frac{x_1+1}{\mu_1} + \frac{x_2+1}{\mu_2} \right) \\ = \frac{C}{2} \left[\frac{P_0^2}{A} + \frac{M_0^2}{Fh_1^2} + \frac{2P_0M_0}{\sqrt{AF}h_1^2} \sqrt{\frac{(D'-D)D_1}{(D'-D_1)D}} \right] \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

ここで

$$M_0 = \frac{1}{b} \left(M_1^* - \frac{D_1M_f}{D'} \right) \dots\dots\dots(27)$$

$$P_0 = \frac{1}{b} (Z - k_0M_f) \dots\dots\dots(28)$$

ただし

$$k_0 = \frac{hD_0}{2D'}, M_1^* = M_1 - h_1Z/2 \dots\dots\dots(29)$$

他の定数については、付録Eを参照。

座屈を起こした瞬間におけるエネルギー解放率を3章で扱ったモデルはりについて計算し、はく離長さ c に対してプロットしたグラフを、図7に示す。ただし、上下のはりのポアソン比をそれぞれ $\nu_1=0.35, \nu_2=0.345$ とし平面応力条件を仮定している。はく離長さが短いほど臨界座屈荷重が大きいことを反映して、エネルギー解放率は、はく離長さが短いほど大きくなっている。図7は、最小のエネルギー解放率であり、与えられたはく離長さに対して界面の破壊靱性値がグラフの値より小さければ、座屈の発生と同時にはく離進展が起きる。また、破壊靱性値が大きいときには、外力を臨界荷重以上に増加することによってはじめてはく離が生じることになる。なお、接触を仮定した解析においては、

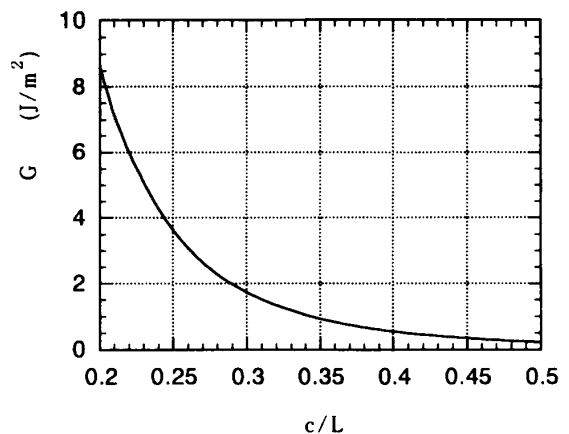


Fig. 7 Energy release rate at critical buckling load

$$Z = k_0 M, M_1 = [D_1 M + k_0 M (D_2 h_1 - D_1 h_2) / 2] / D \dots\dots\dots (30)$$

が得られ、これより $M_0 = 0, P_0 = 0$, すなわち Suo ら⁽⁹⁾の結果を用いても、エネルギー解放率は零となることを、容易に確かめることができる。

熱膨張係数の違う2種の材料を張り合わせた積層はり中には、一様な温度変化(熱的負荷)により熱応力が発生し、このためにはりはたわむ(バイメタルの原理)。一方、熱的負荷は純粹曲げと等価であり⁽⁹⁾、温度変化は力学的なモーメントの大きさに換算できる。式(25)は、熱応力により先在するはく離は進展することはないという、一見パラドックスのような結論を導く。同じ結論は、Suo と Hutchinson⁽⁹⁾によりすでに述べられている。しかし、現解析によれば、大きな温度差に対しては、はく離部に座屈が生じ、これを介してはく離の進展は起こり得るということになる。

5. 実験結果

3章の数値解析で扱ったアルミニウム-アクリル積層はりを実際に作製し、三点曲げ試験を行った。すなわち上のはりを厚さ $h_1 = 1 \text{ mm}$ のアルミニウム、下のはりを厚さ $h_2 = 10 \text{ mm}$ のアクリル材とし、幅はともに 30 mm 、支持点間距離は $L = 40 \text{ mm}$ 、負荷点は $d = 50 \text{ mm}$ に選んだ。中心対称の未接着部分(はく離)を有する数種類の試験片($c = 160 \text{ mm} \sim 300 \text{ mm}$)を作製し、重りをぶらさげ、徐々に増してはりをたわませ、負荷点変位 δ を、レーザ変位計で測定した。はく離長さ $c = 280 \text{ mm}$ の場合における結果を図8に示す。3章で行った数値解析を $c = 280 \text{ mm}$ に対して適用した結果、理論での座屈荷重は約 43 N となったが、実験では約 80 N ではく離部のアルミニウムはりの座屈が起きた。座屈発生の瞬間に δ は急激に増大する。座屈後の $P-\delta$ 関係はほぼ直線であり、その傾きは理論とほぼ一致し

ている。次に、座屈した状態から重りを徐々に取り去り除荷すると、このときには理論とほぼ一致して、 $P \approx 40 \text{ N}$ で傾きの不連続をもつ bilinear な $P-\delta$ 関係となっていることが図8よりわかる。このように $P-\delta$ 関係が履歴をもつという結果は、他のはく離長さの試験片についても、共通していた。いずれの場合も、負荷の際の座屈荷重は理論値の2倍程度であった。

図9に座屈前後のコンプライアンス(Φ)をはく離長さの関数として示す。ここで、コンプライアンスは座屈前後の $P-\delta$ 直線の傾きの逆数として定義している。実験結果は理論計算とよく一致している。

なお、四点曲げの実験も行ったが、この場合は座屈はまったく起きないか、負荷の最初の段階から座屈のモードで変形するかであり、負荷の途中で、座屈前のはく離面接触の状態から、座屈モードに移行することはなかった。このことは、三点曲げにおいては、極めて再現性よく、明りょうに座屈が生じることと対比的であった。この二つの現象の差異がどういう理由で生じるのかは、今のところ現著者らには不明である。この問題の解明、および三点曲げ試験の場合の負荷の際における座屈荷重に対する理論値と実験値との差異の理由の解明は将来の課題としたい。

6. 結 言

内部はく離を有する積層はりの三点、および四点曲げを単純はり理論に基づいて解析した。前報⁽⁴⁾⁽⁵⁾では、曲げを受ける際、はく離部分は相互に全面接触していることを仮定したが、実際には負荷が増大すると、はく離部は座屈を起こし相互接触の仮定は成立しなくなる。最初に、座屈が生じる場合にはく離部の上下のはりに作用している軸力に対する非線形方程式を導いた。この方程式は、負荷が小さいあいだは、ただ一つの解を有するが、負荷が増大すると二つ以上の解を有す

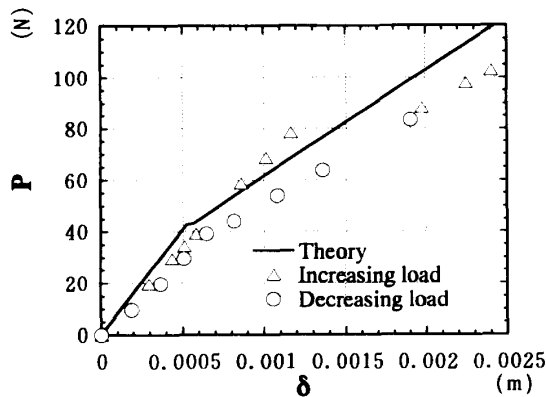


Fig. 8 $P-\delta$ relation for three-point bending

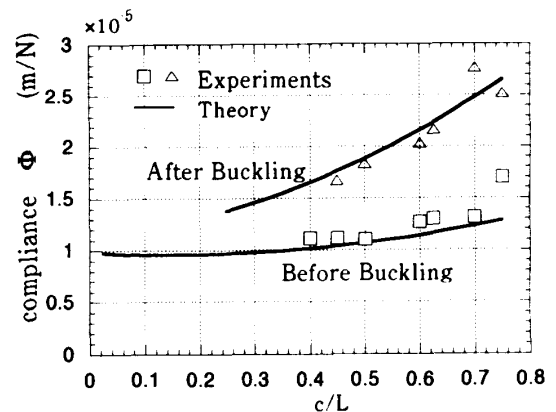


Fig. 9 Compliances before and after buckling

るようになる。各解に対応するはりのたわみを調べる
ことにより、座屈は、二つめの解が出現する場合に起
きることがわかった。モデルはりについて、臨界座屈
荷重を求め、ついで、座屈後のはりのコンプライアンス
がはく離長さによりいかに変化するかを計算し、つ
いでエネルギー解放率に及ぼす座屈の影響について検
討した。最後に実験を行って、解析結果と比較した。

三点曲げの場合、負荷の際の座屈荷重は、理論値の
2 倍程度となり、大きく異なるが、座屈した状態から
除荷していく場合には、ほぼ理論どおりの荷重-負荷
点変位関係(bilinear な関係)が得られた。また、座屈
前後のコンプライアンスは理論値とよく一致してい
る。ただし、三点曲げにおいては、明確に再現性よく座
屈が生じたのに対し、四点曲げにおいては、負荷の最
初から座屈モードで変形するか、または、はく離の上
下面は接触したままで、座屈をまったく起こさないか
のいずれかであった。この現象の解明、および三点曲げ
試験の場合の負荷の際における座屈荷重の理論値と実
験値との差異の理由の解明がこれからの課題である。

付 録 A

式(4)、(5)に現れる定数は以下のように与えられる。

$$A_1 = \frac{M_1}{Z}, A_2 = -\frac{M_2}{Z} \dots\dots\dots (31)$$

$$B_1 = \frac{S(F_4F_5 - F_3F_2) + M(F_3F_5 - F_6F_2)}{Z(F_5F_1 + k_1F_2^2)} \dots (32)$$

$$B_2 = \frac{1}{k_2} \left(B_1k_1 + \frac{S}{Z} \right) \dots\dots\dots (33)$$

$$M_1 = \frac{S(k_1F_4F_2 + F_3F_1) + M(k_1F_3F_2 + F_6F_1)}{F_1F_5 + k_1F_2^2} \dots\dots\dots (34)$$

$$M_2 = M - M_1 \dots\dots\dots (35)$$

ここで

$$F_1 = \sin k_1c - \frac{k_1}{k_2} \sinh k_2c \dots\dots\dots (36)$$

$$F_2 = \cos k_1c - \cosh k_2c, F_3 = 1 - \cosh k_2c \dots\dots\dots (37)$$

$$F_4 = \frac{\sinh k_2c}{k_2} - c, F_5 = k_1 \sin k_1c + k_2 \sinh k_2c \dots\dots\dots (38)$$

$$F_6 = k_2 \sinh k_2c, S = dP/L \dots\dots\dots (39)$$

$$M = S(L - a_L) - Zh/2, (h = h_1 + h_2) \dots\dots\dots (40)$$

付 録 B

接着されたはりの曲げの剛性は、以下の式で与えら
れる。

$$D' = E_1I_1' + E_2I_2' \dots\dots\dots (41)$$

ただし I_1' および I_2' は、合成はりの中立軸に関する上
下のはりの断面二次モーメントである。すなわち、

$$I_1' = bh_1^3/12 + (\bar{y} - h_1/2)^2bh_1 \dots\dots\dots (42)$$

$$I_2' = bh_2^3/12 + (h_1 + h_2/2 - \bar{y})^2bh_2 \dots\dots\dots (43)$$

ここで \bar{y} は、上のはりの上面からはかった中立軸ま
での距離で、

$$\bar{y} = \frac{E_1h_1^2 + E_2(h^2 - h_1^2)}{2(E_1h_1 + E_2h_2)} \dots\dots\dots (44)$$

付 録 C

式(6)-(8)に現れる定数は、以下のように与えら
れる。

$$j_1 = j_2 - d^2P/(2D') \dots\dots\dots (45)$$

$$j_2 = k_1B_1 + \frac{dPa}{LZ} - \frac{dPa_1^2}{2LD'} + \frac{dPa_L}{D'} \dots\dots\dots (46)$$

$$j_3 = -Pd^3/(6D') \dots\dots\dots (47)$$

付 録 D

式(14)に現れる積分は、以下のようになる。

$$\int_0^c \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 dx = \frac{(M_1k_1)^2}{2Z^2} \left(c - \frac{\sin 2k_1c}{2k_1} \right) + \frac{(B_1k_1)^2}{2} \left(\frac{\sin 2k_1c}{2k_1} + c \right) + \left(\frac{adP}{LZ} \right)^2 c$$

$$+ \frac{2B_1adP}{LZ} \sin k_1c + \frac{M_1k_1B_1}{2Z} (\cos 2k_1c - 1) + \frac{2M_1adP}{LZ^2} (\cos k_1c - 1) \dots\dots\dots (50)$$

$$\int_0^c \left(\frac{dy_2}{dx} \right)^2 dx = \frac{(M_2k_2)^2}{2Z^2} \left(\frac{\sinh 2k_2c}{2k_2} - c \right) + \frac{(B_2k_2)^2}{2} \left(\frac{\sinh 2k_2c}{2k_2} + c \right) + (1-a)^2c \left(\frac{dP}{LZ} \right)^2$$

$$-\frac{2B_2(1-\alpha)dP}{LZ}\sinh k_2c + \frac{M_2k_2B_2}{2Z}(1-\cosh 2k_2c) + \frac{2(1-\alpha)M_2dP}{LZ^2}(\cosh k_2c - 1) \dots (51)$$

クラック左右端のたわみ角は以下ようになる。

$$\theta_L = B_1k_1 + \frac{adP}{LZ} \dots (52)$$

$$\theta_R = -(M_1k_1/Z)\sin k_1c + B_1k_1 \cos k_1c + adP/(LZ) \dots (53)$$

付 録 E

である。

本文の式(26)に現れる定数は以下のように定義され

る。

$$A = \frac{D_0D_2}{bE_1(D' - D_1)} \dots (54)$$

$$F = \frac{D_2}{12D}, C = \frac{\Gamma(x_2+1)(x_1+1)}{(\Gamma x_2+1)(\Gamma+x_1)} \dots (55)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta} \dots (56)$$

ここで

$$\beta = \frac{\Gamma(x_2-1)-(x_1-1)}{\Gamma(x_2+1)+(x_1+1)} \dots (57)$$

$$\Gamma = \mu_1/\mu_2 \dots (58)$$

$$x_i = \begin{cases} 3-4\nu_i, \text{ 平面ひずみ} \\ (3-\nu_i)/(1+\nu_i), \text{ 平面応力} \end{cases} \dots (59)$$

μ_i, ν_i は、上下のはりの横剛性率、およびポアソン比

文 献

- (1) 例えば, Hutchinson, J. W. and Suo, Z., *Advances in Applied Mechanics*, **29** (1992), 63-191.
- (2) Maikuma, H., Gillespie, Jr., J. W. and Whitney, J. M., *J. Compos. Mater.*, **23** (1989), 756-786.
- (3) Maikuma, H., Gillespie, Jr., J. W. and Wilkins, D. J., *J. Compos. Mater.*, **24** (1990), 124-149.
- (4) 戸谷眞之・小野孝・宮脇正・桐岡健, *機論*, **58-548, A** (1992), 599-606.
- (5) 戸谷眞之・井料健・桐岡健・有富正男, *機論*, **60-578, A** (1994), 98-104.
- (6) Chai, H., Babcock, C. D. and Knauss, W., *Int. J. Solids Struct.*, **17**(1981), 1069-1083.
- (7) Evans, A. G. and Hutchinson, J. W., *Int. J. Solids Struct.*, **20**(1984), 455-466.
- (8) Kardomateas, G. A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **60** (1993), 903-910.
- (9) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., *Int. J. Fract.*, **43**(1990), 1-18.