

はく離を有する積層はりの自由振動*

有 富 正 男^{*1}, 隈 元 健^{*2}
小 田 美 紀 男^{*1}, 戸 谷 眞 之^{*1}

Free Vibrations of Laminated Beams Containing a Delamination

Masao ARITOMI^{*3}, Takeshi KUMAMOTO,
Mikio ODA and Masayuki TOYA^{*3} Kagoshima University, Dept. of Mechanical Engineering, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima 890-0065, Japan

A study is made on the effect of delamination on the natural vibration characteristics of laminated beams. Free vibration of the simply supported beam with a delamination of arbitrary size and location is analyzed on the basis of the Euler beam theory. Axial forces induced by bending in the parts of the beam above and below the delamination are determined by regarding the cracked part as two lapped beams hinged at both ends. Numerical results for natural frequencies, mode shapes and normal contact pressure between the delaminated layers are presented for the first four modes. Experiments are also conducted. It is shown that the analytical solutions for natural frequencies agree well with experimental results.

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Delamination, Laminated Beam, Natural Frequency, Mode Shape

1. 緒 言

異種材料を接着積層することによって多種多様な特性をもつ材料ができるが、積層材は面に垂直な低速度衝撃を受けると、接着部分のはく離が生じやすい。この層間のはく離は積層構造物の最終破壊の主要な原因となりうるだけではなく、剛性の低下を生じ、振動特性や安定性にも影響を与える。

層間のはく離が積層はりの自由振動特性に及ぼす影響を調査した研究はいくつか見受けられる^{(1)~(5)}。Wangら⁽¹⁾は、はく離領域の上下のはりが異なるたわみをもつと仮定して理論解析をしているが、同種材からなる積層はりの中央面から外れたはく離を有する場合、その振動モードははく離部分の上下のはりがオーバーラップするという不合理をきたす⁽²⁾。そこで Mujumdar と Suryanarayan⁽²⁾は、はく離領域の上下のはりのたわみが等しいと仮定し、しかもその部分の上下のはりの各中立面に軸力が作用するとして連続条件を考え、

同種材からなる積層はりの自由振動を解析している。Tracy と Pardoen⁽³⁾は、オイラーはり理論を用いて中央面にあるはく離を含む対称積層はりの自由振動を解析し、実験および有限要素法で求めた固有振動数と比較して理論の妥当性を検証している。Shen と Grady⁽⁴⁾はチモシェンコはり理論を用いて、複合積層はりの固有振動数と振動モードに及ぼすはく離の影響を調査し、実験結果と比較検討している。Hu と Hwu⁽⁵⁾は、はく離を有する複合サンドイッチはりの自由振動をせん断変形と回転慣性を考慮して解析し、心材、表板およびはく離が固有振動数と振動モードに及ぼす影響を明らかにしている。

本報では、層間のはく離を有する異種材積層はりの自由振動を、オイラーはり理論に基づいて解析する。そのとき、はく離部分は両端でヒンジで止められた重ねはりとみなし⁽⁶⁾⁽⁷⁾、上下のはりのたわみは等しいと仮定して理論解析を行う。そして、はく離長さやはく離位置および上下のはりの縦弾性係数の比などが、両端単純支持はりの固有振動数と振動モードに及ぼす影響を調査するとともに、はく離部分の上下のはりの接触力の分布状態を明らかにする。また、さまざまなはく離条件の異種材からなる積層はりを製作し、振動実験を行って共振法により固有振動数を測定する。その結

* 原稿受付 1998年10月20日。

^{*1} 正員、鹿児島大学工学部 (☎ 890-0065 鹿児島市郡元 1-21-40)。^{*2} 正員、ニチアス(株) (☎ 105-8555 東京都港区芝大門 1-1-26)。

E-mail: aritomi@mech.kagoshima-u.ac.jp

果は理論値とよく一致し、本報で用いた解析モデルが層間はく離を有する異種材積層はりの自由振動解析において妥当であることを述べる。

2. 理論解析

2.1 基礎式 層間はく離が積層はりの自由振動特性に及ぼす基本的な影響を調査するため、上下のはりは複合材料ではなく、等質・等方性材料とする。解析モデルを図1に示す。はりの長さを l 、長方形断面はりの幅は上下ともに b とし、厚さ、縦弾性係数および密度は、上のはりについては h_1, E_1, ρ_1 、下のはりについては h_2, E_2, ρ_2 とする。はりの左端から L_c の距離にはく離中心をもつ、界面に沿った長さ $2c$ の幅全体にわたるはく離が含まれているとし、はりの両端から左右のはく離端までの距離はそれぞれ l_1, l_4 とする。いま、材料に関する諸量を式(1)のように定める。

$$\left. \begin{aligned} I_j &= bh_1^3/12, S_j = bh_j, D_j = E_j I_j (j=1, 2) \\ h &= h_1 + h_2, S = S_1 + S_2, D = D_1 + D_2 \\ \rho S &= \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

また、接着部分の合成はりの曲げ剛性 D' は以下の式で与えられる。

$$D' = E_1 I_1 + E_2 I_2 \dots (2)$$

ここで、 I_1 および I_2 は、合成はりの中立軸に関する上下のはりの断面二次モーメントで、上のはりの上面から中立軸までの距離を e とすれば次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= bh_1^3/12 + (e - h_1/2)^2 bh_1 \\ I_2 &= bh_2^3/12 + (h_1 + h_2/2 - e)^2 bh_2 \\ e &= \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

はく離部分は図2のように両端はヒンジで止められた重ねはりとみなし、振動中上下のはりが接すると、クラック界面に分布反力 $q(x, t)$ が作用すると仮定する。はく離部分の上下のはりに作用する軸力を Z とすると、その自由体線図は図2となる。次に、図1で定めた座標軸 x_i とたわみ w_i 、および時間 t と各諸量を

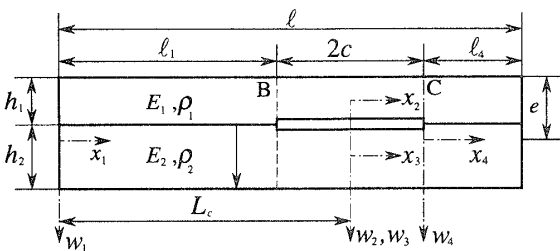


Fig. 1 Geometry of a laminated beam with a delamination

$$\left. \begin{aligned} (\xi_i, \bar{l}_i, \bar{c}, \bar{L}_c) &= (x_i, l_i, l_4, c, L_c)/l \\ (\bar{w}_i, \bar{h}_j) &= (w_i, h_j)/h, \bar{\rho}_j = \rho_j/\rho, \\ \bar{D}_j &= D_j/D, (i=1 \sim 4, j=1, 2) \\ \bar{D} &= D/D', \alpha = E_1/E_2, \\ \bar{D}' &= \frac{12D'}{E_2 b h^3}, \bar{q} = \frac{q l^4}{D' h}, \bar{Z} = \frac{Z l^2}{D'}, \\ \tau &= \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{D'}{\rho S}} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

と無次元化すると、接着部分の合成はりの運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \xi_i^4} = 0, (i=1, 4) \dots (5)$$

となる。また、はく離部分の上下のはりの運動方程式は、接触力が作用する場合には

$$\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^4} + \bar{Z} \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^2} + \bar{q} = 0 \dots (6)$$

$$\bar{\rho}_2 \bar{h}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \bar{D}_2 \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_3}{\partial \xi_3^4} - \bar{Z} \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \xi_3^2} - \bar{q} = 0 \dots (7)$$

となり、接触力が作用しない場合には

$$\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^4} + \bar{Z} \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^2} = 0 \dots (8)$$

$$\bar{\rho}_2 \bar{h}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \bar{D}_2 \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_3}{\partial \xi_3^4} - \bar{Z} \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \xi_3^2} = 0 \dots (9)$$

と表される。ここで、はく離部分に接触力が作用していない場合も、近似的に上下のはりはほとんどすき間のない状態で振動しているとし、上下のはりのたわみは両者の場合とも等しい ($\bar{w}_2 = \bar{w}_3$) と仮定する。また、 $\xi_2 = \xi_3$ とおけるので、はく離部分の運動方程式は式(6)と(7)、または式(8)と(9)を加え合えると

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^4} = 0 \dots (10)$$

のように非常に簡単な式で表される。式(6)から(9)までに含まれる軸力 \bar{Z} は、クラック上面の繊維の伸びはクラック下面の繊維の伸びに等しいという条件⁽⁷⁾から

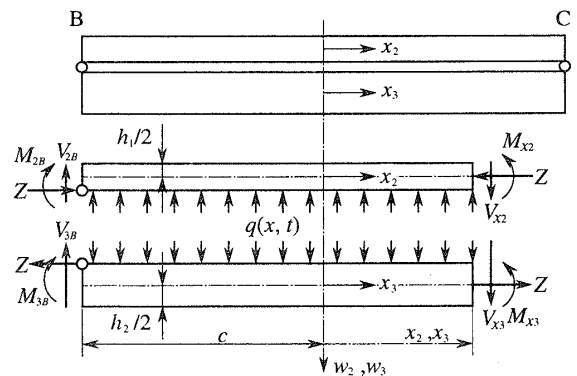


Fig. 2 Free body diagram in the delamination region

$$\bar{Z} = -\frac{3}{D' \bar{c}} \cdot \frac{a \bar{h}_1 \bar{h}_2}{a \bar{h}_1 + \bar{h}_2} \left[\left(\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \xi_2} \right)_{\xi_2 = \bar{c}} - \left(\frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \xi_2} \right)_{\xi_2 = -\bar{c}} \right] \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。上式の誘導は文献(7)でなされているので、ここでは省略する。ただし α は、式(4)中で示した縦弾性係数の比である。

2・2 解法 いま、無次元固有角振動数を \bar{p} とし、はりのたわみ \bar{w} と軸力 \bar{Z} を

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_i(\xi_i, \tau) &= X_i(\xi_i) \sin(\bar{p}\tau + \phi), (i=1, 2, 4) \\ \bar{Z}(\tau) &= \bar{Z}_0 \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

とおくと、式(5)および(10)より $X_i(\xi_i)$ は

$$\left. \begin{aligned} X_i(\xi_i) &= C_{i1} F_{i1}(\xi_i) + C_{i2} F_{i2}(\xi_i) \\ &+ C_{i3} F_{i3}(\xi_i) + C_{i4} F_{i4}(\xi_i) \dots\dots\dots (13) \\ F_{i1}(\xi_i) &= \sinh \lambda_i \xi_i + \sin \lambda_i \xi_i \\ F_{i2}(\xi_i) &= \cosh \lambda_i \xi_i + \cos \lambda_i \xi_i \\ F_{i3}(\xi_i) &= \sinh \lambda_i \xi_i - \sin \lambda_i \xi_i \\ F_{i4}(\xi_i) &= \cosh \lambda_i \xi_i - \cos \lambda_i \xi_i, (i=1, 2, 4) \\ \lambda_1^2 = \lambda_3^2 = \lambda^2 = \bar{p}, \lambda_2^2 = \lambda_4^2 = \lambda^2 / \sqrt{D} = \bar{p} / \sqrt{D} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

と得られ、軸力の大きさ \bar{Z}_0 は

$$\bar{Z}_0 = -\frac{3}{D' \bar{c}} \cdot \frac{a \bar{h}_1 \bar{h}_2}{a \bar{h}_1 + \bar{h}_2} \left[\left(\frac{dX_2}{d\xi_2} \right)_{\xi_2 = \bar{c}} - \left(\frac{dX_2}{d\xi_2} \right)_{\xi_2 = -\bar{c}} \right] \dots (15)$$

で与えられる。

次に、本報では両端単純支持はりを取上げる。このとき、境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = 0 \text{ で } X_1 = 0, d^2 X_1 / d\xi_1^2 = 0 \\ \xi_4 = \bar{l}_4 \text{ で } X_4 = 0, d^2 X_4 / d\xi_4^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

となる。またはく離部分では、軸力の鉛直方向成分は上下のはりで大きさが等しく作用方向が反対となるため、せん断力の連続条件は軸力に無関係となる。したがって、連続条件は次式で表される。

はく離先端 B($\xi_1 = \bar{l}_1, \xi_2 = -\bar{c}$) において

$$\left. \begin{aligned} X_1 = X_2, \frac{d^2 X_1}{d\xi_1^2} = \bar{D} \frac{d^2 X_2}{d\xi_2^2} - \frac{1}{2} \bar{Z}_0 \\ \frac{dX_1}{d\xi_1} = \frac{dX_2}{d\xi_2}, \frac{d^3 X_1}{d\xi_1^3} = \bar{D} \frac{d^3 X_2}{d\xi_2^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

はく離先端 C($\xi_2 = \bar{c}, \xi_4 = 0$) において

$$\left. \begin{aligned} X_4 = X_2, \frac{d^2 X_4}{d\xi_4^2} = \bar{D} \frac{d^2 X_2}{d\xi_2^2} - \frac{1}{2} \bar{Z}_0 \\ \frac{dX_4}{d\xi_4} = \frac{dX_2}{d\xi_2}, \frac{d^3 X_4}{d\xi_4^3} = \bar{D} \frac{d^3 X_2}{d\xi_2^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

そこでまず、式(13)の X_1 に式(16)の左端における境界条件を適用すれば

$$C_{12} = C_{14} = 0 \dots\dots\dots (19)$$

が得られる。次に、式(16)の右端における境界条件、および式(17)、(18)の連続条件を適用し、はく離のない合成はりの正規関数 X_1, X_4 中の定数 C_{11}, C_{13} および $C_{41} \sim C_{44}$ を消去すると

$$[B]\{C_2\} = \{0\} \dots\dots\dots (20)$$

の形の関係式が得られる。ここで $[B]$ は4行4列の正方マトリックスである。

3. 計算結果

式(20)から得られる振動数方程式、すなわち

$$|B| = 0 \dots\dots\dots (21)$$

は超越方程式となるため、振動数パラメータ λ はニュートン法で求めた。また、数値計算は $2\bar{c} = 0.001 \sim 0.99$ のはく離長さの範囲で行った。

3・1 振動数パラメータと軸力 固有振動数 f と振動数パラメータ λ の間には

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{D'}{\rho S}} \dots\dots\dots (22)$$

の関係が成立する。ただし D' と ρS は、異種材からなる積層はりの場合には上層はりの厚さ h_1 によって変化する量である。

図3は、振動数パラメータに及ぼすはく離長さの影響を、はく離の厚さ方向の位置をパラメータに示したものである。このとき、縦弾性係数比 $\alpha = 0.5$ の異種材積層はりの、スパン中央にはく離中心をもつ ($\bar{L}_c = 0.5$) 左右対称はりを取上げた。まずはく離長さが零に近づくと、 λ はほぼ $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ の値となっている。また、はく離長さが長くなると、はく離の位置や振動次数に関係なく、 λ の値つまり固有振動数は減少するが、この減少の傾向は振動次数によって異なる。まず一次と三次の左右対称モードの場合、固有振動数ははく離長さが約 $0.4l$ と約 $0.2l$ まで、はく離のない積層はりの振動数とほぼ同じ値となる。このことは、ある程度のはく離長さまでにはく離の存在による固有振動数の減少が、軸力の作用によって妨げられているものと考えられる。これに対して、二次と四次の左右逆対称モードでは両はく離端の傾きは常に等しく、軸力が作用しないため短いはく離長さで固有振動数の減少が始まっている。

図4と5は、はく離のスパン方向の位置がそれぞれ振動数パラメータと軸力に及ぼす影響を示したものである。このとき、軸力 \bar{Z}_0 は振動モードが略図で示される場合で、最大振幅 A が積層はりの厚さ h の0.3倍、すなわち $\bar{A} = A/h = 0.3$ として計算した。また図2に示すように、軸力は上層のはりを圧縮、下層のはりを引張りとするものを正とする。まず図4より、固有

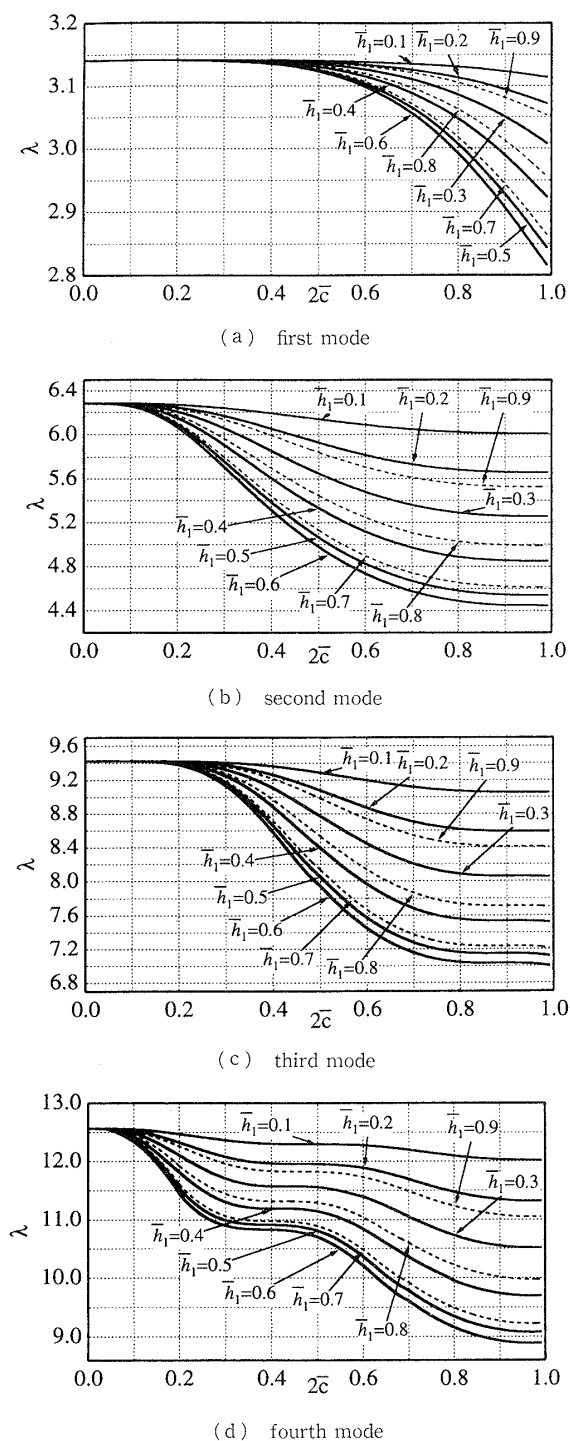


Fig. 3 Effect of delamination length on frequency parameter ($\bar{L}_c=0.5, \alpha=0.5$)

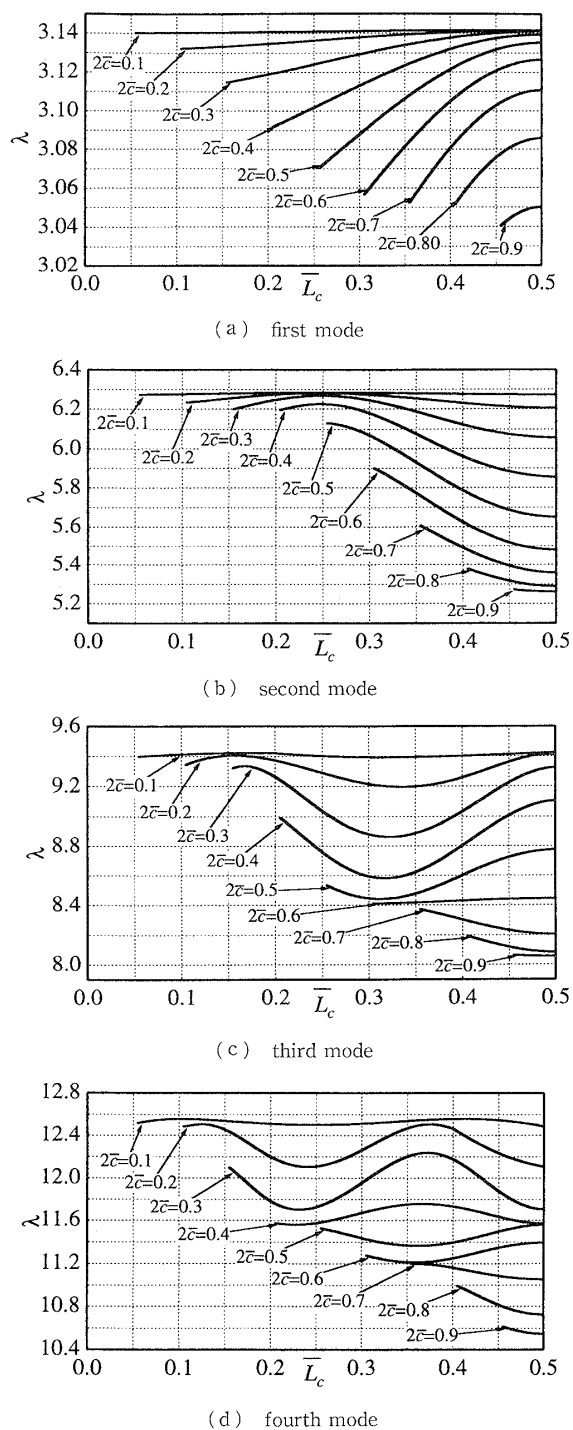
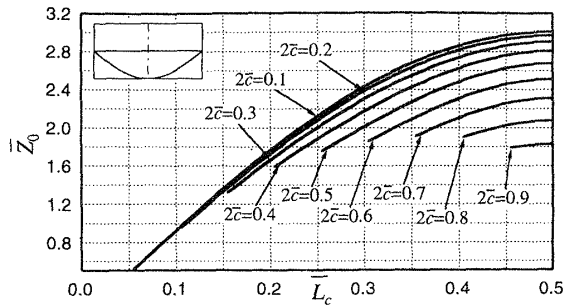


Fig. 4 Effect of spanwise location of delamination on frequency parameter ($\bar{h}_1=0.3, \alpha=0.5$)

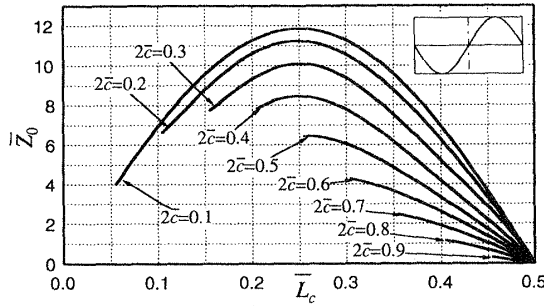
振動数に及ぼすはく離の影響は、一次と二次の振動モードでは、はく離長さに関係なくはく離中心がモードの腹の部分に位置する場合が最も小さく、モードの節の部分に位置する場合が最も大きくなる。これに対して高次振動の場合、はく離長さが短い場合は同様な傾向を示すが、はく離長さが長くなるとはく離部分がモードの腹と節の両者にまたがり、はく離のスパン方向

の位置が固有振動数に及ぼす影響は複雑となる。また図5の軸力と図4を比較してみると、はく離中心がモードの腹にあるとき軸力は最大で固有振動数もほぼ最大となり、節にあるときは軸力は零で固有振動数は最小となっている。したがって、軸力ははく離による固有振動数の減少を抑制しているものと思われる。

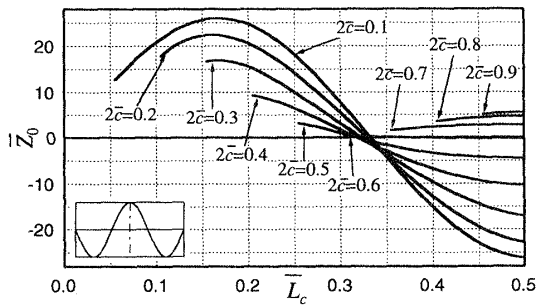
図6は、はく離の厚さ方向の位置が振動数パラメー



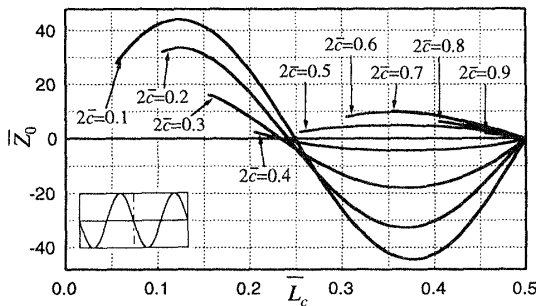
(a) first mode



(b) second mode



(c) third mode

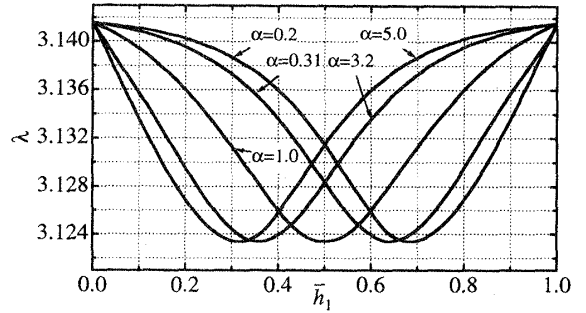


(d) fourth mode

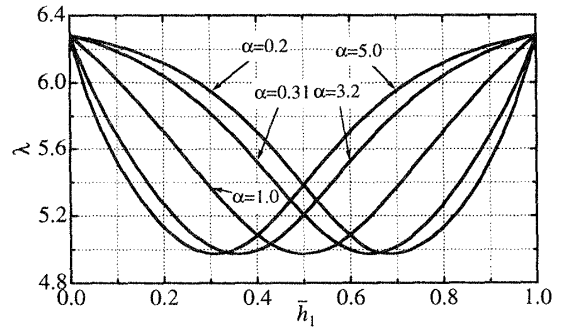
Fig. 5 Effect of spanwise location of delamination on axial force ($\bar{h}_1=0.3, \alpha=0.5, \bar{A}=0.3$)

タに及ぼす影響を、縦弾性係数比 α をパラメータとして示したものである。同種材の場合、はく離が積層はりの中立面にあるとき λ の値、すなわち固有振動数は最小となる⁽²⁾。そこで式(3)において $e=h_1$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} \alpha=1 \text{ のとき } \bar{h}_1 &= 0.5 \\ \alpha \neq 1 \text{ のとき } \bar{h}_1 &= (\sqrt{\alpha}-1)/(\alpha-1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$



(a) first mode



(b) second mode

Fig. 6 Effect of thickness-wise location of delamination on frequency parameter ($2\bar{c}=0.5, \bar{L}_c=0.5$)

が得られる。図6をみると、 λ の値は上式を満足する \bar{h}_1 のとき、つまり $\alpha=5, 3.2, 1, 0.31, 0.2$ に対して $\bar{h}_1=0.31, 0.36, 0.5, 0.64, 0.69$ のとき最小となっている。したがって、振動数パラメータ λ の値は異種材からなる場合も、はく離が積層はりの中立面にあるとき最小となることがわかる。

3・2 振動モードとクラック界面の接触力 一次振動では、はりの径間にモードの節が表れない。そのため、いずれのはく離条件においてもはく離が振動モードに及ぼす影響はほとんどみられなかった。したがって、ここでは2~4次の振動モードを取上げる。図7は、上層と下層のはりの曲げ剛性比が $D_1/D_2 \approx 0.04$ で、最大振幅が $\bar{A}=0.3$ のときの振動モードである。図7から、はく離部分の重ねはりの曲げ剛性 D が接着部分の合成はりの曲げ剛性 D' に比べて小さいため、モードの腹ははく離部分に存在する場合、最大たわみははく離部分に生じることがわかる。それに伴って、モードの節ははく離のないはりに比べてはく離の中心方向へ移動している。

次に、クラック界面に分布する接触力 \bar{q} は、式(6)または(7)からわかるように時間の関数である。そこでここでは

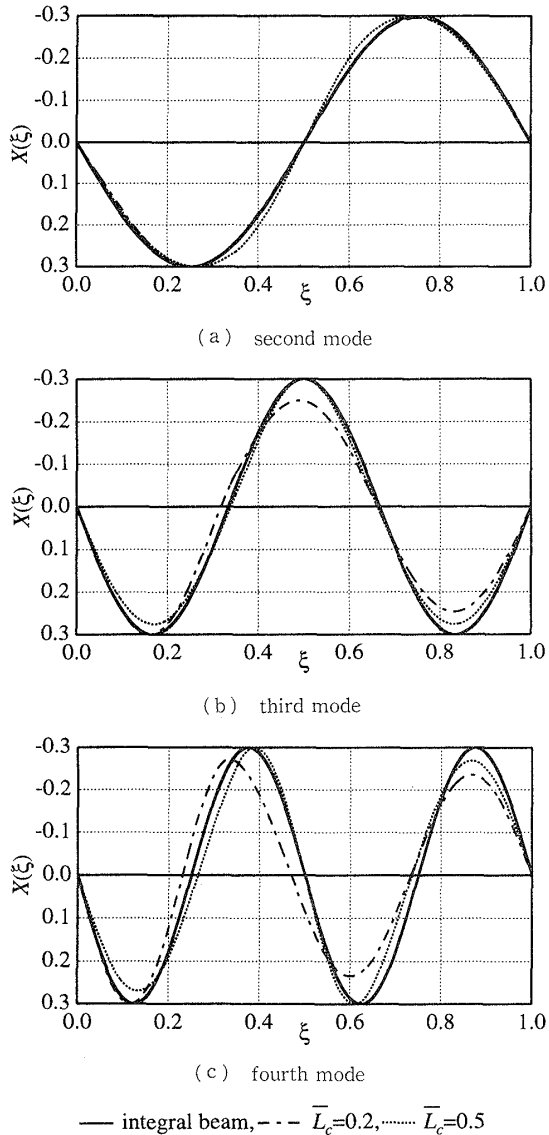


Fig. 7 Effect of spanwise location of delamination on mode shape ($2\bar{c}=0.3, \bar{h}_1=0.3, \alpha=0.5$)

$$\tau_0 = \left(\frac{2n+1}{2} \pi - \phi \right) / \bar{p}, (n=0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

の時刻における接触力の分布 \bar{q}_0 を

$$\begin{aligned} \bar{q}_0(\xi_2) &= \bar{q}(\xi_2, \tau_0) \\ &= \pm \left[\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \lambda^4 X_2 - \bar{D}_1 \bar{D} \frac{d^4 X_2}{d\xi_2^4} \mp \bar{Z}_0 \frac{d^2 X_2}{d\xi_2^2} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

で計算する。図8は、図7と同じ積層はりがスパン中央に長さ $2\bar{c}=0.3$ のはく離をもつ場合の接触力分布を示す。図8中の \bar{A} は無次元最大振幅を表し、振動モードの略図の実線と点線に対応する接触力分布がそれぞれの線で表されている。また振動モードの略図の縦の2本の一点鎖線ははく離端を示す。計算に用いた積層はりは、上層はりの曲げ剛性が下層はりの曲げ剛

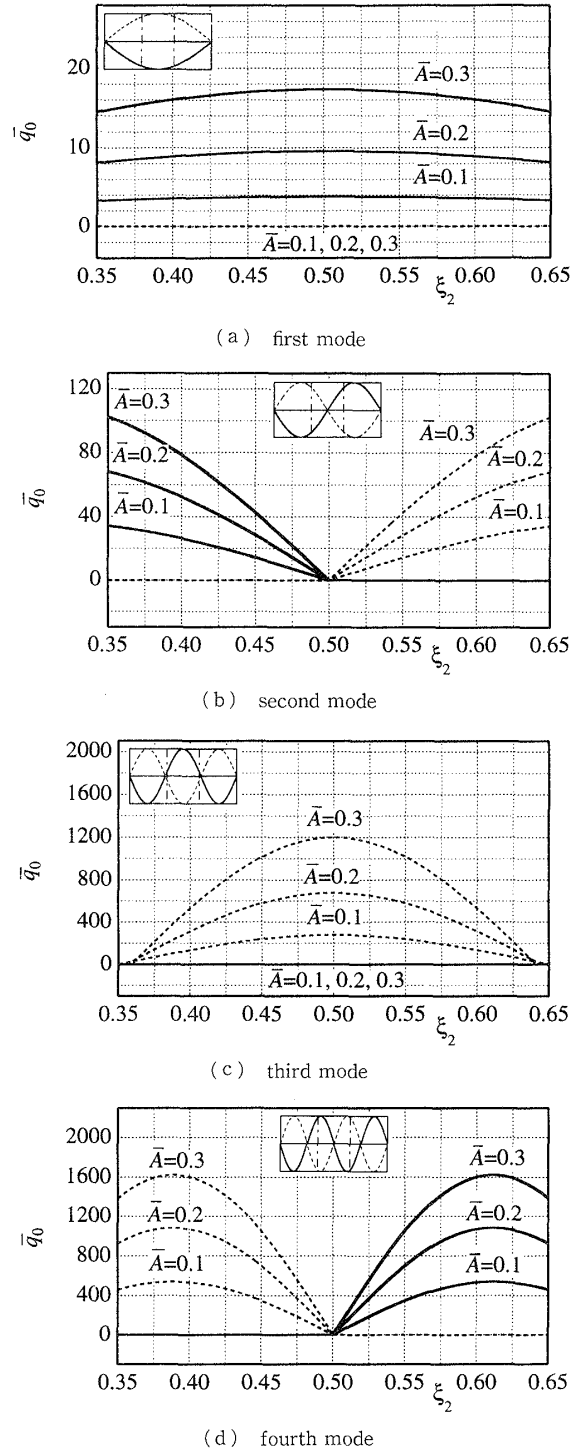


Fig. 8 Normal pressure distribution along delamination region ($2\bar{c}=0.3, \bar{L}_c=0.5, \bar{h}_1=0.3, \alpha=0.5, \bar{\rho}_1=1.09$)

性よりもかなり小さいので、接触力はいずれの場合も、鉛直下方へたわんだはく離領域のみに発生している。まず一次振動の場合、接触力の分布はほぼ一定で、その値も小さい。また三次と四次の分布図より、接触力は鉛直下方でのモードの腹で最大となることがわかる。さらに、最大振幅の大きいほど、接触力の値も大

きくなるとともに、高次振動になるほど、式(25)の右辺第1項の慣性力が大きくなり、接触力の値は大きくなる。HuとHwuは、接触力の分布は一定と仮定してはく離を有する複合サンドイッチはりの自由振動を解析しているが⁽⁶⁾、この仮定は一次振動の場合にのみ成立することがわかる。

4. 実験

解析結果の妥当性を検討するため、20種類の試験片を製作して微小振幅の振動実験を行った。

4.1 試験片と実験要領 長さ320 mm、幅30 mmのりん青銅とステンレスばね鋼を、シアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して試験片を製作した。そのとき、上層のはりにはりん青銅を、下層のはりにはステンレスばね鋼を使用し、積層はりの厚さが1 mmとなるようにさまざまな厚さの二つの材料を組合せた。また引張り試験により、りん青銅とステンレスばね鋼の縦弾性係数の値は120 GPaと182 GPaとなり、密度はそれぞれ8.78 g/cm³と7.77 g/cm³である。

ところで、所定のはく離長さとはく離位置をもつ試験片を製作するため、まず2枚の透明なアクリル板を使用し、接着剤が未接着部分へ浸透することを考慮した、接着剤の適切な貼付位置と量を試行錯誤して取得した。さらに、この方法でりん青銅とステンレスばね鋼を接着し、重りをのせて24時間経過後、はく離先端付近と接着部分を切断して調査し、接着部分にむらがなく、しかもほぼ所定のはく離が得られる接着方法を確立した後、試験片製作に取かかった。

両端単純支持はりの境界条件を満足させるため、面内不動支持は試験片を上下からローラで挟んでボルトにより固定し、面内可動支持は軸方向の移動が可能となるように図9のごとくさらにローラにベアリングを取付けた。振動実験は次のようにして行った。まず、発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅して電磁石に入力し、試験片のモードの腹の位置を加振する。このとき、加振振動数を変化させ、パワーアンプの電圧とレーザー変位計の出力電圧をメモリハイコーダに取

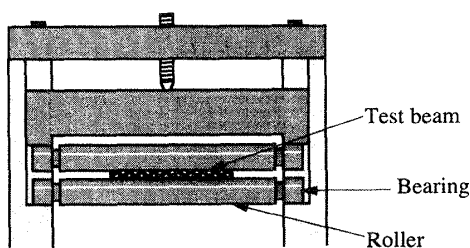


Fig. 9 Movable support

り込み、リサージュ図形を描かせて共振点を検出し、固有振動数を計測する。また測定された変位波形はメモリハイコーダに入力される。なお、今回使用した電磁石では三次以上の振動実験を行うことはできなかった。

4.2 実験結果と考察 まず、実験装置が両端単純支持の境界条件を満足していることを確認するため、厚さ1 mmのステンレスばね鋼はりとりん青銅はりの振動実験を行った。表1の上2欄は、それらの固有振動数の測定結果と理論値を比較したものであり、両者の値は非常によく一致している。したがって、実験装置の両支持部に挟まれた試験片は、両端単純支持の境界条件を満足しているものといえる。次に接着層の影響を調べるため、0.3 mmのりん青銅と0.7 mmのステンレスばね鋼を完全接着させた積層はりの固有振動数を測定した。その結果が表1の一番下の欄に示してあり、実験値が理論値よりも一次振動では約0.5%、二次振動でも約1.4%高くなる程度であり、今回の振動実験では、試験片の接着層が固有振動数の値にほとんど影響を与えないことが確認できる。

図10は、横軸にはく離長さ、はく離のスパン方向の位置および厚さ方向の位置をとって、固有振動数の実験結果と理論曲線を比較したものである。まず図10(a)をみると、実験で得られた固有振動数の値は、はく離長さが長くなるにつれて理論曲線とほぼ同じ傾向で減少している。図10(b)では、実験値と理論値の誤差は最大でも約3.3%(二次振動の $\bar{L}_c=0.45$ のとき)と非常に小さい。図10(c)では、はく離の厚さ方向の位置が変わると固有振動数の値はかなり変化するが、実験値は理論曲線によく一致している。なお、図10(c)で $\bar{h}_1=0$ のときがステンレスばね鋼はりの、 $\bar{h}_1=1$ のときがりん青銅はりの固有振動数である。

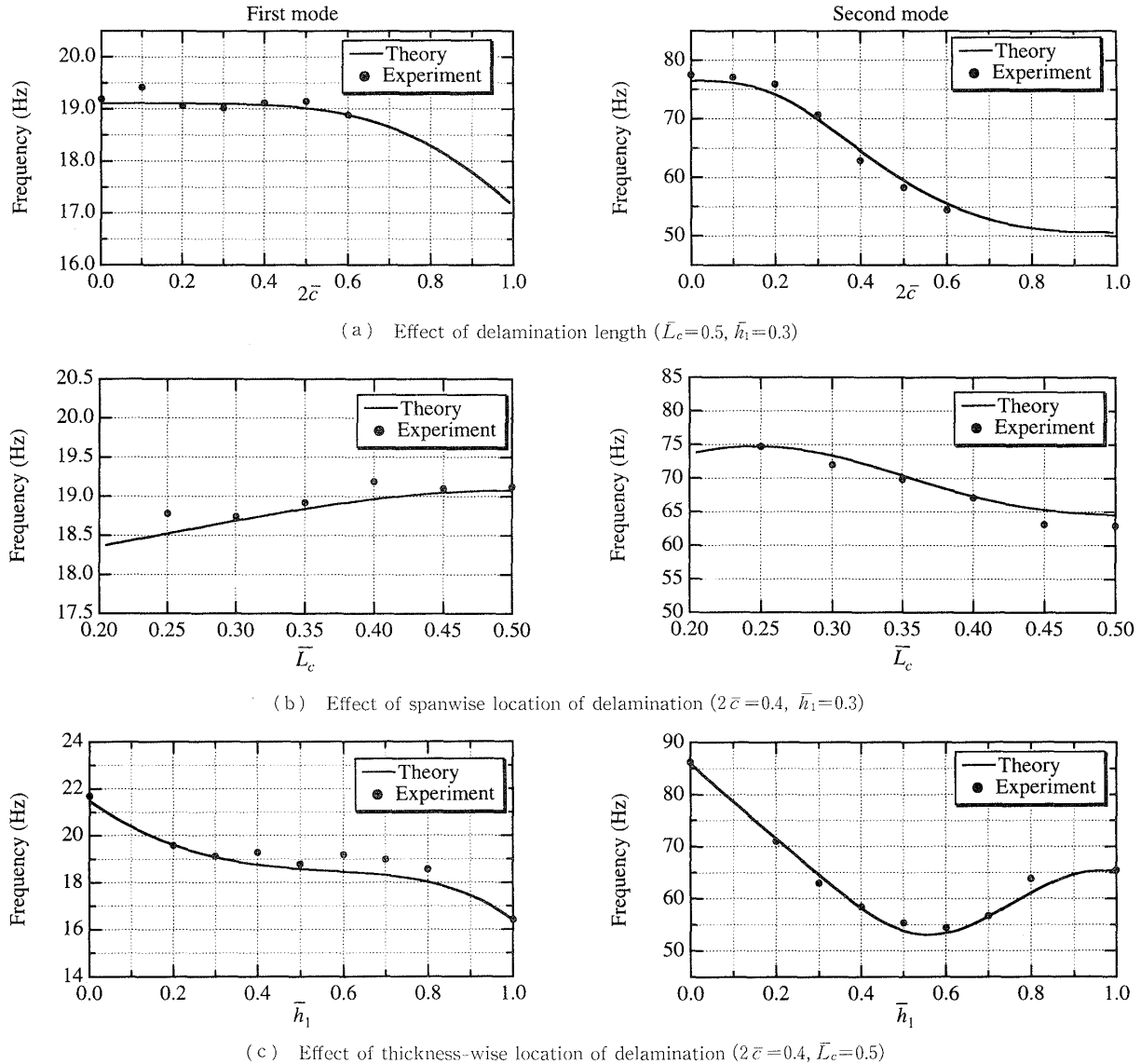
以上のことより、積層はりの層間のはく離の長さおよび位置が変化した場合でも、理論解析で得られた固有振動数は実験値とよく一致し、本報で用いた解析モデルの妥当性が確認できる。

5. 結 言

本報では、はく離を有する異種材積層はりの自由振

Table 1 Natural frequency (Hz)

Specimen	First mode		Second mode	
	Exp.	Theory	Exp.	Theory
Stainless spring steel ($h=1\text{mm}$)	21.7	21.5	86.2	85.9
Phosphor bronze ($h=1\text{mm}$)	16.4	16.4	65.5	65.5
Perfect laminated beam ($\bar{h}_1=0.3$)	19.2	19.1	77.5	76.4

Fig. 10 Comparison between experimental and theoretical frequencies ($\alpha=0.66$)

動を理論解析し、はく離が固有振動数、振動モード、はく離部分の上下のほりに生じる軸力およびクラック界面に作用する接触力に及ぼす影響を調査した。またはく離条件の異なる試験片を製作して振動実験を行い、測定した固有振動数と理論結果を比較して解析モデルの妥当性を検討した。得られた結果を要約すると次のとおりである。

- (1) 理論により得られた固有振動数は実験結果とよく一致し、解析モデルの妥当性が確認できた。
- (2) はく離部分の上下のほりに作用する軸力は、はく離による固有振動数の減少を抑制する傾向にある。
- (3) クラック界面に作用する接触力の分布状態が明らかになった。
- (4) 断面が長方形で幅が等しい2層の異種材積層はりでは、はく離が積層はりの中立面にあるとき振動

数パラメータ λ の値は最小となる。

最後に、本研究は文部省科学研究費補助金の援助を受けて実施されたことを付記し、謝意を表す。

文 献

- (1) Wang, J. T. S., Liu, Y. Y. and Gibby, J. A., *J. Sound Vib.*, **84**-4(1982), 491-502.
- (2) Mujumdar, P. M. and Suryanarayan, S., *J. Sound Vib.*, **125**-3(1988), 441-461.
- (3) Tracy, J. J. and Pardoen, G. C., *J. Compos. Mater.*, **23**-12(1989), 1200-1215.
- (4) Shen, M. H. and Grady, J. E., *AIAA J.*, **30**-5(1992), 1361-1370.
- (5) Hu, J. S. and Hwu, C., *AIAA J.*, **33**-10(1995), 1911-1918.
- (6) 戸谷眞之・小野孝・宮脇正・桐岡健, 機論, **58**-548, A (1992), 599-606.
- (7) 戸谷眞之・井料健・桐岡健・有富正男, 機論, **60**-578, A (1994), 2266-2272.