

### 316 すべり線ペアを生成しつつ進展するモードIII型クラックの解析

Analyses of a Mode III Crack Growth Accompanied by the Formation of Slip-Lines

○学 渡邊 広人(鹿大) 正 戸谷 眞之(鹿大)

Hiroto WATANABE, Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima

Masayuki TOYA, Kagoshima University

Key words : stable crack growth, slip-line formation,

#### 1. 緒 言

本研究では二本のすべり線により降伏している面外せん断クラックが新たなすべり線ペアを伴って微小距離進展する場合を解析する。さらにクラックが成長しすべり線のペアが  $n$  本生じた場合のエネルギー解放率, 外部応力増分を解析する。

#### 2. 初期クラックの応力場

初期面外せん断クラックのモデルを図1に示す。無限遠での応力  $\tau_{yz} = \tau^\infty$  のもとにある, 長さ  $c$  の面外せん断クラックを考える。2本の長さ  $L$  のすべり線が  $x$  軸に対称に  $\beta\pi$  の角度で出ているとする。すべり線は連続的に分布しているらせん転位群から成っている。すべり線と  $x'$  軸が一致するような  $x', y'$  軸をとり, この座標系での応力成分を  $\tau_{x'x'}, \tau_{y'y'}$  とする。

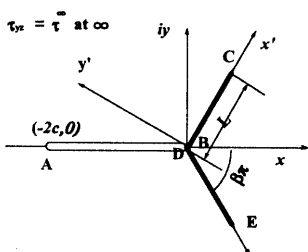


Fig. 1 Model of the crack and inclined slip-lines.

転位に対する抵抗力を  $\tau_0$  とすると, この条件はすべり線上で  $\tau_{y'x'} = \tau_0$  となる。同様に下のすべり線に沿って  $x''$  軸をとると  $\tau_{y''x''} = \tau_0$  となる。

変位の成分は,  $z$  方向の成分  $w$  のみである。すべり線上では  $w$  は不連続であるから図1はY字形クラックの問題と等価である。境界条件をまとめると

$$\begin{aligned} & \text{無限遠方で } \tau_{yz} = \tau^\infty, \quad 0 \leq x' \leq L, y' = \pm L \text{ で } \tau_{y'x'} = \tau_0, \\ & 0 \leq x'' \leq L, \quad y'' = \pm L \text{ で } \tau_{y''x''} = \tau_0, \\ & -2c \leq x \leq 0, y = \pm L \text{ で } \tau_{yz} = 0. \end{aligned}$$

さらにすべり線の先端で応力は有界という条件が課せられる。

周知のように, 変位は応力関数  $\phi(z)$  (ただし  $z = x + iy$ ) の実数部,  $w = \text{Re}\phi(z)$  と書ける。応力成分は

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = e^{-i\beta\pi} (\tau_{x'z'} - i\tau_{y'z'}) = \mu d\phi/dz \quad (1)$$

ここで  $\mu$  は剛性率を表す。応力関数  $\phi(z)$  を決定することが課題となる。

図1のクラックとすべり線からなるY字形の切れ目を  $\zeta (= t + iu)$  面内の単位円の円周に移す写像関数は, 次式で与えられる。

$$z = m(\zeta) = l\zeta^{-1}(\zeta - 1)^{2\beta}(\zeta - e^{i\alpha})^{1-\beta}(\zeta - e^{-i\alpha})^{1-\beta} \quad (2)$$

ここでクラック長さ  $2c$ , 及びすべり線の長さ  $L$  は  $\alpha, \beta$  と以下の関係がある。

$$2c = 2^{1+\beta} l(1 + \cos \alpha)^{1-\beta}, \quad L = 4l\beta_0 \sin^2(\alpha/2) \quad (3)$$

ただし,  $\beta_0 = \beta^\beta(1 - \beta)^{1-\beta}$ 。

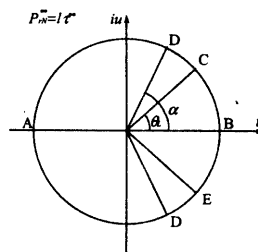


Fig. 2 The  $\zeta = t + iu$  -plane obtained from the  $z$  -plane of Fig.1.

図2に, 図1に対応する点を示す。  $\zeta$  -面内の円柱座標系  $(r, \theta)$  に関する応力成分を  $p_{rn}, p_{\theta n}$  とすると

$$p_{rn} - ip_{\theta n} = e^{-i\beta\pi} \zeta m'(\zeta) (\tau_{x'z'} - i\tau_{y'z'}) \quad (4)$$

これより上のすべり線に対応する区間BDに対しては

$$p_{rn} = -i\tau_0 e^{-i\beta\pi} \zeta m'(\zeta) \quad (5)$$

下のすべり線に対しての  $p_{rn}$  は式(4)において  $\beta$  を  $-\beta$  に置き換えて得られる。またクラック面に対応する区間DADにおいて  $p_{rn} = 0$  となる。  $|z| \rightarrow \infty$  で, 式(2)は  $z = l\zeta$  となり,

従って条件  $\tau_{yz} = \tau^\infty$  は  $p_{un}^\infty = l\tau^\infty$  に移る。このようにして図1のモデルは, 無限遠で外部応力  $p_{un}^\infty = l\tau^\infty$  が働き, 単位円の周上の一部DBDで, 応力  $p_{rn}$  が与えられ, 残りの部分では  $p_{rn} = 0$  の円孔問題に移される。この問題に対する応力関数は容易に得られ, すべり線先端において応力が有界であるという条件より, すべり線の長さ  $L$  が外部応力  $\tau^\infty$  の関数として決定される。応力場を計算すると, クラック先端近傍では,  $\tau_{yz} = \tau_0 / \cos \beta\pi$  となる。また, 特に  $\beta = 1/4$  の場合においては, クラック前方の  $x$  軸上での応力  $\tau_{yz}$  の分布は  $x/L$  が小さい場合は  $\tau_{yz}/\tau_0 \equiv \sqrt{2} - \gamma_0 x/L$  で表され,

( $\gamma_0 \equiv 0.564$ ),  $x/L$  が大きくなると  $\tau^\infty$  に漸近する。BCの近くでは  $\tau_{y'z'}$  はすべり線からの距離  $R$  とすべり線の長さの比  $R/L$  に比例して  $\tau_0$  から減少しその比例定数は, すべり線先端を除けばほぼ一定で,  $\gamma_0$  と等しいことが確かめられた。すなわち,

$$\tau_{y'z'} = \tau_0 - \tau_0^{(1)} \quad \text{ここで } \tau_0^{(1)}/\tau_0 = \gamma_0 R/L \quad (6)$$

#### 3. クラックが $L_0$ 進展した時の応力場

ある外部応力の増分  $\Delta\tau_1^\infty$  のもとでクラックは微小長さ  $L_0$  だけ進みそこで図3のように初期クラックのすべり線と平行な2本の長さ  $L_1$  のすべり線を放出し安定状態に達すると仮定する。境界条件は  $B_1C_1, B_1E_1$  上で  $\tau_{y'z'} = \tau_0, \tau_{y''z''} = \tau_0$  クラック表面,  $-2c - L_0 \leq x \leq 0$  上で  $\tau_{yz} = 0$ , 無限遠方で  $\tau_{yz} = \tau^\infty + \Delta\tau_1^\infty$  である。

この問題の解は, 前節で扱った初期クラックの解に以下の境界条件を満足する第2の解を重ね合わせることで得られる。

無限遠方で  $\tau_{yz} = \Delta\tau_1^\infty$ ,

すべり線  $B_1C_1, B_1E_1$  上で  $\tau_{y'z'} = \tau_0^{(1)}, \tau_{y''z''} = \tau_0^{(1)}$ ,

$-2c-L_0 \leq x \leq -L_0$  で  $\tau_{yz} = 0, -L_0 \leq x \leq 0$  で  $\tau_{yz} = -\sqrt{2}\tau_0$ .

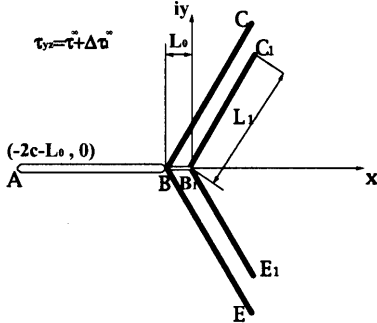


Fig.3 Model of the first step of stable crack growth

この第2の問題においては、転位に対する抵抗力は「等価な抵抗応力」 $\tau_0^{(1)}$ で置き換えられ、また微小区間  $-L_0 \leq x \leq 0$  で応力条件が変更されている。応力関数は、前節と同様な方法により容易に得られる。 $\beta = 1/4$ のとき、第2の解によるすべり線  $B_1C_1$  近くでの応力分布は式(5)の  $\gamma_0$  を  $\gamma' (\equiv 1.44)$  と置き換えた式で与えられる。

#### 4. 第nステップのクラック進展の解析

前節と同様にして第nステップまでのクラック進展の解析を行うことができる。解析のキポイント、各ステップにおける等価な抵抗力の計算である。例えば、第2ステップのすべり線になるべき場所での応力は、第1ステップの進展終了時には

$$\tau_{y'z'} = (\tau_0 - 2\tau_0^{(1)}) + \tau_0^{(1)}(1 - \gamma' L_0 / (\sqrt{2}L_1)) \quad (7)$$

で与えられる。第2ステップのすべり線に対する等価な抵抗応力は、降伏応力  $\tau_0$  から式(6)で与えられる応力を引いた値、 $\tau_0^{(2)} = \tau_0 - \tau_{y'z'}$  となる。このように、第nステップのすべり線に対する等価な抵抗応力は、初期クラック先端の距離  $nL_0$  の点に作る応力  $\tau_{y'z'}$  と  $n-1$  番目までのそれぞれの解が  $nL_0$  の点に作る応力  $\tau_{y'z'}$  を全て加算したものを、 $\tau_0$  から引いた値で与えられる。ただし、数値計算のプログラムにおいては、例えば式(5)は、 $nL_0$  の値が大きくなり  $\tau_{y'z'} < \tau^\infty$  となる場合には、改めて  $\tau_{y'z'} = \tau^\infty$  と定義する関数プログラムを用いる。

3節の解析において、すべり線先端で応力が有界という条件から、外部応力増分  $\Delta\tau_1^\infty$  とすべり線長さ  $L_1$  の関係が得られるが、両者を決定するためにはさらに一つの条件が必要である。この条件として、 $L_0$  の進展に際して解放されるエネルギーは、すべり線の対の生成に際して消散されるエネルギー(塑性仕事)と等しいと仮定する。1対のすべり線生成に際してなされる塑性仕事は、

$$G_p = 2\tau_0 \int_0^{L_1} \phi(x') dx' \quad (8)$$

と書ける。 $\phi(x)$  はすべり面間の相対変位である。積分を実行し、さらに  $L_0/L$  が  $10^{-3}$  のオーダーである場合を考えると第nステップのすべりにて消散されるエネルギーは

$$G_p^{(n)}$$

$$\equiv \frac{\tau_0^2 L_n}{\beta_0^2 \mu} \left[ \frac{\sqrt{2}\beta_0 L_0}{\pi L_n} I_1 - \frac{4\tau_0^{(n)}}{\pi \tau_0} I_2 + \frac{1}{\alpha_n} \frac{\Delta\tau_n^\infty}{\tau_0} \frac{1}{2} I_1 \right] \quad (9)$$

ここで、 $I_1 = 1.6945, I_2 = 0.0285, \beta_0 = 0.5699$ 。一方、小規模降伏条件下では、第nステップのエネルギー解放率は

$$G_n = \frac{\pi}{2\mu} \left( c + \frac{nL_0}{2} \right) \left\{ \tau^\infty + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta\tau_k^\infty \right\}^2 \quad (10)$$

と書ける ( $\mu$  は剛性率)。特に初期クラックにおけるエネルギー解放率は、

$$G = \pi c \tau^\infty / (2\mu)$$

$$G_n L_0 = G_p^{(n)} \quad (11)$$

これらにより、第nステップにおけるエネルギー解放率、外部応力増分値が判る。

初期条件として  $\alpha = 10^\circ$  (このとき、 $L/c = 0.00868, \tau^\infty/\tau_0 = 0.09414$ ) を仮定し、 $\beta = 1/4, L_0/L = 0.001$  の場合について計算を行った。最初に式(11)より外部応力増分  $\Delta\tau_1^\infty$  と  $L_1$  を計算する。この結果を基に次の第2ステップに対する等価な抵抗応力  $\tau_0^{(2)}$  が求められ、応力関数が決定される。以下この過程を繰り返すことにより、第nステップにおけるエネルギー解放率、外部応力増分値を求めた。結果を図4、5に示す。

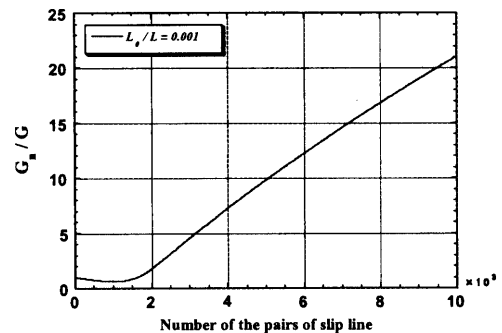


Fig.4 Variation of the energy release rate with the length of crack growth

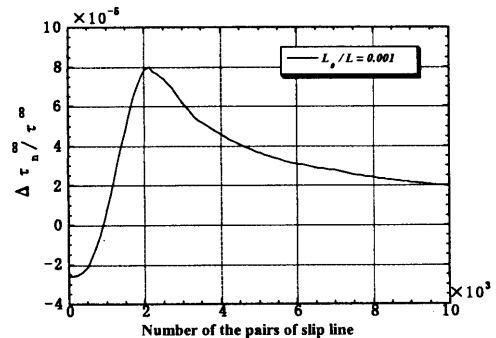


Fig.5 Variation of the increment of applied stress with the length of crack growth