

# 104 異種材ENF試験片の低速度衝撃応答

## Dynamic Response of a Laminated Beam Subject to Low Speed Impact.

○学 中川 和久 (鹿児島大学)      正 有富 正男 (鹿児島大学)  
 正 小田 美紀男 (鹿児島大学)      正 戸谷 眞之 (鹿児島大学)

Kazuhisa NAKAGAWA, Masao ARITOMI, Mikio ODA and Masayuki TOYA  
 Kagoshima University, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima

Key Words : Energy Release Rate, Fracture Mechanics, Delamination, Impact, End Crack

### 1. ま え が き

端部はく離を有する2層の異種材からなる2層積層はりENF試験片が、低速度の衝撃三点曲げを受ける場合の解析を行い、衝撃速度がひずみや荷重の高次モードに及ぼす影響について調べる。また実験を行い、解析結果と比較し、解析の正当性を確かめる。最後に、SuoおよびHutchinsonの理論<sup>(1)</sup>に基づきエネルギー解放率を求め、はく離長さの変化による影響を調べる。

### 2. 理論解析

**2.1 基礎式** 図1に示すような時間的に変動する負荷  $P(t)$  を受けるENF試験片を考える。はりの長さ  $L$ 、断面の幅を上下ともに  $b$ 、はく離長さを  $c$ 、厚さ、ヤング率および密度は、上のはりについては  $h_1, E_1, \rho_1$ 、下のはりについては  $h_2, E_2, \rho_2$  とする。はく離部分上下のはりのたわみを  $w_1, w_2$ 、接着部分のたわみを  $w_3$  とする。また、図2にはく離部分の自由体線図を示す。相互接触力分布を  $q(x, t)$  とする。

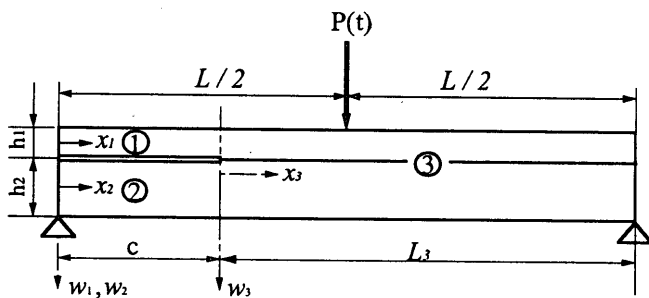


Fig.1 Bilayer beam with an end crack

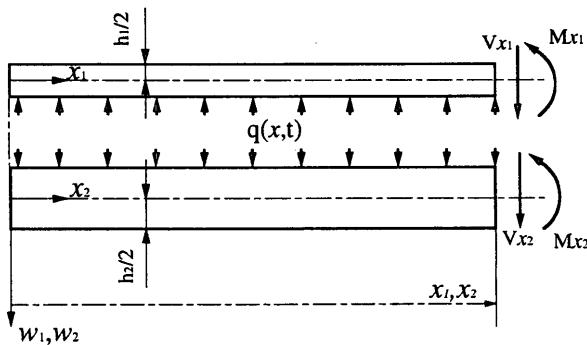


Fig.2 Free-body diagram of the delaminated part

領域におけるはりの諸量を以下のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} I_i &= \frac{bh_i^3}{12}, A_i = bh_i, m_i = \rho_i A_i, D_i = E_i I_i \quad (i = 1, 2) \\ h &= h_1 + h_2, A = A_1 + A_2, m = m_1 + m_2 \\ D &= D_1 + D_2, D' = D + \frac{E_1 h_1 E_2 h_2 b h^2}{4(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

振動中にはく離部分の上下のはりが常に接しているという仮定より  $w_1 = w_2$  となり、はく離部分と接着部分のはりの自由振動時の運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} D \frac{\partial^4 w_1}{\partial x_1^4} + m \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= 0 \\ D' \frac{\partial^4 w_3}{\partial x_3^4} + m \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

たわみの一般解は

$$w_i(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{in}(x_i) (B_{1n} \cos p_n t + B_{2n} \sin p_n t) \quad (i = 1, 3) \quad (3)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} X_{in}(x_i) &= C_{i1n} (\sinh \xi_{in} x_i + \sin \xi_{in} x_i) + C_{i2n} (\cosh \xi_{in} x_i + \cos \xi_{in} x_i) \\ &\quad + C_{i3n} (\sinh \xi_{in} x_i - \sin \xi_{in} x_i) + C_{i4n} (\cosh \xi_{in} x_i - \cos \xi_{in} x_i) \\ \xi_{1n} &= \frac{m}{D} p_n^2, \xi_{3n} = \frac{m}{D'} p_n^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $p_n$  は固有角振動数である。

任意の  $n$  次モードにおける正規関数  $X_{1n}(x_1)$  と  $X_{3n}(x_3)$  に境界条件および連続条件を適用し得られた8個の式より、 $X_{3n}$  の4つ定数 ( $C_{31n}, C_{32n}, C_{33n}, C_{34n}$ ) を消去し、 $C_{12n} = 0, C_{14n} = 0$  を考慮すると

$$[M] \{C_{11n} \ C_{13n}\}^T = \{0\} \quad (5)$$

ここで、 $[M]$  は2行2列の正方行列である。これより振動数方程式は

$$\det[M] = 0 \quad (6)$$

**2.2 直交性の証明** 式(3)の正規関数において異なる次数  $n$  次および  $m$  次に対する  $X_n(x)$  と  $X_m(x)$  を考える。 $n$  次、 $m$  次における二つの運動方程式およびはりの境界条件と連続条件を用いることにより、正規関数が直交性を有することが証明される。

**2.3 衝撃荷重** 静止したはりの中央に垂直な強制力  $P(t)$  が作用する場合、直交性を利用するとたわみの応答は正規関数  $X_{in}(x)$  を用いて、

$$w_i(x_i, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{in}(x_i) \left[ B_{1n} \cos p_n t + B_{2n} \sin p_n t + \frac{\int_0^t P_n(\tau) \sin p_n(t-\tau) d\tau}{p_n m \left( \int_0^c X_{1n}^2 dx_1 + \int_0^L X_{3n}^2 dx_3 \right)} \right] \quad (7)$$

となる。本論文では着力点速度として次のような時間関数を仮定して解析する。

$$v(t) = V_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_c}\right) \right\} \quad (8)$$

ここで  $V_0$  は衝撃速度、 $T_c$  はパラメータ(時定数)で、負荷点の速度が  $V_0$  になるまでの遷移時間を表すパラメータである。

負荷点 ( $x = \frac{L}{2} - c$ ) における速度は式 (7) より

$$v\left(\frac{L}{2} - c, t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[ \int_0^t P(\tau) \sin p_n(t-\tau) d\tau \right] \quad (9)$$

ただし、

$$\alpha_n = \frac{\left[ X_{3n}\left(\frac{L}{2} - c\right) \right]^2}{m \left( \int_0^c X_{1n}^2 dx_1 + \int_0^L X_{3n}^2 dx_3 \right)} \quad (10)$$

積分方程式 3 項近似を採用すると、式(8),(9)より  $P(t)$  に関する

$$V_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_c}\right) \right\} = \int_0^t P(\tau) \left\{ \alpha_1 \cos p_1(t-\tau) + \alpha_2 \cos p_2(t-\tau) + \alpha_3 \cos p_3(t-\tau) \right\} d\tau \quad (11)$$

を得る。両辺をラプラス変換し、さらにラプラス逆変換すると

$$P(t) = \frac{V_0}{a_2 T_c} \left\{ \gamma_0 t - \gamma_0 T_c + \gamma_1 \exp\left(-\frac{t}{T_c}\right) + \psi_1 \cos \lambda_1 t + \frac{\psi_2}{\lambda_1} \sin \lambda_1 t + \psi_3 \cos \lambda_2 t + \frac{\psi_4}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t \right\} \quad (12)$$

ここで、 $a_2, \lambda_1, \lambda_2, \gamma_1, \gamma_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  は定数である。

**2.4 エネルギー解放率の解析** Suo および Hutchinson<sup>(1)</sup> は一般の負荷を受けている単位幅の積層はりのはく離のエネルギー解放率を与える公式を二次元弾性論に基づいて導いた。彼らの結果に基づいて、エネルギー解放率を計算した。

### 3. 数値解析および考察

解析モデルは上層にアクリル材、下層にアルミニウム材を張り合わせた異種材積層はりとし、厚さを上下ともに  $h_1 = h_2 = 3.0\text{mm}$ 、幅を  $b = 20\text{mm}$ 、スパンを  $L = 500\text{mm}$  とし、衝撃速度を  $0.44\text{m/s}$  とする。また、この解析モデルに対応する実験を行った。まず時定数  $T_c$  の値を決定するために図 3 より実験値と解析値を比較し、最も一致している

$T_c = 0.5\text{ms}$  を採用した。

図 4 よりエネルギー解放率は時間の増加と共に振動しながら増加し、またはく離長さが長くとエネルギー解放率が大きくなるのがわかる。図 5 よりはく離長さ比  $c/L$  が  $0.1$  の場合は  $G_{\max}/G_{\text{static}}$  は約 2 倍になり、 $c/L$  が増加するにつれて 1 前後になる。ここで  $G_{\max}$  は解析時間内に生じた最大エネルギー解放率で、 $G_{\text{static}}$  は静的負荷の場合のエネルギー解放率である。したがって、はく離長さが短いほど動的な影響を受けることがわかる。

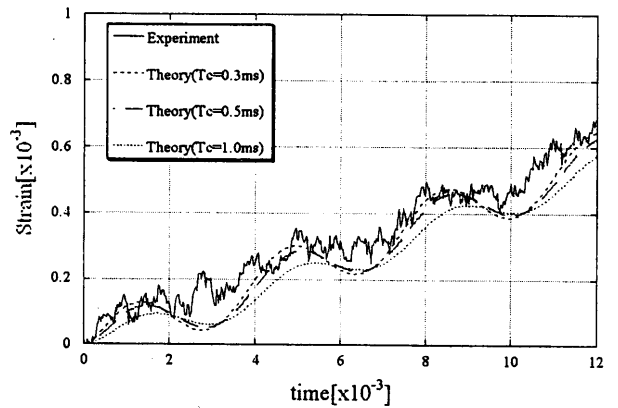


Fig.3 Relation between strain and time

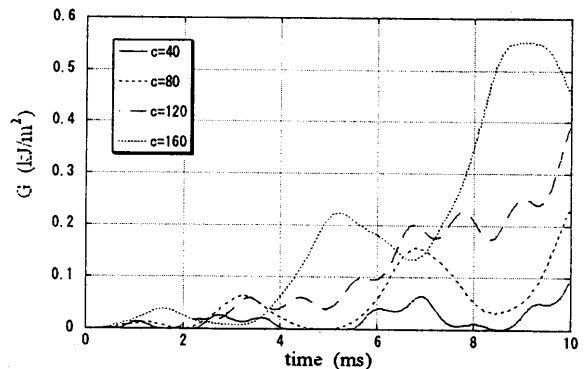


Fig.4 Relation between energy release rate and time

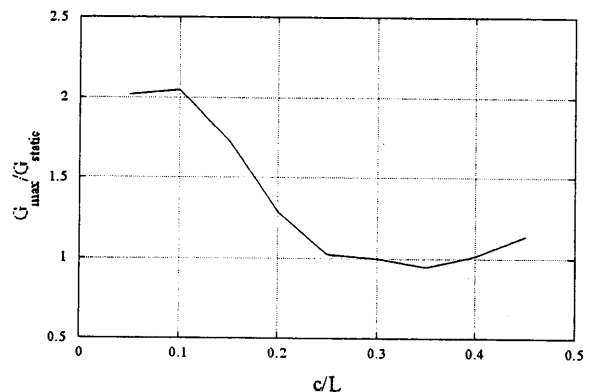


Fig.5 Relation between energy release rate and delamination length

#### 参考文献

(1)Suo,Z.and Hutchinson,J.W.,Int.J.Fract.,43(1990),1-18