

鹿児島大学〔院〕 ○永家浩次 鹿児島大学 小田美紀男
鹿児島大学 有富正男 戸谷眞之

Analyses of an Interface Crack in a Functionally Graded Beam Subjected to Uniform Temperature Change

Kouji NAGAIE, Mikio ODA, Masao ARITOMI and Masayuki TOYA,

1 緒言

耐熱材料として金属基盤にセラミックスを貼り付けた積層材料が近年注目されているが、熱膨張係数の不連続性により界面に大きな熱応力が生じ、このため界面はく離が生じやすいという欠点がある。この問題を克服するために最近では板厚方向にヤング率、熱的性質を連続的に変化させた傾斜機能材料が研究されている。本研究では、傾斜機能材料はり中に存在するはく離に対してエネルギー解放率を解析的に導き、Erdoganら¹⁾の有限要素法による数値解析と比較し理論の有効性を確かめる。

2 解析

2.1 ヒンジモデル Fig.1に示すような、内部に長さ $2c$ のはく離を有する傾斜機能材料はりが一様な温度変化を受ける場合に対して、解析する。ヤング率 E 、ポアソン比 ν 、熱膨張係数 α は板厚方向の座標 y ($y=0$ ははり上面に対応)の関数として与えられている。はりは、基準温度で伸びも縮みもしないものとする。ABおよびCD部分のはりの曲げ剛性および伸び剛性をそれぞれ D_3, V_3 、はく離部分の上下のはりの曲げ剛性および伸び剛性を D_i, V_i ($i=1,2$)とする。はく離部分BCのたわみ曲線について解析する。BC部分を切り出して考えると、この部分はFig.2(a)のようにヒンジで止められた重ねはりとみなすことができる。この重ねはりの両端では合モーメントおよび軸方向合力は0である。仮に、温度が基準温度以上に一様に上昇し、 $\alpha(y_1) > \alpha(y_2)$ の場合を考えるとはく離部は上に凸にたわみ、またはく離の上側のはりには圧縮力が誘起されている。この場合のヒンジの作用は上のはりに対しては、はりの両下すみ部に作用する水平方向の集中圧縮軸力 P 、下のはりに対してはりの両上すみ部に作用する水平方向の集中引張り軸力 P に置き換えることができる。自由体

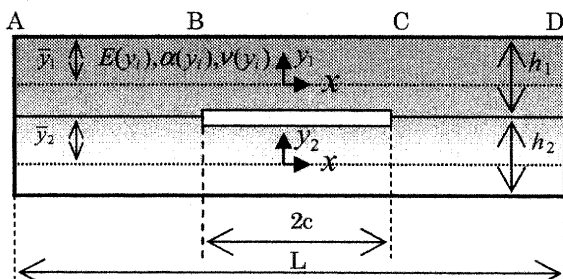


Fig.1 Model of a functionally graded beam with an interface crack subjected to uniform temperature change.

線図と座標系をFig.2(b)に示す。はく離上下面が非接触と仮定して、上下のはりのたわみを w_1, w_2 、材端モーメントを M_1, M_2 とする。ここで、 $M_1 = M'_1 + P(h_1 - \bar{y}_1)$ 、 $M_2 = M'_2 + P\bar{y}_2$ (\bar{y}_1, \bar{y}_2 は上下のはりの上面から測った中立軸の位置)。これらは以下の条件から決定できる。

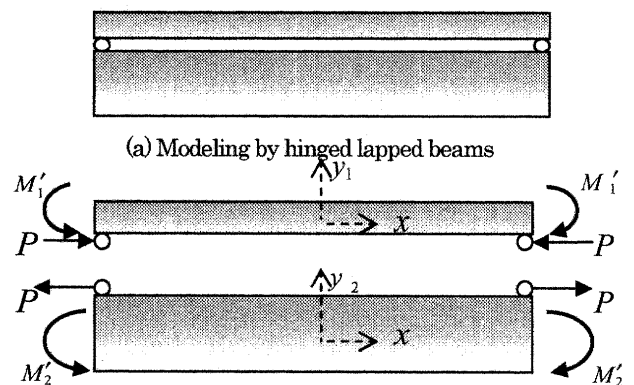
- (1) 合モーメントが0 ($M'_1 + M'_2 = 0$)
- (2) はく離両端 ($x = \pm c$)でたわみが0 ($w_i(\pm c) = 0$)
- (3) はく離端で上下のはりの傾きが等しい

$$\left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=c} = \left. \frac{dw_2}{dx} \right|_{x=c}$$

- (4) 変形前に中立軸に垂直であった断面は変形後も垂直関係を保つ。

詳細は省略するが、たわみ解と M_1, M_2 の導出は結局軸力 P に対する非線形方程式を解くことに帰着される²⁾。

2.2 エネルギー解放率 前記の条件より、内部はく離端での軸力 $\pm P$ と材端モーメント M_1, M_2 が求められるが、エネルギー解放率を計算するためには、これら外部応力の決定だけでは不十分である。すなわち、外力が一切作用していなくとも温度変化により、はく離端部近傍には特異応力場が生じており、はく離進展によりエネルギーは解放されることを考慮する必要がある。そのために、温度変化によってのみ変形している状態の傾斜機能材料はりの端部はく離を等価な軸力とモーメントの系で置き換える必要がある。これらの力の系は、カットアンドペースト法³⁾により求めることができる。この方法で得られた等価な軸力とモーメントに $\pm P$ と材端モーメント M_1, M_2 を足し合わせる。ついで、Fig.3に示すよ



(b) Free-body diagram of the delaminated part

Fig.2 Forces and moments in the interval BC.

うな軸力とモーメントが作用している端部はく離を有する傾斜機能材料はりのモデルを考える。各量の(*) は等価な軸力、モーメントに 2.1 節で求めた軸力、モーメントを足し合わせた量であることを示す。エネルギー解放率は以下のように与えられる。

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{P_1^{*2}}{V_1} + \frac{M_1^{*2}}{D_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{P_2^{*2}}{V_2} + \frac{M_2^{*2}}{D_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{P_3^{*2}}{V_3} + \frac{M_3^{*2}}{D_3} \right) \quad (1)$$

この関係式は Hutchinson ら⁴⁾が異種材積層はりの端部はく離について導いた公式と形の上で同じである。式 (1) よりヤング率、熱膨張係数が y の任意の関数として与えられている傾斜機能材料はりについて、軸力とモーメントを求めることでエネルギー解放率を導くことができる。

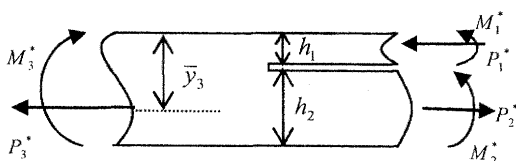


Fig.3 Split-beam element under general loading condition.

3 数値解析および考察

Erdogan ら¹⁾は Fig.1 のモデルに対して、有限要素法を用いることでエネルギー解放率を求めている。そこで、本論文における理論解析と Erdogan ら¹⁾による有限要素法による数値解析を比較する。彼らは Fig.1 のはりのモデルに対して、はく離部を境界面として上層は傾斜機能材料はり、下層を均一材料としてヤング率、熱膨張係数を以下の関数で与えている。

$$\bar{E}(y) = \begin{cases} \frac{E_1}{1-\nu^2(y)} + \frac{(E_2 - E_1)y}{1-\nu^2(y)h_1} & 0 \leq y \leq h_1 \\ \frac{E_2}{1-\nu^2(y)} & h_1 \leq y \leq h_1 + h_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\bar{\alpha}(y) = \begin{cases} \{1 + \nu(y)\} \left\{ \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{y}{h_1} \right\} & 0 \leq y \leq h_1 \\ \{1 + \nu(y)\} \alpha_2 & h_1 \leq y \leq h_1 + h_2 \end{cases} \quad (3)$$

$(y = -y_1 + \bar{y}_1 = -y_2 + h_1 + \bar{y}_2)$

式 (2) (3) 中の諸量は Table 1 に与えられている。

Table 1

| 材料 | E_i (GPa) | $\nu_i(y)$ | α_i ($1/^\circ\text{C} \cdot 10^{-6}$) | h_i (mm) |
|----------------|-------------|------------|---|------------|
| $i=1$ Zirconia | 151.0 | 0.3 | 10.0 | 2.0 |
| $i=2$ Rene-41 | 219.7 | 0.3 | 16.7 | 12.5 |

本論文でも式 (2) (3) と Table 1 の諸量を用いて解析による非接触解の数値解析を行い Erdogan ら¹⁾の結果と比較する。Table 1 の諸量が与えられた Fig.1 のモデルを想定すると、はりが上に凸にたわむ温度変化は、基準温度より低い温度となる。よって、温度を基準温度から下げる場合について解析を行う。Fig.4 にたわみ差と上層のはりの厚さ比 dw/h_1 と、温度変化 ΔT の関係を示す。縦軸にたわみ差と上層のはりの厚さ比 dw/h_1 、横軸に温度変化 ΔT をとる。Fig.4 にエネルギー解放率の比 G/G_0 と温度変化 ΔT の関係を示す。縦

軸にエネルギー解放率の比 G/G_0 、横軸に温度変化 ΔT をとる。Fig.4, Fig.5 共に、はく離長さとお層はりの比の場合に対して実線と破線で本論文の数値解析を示し、マーカーで Erdogan ら¹⁾の解析結果を示す。Fig.4 において本論文の数値解析のグラフと Erdogan ら¹⁾の解析のそれは、ほぼ一致しており、たわみ差においては有限要素法を用いた解析と本論文の理論解析が一致することがわかる。Fig.5 においては、温度変化が 800°C 辺りから本論文の数値解析と Erdogan ら¹⁾の解析に差が生じ始めている。以降、温度変化が大きくなるにつれ互いの解析値の差は大きくなっている。しかし、 800°C 辺りまで本研究の解析と彼らの解析の差は小さく、 800°C 辺りまで十分に本論文の理論が有効であると推測される。

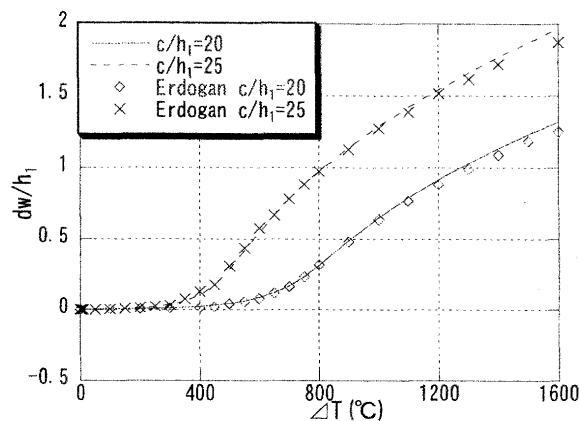


Fig.4 Variation of dw/h_1 with ΔT .

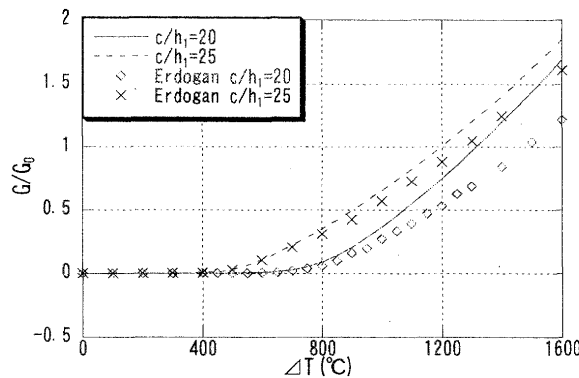


Fig.5 Variation of G/G_0 with ΔT .

$$(G_0 = (1 - \nu_2^2) K_0^2 / E_2, K_0 = E_2 \alpha_2 T_0 \sqrt{\pi h_1}, T_0 = 100^\circ\text{C})$$

参考文献

- 1) F. Erdogan and Tz-Cheng Chiu, Journal of Thermal Stresses, Vol.26, pp.497-523, (2003)
- 2) 深川和良・他3名, 材料, Vol.53, No.5, pp.518-525 (2004)
- 3) 戸谷真之・他3名, 機論 (A 編), 66-647, pp.1362-1367, (2000)
- 4) J.W. Hutchinson and Z. Suo : Mixed mode cracking in layered materials, Advances in Applied Mechanics, Vol. 29, pp.63-191, Academic Press, New York(1992)