

## 大きさの異なる二重層間はく離を有する積層円板の自由振動\*

有 富 正 男<sup>\*1</sup>, 茨 木 雄 一 郎<sup>\*2</sup>  
小 田 美 紀 男<sup>\*1</sup>, 戸 谷 眞 之<sup>\*1</sup>

### Free Vibrations of Circular Laminated Plates Containing Double Delaminations of Different Sizes

Masao ARITOMI<sup>\*3</sup>, Yuichiro IBARAKI,  
Mikio ODA and Masayuki TOYA

<sup>\*3</sup> Department of Mechanical Engineering, Kagoshima University,  
1-21-40 Korimoto, Kagoshima shi, Kagoshima, 890-0065 Japan

Free vibrations of the clamped circular laminated plates containing double disk-shaped delaminations of different sizes are analyzed on the basis of the theory of a small deflection of plates. Embedded circular delaminations are placed at the plate center and a crack model assuming the contact of the two crack faces is then considered. Radial in-plane forces induced by bending in the parts of the plate above and below the delaminations are determined by modeling the crack part as two lapped discs hinged at the edge. Analyses and experiments are carried out for the effect of size difference of the delaminations on the natural frequencies. Theoretical and experimental results agree well, which validates the analytical models assumed in the present study.

**Key Words:** Free Vibration, Vibration of Continuous System, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency

## 1. 結 言

異種材料を積層することによって、多種多様な特性をもつ材料が設計できるため、積層材料は航空宇宙構造をはじめ様々な分野で広く使用されている。しかしながら、積層材料は材料特性の不連続が存在するため、外部からの異物などによる衝撃により、材料内部に表面から観測困難な層間はく離が発生する。このような積層材料中の層間はく離の存在は、構造物の耐荷能力の低下を招き、特に複合材料積層構造では圧縮強度に与える影響が大きく、損傷した積層板の圧縮残存強度は無損傷板の強度の数分の一にも低下する。また、動荷重を受けると積層板中の層間はく離が進展し、構造物が破壊に至る場合もある。したがって、この層間はく離が積層はりや積層板の振動特性に及ぼす影響を明らかにしておけば、動的横荷重によるはく離進展問題を検討する場合に役立つものと考えられる。

層間はく離が積層はりの振動特性に及ぼす影響を調査した研究<sup>(1)-(8)</sup>は、数多く見受けられるが、積層はり

と同様に実用上重要な積層板に関する研究は数少ない。たとえば、関根ら<sup>(9)</sup>が内部に1個の円形層間はく離を有する複合材料積層板中の剛体球による衝撃応答を、著者ら<sup>(10)(11)</sup>が円形はく離を有する二層円板の自由振動を理論解析している。また、複合材料積層板中に多重層間はく離が存在する場合の、横荷重によるはく離進展問題や圧縮特性劣化の研究も行われている<sup>(12)(13)</sup>。

本報では、異種材からなる三層円板が、その中心部に大きさの異なる円形の二重層間はく離を有する場合の自由振動を、面内変形の影響が無視できるものとして理論解析を行う。そして、二重層間はく離の大きさが、周辺固定円板の自由振動特性に及ぼす影響を明らかにし、同時に実験を行って解析モデルの妥当性を検証する。

## 2. 理 論 解 析

**2・1 N層積層円板の基礎式** 本論文では、層間はく離が積層板の自由振動特性に及ぼす基本的な影響を調査することを目的としているため、まず、図1に示す均質・等方性のN枚の異種材を接着した半径Rの積層円板を考える。積層円板の上面から第1層、第2層、…とし、第k層の板の厚さを $h_k$ 、縦弾性係数を

\* 原稿受付 2005年11月17日。

<sup>\*1</sup> 正員、鹿児島大学工学部(☎890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。

<sup>\*2</sup> 鹿児島大学大学院理工学研究科。

E-mail: aritomi@mech.kagoshima-u.ac.jp

$E_k$ , ポアソン比を  $\nu_k$ , 密度を  $\rho_k$  とする. いま, 板の上面から  $\eta$  の距離のところに基準面を設け, 第  $k$  層の伸び剛性と曲げ剛性を  $C_k, D_k$ , 板上面から第  $k$  層の中央面までの距離を  $H_k$ , 基準面から第  $k$  層の中央面までの距離を  $d_k$  とし, 各諸量を式(1)のように定める.

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{E_k h_k}{1 - \nu_k^2}, D_k = \frac{E_k h_k^3}{12(1 - \nu_k^2)}, H_k = \sum_{i=1}^k h_i - \frac{h_k}{2} \\ d_k &= H_k - \eta, h = \sum_{k=1}^N h_k, \rho h = \sum_{k=1}^N \rho_k h_k \end{aligned} \right\} (1)$$

座標原点は基準面の円板の中心位置に定め, 座標軸はそれぞれ座標原点から半径方向と円周方向に沿って  $r$  軸と  $\theta$  軸を, それらに垂直な鉛直下方に  $z$  軸を定め, 基準面の  $r$  と  $\theta$  方向の面内変位を  $u^0, v^0$ ,  $z$  方向のたわみを  $w$  とする.

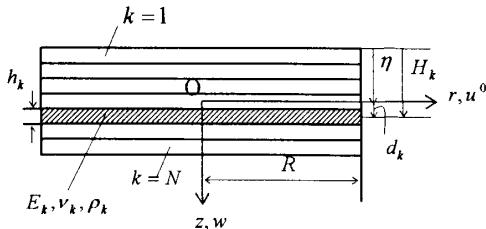


Fig. 1 Geometry of a circular laminated plate

本報では, 微小振幅の自由曲げ振動を取扱う. まず積層円板に作用する面内力  $N_r, N_\theta, N_{r\theta}$ , 曲げモーメント  $M_r, M_\theta$ , ねじりモーメント  $M_{r\theta}$  は

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \\ M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & C_{12} & 0 & B & B_{12} & 0 \\ C_{12} & C & 0 & B_{12} & B & 0 \\ 0 & 0 & C_{r\theta} & 0 & 0 & B_{r\theta} \\ B & B_{12} & 0 & D & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B & 0 & D_{12} & D & 0 \\ 0 & 0 & B_{r\theta} & 0 & 0 & D_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{r\theta}^0 \\ \kappa_r \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{r\theta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

で与えられる. ただし, 基準面のひずみ  $\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_{r\theta}^0$  と曲率  $\kappa_r, \kappa_\theta, \kappa_{r\theta}$  は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial r}, \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{r} \left( u^0 + \frac{\partial v^0}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{r\theta}^0 &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u^0}{\partial \theta} - v^0 \right) + \frac{\partial v^0}{\partial r} \\ \kappa_r &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \kappa_\theta = -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \kappa_{r\theta} &= -2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} (3)$$

と表される. 式(2)中の伸び剛性  $C, C_{12}, C_{r\theta}$ , 伸びと曲げの連成剛性  $B, B_{12}, B_{r\theta}$ , 曲げ剛性  $D, D_{12}$ , ねじり剛性  $D_{r\theta}$  は

$$\left. \begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^N C_k, C_{12} = \sum_{k=1}^N \nu_k C_k, C_{r\theta} = \frac{1}{2}(C - C_{12}) \\ B &= \sum_{k=1}^N d_k C_k, B_{12} = \sum_{k=1}^N \nu_k d_k C_k, B_{r\theta} = \frac{1}{2}(B - B_{12}) \\ D &= \sum_{k=1}^N (D_k + d_k^2 C_k), D_{12} = \sum_{k=1}^N \nu_k (D_k + d_k^2 C_k) \\ D_{r\theta} &= \frac{1}{2}(D - D_{12}) \end{aligned} \right\} (4)$$

のように, 基準面の位置  $\eta$  によって変化する. このとき,  $r, \theta, z$  方向の運動方程式は

$$\rho h \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} - C \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^0) \right\} + \frac{1}{2r^2} \frac{\partial^2 u^0}{\partial \theta^2} + \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{v^0}{r^3} \right) \right] + \frac{C_{12}}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial u^0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r v^0) \right\} + B \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) = 0 \quad (5)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} - C \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v^0) \right\} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v^0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r^3 u^0) \right] + \frac{C_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r v^0) - \frac{\partial u^0}{\partial \theta} \right\} \right] + B \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) = 0 \quad (6)$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{B}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^0) \right\} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} (r u^0) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^0}{r} \right) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v^0}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (7)$$

と表され, 面内変位  $u^0, v^0$  とたわみ  $w$  が連成する連立微分方程式となる. ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (8)$$

ところが基準面を,

$$B = 0 \quad (9)$$

を満足する

$$\eta = \sum_{k=1}^N H_k C_k / \sum_{k=1}^N C_k \quad (10)$$

の位置に定めると, 面内変位  $u^0, v^0$  とたわみ  $w$  に関する運動方程式は非連成となる. ただし, 連成剛性  $B_{12}$  が0ではないので, 力学的境界条件を適用する積層円板では,  $u^0, v^0$  と  $w$  が連成した振動問題となる.

### 2・2 二重層間はく離を有する三層円板の基礎式

図2に示すような, 3枚の異種材を接着した半径  $R$  の積層円板が, 中心部に半径  $c_1, c_2$  ( $c_1 \leq c_2$ ) の円形はく離を有する場合を考える. 図2のように領域①~⑥を定め, 下添字① ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) で領域①の, 下

添字  $k(k=1,2,3)$  で第  $k$  層の諸量を表す。また本報では、解析解を得るために次のことを仮定する<sup>(1)</sup>。

- (1) 積層板の基準面と単層板の中立面の面内伸縮の影響は、面外の曲げ変形に比べて小さく無視できる。
- (2) はく離部分の各領域のたわみは等しい。

$$w_{\textcircled{1}} = w_{\textcircled{2}} = w_{\textcircled{3}}, \quad w_{\textcircled{4}} = w_{\textcircled{5}}$$

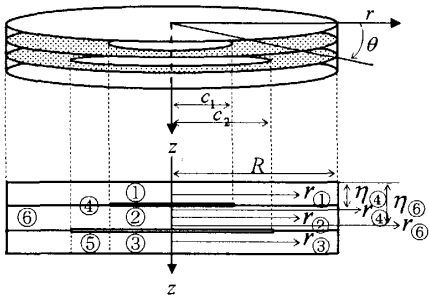


Fig. 2 Geometry of a circular laminated plate containing double disk-shaped delaminations

この2つの仮定の下で、運動方程式を区間 I (領域①, ②, ③), 区間 II (領域④, ⑤), 区間 III (領域⑥) に分けて導き、それらの解に境界条件と連続条件を適用して自由振動を解析する。まず、領域④と⑥の基準面の位置  $\eta_{\textcircled{4}}, \eta_{\textcircled{6}}$  は、式(10)においてそれぞれ  $N=2, N=3$  とおけば得られ、各区間の曲げ剛性は

$$\left. \begin{aligned} D_{\textcircled{1}} &= \sum_{k=1}^3 D_k, \quad D_{\textcircled{112}} = \sum_{k=1}^3 \nu_k D_k, \quad D_{\textcircled{4}} = \sum_{k=1}^2 (D_k + e_k^2 C_k) \\ D_{\textcircled{412}} &= \sum_{k=1}^2 \nu_k (D_k + e_k^2 C_k), \quad D_{\textcircled{11}} = D_{\textcircled{4}} + D_3, \quad D_{\textcircled{112}} = D_{\textcircled{412}} + \nu_3 D_3 \\ D &= \sum_{k=1}^3 (D_k + d_k^2 C_k), \quad D_{12} = \sum_{k=1}^3 \nu_k (D_k + d_k^2 C_k) \\ d_k &= H_k - \eta_{\textcircled{6}}, \quad e_k = H_k - \eta_{\textcircled{4}} \end{aligned} \right\} (11)$$

と表される。座標  $r$ , たわみ  $w$  および時間  $t$  と各諸量を次のように無次元化して解析を進める。

$$\left. \begin{aligned} (\xi, \bar{c}_1, \bar{c}_2) &= (r, c_1, c_2) / R, \quad \bar{w}_i = w_i / h \\ (\bar{h}_k, \bar{\eta}_{\textcircled{4}}, \bar{\eta}_{\textcircled{6}}) &= (h_k, \eta_{\textcircled{4}}, \eta_{\textcircled{6}}) / h, \quad \bar{\rho}_k = \rho_k / \rho \\ (\bar{D}_k, \bar{D}_{\textcircled{4}}, \bar{D}_{\textcircled{1}}, \bar{D}_{\textcircled{11}}) &= (D_k, D_{\textcircled{4}}, D_1, D_{\textcircled{11}}) / D \\ (\bar{D}_{\textcircled{112}}, \bar{D}_{\textcircled{12}}, \bar{D}_{12}) &= (D_{\textcircled{112}}, D_{\textcircled{12}}, D_{12}) / D \\ \tau &= \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \alpha_k = \frac{E_k}{E_3} \\ \bar{D} &= \frac{12(1-\nu_3^2)}{E_3 h^3} D, \quad (i = \textcircled{1}, \textcircled{2}, \dots, \textcircled{6}), (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} (12)$$

ただし、添字①は表記の簡略化のため、単に添字  $i$  で示すことにする。

次に、各区間の微小振幅の自由曲げ振動に対する運動方程式を求める。まず区間 III の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_{\textcircled{6}}}{\partial \tau^2} + \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\textcircled{6}} = 0 \quad (13)$$

と非常に簡単な式で表される。はく離部分は図 3, 図 4 に示すようにはく離円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし、ヒンジには単位縁長さ当たり  $Z_1(t), Z_2(t)$  の大きさの半径方向面内力が作用するとする。また、振動中上下の板が接触すると、はく離界面に相互接触力  $q_1(r, \theta, t), q_2(r, \theta, t)$  が作用すると仮定し、それらの力を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2) &= (Z_1, Z_2) R^2 / D \\ (\bar{q}_1, \bar{q}_2) &= (q_1, q_2) R^4 / (Dh) \end{aligned} \right\} (14)$$

と無次元化すれば、区間 II の運動方程式は

$$(\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 + \bar{\rho}_2 \bar{h}_2) \frac{\partial^2 \bar{w}_{\textcircled{4}}}{\partial \tau^2} + \bar{D}_{\textcircled{4}} \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\textcircled{4}} + Z_2 \bar{\nabla}^2 \bar{w}_{\textcircled{4}} + \bar{q}_2 = 0 \quad (15)$$

$$\bar{\rho}_3 \bar{h}_3 \frac{\partial^2 \bar{w}_{\textcircled{5}}}{\partial \tau^2} + \bar{D}_3 \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\textcircled{5}} - Z_2 \bar{\nabla}^2 \bar{w}_{\textcircled{5}} - \bar{q}_2 = 0 \quad (16)$$

と表される。ここで  $\bar{w}_{\textcircled{4}} = \bar{w}_{\textcircled{5}}$  と仮定し、式(15)と式(16)を加え合せると

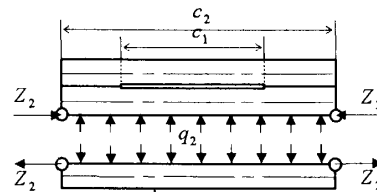


Fig. 3 Inplane force and normal pressure in the delamination region  $c_2$

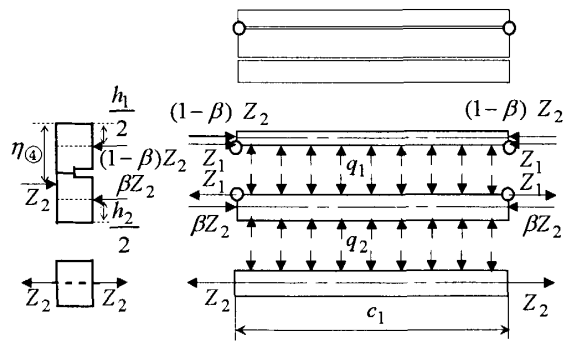


Fig. 4 Inplane forces and normal pressures in the delamination region  $c_1$

$$\frac{\partial^4 \bar{w}_{\text{④}}}{\partial \tau^4} + \bar{D}_{\text{II}} \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\text{④}} = 0 \quad (17)$$

となる。区間 I では、運動方程式は

$$\rho_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_{\text{①}}}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\text{①}} + \{(1-\beta)\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1\} \bar{\nabla}^2 \bar{w}_{\text{①}} + \bar{q}_1 = 0 \quad (18)$$

$$\rho_2 \bar{h}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_{\text{②}}}{\partial \tau^2} + \bar{D}_2 \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\text{②}} + (\beta\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1) \bar{\nabla}^2 \bar{w}_{\text{②}} + (\bar{q}_2 - \bar{q}_1) = 0 \quad (19)$$

$$\rho_3 \bar{h}_3 \frac{\partial^2 \bar{w}_{\text{③}}}{\partial \tau^2} + \bar{D}_3 \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\text{③}} - \bar{Z}_2 \bar{\nabla}^2 \bar{w}_{\text{③}} - \bar{q}_2 = 0 \quad (20)$$

で与えられ、 $\bar{w}_{\text{①}} = \bar{w}_{\text{②}} = \bar{w}_{\text{③}}$  と仮定して式(18)~式(20)を加え合せる

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_{\text{①}}}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \bar{\nabla}^4 \bar{w}_{\text{①}} = 0 \quad (21)$$

のように非常に簡単となる。ただし、 $\beta$  は領域④の基準面に作用する  $Z_2$  を、領域①と②の中立面に作用する力学的等価な面内力に分割するパラメータで、図4の左の図より

$$\beta = \frac{2}{h_1 + h_2} \left( \bar{\eta}_{\text{④}} - \frac{\bar{h}_1}{2} \right) \quad (22)$$

と表される。

**2・3 解法** 円板は調和振動をすと仮定し、たわみ  $\bar{w}_{\text{①}}, \bar{w}_{\text{④}}, \bar{w}_{\text{⑥}}$  および面内力  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$  を、半径方向の節線の数  $n$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_i(\xi, \theta, \tau) &= X_i(\xi) \cos(n\theta + \varphi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ \bar{Z}_j(\theta, \tau) &= \bar{Z}_{j0} \cos(n\theta + \varphi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$(i = \text{①}, \text{④}, \text{⑥}), (j = 1, 2)$

とおくと、式(13)、式(17)および式(21)より  $X_i(\xi)$  は

$$X_i(\xi) = A_{i1} J_n(\lambda_i \xi) + A_{i2} Y_n(\lambda_i \xi) + A_{i3} I_n(\lambda_i \xi) + A_{i4} K_n(\lambda_i \xi) \quad (24)$$

$(i = \text{①}, \text{④}, \text{⑥})$

$$\lambda_{\text{①}}^2 = \bar{p} / \sqrt{\bar{D}_1}, \quad \lambda_{\text{④}}^2 = \bar{p} / \sqrt{\bar{D}_{\text{II}}}, \quad \lambda_{\text{⑥}}^2 = \bar{p} \quad (25)$$

と得られる。ここで、 $\bar{p}$  は無次元固有角振動数、 $J_n, Y_n$  は  $n$  次の第1種、第2種の Bessel 関数、 $I_n, K_n$  は  $n$  次の第1種、第2種の変形 Bessel 関数である。

また、面内力  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2$  の大きさ  $\bar{Z}_{10}, \bar{Z}_{20}$  は、はく離端面において上下の円板で互いに接している面の伸びは等しい条件<sup>(1)</sup> から求められる。すなわち、節直径数  $n$  が偶数のときは

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{c_1} [\varepsilon_{\text{①}}^{(t)} + \varepsilon_{\text{①}}^{(b)}] dr &= \int_0^{c_1} [\varepsilon_{\text{②}}^{(t)} - \varepsilon_{\text{②}}^{(b)}] dr \\ \int_0^{c_1} [\varepsilon_{\text{②}}^{(t)} + \varepsilon_{\text{②}}^{(b)}] dr &+ \int_{c_1}^{c_2} [\varepsilon_{\text{④}}^{(t)} + \varepsilon_{\text{④}}^{(b)}] dr \\ &= \int_0^{c_2} \varepsilon_{\text{③}}^{(t)} dr - \int_0^{c_1} \varepsilon_{\text{③}}^{(b)} dr - \int_{c_1}^{c_2} \varepsilon_{\text{⑤}}^{(b)} dr \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

から求められ、節直径数  $n$  が奇数のときは

$$\bar{Z}_{10} = \bar{Z}_{20} = 0 \quad (27)$$

となる。ただし、はく離界面の伸びひずみ  $\varepsilon^{(t)}$  と曲げひずみ  $\varepsilon^{(b)}$  は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{①}}^{(t)} &= -\{Z_1 + (1-\beta)Z_2\} / C_1 \\ \varepsilon_{\text{②}}^{(t)} &= (Z_1 - \beta Z_2) / C_2 \\ \varepsilon_{\text{③}}^{(t)} = \varepsilon_{\text{⑤}}^{(t)} &= Z_2 / C_3, \quad \varepsilon_{\text{④}}^{(t)} = -Z_2 / (C_1 + C_2) \\ \varepsilon_i^{(b)} &= -\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} \frac{h_k}{2} \quad (i = \text{①}, \text{②}, \text{③}), (k = 1, 2, 3) \\ \varepsilon_{\text{④}}^{(b)} &= -\frac{\partial^2 w_{\text{④}}}{\partial r^2} (h_1 + h_2 - \eta_{\text{④}}) \\ \varepsilon_{\text{⑥}}^{(b)} &= -\frac{\partial^2 w_{\text{④}}}{\partial r^2} \frac{h_3}{2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

と表される。式(28)を式(26)に代入して積分し、それらを無次元表示すると

$$\left. \begin{aligned} -\bar{F}_1 \bar{Z}_{10} + (\beta \bar{F}_1 - \frac{1-\nu_1^2}{\alpha_1 \bar{h}_1}) \bar{Z}_{20} &= \frac{12(1-\nu_3^2)}{D c_1} \cdot \frac{\bar{h}_1 + \bar{h}_2}{2} \left( \frac{dX_{\text{①}}}{d\xi} \right)_{\xi=c_1} \\ \frac{1-\nu_2^2}{\alpha_2 \bar{h}_2} \bar{Z}_{10} - \left[ \frac{1-\nu_2^2}{\alpha_2 \bar{h}_2} \beta - \bar{F}_2 \right] + \left( \frac{1-\nu_2^2}{\bar{h}_3} + \bar{F}_2 \right) \frac{c_2}{c_1} \bar{Z}_{20} \\ &= \frac{12(1-\nu_3^2)}{D c_1} \left[ -(\bar{h}_1 + \frac{\bar{h}_2}{2} - \bar{\eta}_{\text{④}}) \left( \frac{dX_{\text{①}}}{d\xi} \right)_{\xi=c_1} \right. \\ &\quad \left. + (\bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \frac{\bar{h}_3}{2} - \bar{\eta}_{\text{④}}) \left( \frac{dX_{\text{④}}}{d\xi} \right)_{\xi=c_1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

が得られ、これより節直径数  $n$  が偶数のときの  $\bar{Z}_{10}$  と  $\bar{Z}_{20}$  が求められる。ただし、 $\bar{F}_1$  と  $\bar{F}_2$  は

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 &= \frac{(1-\nu_2^2)\alpha_1 \bar{h}_1 + (1-\nu_1^2)\alpha_2 \bar{h}_2}{\alpha_1 \bar{h}_1 \alpha_2 \bar{h}_2} \\ \bar{F}_2 &= \frac{(1-\nu_1^2)(1-\nu_2^2)}{(\alpha_1 \bar{h}_1 \alpha_2 \bar{h}_2) F_1} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

次に、境界条件と連続条件を式(24)の固有関数  $X_i(\xi)$  を用いて表す。まず無孔円板であるため

$$\xi = 0 \text{ で } X_{\text{①}} = \text{有限より} \quad A_{\text{①2}} = A_{\text{①4}} = 0 \quad (31)$$

の条件が必要となる。また本報では、周辺固定円板を取り上げるので、境界条件は

$$\xi = 1 \text{ で} \quad X_{\text{⑥}} = 0, \quad \frac{dX_{\text{⑥}}}{d\xi} = 0 \quad (32)$$

となる。さらに、はく離円周縁におけるたわみ、たわみ角、曲げモーメントおよびせん断力の連続条件は次式で表される<sup>(4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \xi = \bar{c}_1 \text{ で} \\ X_{\text{①}} = X_{\text{④}}, \quad \frac{dX_{\text{①}}}{d\xi} = \frac{dX_{\text{④}}}{d\xi} \\ \bar{D}_I \frac{d^2 X_{\text{①}}}{d\xi^2} + \bar{D}_{II2} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_{\text{①}}}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_{\text{①}} \right) - \frac{1}{2} \bar{Z}_{10} (\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \\ = \bar{D}_{II} \frac{d^2 X_{\text{④}}}{d\xi^2} + \bar{D}_{III2} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_{\text{④}}}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_{\text{④}} \right) \\ \bar{D}_I \frac{d}{d\xi} (\bar{\nabla}_d^2 X_{\text{①}}) = \bar{D}_{II} \frac{d}{d\xi} (\bar{\nabla}_d^2 X_{\text{④}}) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi = \bar{c}_2 \text{ で} \\ X_{\text{④}} = X_{\text{⑧}}, \quad \frac{dX_{\text{④}}}{d\xi} = \frac{dX_{\text{⑧}}}{d\xi} \\ \bar{D}_{II} \frac{d^2 X_{\text{④}}}{d\xi^2} + \bar{D}_{III2} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_{\text{④}}}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_{\text{④}} \right) - \bar{Z}_{20} \{ (\bar{h}_1 + \bar{h}_2 - \bar{\eta}_{\text{④}}) + \frac{\bar{h}_3}{2} \} \\ = \frac{d^2 X_{\text{⑧}}}{d\xi^2} + \bar{D}_{I2} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dX_{\text{⑧}}}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_{\text{⑧}} \right) \\ \bar{D}_{II} \frac{d}{d\xi} (\bar{\nabla}_d^2 X_{\text{④}}) = \frac{d}{d\xi} (\bar{\nabla}_d^2 X_{\text{⑧}}) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ただし

$$\bar{\nabla}_d^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} \quad (35)$$

そこで、式(24)の $X_{\text{①}}$ 、 $X_{\text{④}}$ 、 $X_{\text{⑧}}$ にこれらの条件を適用し、 $X_{\text{①}}$ の中に含まれる $A_{\text{①1}}$ と $A_{\text{①3}}$ を消去すると

$$[H]\{A\} = \{0\} \quad (36)$$

の関係式が求められる。ここで $\{A\}$ は

$$\{A\} = \{A_{\text{④1}}, A_{\text{④2}}, A_{\text{④3}}, A_{\text{④4}}, A_{\text{⑧1}}, A_{\text{⑧2}}, A_{\text{⑧3}}, A_{\text{⑧4}}\}^T \quad (37)$$

であり、 $[H]$ は8行8列の正方マトリックスである。式(36)から

$$|H| = 0 \quad (38)$$

の振動数方程式が得られる。

### 3. 実験

はく離の大きさが異なる積層円板を製作して固有振動数を測定し、理論結果と比較して解析モデルの妥当性を検証した。

**3・1 試験片と実験要領** 試験片の外形寸法は、一辺が200mmの正方形である。試験片は上層に厚さ0.2mmのアルミニウム板、中層に厚さ0.6mmのタフピッチ銅板、下層に厚さ0.2mmのステンレスばね鋼板を用い、これらをシアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して製作した。それらの材料定数を表1に示す。このとき、所定のはく離半径をもつ試験片を製作するために、まず3枚の透明なアクリル板を使用し、接着剤が未接着部分へ浸透することを考慮した、接着剤の適切な貼付位置と量を試行錯誤で取得した。さらにこの方法で表1中の三種類の材料を接着し、重りを約24時間載せて接着部分にむらがなく、しかもほぼ所定のはく離半径をもつ試験片を製作した。

試験片取付枠は、大きさが250mm角で厚さが20mmの2枚の鉄板のそれぞれ中心部に半径 $R = 80$ mmの開口部を設け、試験片接触面を研磨仕上げして製作した。実験の際には、試験片を取付け枠に挟んで12本のボルトに7.84 N・mの一定トルクを均等にかけて締付けた。

実験は次の手順で行った。まず試験片を挟んだ試験片取付枠を、定盤の上に固定した支持台上に水平に設置した。次に、発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅して口径120mmのスピーカに入力し、その音響出力を直径10mmの先端開口をもつアルミ製のホーン形ノズルで集中させて、試験片の最大振幅位置を音圧により加振した。このとき、加振振動数を変化させ、加振用のスピーカ端子電圧とレーザ変位計で測定した振動変位の応答出力電圧とでリサージュ図形を描かせて共振点を検出し、固有振動数を測定した。また、固有振動数に対応する振動モードの確認は、前報<sup>(4)</sup>と同様に、板上面に食塩を一様に散布し、食塩によって描かれた節直径を観察して行った。

Table 1 Material properties

Materials	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$h$ [mm]
Aluminum	72.4	0.33	2700	0.2
Tough-pitch copper	114	0.35	8600	0.6
Stainless spring steel	194	0.30	7770	0.2

**3・2 実験結果と考察** 固有振動数の理論値  $f$  [Hz] は、振動数方程式(38)から求められる無次元固有角振動数  $\bar{p}$  を用いて

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{p}}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (39)$$

で計算される。このとき、本実験で使した試験片に対して式(39)の係数は

$$\sqrt{D/\rho h} / (2\pi R^2) \cong 30.82 \quad [1/s] \quad (40)$$

の値となる。図5は縦軸に固有振動数  $f$  [Hz]、横軸に大きい方はく離の無次元化した半径  $\bar{c}_2 = c_2/R$  をとって、実験で測定された固有振動数と式(38)、(39)

を用いて計算した理論値を比較したものである。図中の略図は、各固有振動数に対応する振動モードを示す。

まず、図5(a)と(d)の  $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0$  の完全に接着された積層円板の場合、理論振動数は 314.9 Hz, 655.3 Hz, 1075.0 Hz となり、これらを式(40)の値で割ると  $\bar{p}$  は 10.22, 21.26, 34.88 となって等方均質な固定円板の値<sup>(4)</sup>と一致する。このとき実験値は 309.1 Hz, 661.7 Hz, 1014.8 Hz でほぼ理論値と一致しており、今回の実験でも試験片の接着層が固有振動数に与える影響は、ほとんど認められないことがわかる。また、図5のすべての  $\bar{c}_1$  の条件において、実験で得られた固有振動数の値は、はく離半径  $\bar{c}_2$  が大きくなるにつれて理論曲線とほぼ同じ傾向で減少している。

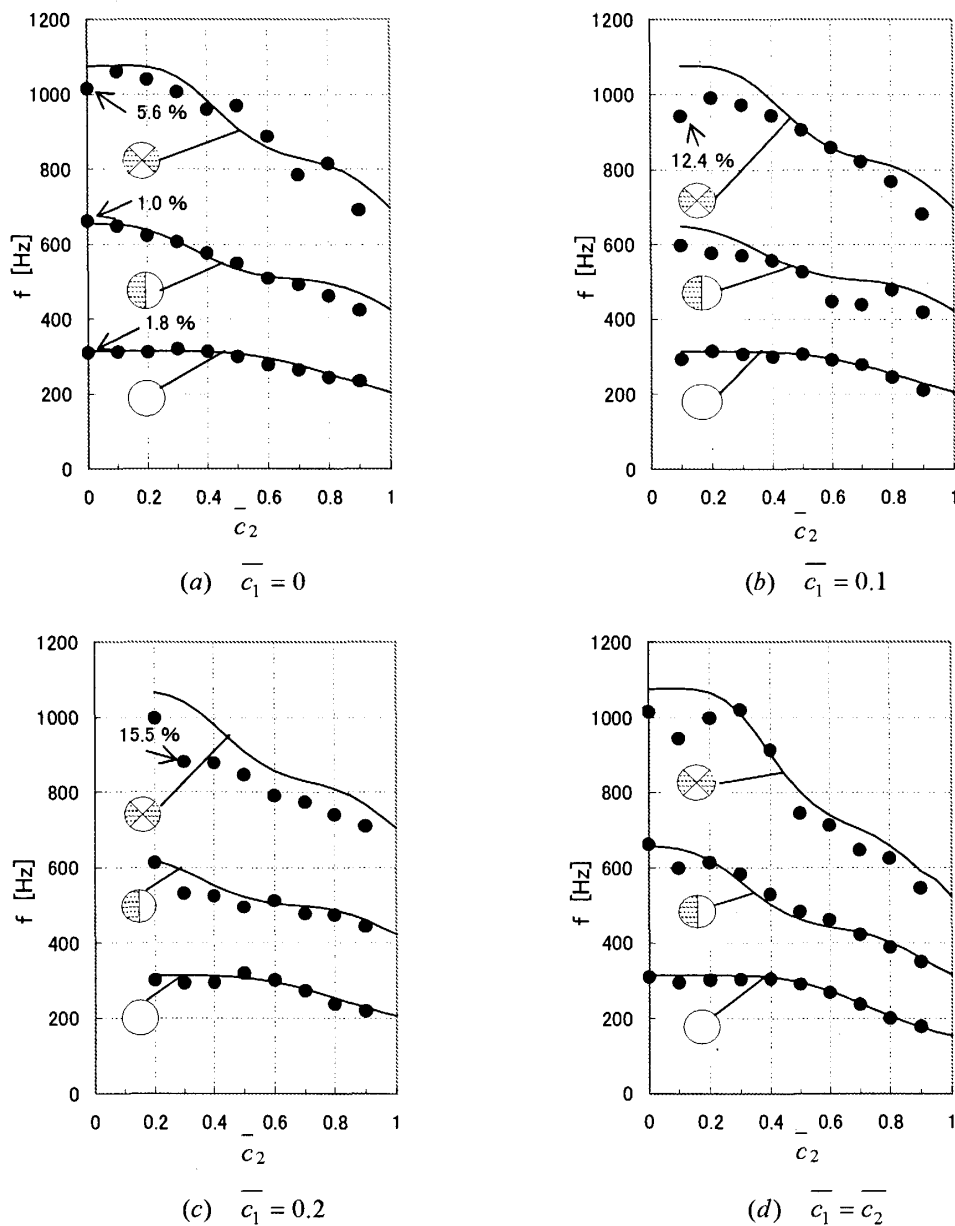


Fig.5 Comparison between experimental and theoretical frequencies

ところで、節直径数 $n=2$ の高次振動において、固有振動数の測定結果は理論曲線に対して幾分ばらつきが見られる。特に、 $\bar{c}_1=0.2$ 、 $\bar{c}_2=0.3$ と $\bar{c}_1=\bar{c}_2=0.1$ の場合、誤差は15.5%、12.4%と実験値がかなり小さな値となった。これは、今回実験で採用したスピーカによる音響加振法では高い振動数になると加振力が不足し、節直径数が増えるとレーザ変位形で測定した振動振幅が小さくなり、きれいなリサージュ図形を描かせて正確な共振振動数を計測しづらかったためである。しかし、図5で $n=2$ の場合の何点かの測定結果を除くと、理論解析で得られた固有振動数は実験値とよく一致し、面内変位の影響を無視した薄板の曲げ理論に基づく本報の解析モデルの妥当性が確認できる。

#### 4. ま と め

本報では、三層の異種材積層円板がその中心部に大きさの異なる円形の二重層間はく離を有する場合の自由振動を、面内変形の影響は無視できるとして理論解析を行った。その際、はく離部分は、はく離円周縁がヒンジ止めされた重ね板とみなし、各層のたわみは等しいと仮定している。しかし実際には振動中、異種材を接着した積層円板の面内変形は無視できるのか、またはく離部分は接触する領域と接触しない領域が混在し、各層のたわみが等しいという仮定は適切なのかという疑問が生じる。そこで、さまざまなはく離条件をもつ異種材積層円板を製作して振動実験を行い、理論結果が測定した固有振動数と一致することを確認した。したがって、今回の解析モデルはいくつかの疑問点を含んでいるとはいえ、積層円板の自由振動特性に及ぼす多重層間はく離の影響を調査する場合には、簡単でしかも有効な方法といえる。なお現在、面内変位の影響を考慮した軸対称自由振動の理論を構築し、本報の結果と比較して自由振動特性に及ぼす面内変形の影響を調査している段階である。

最後に、実験および計算を手伝っていただいた木村光宏君(現在、(株)TOM)に感謝の意を表す。

#### 文 献

- (1) Wang, J. T. S. et al., Vibrations of Split Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 4(1982), pp. 491-502.
- (2) Mujumdar, P. M. and Suryanarayan, S., Flexural Vibrations of Beams with Delaminations, *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 125, No. 3 (1988), pp. 441-461.
- (3) Tracy, J. J. and Pardoen, G. C., Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 23, No. 12 (1989), pp. 1200-1215.
- (4) Shen, M. H. and Grady, J. E., Free Vibrations of Delaminated Beams, *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 5 (1992), pp. 1361-1370.
- (5) Hu, J. S. and Hwu, C., Free Vibrations of Delaminated Composite Sandwich Beams, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 10 (1995), pp. 1911-1918.
- (6) Chang, T.-P. and Liang, J.-Y., Vibration of Postbuckled Delaminated Beam-Plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 12 (1998), pp. 1199-1217.
- (7) Aritomi, M. et al., Free Vibrations of Laminated Beams Containing a Delamination, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Serie C*, Vol. 65, No. 638 (1999), pp. 3943-3950.
- (8) Luo, H. and Hanagud, S., Dynamics of delaminated beams, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 (2000), pp. 1501-1519.
- (9) Sekine, H. et al., Impact Response Analysis of Partially Delaminated Composite Laminates, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 63, No. 608 (1997), pp. 787-793.
- (10) Aritomi, M. et al., Axisymmetric Free Vibrations of Circular Laminated Plates Containing a Disk-Shaped Delamination, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 67, No. 654 (2001), pp. 300-308.
- (11) Aritomi, M. et al., Free Vibration Characteristics of Circular Laminated Plates Containing a Disk-Shaped Delamination, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 67, No. 662 (2001), pp. 3108-3115.
- (12) Suemasu, H. and Majima, O., Multiple Delaminations and Their Severity in Circular Axisymmetric Plates Subjected to Transverse Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 4 (1996), pp. 441-453.
- (13) Suemasu, H. and Majima, O., Multiple Delaminations and Their Severity in Nonlinear Circular Plates Subjected to Concentrated Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol. 32, No. 2 (1998), pp. 123-140.
- (14) Sekiya, S. et al, *Design Handbook for Plate Structure* (in Japanese), (1982), p. 170, Asakura-shoten.