

大ききの等しい多重層間はく離を有する積層円板の自由振動*

有 富 正 男^{*1}, 福 岡 和 樹^{*2}, 柳 田 光 洋^{*3}
小 田 美 紀 男^{*1}, 戸 谷 眞 之^{*1}Free Vibrations of Circular Laminated Plates Containing
Multiple Delaminations of a Same SizeMasao ARITOMI^{*4}, Kazuki FUKUOKA, Mitsuhiro YANAGITA,
Mikio ODA and Masayuki TOYA^{*4} Department of Mechanical Engineering, Kagoshima University,
1-21-40 Korimoto, Kagoshima-shi, Kagoshima, 890-0065 Japan

Free vibrations of the clamped circular laminated plates containing multiple disk-shaped delaminations of a same size are analyzed on the basis of the theory of small deflection of plates. Analysis of a model assuming the contact of the two crack faces is presented. For non-axially symmetric vibrations, the equations of motion are solved by neglecting the in-plane displacements of the reference-surface and by modeling the crack part as two lapped discs hinged at the edge. Axisymmetric free vibrations are studied by taking account of the radial in-plane displacement of the reference-surface. Analyses and experiments are carried out for the natural frequencies. It is shown that the effect of the in-plane displacements of the reference-surface on the free vibration characteristics of laminated plates is very small.

Key Words: Free Vibration, Vibration of Continuous System, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency

1. 緒 言

積層材料は外部からの異物などによる衝撃を受けると、容易に材料内部に表面から観測困難な層間はく離などの損傷を生じる。この材料内部の層間はく離は圧縮強度を大きく低下させ、それが航空機など高度の信頼性を要求される構造物の設計の際に重要な問題となっている。そのため、内部はく離を有する積層材料の研究は、主に面内の静的圧縮荷重を受ける場合の圧縮強度や座屈挙動を対象としている。しかしながら、積層材の耐熱材料が振動によって剥がれ落ちる事故を考えると、動的荷重によるはく離進展問題を解決することが重要な課題といえる。その場合、層間はく離が積層材料の振動特性に及ぼす影響を明らかにしておくことが必要となる。

層間はく離が積層はりの振動特性に及ぼす影響を調査した研究^{(1)~(6)}は数多く見受けられるが、積層はり

と同様に実用上重要な積層板に関する研究は数少ない。たとえば、関根ら⁽⁹⁾が内部に一個の円形層間はく離を有する複合材料積層板中の剛体球による衝撃応答を、著者ら⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾が円形はく離を有する二層円板の自由振動を理論解析している。また、衝撃損傷による圧縮強度劣化は、衝撃点下に発生する多重層間はく離が重要な要因となっている。末益ら⁽¹²⁾⁽¹³⁾は複合材料積層板中に多重層間はく離が存在する場合の、横荷重によるはく離進展問題や圧縮特性劣化の研究を行っている。著者ら⁽¹⁴⁾は異種材からなる三層円板が、その中心部に大ききの異なる円形の二重層間はく離を有する場合の自由振動を、面内変形の影響が無視できるものとして理論解析している。

本報では、異種材からなるN層の積層円板が、その中心部に大ききの等しい円形の多重層間はく離を有する場合の自由振動を取り上げる。その際まず、これまでの報告⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾⁽¹⁴⁾と同様に、面内変形の影響を無視し、はく離端をヒンジ止めと仮定して一般の振動モードを理論解析する。同時に、面内変形の影響を考慮した軸対称自由振動を解析して両理論結果を比較し、面内変形が振動特性に及ぼす影響は小さく無視できることを明らかにする。また、大ききの等しいはく離をも

* 原稿受付 2007年7月19日。

^{*1} 正員, 鹿児島大学工学部(☎890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。^{*2} 学生員, 鹿児島大学大学院理工学研究科。^{*3} 日本澱粉工業(株)(☎891-0196 鹿児島市南栄3-20)。

E-mail: aritomi@mech.kagoshima-u.ac.jp

つ三層と四層の積層円板を製作して振動実験を行い、面内変形を無視した解析モデルが、はく離を有する積層円板の自由振動を解析する場合には簡単でしかも有効な方法であること検証する。

2. 理論解析

2.1 積層円環部の基礎式 本論文では、層間はく離が積層板の自由振動に及ぼす基本的な影響を調査するため、各層の板は複合材料ではなく、均質・等方性材料とする。図1に示すような、N枚の異種材を接着した半径Rの積層円板が、各層間の円板中心に半径cの大きさの等しいN-1個の円形はく離を有する場合を考える。積層円板の上面から第1層、第2層、...とし、第k層の厚さを h_k 、縦弾性係数を E_k 、ポアソン比を ν_k 、密度を ρ_k 、伸び剛性と曲げ剛性を C_k 、 D_k とする。いま、板の上面から η の距離のところ基準面を設け、板上面から第k層の中央面までの距離を H_k 、基準面から第k層の中央面までの距離を d_k として、各諸量を式(1)のように定める。

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2}, D_k = \frac{E_k h_k^3}{12(1-\nu_k^2)}, H_k = \sum_{i=1}^k h_i - \frac{h_k}{2} \\ d_k &= H_k - \eta, h = \sum_{k=1}^N h_k, \rho h = \sum_{k=1}^N \rho_k h_k \\ D_s &= \sum_{k=1}^N D_k, D_{s12} = \sum_{k=1}^N \nu_k D_k \end{aligned} \right\} (1)$$

式(1)の諸量を用いると、異種材からなるN層積層円板の伸び剛性 C 、 C_{12} 、 $C_{r\theta}$ 、伸びと曲げの連成剛性 B 、 B_{12} 、 $B_{r\theta}$ 、曲げ剛性 D 、 D_{12} 、ねじり剛性 $D_{r\theta}$ は

$$\left. \begin{aligned} C &= \sum_{k=1}^N C_k, C_{12} = \sum_{k=1}^N \nu_k C_k, C_{r\theta} = \frac{1}{2}(C - C_{12}) \\ B &= \sum_{k=1}^N d_k C_k, B_{12} = \sum_{k=1}^N \nu_k d_k C_k, B_{r\theta} = \frac{1}{2}(B - B_{12}) \\ D &= \sum_{k=1}^N (D_k + d_k^2 C_k), D_{12} = \sum_{k=1}^N \nu_k (D_k + d_k^2 C_k) \\ D_{r\theta} &= \frac{1}{2}(D - D_{12}) \end{aligned} \right\} (2)$$

と表される⁽⁴⁾。曲げ剛性とねじり剛性、および連成剛性は基準面の位置 η によって変化する。

座標原点Oは基準面の円板の中心にとり、座標軸はそれぞれ座標原点から半径方向と円周方向に沿って r 軸と θ 軸を、それらの垂直な鉛直下方に z 軸を定める。また、基準面の r と θ 方向の面内変位を u^0 、 v^0 、 z 方向のたわみを w とする。基準面は、面内変位 u^0 、 v^0 とたわみ w に関する運動方程式が非連成となる $B=0$ の条件より

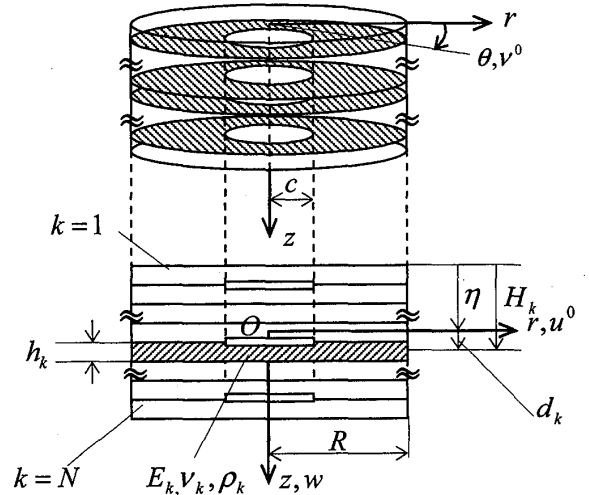


Fig. 1 Geometry of a circular laminated plate containing multiple disk-shaped delaminations

$$\eta = \sum_{k=1}^N H_k C_k / \sum_{k=1}^N C_k \quad (3)$$

の位置に定める⁽⁴⁾。座標 r 、時間 t 、たわみ w 、面内変位 u^0 、 v^0 および各諸量を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{w}, \bar{u}^0, \bar{v}^0, \bar{\eta}) &= (w, u^0, v^0, \eta) / h, (\xi, \bar{c}) = (r, c) / R \\ (\bar{C}, \bar{C}_{12}) &= (C, C_{12}) \frac{R^2}{D}, \bar{B}_{12} = B_{12} \frac{R}{D}, \bar{D}_{12} = \frac{D_{12}}{D} \\ \bar{D} &= \frac{12(1-\nu_1^2)D}{E_1 h^3}, \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \end{aligned} \right\} (4)$$

のように無次元化すると、微小振幅の自由曲げ振動に対する円環部分の r 、 θ 、 z 方向の運動方程式は、次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}^0}{\partial \tau^2} - \bar{C} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \bar{u}^0) \right\} + \frac{1}{2\xi^2} \frac{\partial^2 \bar{u}^0}{\partial \theta^2} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} \left(\frac{\bar{v}^0}{\xi^3} \right) \right] \\ + \frac{\bar{C}_{12}}{2\xi^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \bar{v}^0) \right\} = 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{v}^0}{\partial \tau^2} - \bar{C} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \bar{v}^0) \right\} + \frac{2}{\xi^2} \frac{\partial^2 \bar{v}^0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\xi^4} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} (\xi^3 \bar{u}^0) \right] \\ + \frac{\bar{C}_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \bar{v}^0) - \frac{\partial \bar{u}^0}{\partial \theta} \right\} \right] = 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + \nabla^4 \bar{w} = 0 \quad (7)$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (8)$$

これらの式からわかるように、一般の振動モードに対する自由振動を、面内変位 u^0 、 v^0 の影響を考慮して理

論解析することは非常に複雑である。そこで、本論文では

- ① 面内変位 u^0, v^0 の影響を無視した一般の振動モードの自由振動
- ② 面内変位 u^0 の影響を考慮した軸対称自由振動を解析し、両者を比較してはく離を有する積層円板の自由振動に及ぼす面内変形の影響を調査する。

2.2 一般の振動モードの自由振動

一般の振動モードに対して解析解を得るために次のことを仮定する。

- (1) 積層板の基準面と単層板の中央面の面内伸縮の影響は、面外の曲げ変形に比べて小さく無視できる。
- (2) はく離部分の各層のたわみは等しい。

この二つの仮定の下で運動方程式を導き、それらの解に境界条件と連続条件を適用して一般の振動モードの自由振動を解析する。

まず、円環部分の運動方程式は、式 (7) すなわち

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + \nabla^4 \bar{w} = 0 \tag{9}$$

と簡単な式で表される。はく離部分は図2に示すようにはく離円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし、ヒンジには単位長さ当たり $Z_k(t, \theta)$ の大きさの半径方向面内力が作用するとする。また、振動中上下の板が接触すると、はく離界面に相互接触力 $q_k(r, \theta, t)$ が作用すると仮定する。次に、各層のたわみ w_k 、その他の諸量、および軸対称振動の解析の際に用いる中央面の半径方向変位 u_k^0 を

$$\left. \begin{aligned} (\bar{w}_k, \bar{u}_k^0, \bar{d}_k, \bar{h}_k) &= (w_k, u_k^0, d_k, h_k) / h, \bar{\rho}_k = \rho_k / \rho \\ (\bar{D}_k, \bar{D}_s, \bar{D}_{s12}) &= (D_k, D_s, D_{s12}) / D \\ (\bar{C}_k, \bar{C}_{k12}) &= (C_k, \nu_k C_k) R^2 / D, \bar{q}_k = q_k R^4 / (Dh) \\ \bar{Z}_k &= Z_k R^2 / D, \alpha_k = E_k / E_1 \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

と無次元化する。このとき、各層の微小振幅の曲げ振動に対する運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_1 \bar{h} \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \nabla^4 \bar{w}_1 + \bar{Z}_1 \nabla^2 \bar{w}_1 + \bar{q}_1 &= 0 \\ \bar{\rho}_k \bar{h}_k \frac{\partial^2 \bar{w}_k}{\partial \tau^2} + \bar{D}_k \nabla^4 \bar{w}_k + (\bar{Z}_k - \bar{Z}_{k-1}) \nabla^2 \bar{w}_k + (\bar{q}_k - \bar{q}_{k-1}) &= 0 \\ &(k=2, \dots, N-1) \\ \bar{\rho}_N \bar{h}_N \frac{\partial^2 \bar{w}_N}{\partial \tau^2} + \bar{D}_N \nabla^4 \bar{w}_N - \bar{Z}_{N-1} \nabla^2 \bar{w}_N - \bar{q}_{N-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

と表される。ここで仮定 (2) の条件、すなわち $\bar{w}_k = \bar{w}_1$ ($k=2, 3, \dots, N$) と仮定し、式 (11) を加え合わせると

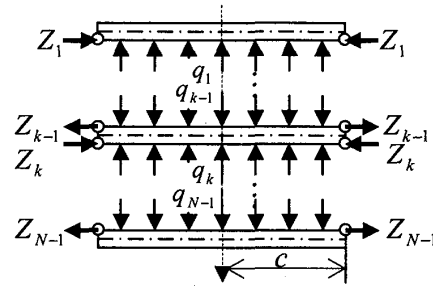


Fig. 2 Inplane forces and normal pressures in the delamination region

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla^4 \bar{w}_1 = 0 \tag{12}$$

のように非常に簡単となる。

次に円板は調和振動すると仮定し、たわみ \bar{w} 、 \bar{w}_1 、および面内力 \bar{Z}_k を、半径方向の節線の数 n を用いて

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}(\xi, \theta, \tau) &= X(\xi) \cos(n\theta + \phi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ \bar{w}_1(\xi, \theta, \tau) &= X_1(\xi) \cos(n\theta + \phi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ \bar{Z}_k(\theta, \tau) &= \bar{Z}_{k0} \cos(n\theta + \phi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

とおくと、式 (9) より $X(\xi)$ は

$$X(\xi) = A_1 J_n(\lambda \xi) + A_2 Y_n(\lambda \xi) + A_3 I_n(\lambda \xi) + A_4 K_n(\lambda \xi) \tag{14}$$

となり、式 (12) より $\xi=0$ で有界な解として

$$X_1(\xi) = A_{11} J_n(\lambda_1 \xi) + A_{13} I_n(\lambda_1 \xi) \tag{15}$$

が得られる。ここで、 \bar{p} は無次元固有角振動数、 J_n, Y_n は n 次の第1種、第2種の Bessel 関数、 I_n, K_n は n 次の第1種、第2種の変形 Bessel 関数であり、 λ, λ_1 は

$$\lambda^2 = \bar{p}, \quad \lambda_1^2 = \bar{p} / \sqrt{\bar{D}_s} \tag{16}$$

である。また、面内力 \bar{Z}_k の大きさ \bar{Z}_{k0} は、はく離端間において上下の円板で互いに接している面の伸びが等しいという条件^{(11), (14)} から次のようになる。すなわち節直径数 n が奇数のときは

$$\bar{Z}_{k0} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \tag{17}$$

となり、偶数のときは $[dX_1/d\xi]_{\xi=0} = 0$ を考慮して P_k および Γ_k, F_k を

$$\left. \begin{aligned} P_k &= \frac{12(1-\nu_1^2)}{DC} \cdot \frac{\bar{h}_k + \bar{h}_{k+1}}{2} \left[\frac{dX_1}{d\xi} \right]_{\xi=\bar{c}} \\ \Gamma_k &= -\frac{\alpha_k \bar{h}_k (1-\nu_{k+1}^2) + \alpha_{k+1} \bar{h}_{k+1} (1-\nu_k^2)}{\alpha_k \bar{h}_k \alpha_{k+1} \bar{h}_{k+1}} \\ F_k &= \frac{1-\nu_k^2}{\alpha_k \bar{h}_k} \end{aligned} \right\} (18)$$

とおくと、 \bar{Z}_{k0} に関する次の連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 \bar{Z}_{10} + F_2 \bar{Z}_{20} &= P_1 \\ F_k \bar{Z}_{(k-1)0} + \Gamma_k \bar{Z}_{k0} + F_{k+1} \bar{Z}_{(k+1)0} &= P_k \\ &(k=2,3,\dots,N-2) \\ F_{N-1} \bar{Z}_{(N-2)0} + \Gamma_{N-1} \bar{Z}_{(N-1)0} &= P_{N-1} \end{aligned} \right\} (19)$$

上式を解くと、節直径数 n が偶数のときの \bar{Z}_{k0} が求められる。

次に、境界条件と連続条件を円環部分とはく離部分の固有関数 X, X_1 を用いて表す。本報では周辺固定円板を取り上げるので、境界条件は

$$\xi=1 \text{ で } X=0, \frac{dX}{d\xi}=0 \quad (20)$$

となる。また、はく離円周縁における連続条件は

$$\left. \begin{aligned} \xi=\bar{c} \text{ で } X_1 &= X, \frac{dX_1}{d\xi} = \frac{dX}{d\xi} \\ \bar{D}_s \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \bar{D}_{s12} \left(\frac{1}{\xi} \frac{dX_1}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X_1 \right) - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\bar{Z}_{k0}}{2} (\bar{h}_k + \bar{h}_{k+1}) \\ &= \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \bar{D}_{12} \left(\frac{1}{\xi} \frac{dX}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} X \right) \\ \bar{D}_s \frac{d}{d\xi} (\nabla_a^2 X_1) &= \frac{d}{d\xi} (\nabla_a^2 X) \end{aligned} \right\} (21)$$

と表される⁽¹¹⁾。ただし

$$\nabla_a^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{n^2}{\xi^2} \quad (22)$$

式(21)の条件を、式(14)と式(15)の固有関数 X, X_1 に適用すると

$$[H]\{A\} = \{0\} \quad (23)$$

の関係式が求められる。ここで $\{A\}$ は

$$\{A\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_{11}, A_{13}\}^T \quad (24)$$

であり、 $[H]$ は 6 行 6 列の正方マトリックスである。式(23)から振動数方程式

$$|H| = 0 \quad (25)$$

が得られる。

2・3 面内変形の影響を考慮した軸対称自由振動 円環部分の運動方程式は、微分演算子

$$\nabla_a^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (26)$$

を用いると、式(5)と式(7)より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}^0}{\partial \tau^2} - \bar{C} \left(\nabla_a^2 \bar{u}^0 - \frac{\bar{u}^0}{\xi^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + \nabla_a^4 \bar{w} &= 0 \end{aligned} \right\} (27)$$

と表される。はく離部分の各層の半径方向の運動方程式は

$$\bar{\rho}_k \bar{h}_k \frac{\partial^2 \bar{u}_k^0}{\partial \tau^2} - \bar{C}_k \left(\nabla_a^2 \bar{u}_k^0 - \frac{\bar{u}_k^0}{\xi^2} \right) = 0, (k=1,2,\dots,N) \quad (28)$$

となり、また鉛直方向の運動方程式は、前節と同様に $\bar{w}_k = \bar{w}_1$ の仮定(2)を適用すると

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla_a^4 \bar{w}_1 = 0 \quad (29)$$

と表すことができる。円環部分とはく離部分のたわみ $\bar{w}(\xi, \tau)$, $\bar{w}_1(\xi, \tau)$ と、円環部分の基準面の半径方向変位 $\bar{u}^0(\xi, \tau)$, はく離部分の各層の中央面の半径方向変位 $\bar{u}_k^0(\xi, \tau)$ を

$$\left. \begin{aligned} [\bar{w}(\xi, \tau), \bar{w}_1(\xi, \tau)] &= [X(\xi), X_1(\xi)] \sin(\bar{p}\tau + \phi) \\ [\bar{u}^0(\xi, \tau), \bar{u}_k^0(\xi, \tau)] &= [U(\xi), U_k(\xi)] \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \right\} (30)$$

とおくと、各運動方程式より固有関数 X, X_1 と \bar{U}, \bar{U}_k は

$$\left. \begin{aligned} X(\xi) &= A_1 J_0(\lambda \xi) + A_2 Y_0(\lambda \xi) + A_3 I_0(\lambda \xi) + A_4 K_0(\lambda \xi) \\ X_1(\xi) &= A_{11} J_0(\lambda_1 \xi) + A_{13} I_0(\lambda_1 \xi) \\ U(\xi) &= B_1 J_1(\beta^2 \xi) + B_2 Y_1(\beta^2 \xi) \\ U_k(\xi) &= B_{k1} J_1(\beta_k^2 \xi) + B_{k2} Y_1(\beta_k^2 \xi), (k=1,2,\dots,N) \end{aligned} \right\} (31)$$

のように求められる。ただし、 λ と λ_1 は式(16)で与えられており、 β^2 と β_k^2 は

$$\beta^2 = \bar{p} / \sqrt{\bar{C}}, \quad \beta_k^2 = \bar{p} \cdot \sqrt{\bar{\rho}_k \bar{h}_k / \bar{C}_k} \quad (32)$$

である。

前節では、面外境界条件は周辺固定の場合を取り上げたので、面内境界条件は面内不動周辺とすると

$$\left. \begin{aligned} \xi=1 \text{ で } X=0, \frac{dX}{d\xi}=0, U=0 \\ \xi=0 \text{ で } U_k = \text{有限より } B_{k2}=0, (k=1,2,\dots,N) \end{aligned} \right\} (33)$$

の条件が成立する。さらに、はく離円周縁におけるたわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力および半径方向変位⁽¹²⁾、半径方向面内力の連続条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \xi = \bar{c} \text{で } X_1 = X, \frac{dX_1}{d\xi} &= \frac{dX}{d\xi} \\ \bar{D}_s \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \frac{\bar{D}_{s12}}{\xi} \frac{dX_1}{d\xi} - \sum_{k=1}^N \frac{h}{R} \bar{d}_k \left(\bar{C}_k \frac{dU_k}{d\xi} + \bar{C}_{k12} \frac{U_k}{\xi} \right) & \\ &= \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{\bar{D}_{12}}{\xi} \frac{dX}{d\xi} - \bar{B}_{12} \frac{U}{\xi} \\ \bar{D}_s \frac{d}{d\xi} (\nabla_{ad}^2 X_1) &= \frac{d}{d\xi} (\nabla_{ad}^2 X) \\ U_k &= U - \frac{h}{R} \bar{d}_k \frac{dX}{d\xi}, \quad (k=1,2,\dots,N) \\ \sum_{k=1}^N \left(\bar{C}_k \frac{dU_k}{d\xi} + \bar{C}_{k12} \frac{U_k}{\xi} \right) &= \bar{C} \frac{dU}{d\xi} + \bar{C}_{12} \frac{U}{\xi} - \bar{B}_{12} \frac{1}{\xi} \frac{dX}{d\xi} \end{aligned} \right\} (34)$$

ここで

$$\nabla_{ad}^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \quad (35)$$

式 (34) の曲げモーメント、面内変位、面内力の連続条件より、たわみ w, w_1 、面内変位 u^0, u_k^0 が連成する振動問題となることがわかる。式 (31) の X, X_1, U, U_k にこれらの条件を適用すると

$$[K] \{B\} = \{0\} \quad (36)$$

の関係式が求められ、これより

$$|K| = 0 \quad (37)$$

の振動数方程式が得られる。

3. 実験および計算結果

大きさの等しい二重および三重の層間はく離を有する三層および四層の積層円板を製作して、基本モー

Table 1 Material properties

Materials	E [GPa]	ν	ρ [kg/m ³]
Aluminum	72.4	0.33	2700
Tough pitch copper	114	0.35	8600
Stainless spring steel	194	0.30	7770

ドに対する振動実験を行い、固有振動数の実験値と理論結果を比較して解析モデルの妥当性を検証した。

3・1 試験片と実験要領

試験片の外形寸法は一辺が200mmの正方形で、全板厚 h は0.9mmである。試験片は、表1の材料定数をもつアルミニウム板、タフピッチ銅板、ステンレスばね鋼を用い、表2に示す各層の板をシアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して製作した。このとき、これまでと同様に所定のはく離半径をもつ試験片を製作するために、まず3枚あるいは4枚の透明なアクリル板を使用し、接着剤が未接着部分へ浸透することを考慮した、接着剤の適切な貼付位置と量を試行錯誤で取得した。さらにこの方法で表2の板を接着し、重りを約24時間載せて接着部分にむらがなく、しかもほぼ所定のはく離半径をもつ試験片を製作した。

試験片取付枠は、大きさが250mm角で厚さが20mmの2枚の鉄板のそれぞれ中心部に半径 $R=80$ mmの開口部を設け、試験片接触面を研磨仕上げして製作し、試験片をこの取付枠に挟んで12本のボルトで取付けた。実験は次の手順で行った。まず試験片を挟んだ試験片取付枠を、定盤の上に設置した固定枠台に垂直に固定した。次に、発信器からの正弦波をパワーアンプで増幅して口径120mmのスピーカーに入力し、その音響出力を直径10mmの先端開口部をもつアルミ製のホン形ノズルで集中させて、試験片の中心部を音圧により加振した。このとき、加振振動数を変化させ、加振用のスピーカー端子電圧と試験片に接着したひずみゲージの応答出力電圧とでリサージュ図形を描かせて共振点を検出し、基本振動の固有振動数を測定した。

3・2 実験結果と考察

固有振動数 f [Hz] は、振動数方程式 (25) および (37) から求められる無次元固有角振動数 \bar{p} を用いて

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{p}}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (38)$$

で計算される。このとき面内変形の影響を考慮した固

Table 2 Test-Piece

k	Plate 1	Plate 2	h_k [mm]	Plate 3	h_k [mm]
1	Copper	Steel	0.2	Steel	0.3
2	Aluminum	Aluminum	0.4	Copper	0.3
3	Steel	Copper	0.1	Aluminum	0.3
4	Copper	Steel	0.2		

有関数 (31) の未定定数のうち、三層板 (N=3) では U の中に含まれる B_1 と U_k の中の B_{21} , B_{31} を、四層板 (N=4) ではそれらに加えて U_k の中の B_{41} を消去し、式 (36) の $\{B\}$ と $[K]$ を

$$\left. \begin{aligned} \{B\} &= \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_{11}, A_{13}, B_2, B_{11}\}^T \\ [K] &: 8 \text{ 行 } 8 \text{ 列の正方マトリックス} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

として無次元固有角振動数 \bar{p} を計算した。図 3 は縦軸に固有振動数 f [Hz], 横軸に無次元はく離半径 $\bar{c} = c/R$ をとって、実験値と理論結果を比較したものである。図中の \bullet は実験値、実線は式 (37) で計算した面内変形を考慮した固有振動数、点線は式 (25) のヒンジ理論で計算した固有振動数である。なお、図 3 (d) の実験値は前報の文献(14)の図 5 (d) の結果で、試験片は上層に厚さ 0.2mm のアルミニウム板、中層に厚さ 0.6mm のタフピッチ銅板、下層に厚さ 0.2mm のステンレスばね鋼で構成されている。まず、 $\bar{c} = 0$ の完全に接着された積層円板の無次元固有振動数 \bar{p} は、面内変形を考慮した理論、ヒンジ理論ともにいずれの場合も 10.22 となって等方均質な固定円板の値⁽¹⁵⁾と一致した。この $\bar{p} = 10.22$ の値を式 (38) に代入して計

算した理論振動数は、(a) 309.4 Hz, (b) 388.0 Hz, (c) 296.6 Hz, (d) 314.9 Hz となり、このとき実験値は (a) 312.9 Hz, (b) 388.0 Hz, (c) 310.0 Hz, (d) 309.1 Hz でほぼ理論値と一致しており、今回の実験でも試験片の接着層が固有振動数に与える影響はほとんど認められないことがわかる。また、図 3 中の面内変形を考慮した理論振動数に対する実験値の最大誤差は 5~7%程度で、両理論曲線は実験値とよく一致しており、本報の両理論の解析モデルの妥当性が確認できる。

3・3 固有振動モード 図 4 は、半径 $\bar{c} = 0.1$ と 0.3 のはく離をもつ試験片 2 の、最大振幅を 0.3 と正規化した場合の基本振動モードとそのときの面内変位を示したものである。図中の縦の二点鎖点は、はく離端を表す。 $\bar{c} = 0.1$ のはく離が小さい場合、振動モードに及ぼすはく離の影響はほとんど見受けられない。ところが $\bar{c} = 0.3$ とはく離が大きくなると、はく離部分の重ね板の曲げ剛性 D_s が接着部分の積層板の曲げ剛性 D に比べて小さいため、たわみ曲線が破線のはく離のない板に比べてはく離の中心方向へ移動する傾向にある。しかしながら、いずれの場合も面内変形の影響を考慮した振動モードとヒンジ理論で計算した振動モードは

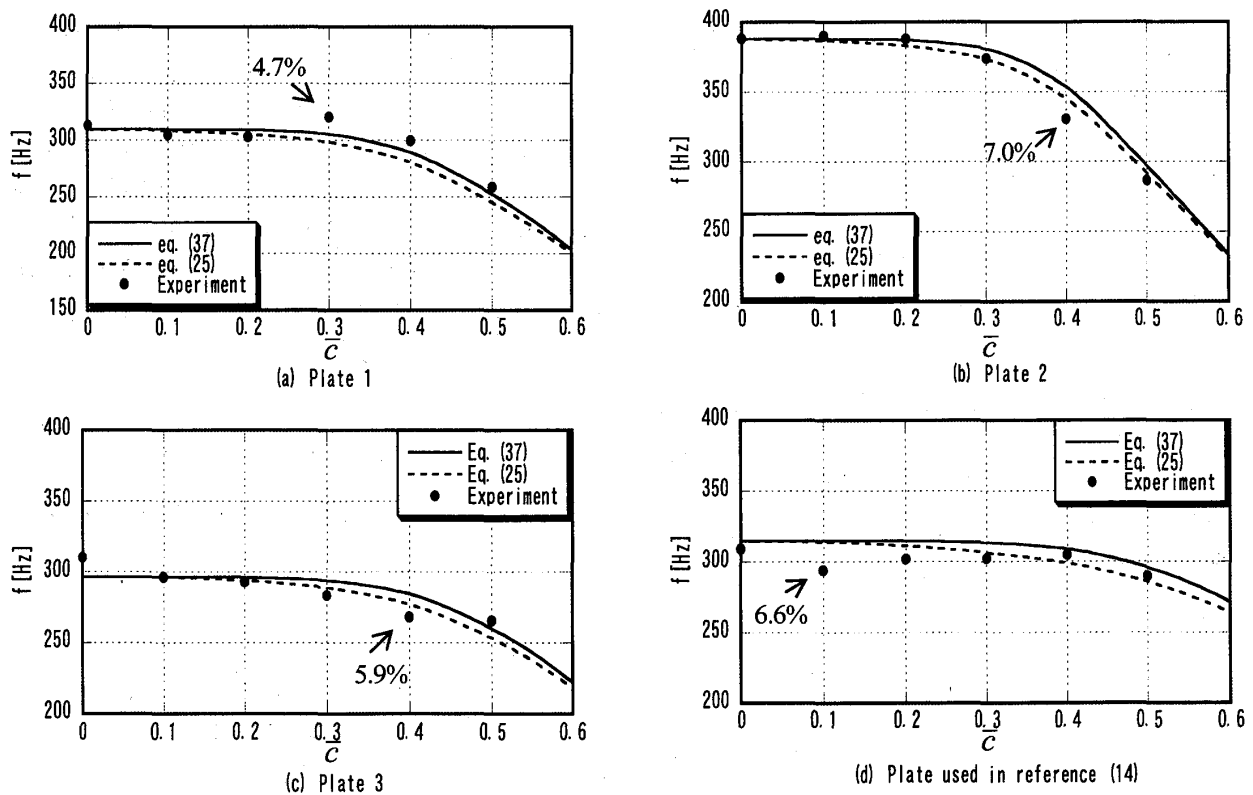


Fig.3 Comparison between experimental and theoretical fundamental frequencies

ほとんど一致し、振動モードに及ぼす面内変形の影響は無視できるものといえる。しかもこれらの振動モードに対応する接着部分の積層板の基準面の面内変位 U はほぼ零となり、完全接着された円板では、面内変形を考慮した理論とヒンジ理論の固有振動数が一致したことを裏付けるものと考えられる。また、はく離部分でも各層の板の中央面の面内変位は非常に小さく、はく離を有する異種材積層円板の自由曲げ振動を解析する際、面内変形の影響を無視しても差し支えないものといえる。

4. ま と め

本報では、 N 層の異種材積層円板がその中心部に大ききの等しい円形の多重層間はく離を有する場合の自由振動を、面内変形の影響を無視し、はく離部分は、はく離円周縁がヒンジ止めされた重ね板とみなして理論解析を行った。同時に、軸対称自由振動については面内変形の影響を考慮した理論解析も行った。ただし両理論とも解析解を求めるため、はく離部分の各層

のたわみは等しいと仮定している。しかし実際には振動中、はく離部分では接触する領域と接触しない領域が混在することになる。そこで、大ききの等しいはく離を有する三層と四層の積層円板を製作し、基本モードに対する振動実験を行い、両理論結果が測定した固有振動数とよく一致することを確認した。また、面内変形を無視して、はく離円周縁をヒンジと仮定した理論の固有振動数と固有振動モードは、面内変形の影響を考慮した理論結果とほとんど一致した。したがって、はく離を有する異種材積層円板の自由振動を解析する際、面内変形の影響は無視しても差し支えないものと考えられる。言い換えると、面内変形の影響を無視してはく離円周縁をヒンジ止めと仮定した解析モデルは、積層円板の自由振動特性に及ぼすはく離の影響を調査する場合には、簡単でしかも有効な方法といえる。なおこの結論は、文献(10)の周辺単純支持の二層円板の軸対称振動において、文献(11)と文献(14)の周辺固定の二層円板と三層円板の一般の振動モードにおいて得られた結論とも一致し、したがって極めて一般的に成立するものと考えられる。

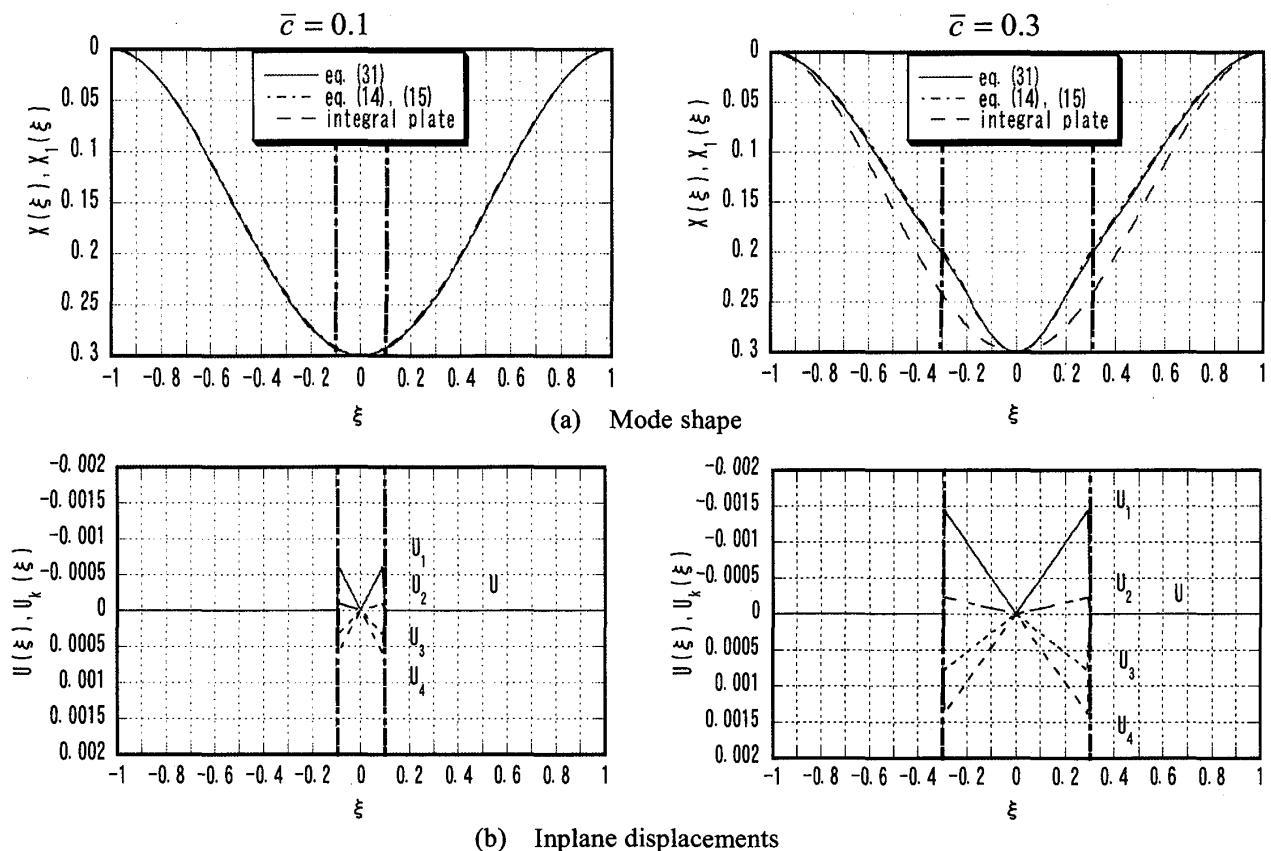


Fig.4 Mode shape and inplane displacements (Plate 2, fundamental mode)

文 献

- (1) Wang, J. T. S. et al., Vibrations of Split Beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, No. 4(1982), pp. 491-502.
- (2) Mujumdar, P. M. and Suryanarayan, S., Flexural Vibrations of Beams with Delaminations, *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 125, No. 3 (1988), pp. 441-461.
- (3) Tracy, J. J. and Pardoen, G. C., Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Laminates, *Journal of Composite Materials*, Vol. 23, No. 12 (1989), pp. 1200-1215.
- (4) Shen, M. H. and Grady, J. E., Free Vibrations of Delaminated Beams, *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 5 (1992), pp. 1361-1370.
- (5) Hu, J. S. and Hwu, C., Free Vibrations of Delaminated Composite Sandwich Beams, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 10 (1995), pp. 1911-1918.
- (6) Chang, T.-P. and Liang, J.-Y., Vibration of Postbuckled Delaminated Beam-Plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 12 (1998), pp. 1199-1217.
- (7) Aritomi, M. et al., Free Vibrations of Laminated Beams Containing a Delamination, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 65, No. 638 (1999), pp. 3943-3950.
- (8) Luo, H. and Hanagud, S., Dynamics of delaminated beams, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 (2000), pp. 1501-1519.
- (9) Sekine, H. et al., Impact Response Analysis of Partially Delaminated Composite Laminates, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 63, No. 608 (1997), pp. 787-793.
- (10) Aritomi, M. et al., Axisymmetric Free Vibrations of Circular Laminated Plates Containing a Disk-Shaped Delamination, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 67, No. 654 (2001), pp. 300-308.
- (11) Aritomi, M. et al., Free Vibration Characteristics of Circular Laminated Plates Containing a Disk-Shaped Delamination, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 67, No. 662 (2001), pp. 3108-3115.
- (12) Suemasu, H. and Majima, O., Multiple Delaminations and Their Severity in Circular Axisymmetric Plates Subjected to Transverse Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol. 30, No. 4 (1996), pp. 441-453.
- (13) Suemasu, H. and Majima, O., Multiple Delaminations and Their Severity in Nonlinear Circular Plates Subjected to Concentrated Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol. 32, No. 2 (1998), pp. 123-140.
- (14) Aritomi, M. et al., Free Vibrations of Circular Laminated Plates Containing Double Delaminations of Different Sizes, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 72, No. 719(2006), pp. 2027-2033.
- (15) Sekiya, S. et al, *Design Handbook for Plate Structure* (in Japanese) , (1982), p.170, Asakura shoten.