

## 二項多重関係の反射的推移的閉包の構成

著者	津曲 紀宏, 西澤 弘毅, 古澤 仁
雑誌名	鹿児島大学理学部紀要=Reports of the Faculty of Science, Kagoshima University
巻	42
ページ	1-9
別言語のタイトル	Construction of Transitive Closure of Binary Multirelations
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10232/00007320">http://hdl.handle.net/10232/00007320</a>

## 二項多重関係の反射的推移的閉包の構成

著者	津曲 紀宏, 西澤 弘毅, 古澤 仁
雑誌名	鹿児島大学理学部紀要=Reports of the Faculty of Science, Kagoshima University
巻	42
ページ	1-9
別言語のタイトル	Construction of Transitive Closure of Binary Multirelations
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10232/00007320">http://hdl.handle.net/10232/00007320</a>

# 二項多重関係の反射的推移的閉包の構成

## Construction of Transitive Closure of Binary Multirelations

津曲 紀宏<sup>†</sup> 西澤 弘毅<sup>††</sup> 古澤 仁<sup>†</sup>

Norihiro TSUMAGARI, Koki NISHIZAWA, Hitoshi FURUSAWA

<sup>†</sup> 鹿児島大学大学院理工学研究科, <sup>††</sup> 鳥取環境大学環境情報学部.

<sup>†</sup>Graduate School of Science and Engineering, Kagoshima University

<sup>††</sup>Faculty of Environmental and Information Studies, Tottori University of Environmental Studies

**Abstract.** Binary multirelations have received attention in recent years as a semantic domain of nondeterministic programming languages. Also, it is known that binary multirelations provide a model of Parikh's game logic. The iteration operator plays a central rôle in these programming languages and the logic, and it is natural that the iteration is interpreted as the reflexive transitive closure of a binary multirelation. We investigate constructions of the reflexive transitive closure among basic properties of up-closed binary multirelations.

**Keyword.** binary multirelation, reflexive transitive closure, semantics.

## 1 はじめに

上向きに閉じた二項多重関係は非決定的なプログラムの述語変換意味論の新たな枠組みとして研究されている概念である [4, 10, 11]. 上向きに閉じた二項多重関係によってプログラムを解釈することの利点は, 天使的 (エンジェリックな) 非決定性と悪魔的 (デモニックな) 非決定性の両方を同じ枠組みの中で自然な形でとらえることができる点である.

Parikh[9] はゲーム理論を数理論理的に取り扱うことを目的として, ゲーム論理と呼ばれる体系を構築した. Parikh のゲーム論理の意味も, 上向きに閉じた二項多重関係によって与えられる. ここでは, 天使的非決定性と悪魔的非決定性の両方が自然な形で与えられるという特徴を利用して, 2人ゲームのプレイヤーとオポネントの挙動をとらえている. 尚, ゲーム論理については, Pauly と Parikh による論文 [8] によって概観を得ることができる.

Goranko[3] と Venema[12] は, ゲーム論理に現れる演算を代数的な視点から研究し, 反復を含まないゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルを与えた. しかし, 反復を含むゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルはまだに明らかになっていない.

McIver ら [6, 7] は, 確率的システムの検証におけるモデルの抽象化を目的に, 確率クリーニ代数を提案した. これは, Kozen[5] のクリーニ代数を弱めた代数になっている. 我々は, 上向きに閉じた二項多重関係の中でもある条件を加えたものを考えると, それらが確率クリーニ代数をなすことを示した [2].

これまで, 二項多重関係の応用研究では, 非決定性ばかりに興味が向いていて, 反復についての言及はその重要性にも係わらず, 殆どなされてきていないということに, 上記の研究 [2] を遂行していく中で気付いた. 反復は, 二項多重関係においては, 反射的推移的閉包によってとらえることができる. 我々は, 上向きに閉じた二項多重関係の基本的な性質の中でも特に反射的推移的閉包について論じることにする.

以下, 2節では二項多重関係の定義と基本的な性質について説明する. 3節で二項多重関係の反射的推移的閉包の定義を述べ, その構成法について考察しその結果を述べる. 反射的推移的閉包の構成法はその定義からただちに得られるものもあるが, 本稿ではそれ以外の構成法について述べる. 特に3.1節では有限性を考慮しない場合の, 3.2節では有限性を考慮した場合の二項多重関係について議論し, その場合の反射的推移的閉包の構成法を示す. 4節で本稿の結果をまとめる. なお, 本稿は [13, 14] を改訂したものである.

## 2 二項多重関係

この節では, Rewitzky らの一連の論文 [4, 10, 11] を参考にしつつ, 二項多重関係の定義と基本的な性質について本研究に直接関係する事柄のみを紹介する. 尚, ここで示す具体例は全て我々が独自に与えたものである.

$A$  を集合,  $\wp(A)$  を  $A$  のべき集合とすると,  $A \times \wp(A)$  の部分集合を  $A$  上の二項多重関係とよぶ. さらに, 集合  $A$  上の二項多重関係  $R$  は

$$(x, X) \in R \wedge X \subseteq Y \implies (x, Y) \in R$$

をみたすとき, 上向きに閉じているという. 上向きに閉じた二項多重関係の全体のなす集合を  $\text{UMRel}(A)$  と書くことにする.

集合  $A$  上の, 空な二項多重関係  $\emptyset$  を  $0$  で, 二項多重関係  $A \times \wp(A)$  を  $\nabla$  で表すことにすると,  $0$  と  $\nabla$  はともに上向きに閉じている. さらに,  $\text{UMRel}(A)$  は集合演算  $\cup$  と  $\cap$  に関して閉じている. 従って, 組  $(\text{UMRel}(A), \cup, \cap, 0, \nabla)$  は完備分配束をなす.

$R, P$  を二項多重関係とすると, これらの合成  $R;P$  を

$$(x, X) \in R;P \iff \exists Y \subseteq A. [(x, Y) \in R \wedge \forall y \in Y. (y, X) \in P]$$

によって定義する.  $\text{UMRel}(A)$  は合成に関して閉じている.

また, 合成  $;$  は包含関係  $\subseteq$  を保存する. つまり,  $R \subseteq R'$  かつ  $P \subseteq P'$  ならば,  $R;P \subseteq R';P'$  が成り立つ. さらに, 二項多重関係  $R$  と  $0$  の合成について,  $0;R = 0$  は成り立つが,  $R;0 = 0$  は一般には成り立たない.

**例 2.1.** [2]  $A = \{x\}$  とする.  $(x, \emptyset) \in \nabla$  であるので  $\nabla;0 = \nabla$  となり,  $\nabla;0 \neq 0$  がいえる.

$1$  を所属関係とする, すなわち,

$$1 = \{(x, X) \mid x \in X\}$$

とすると,  $1 \in \text{UMRel}(A)$  である. 組  $(\text{UMRel}(A), ;, 1)$  はモノイドをなす.

**注意 2.2.** [2] 上向きに閉じていることを仮定しないと, 合成  $;$  について結合律が成り立たない場合がある. 例えば, 集合  $A = \{x, y, z\}$  上の 2 つの二項多重関係

$$R = \{(w, A) \mid w \in A\}, \quad Q = \{(w, A \setminus \{w\}) \mid w \in A\}$$

を考えると,  $R$  は上向きに閉じているが,  $Q$  は上向きに閉じていない. ここで,  $R;Q = 0$  であることから  $(R;Q);R = 0$  であるが,  $Q;R = R$  かつ  $R;R = R$  であるから  $R;(Q;R) = R$  である.

合成  $;$  と集合演算  $\cup, \cap$  の間には次の性質が成り立つ.

**命題 2.3.**  $P \in \text{UMRel}(A)$  と,  $\text{UMRel}(A)$  の元の族  $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P;R_\lambda \subseteq P; \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \right), & \quad \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \right); P = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda; P, \\ P; \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \right) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P;R_\lambda, & \quad \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \right); P = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda; P. \end{aligned}$$

$P; \left( \bigcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \right) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} P;R_\lambda$  は一般には成り立たない.

**例 2.4.**  $\text{UMRel}(\{x, y\})$  の元

$$R = \{(x, \{y\}), (x, \{x, y\}), (y, \{x, y\})\}$$

について考えると,  $(y, \{y\}) \in R; (1 \cup R)$  であるが,  $(y, \{y\}) \notin R; 1 \cup R; R$  である.

$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} P;R_\lambda \subseteq P; \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \right)$  も一般には成り立たない.

例 2.5.  $\text{UMRel}(\{x, y\})$  の元

$$\begin{aligned} P &= \{ (x, W) \mid W \neq \emptyset \} \\ R &= \{ (x, \{y\}), (x, \{x, y\}), (y, \{x, y\}) \} \\ R' &= \{ (x, \{x, y\}), (y, \{y\}), (y, \{x, y\}) \} \end{aligned}$$

について考えると,  $(x, \{y\}) \in P; R \cap P; R'$  であるが,  $(x, \{y\}) \notin P; (R \cap R')$  である.

### 3 反射的推移的閉包

集合  $A$  上の二項関係  $r \subseteq A \times A$  の反射的推移的閉包  $r^*$  とは,  $r$  を含む反射的 ( $1 \subseteq x$ ) かつ推移的 ( $x \cdot x \subseteq x$ ) な関係のうち最小の関係, すなわち,

$$\bigwedge \{x \mid 1 \cup r \cup x \cdot x \subseteq x\}$$

で与えられる. 二項関係全体の上での下限  $\bigwedge$  は  $\cap$  である. 二項多重関係における反射的推移的閉包も同様に与えられる.

定義 3.1.  $R \in \text{UMRel}(A)$  の反射的推移的閉包  $R^*$  とは,  $R$  を含む反射的 ( $1 \subseteq \xi$ ) かつ推移的 ( $\xi \cdot \xi \subseteq \xi$ ) な関係のうち, 最小の関係である.

定義より, ただちに次がいえる.

命題 3.2.  $R \in \text{UMRel}(A)$  の反射的推移的閉包は,

$$\bigwedge \{ \xi \in \text{UMRel}(A) \mid 1 \cup R \cup \xi; \xi \subseteq \xi \} .$$

ただし,  $\bigwedge$  は  $\text{UMRel}(A)$  上の下限  $\cap$ .

#### 3.1 有限性を考慮しない場合

一般に,  $A$  上の二項関係  $r \subseteq A \times A$  の反射的推移的閉包は次の構成方法で与えられることが知られている.

$$\bigcup_{n \geq 0} r^n$$

但し,  $r^n$  は  $r^0 = 1, r^{n+1} = r \cdot r^n$  によって定義される.

ところが, 上向きに閉じた二項多重関係においては, これと同様の構成をしても反射的推移的閉包が得られるとは限らない.

例 3.3. [2]  $\text{UMRel}(\{x, y, z\})$  の元

$$R = \{ (x, W) \mid z \in W \} \cup \{ (y, W) \mid \{x, z\} \subseteq W \} \cup \{ (z, W) \mid \{x, z\} \subseteq W \} .$$

について考えると,  $R; R \subseteq R$  であることより,  $\bigcup_{n \geq 0} R^n = R \cup 1$ . 従って,

$$\left( \bigcup_{n \geq 0} R^n \right); \left( \bigcup_{n \geq 0} R^n \right) = (R \cup 1); (R \cup 1) = R; (R \cup 1) \cup (R \cup 1) .$$

また,  $(y, \{z\}) \in R; (R \cup 1)$  であるが,  $(y, \{z\}) \notin R \cup 1$  となることから,

$$\left( \bigcup_{n \geq 0} R^n \right); \left( \bigcup_{n \geq 0} R^n \right) \not\subseteq R \cup 1 = \left( \bigcup_{n \geq 0} R^n \right) .$$

すなわち  $\bigcup_{n \geq 0} R^n$  は推移律をみたさない.

$A$  上の二項多重関係  $R$  に対して、次のような写像  $\varphi_R : \mathbf{UMRel}(A) \rightarrow \mathbf{UMRel}(A)$  を考える。

$$\varphi_R(\xi) = R; \xi \cup 1.$$

この写像  $\varphi_R$  は単調である。また、 $\varphi_R^n(\xi)$  を

$$\varphi_R^0(\xi) = \xi, \quad \varphi_R^{n+1}(\xi) = \varphi_R(\varphi_R^n(\xi))$$

によって定義する。

順序集合  $(\mathbf{UMRel}(A), \subseteq)$  は、最小元  $0$  を持ち、任意の有向部分集合  $D \subseteq \mathbf{UMRel}(A)$  に対して上限  $\bigcup D$  が存在するので、完全順序集合 (complete partially ordered set) である。

完全順序集合の不動点定理によれば、 $\varphi_R$  が連続ならば、 $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  が  $\varphi_R$  の最小不動点である。完全順序集合  $L$  上の写像  $f : L \rightarrow L$  が連続であるとは、 $L$  の有向部分集合  $D$  にたいして  $\bigvee f(D)$  が存在して、 $f(\bigvee D) = \bigvee f(D)$  が成り立つことである。ただし、 $\bigvee B$  は  $B \subseteq L$  の上限を表す。

しかしながら、 $\varphi_R$  は連続であるとは限らない。

**例 3.4.** 自然数全体からなる集合を  $\mathbf{N}$  とし、 $\omega$  を任意の自然数  $n$  に対して  $n < \omega$  となるような元とする。 $\mathbf{UMRel}(\mathbf{N} \cup \{\omega\})$  の元

$$R = \{(\omega, W) \mid \mathbf{N} \subseteq W\}$$

$$P_i = \{(x, W) \mid x \leq i \wedge \mathbf{N} \subseteq W\} \quad (i \in \mathbf{N})$$

について考えると、 $P_1 \subseteq P_2 \subseteq \dots$  となるので、 $P_1, P_2, \dots$  は有向部分集合である。 $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} P_i = \emptyset$  であることから、 $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} \varphi_R(P_i) = 1$ 。一方、 $\varphi_R\left(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} P_i\right) = R; \left(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} P_i\right) \cup 1$  である。 $(\omega, \mathbf{N})$  は  $R; \left(\bigcup_{i \in \mathbf{N}} P_i\right)$  の元であるが、 $1$  の元ではない。

よって、この  $\varphi_R$  は連続ではない。

さらに、次の例から  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  が  $R$  の反射的推移的閉包にならない場合があることがわかる。

**例 3.5.**  $\mathbf{UMRel}(\mathbf{N} \cup \{\omega\})$  の元、

$$R = \{(x, X) \mid \{y \in \mathbf{N} \mid y < x\} \subseteq X\}$$

について考えると、 $(x, \emptyset) \in \varphi_R^n(0) \iff x < n$  であるので、

$$(x, \emptyset) \in \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) \iff x \in \mathbf{N}$$

が成り立つ。よって、 $(\omega, \emptyset) \notin \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  である。一方、 $(\omega, \mathbf{N}) \in R$  であり、任意の自然数  $n$  に対して  $(n, \emptyset) \in \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$

なので、 $(\omega, \emptyset) \in R; \left(\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)\right)$  が成り立つ。合成 ; の単調性より、

$$(\omega, \emptyset) \in \left(\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)\right); \left(\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)\right)$$

が成り立つので、 $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  は推移的ではない。

次に、 $\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  について考え、これが  $R \in \mathbf{UMRel}(A)$  の反射的推移的閉包であることを示す。 $P \in \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  ならば、 $\varphi_R$  の定義より明らかに  $1 \subseteq P$  であり、さらに、 $R = R; 1 \subseteq R; P \subseteq R; P \cup 1 \subseteq P$  が成り立つので、 $\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  は  $R$  を含む反射的關係である。

$\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  が推移的であるためには次の 2 つが成り立てば十分である。

$$R; \left(\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}\right) \subseteq \bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \quad (1)$$

$$R; P \subseteq P \implies \left(\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}\right); P \subseteq P \quad (2)$$

Knaster-Tarski の不動点定理 [1] によると, 完備束  $(L, \leq)$  上の単調写像  $f$  の最小不動点は,

$$\bigwedge \{x \in L \mid f(x) \leq x\}$$

で与えられる. ただし,  $\bigwedge B$  は  $B \subseteq L$  の下限を表す. 従って,  $\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  は,  $\mathbf{UMRel}(A)$  上の単調写像  $\varphi_R$  の最小不動点であるので, ただちに次がいえ.

**定理 3.6.**  $R \in \mathbf{UMRel}(A)$  に対して, (1) の包含関係が成り立つ.

条件 (2) を示すには, 少し準備が必要である.  $R, Q \in \mathbf{UMRel}(A)$  に対して,  $R$  の  $Q$  に関する右剰余を

$$R/Q := \bigcup \{\xi \mid \xi; Q \subseteq R\}$$

と定める.

**命題 3.7.**  $Q, R \in \mathbf{UMRel}(A)$  に対して, 次が成り立つ.

$$(R/Q); Q \subseteq R$$

**証明.** 命題 2.3 より,  $(R/Q); Q = (\bigcup \{\xi \mid \xi; Q \subseteq R\}); Q = \bigcup \{\xi; Q \mid \xi; Q \subseteq R\} \subseteq R$ . □

**命題 3.8.**  $P, Q, R \in \mathbf{UMRel}(A)$  に対して, 次が成り立つ.

$$P; Q \subseteq R \iff P \subseteq R/Q$$

**証明.**  $P; Q \subseteq R$  ならば,  $P \in \{\xi \mid \xi; Q \subseteq R\}$  より  $P \subseteq R/Q$ . 逆に  $P \subseteq R/Q$  とすると, 命題 3.7 より,  $P; Q \subseteq (R/Q); Q \subseteq R$ . □

**定理 3.9.**  $R, P \in \mathbf{UMRel}(A)$  に対して次が成り立つ.

$$R; P \subseteq P \implies \left( \bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \right); P \subseteq P$$

**証明.**  $R; P \subseteq P$  ならば, 命題 2.3 より,

$$R; (P/P); P = R; \left( \bigcup \{\xi \mid \xi; P \subseteq P\} \right); P = R; \left( \bigcup \{\xi; P \mid \xi; P \subseteq P\} \right) \subseteq R; P$$

なので,  $P \cup R; (P/P); P \subseteq P$  がいえる. さらに命題 2.3, 3.8 より

$$\begin{aligned} P \cup R; (P/P); P \subseteq P &\iff (1 \cup R; (P/P)); P \subseteq P \\ &\iff 1 \cup R; (P/P) \subseteq P/P \\ &\implies \bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq P/P \\ &\iff \left( \bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \right); P \subseteq P. \end{aligned}$$

□

以上で  $\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  が  $R \in \mathbf{UMRel}(A)$  を含み, 反射的かつ推移的であることを示した. 次に最小性を示す.

**命題 3.10.**  $R, \chi \in \mathbf{UMRel}(A)$  とする.  $\chi$  が  $R$  を含み反射的かつ推移的であるならば,

$$\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq \chi.$$

**証明.**  $\chi$  が  $R$  を含み推移的であることから, 合成の単調性により  $R; \chi \subseteq \chi; \chi$  をみたく. さらに,  $\chi$  が反射的であることから,  $\varphi_R(\chi) \subseteq \chi$  をみたく. したがって,  $\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq \chi$  が成り立つ. □

以上の議論により,  $\mathbf{UMRel}(A)$  の元  $R$  の反射的推移的閉包が  $\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  によって与えられることが分かった.

### 3.2 有限性を考慮した場合

$R \in \text{UMRel}(A)$  に対して,  $(x, X) \in R$  ならば  $(x, Y) \in R$  かつ  $Y \subseteq X$  となるような有限集合  $Y$  が存在するとき  $R$  は有限分岐であるという. 有限分岐であるような  $\text{UMRel}(A)$  の元全体の集合を  $\text{UMRel}_f(A)$  で表す.  $\text{UMRel}_f(A)$  についてはすでに詳細に調べられており, 以下のようなことが分かっている [2].

- $\text{UMRel}_f(A)$  は,  $\cup$  や  $;$  について閉じている.
- $0, \nabla$  および  $1$  は  $\text{UMRel}_f(A)$  の元である.
- $(\text{UMRel}_f(A), ;, 1)$  はモノイドである.
- 命題 2.3 の  $\cup$  に関する 2 つの式が成り立つ.

上記が成り立つ一方で,  $\text{UMRel}_f(A)$  は  $\cap$  については閉じていない.

例 3.11.  $i \in \mathbf{N}$  とし,  $R_i = \{(1, X) \mid i \in X\}$  とすると,  $R_i \in \text{UMRel}_f(\mathbf{N})$  であるが,

$$\bigcap_{i \in \mathbf{N}} R_i = \{(1, \mathbf{N})\}$$

なので,  $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} R_i$  は有限分岐ではない.

$R \in \text{UMRel}_f(A)$  に対して,  $\varphi_R$  を前節と同様に定義すると, これは  $\text{UMRel}_f(A)$  から  $\text{UMRel}_f(A)$  への単調写像である.

$\text{UMRel}_f(A)$  における反射的推移的閉包の構成は, すでに分かっている.

定理 3.12. [2]  $R \in \text{UMRel}_f(A)$  に対して,  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  は  $R$  の反射的推移的閉包である.

集合  $A$  の有限部分集合の全体を  $\wp_f(A)$  と書くことにし,  $A \times \wp_f(A)$  の部分集合を有限二項多重関係と呼ぶことにする. さらに, 上向きに閉じた有限二項多重関係の全体を  $\text{UMRel}_F(A)$  と書くことにする.  $\text{UMRel}_F(A)$  は  $\cup, \cap$  および  $;$  について閉じており, 次の性質を満たすことが分かる.

- $(\text{UMRel}_F(A), \cup, \cap, 0, \nabla)$  は完備分配束をなす.
- $(\text{UMRel}_F(A), ;, 1)$  はモノイドをなす.
- 命題 2.3 の全ての式が成り立つ.

$\text{UMRel}_f(A)$  から  $\text{UMRel}_F(A)$  への写像  $G$  を次のように定める.

$$G(R) = \{(x, X) \mid (x, X) \in R \wedge X \text{ は有限}\}.$$

命題 3.13. 上で定めた写像  $G$  は全単射であり,  $\cup, ;, \nabla, 0, 1$  を保存する.

証明.  $P \in \text{UMRel}_F(A)$  に対して,

$$R = \{(x, X) \mid \exists Y \in \wp_f(A). (x, Y) \in P \wedge Y \subseteq X\}$$

とすると,  $R \in \text{UMRel}_f(A)$  である. ここで,

$$(x, X) \in G(R)$$

であることと

$$\exists Y \in \wp_f(A). (x, Y) \in P \wedge Y \subseteq X \wedge X \in \wp_f(A)$$

とが同値であることに注意すると,  $P$  が上向きに閉じていることから  $G(R) \subseteq P$  であり, この逆は上の論理式で  $Y$  として特に  $X$  をとれば良い. よって,  $G$  は全射である.



次に,  $G(R) = G(R')$  と仮定すると,  $G$  の定義より,  $X$  が有限集合の場合

$$(x, X) \in R \iff (x, X) \in R'$$

となる. よって,  $(x, Y) \in R$  とすると  $(x, Z) \in R$  かつ  $Z \subseteq Y$  となるような有限集合  $Z$  が存在する.  $Z$  が有限集合なので  $(x, Z) \in R'$  となり,  $R'$  が上向きに閉じていることから  $(x, Y) \in R'$  を得る. この逆も同様に示すことができるので,  $G$  が単射であることが分かる.

$G$  が  $\cup, \nabla, 0, 1$  を保存することと,

$$G(R); G(P) \subseteq G(R; P)$$

は,  $G$  およびそれぞれの演算の定義より容易に示すことができる.  $G(R; P) \subseteq G(R); G(P)$  は,  $G$  および  $;$  の定義に加えて  $R$  が有限分岐であることを用いることにより示すことができる.  $\square$

$R \in \text{UMRel}_F(A)$  に対して,  $\varphi_R$  を前節と同様に定義すると,  $\text{UMRel}_F(A)$  から  $\text{UMRel}_F(A)$  への単調写像であり, 命題 3.13 より次の性質を得る.

**命題 3.14.**  $R \in \text{UMRel}_F(A)$  とするとき,  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  は  $R$  の反射的推移的閉包である.

$\text{UMRel}_F(A)$  は  $\text{UMRel}_f(A)$  と異なり  $\cap$  について閉じているので,  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  と  $\cap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  の比較が可能である. そのために必要な補題を準備する.

**補題 3.15.**  $R \in \text{UMRel}_F(A)$  とするとき, 任意の  $n \geq 0$  について,  $\varphi_R^n(0) \subseteq \varphi_R^{n+1}(0)$ .

**証明.**  $n$  に関する数学的帰納法により示す.  $n = 0$  のとき  $\varphi_R^0(0) = 0$  より明らかである.  $\varphi_R^n(0) \subseteq \varphi_R^{n+1}(0)$  と仮定すると,

$$\varphi_R^{n+1}(0) = R; \varphi_R^n(0) \cup 1 \subseteq R; \varphi_R^{n+1}(0) \cup 1 = \varphi_R^{n+2}(0)$$

となるので, 任意の  $n \geq 0$  について成り立つことが分かる.  $\square$

$\text{UMRel}_F(A)$  において次の等式が成り立つ.

**定理 3.16.**  $R \in \text{UMRel}_F(A)$  について,

$$\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) = \bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$$

**証明.**  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) \subseteq \bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  を示すためには, 任意の  $Q \in \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  について,  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) \subseteq Q$  を示せばよい.  $n$  についての帰納法によって  $\varphi_R^n(0) \subseteq Q$  を示す.  $n = 0$  のとき  $\varphi_R^0(0) = 0$  より明らかである.  $\varphi_R^n(0) \subseteq Q$  と仮定すると,

$$\varphi_R^{n+1}(0) = R; \varphi_R^n(0) \cup 1 \subseteq R; Q \cup 1 \subseteq Q.$$

$\bigcap \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  を示すには,  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) \in \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  を示せばよい.  $1 \subseteq \varphi_R(0)$  より,  $1 \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  であるので,  $R; \left( \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) \right) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  を示せば十分である.  $(x, W) \in R; \left( \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) \right)$  と仮定すると,

$$(x, Y) \in R \wedge \forall y \in Y. \exists k \in \mathbf{N}. (y, W) \in \varphi_R^k(0)$$

となるような有限集合  $Y$  が存在する.  $Y = \emptyset$  のとき,  $(x, W) \in R$  かつ  $R \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  より,  $(x, W) \in \varphi_R^n(0)$ .  $Y \neq \emptyset$  のとき, 各  $y \in Y$  について,  $(y, W) \in \varphi_R^{k_y}(0)$  となる  $k_y$  が存在する. ここで

$$k_0 = \max\{k_y \mid y \in Y\}$$

表 1: 各二項多重関係の反射的推移的閉包の構成 ( $\text{Rel}(A)$  は二項関係全体)

	$\text{Rel}(A)$	$\text{UMRel}(A)$	$\text{UMRel}_f(A)$	$\text{UMRel}_F(A)$
$\bigwedge\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$	—	—	○	—
$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$	○	○	×	○
$\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$	○	×	○	○
$\bigcup_{n \geq 0} R^n$	○	×	×	×

とおけば, 補題 3.15 より,

$$\forall y \in Y. (y, W) \in \varphi_R^{k_0}(0)$$

が成り立つ. 従って  $(x, W) \in R; \varphi_R^{k_0}(0)$  である. さらに,

$$R; \varphi_R^{k_0}(0) \subseteq R; \varphi_R^{k_0}(0) \cup 1 = \varphi_R^{k_0+1}(0) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0).$$

従って,  $(x, W) \in \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  を得る. □

$\text{UMRel}_f(A)$  の元の族  $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  に対して,

$$\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda = G^{-1} \left( \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G(R_\lambda) \right)$$

と定義すると, 明らかに  $G \left( \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G(R_\lambda)$  であるので, 命題 3.13 より  $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$  は  $\text{UMRel}_f(A)$  上の順序  $\subseteq$  に関する  $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  の下限であり, 組  $(\text{UMRel}_f(A), \cup, \wedge, 0, \nabla)$  は完備分配束をなす. さらに, 命題 3.13 と定理 3.16 より,  $\text{UMRel}_f(A)$  において次の等式が成り立つことが分かる.

**系 3.17.**  $R \in \text{UMRel}_f(A)$  について,  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) = \bigwedge\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ .

#### 4 まとめ

集合  $A$  上の上向きに閉じた二項多重関係全体  $\text{UMRel}(A)$  と, その中で有限分岐であるものだけを集めて得られる  $\text{UMRel}_f(A)$ , および上向きに閉じた有限二項多重関係の全体  $\text{UMRel}_F(A)$  のそれぞれにおける反射的推移的閉包の構成について調査し, 次のような結果を得た.

- $\text{UMRel}(A)$  において元  $R$  の反射的推移的閉包は  $\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  によって構成することができる. しかし,  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  は必ずしも  $R$  の反射的推移的閉包になるとは限らない.
- $\text{UMRel}_f(A)$  において元  $R$  の反射的推移的閉包は  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  によって構成することができる [2].  $\text{UMRel}_f(A)$  は,  $\bigcap$  に関して閉じていないことから,  $\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  を考えることはできないが, 元の族の  $\subseteq$  に関する下限が存在し, これを用いた構成  $\bigwedge\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  によっても  $R$  の反射的推移的閉包を与えることができる.
- $\text{UMRel}_F(A)$  において元  $R$  の反射的推移的閉包は  $\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$  および  $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$  によって構成することができる.

表 1 は以上の結果をまとめたものである.

加えて,  $\text{UMRel}_f(A)$  と  $\text{UMRel}_F(A)$  の間に合成とこれに関する単位元, 包含関係  $\subseteq$  に関する最小元, 最大元, 上限および下限を保存する全単射を具体的に与えた.  $\text{UMRel}_f(A)$  と  $\text{UMRel}_F(A)$  における反射的推移的閉包の構成に関する新しい結果は, この全単射を用いることによって得られたものである.

## 参考文献

- [1] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, second edition, 2002.
- [2] H. Furusawa, N. Tsumagari, and K. Nishizawa. A Non-Probabilistic Relational Model of Probabilistic Kleene Algebras. To appear in R. Berghammer, B. Moller and G. Struth, eds., *Relations and Kleene Algebra in Computer Science*, volume 4988 of LNCS, 110-122. Springer (2008)
- [3] Valentin Goranko. The Basic Algebra of Game Equivalences. *Studia Logica* 75(2): 221-238 (2003).
- [4] C. Martin, S. Curtis, and I. Rewitzky. Modelling Nondeterminism. In Dexter Kozen, ed., *Mathematics of Program Construction*, volume 3125 of LNCS, 228-251. Springer, 2004.
- [5] Dexter Kozen. A Completeness Theorem for Kleene Algebras and the Algebra of Regular Events. *Information and Computation*, 110: 366-390 (1994).
- [6] A. McIver and T. Weber. Towards Automated Proof Support for Probabilistic Distributed Systems. In G. Sutcliffe and A. Voronkov, eds., *Proceedings of Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning*, volume 3835 of LNAI, 534-548. Springer, 2005.
- [7] A. McIver, E. Cohen, and C. Morgan. Using Probabilistic Kleene Algebra for Protocol Verification. In Renate A. Schmidt, ed., *Relations and Kleene Algebra in Computer Science*, volume 4136 of LNCS, 296-310. Springer, 2006.
- [8] M. Pauly and R. Parikh. Game Logic - An Overview. *Studia Logica* 75(2): 165-182 (2003).
- [9] Rohit Parikh. The Logic of Games. *Annals of Discrete Mathematics* 24: 111-140 (1985).
- [10] Ingrid Rewitzky. Binary Multirelations. In H. de Swart, E. Orłowska, G. Schmidt, M. Roubens, eds., *Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments*, volume 2929 of LNCS, 256-271. Springer, 2003.
- [11] I. Rewitzky and C. Brink. Monotone Predicate Transformers as Up-Closed Multirelations. In Renate A. Schmidt, ed., *Relations and Kleene Algebra in Computer Science*, volume 4136 of LNCS, 311-327. Springer, 2006.
- [12] Yde Venema, Representation of Game Algebras. *Studia Logica* 75(2): 239-256 (2003).
- [13] 津曲紀宏, 西澤弘毅, 古澤仁. 二項多重関係の反射的推移的閉包. 日本ソフトウェア科学会第 25 回大会論文集 (CD-ROM), 2008.
- [14] 津曲紀宏, 西澤弘毅, 古澤仁. 二項多重関係と反射的推移的閉包について. 火の国情報シンポジウム論文集 (CD-ROM), 情報処理学会九州支部. 2008.