-連続なべき等左半環のイデアル完備化について

著者	三田 文也
URL	http://hdl.handle.net/10232/10237

修士論文

$*$-連続なべき等左半環のイデアル完備化について

三田 文也

鹿児島大学大学院 理工学研究科

数理情報科学専攻 博士前期課程

平成22年2月

指導教官　古澤 仁 准教授

目次

第1章　序論

クリーニ代数 [5] とは単項演算 * をもつべき等半環で次をみたすものである．

$$1 + aa^* \leq a^* \tag{1.1}$$

$$1 + a^*a \leq a^* \tag{1.2}$$

$$ab \leq b \to a^*b \leq b \tag{1.3}$$

$$ba \leq b \to ba^* \leq b \tag{1.4}$$

ただし，$\leq$ はべき等半環上の自然な順序である．クリーニ代数が次の公理をみたすとき $*$-連続であるという．

$$ab^*c = \sum_{n \geq 0} ab^n c \tag{1.5}$$

ただし，$\sum$ は自然な順序 $\leq$ についての上限（最小上界）である．べき等半環において (1.5) をみたせば (1.1)-(1.4) をみたす．よって，$*$-連続なクリーニ代数は $*$-連続なべき等半環とも呼ばれる．Conway の **S**-代数は，任意の部分集合 A に対して上限 $\sum A$ が存在し，二項演算 $\cdot$ が $\sum$ の両側から分配するようなべき等半環である．よって **S**-代数は完備べき等半環とも呼ばれる．[1] において，Conway は，$*$-連続なクリーニ代数の **S**-代数への埋め込みを与えた．この構成はイデアル完備化によって与えられる．[4] において，Kozen は，この構成が **S**-代数の圏から $*$-連続なクリーニ代数の圏への包含関手の左随伴を与えることを示した．

緩クリーニ代数 [9] は (1.1) と (1.3) をみたす単項演算 * をもつべき等左半環である．本論文では，緩クリーニ代数上での $*$-連続性とイデアル完備化について考察し，$*$-連続なべき等左半環が,

1. $+$ 公理をみたす場合は [4] と同様の結果を得られるが,
2. $+$ 公理をみたさない場合は [4] と同様の結果は得られない,

ということを示す．2 番目の事実は，文献 [3] の主張に一部誤りがあったことを示している．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 章では準備として，圏，順序集合と順序数，超限帰納法，単口木言語に関して，本論文で必要な基本事項について述べる．この章の最後で取り扱う単口木言語とは，木言語に制限を加えたものである．第 3 章ではべき等左半環，$*$-連続なべき等左半環，D-連続なべき等左半環の定義とその性質を述べ，あるランク付けされた集合上の単口木言語全体が，D-連続なべき等左半環であることを示す．この章で取り扱う $*$-連続性は，[4] の場合と異なり，(1.1) と (1.3) は導くが (1.2) と (1.4) は導かない．第 4 章では $*$-連続なべき等左半環の $*$-イデアルを定義し，その性質について考察する．また，単口木言語のなす $*$-連続なべき等左半環上で $*$-イデアルの具体例を与える．第 5 章では，まず，D-連続なべき等左半環から $*$-連続なべき等左半環への包含関手を構成する．次に，$+$ 公理をみたす場合，イデアル完備化が先に与えた包含関手の左随伴を与えることを示す．この章の最後では，$+$ 公理をみたさない場合，イデアル完備化によっては包含関手の左随伴は作れないことを，反例を与えることにより示す．第 6 章では本論文のまとめと今後の課題について述べる．

第2章　準備

この章では，次の章以降の議論に必要な，圏，順序集合と順序数，超限帰納法，単口木言語についての基本的概念を紹介し，その性質を述べる．

2.1　圏論

ここでは圏に関する基本的概念と性質について述べる．圏論一般の詳細については [6] を参照されたい．

2.1.1　圏，関手，自然変換

定義 2.1. **圏**$\mathcal{C}$ は，次の三つの条件をみたすような，対象と呼ばれる要素からなる集合 $ob(\mathcal{C})$，対象 x から対象 y への射と呼ばれる要素からなる集合 $\mathcal{C}(x,y)$，$f \in \mathcal{C}(x,y)$ と $g \in \mathcal{C}(y,z)$ について合成と呼ばれる演算 $g \circ f \in \mathcal{C}(x,z)$ を与えることで指定される．

(C1) $(x,y) \neq (x',y') \Rightarrow \mathcal{C}(x,y) \cap \mathcal{C}(x',y') = \emptyset$

(C2) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

(C3) $f \circ id_x = id_y \circ f = f$

ただし $f \in \mathcal{C}(x,y), g \in \mathcal{C}(y,z), h \in \mathcal{C}(z,x), id_x \in \mathcal{C}(x,x), id_y \in \mathcal{C}(y,y)$ とする．

$f \in \mathcal{C}(x, y)$ を $f : x \to y$ や $x \xrightarrow{f} y$ と表すこともある．各射 $f \in \mathcal{C}(x, y)$ に対して，$\mathrm{dom}f = x$，$\mathrm{cod}f = y$ と定め，それぞれを f の**域**，**余域**と呼ぶ．

定義 2.2. 圏 $\mathcal{C}$ の**部分圏** $\mathcal{D}$ とは，$\mathcal{C}$ のいくつかの対象といくつかの射の集まりで，各射 f について対象 $\mathrm{dom}f$ および $\mathrm{cod}f$，各対象 d について恒等射 id_d，合成可能な射の各対 $f : x \to y$，$g : y \to z$ についてその合成 $g \circ f$ を含むものである．

定義 2.3. 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手** F は，次の二つの条件をみたすような $ob(\mathcal{C})$ から $ob(\mathcal{D})$ への写像 F^{ob} と $\mathcal{C}(x, y)$ から $\mathcal{D}(F^{ob}(x), F^{ob}(y))$ への写像 F^{arrow} を与えることで指定される．

(F1) $F^{arrow}(g \circ f) = F^{arrow}(g) \circ F^{arrow}(f)$

(F2) $F^{arrow}(id_x) = id_{F^{ob}(x)}$

以後，F^{ob}，F^{arrow} ともに F と略記することがある．

定義 2.4. 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は，各 $x, y \in ob(\mathcal{C})$ について，

- $F : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(F(x), F(y))$ が単射であるとき**忠実**であるといい，
- $F : \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(F(x), F(y))$ が全射であるとき**充満**であるという．

圏 $\mathcal{C}$ とその部分圏 $\mathcal{D}$，$d \in ob(\mathcal{D}), f \in \mathcal{D}(x, y)$ について $F^{ob}(d) = d$，$F^{arrow}(f) = f$ と定めると F は関手になる．これを**包含関手**という．包含関手は忠実である．包含関手 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が充満であるとき，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{C}$ の**充満部分圏**という．

定義 2.5. 二つの関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が与えられたとき，**自然変換** $\tau : F \stackrel{.}{\to} G$ は，$\mathcal{C}$ の各対象 x に $\mathcal{D}$ の射 $\tau(x) : F(x) \to G(x)$ を割り当てる関数で，$\mathcal{C}$ のすべての射 $f : x \to y$ について次の図式が可換になるようなものである．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] & F(x) \arrow[r, "\tau(x)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\
y & F(y) \arrow[r, "\tau(y)"'] & G(y)
\end{tikzcd}$$

2.1.2　随伴

定義 2.6. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏とするとき，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への**随伴**とは，次の条件をみたすような三つ組 $\langle F_0, G, \eta\rangle$ である．ここで，F_0 は $ob(\mathcal{C})$ から $ob(\mathcal{D})$ への写像，G は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{C}$ への関手，η は各 $c \in ob(\mathcal{C})$ に $\mathcal{D}$ の射 $\eta_c : c \to G(F_0(c))$ を割り当てる関数である．

(A1) $c \in ob(\mathcal{C}), d \in ob(\mathcal{D}), f : c \to G(d)$ に対して $f = G(\widehat{f}) \circ \eta_c$ をみたす $F_0(c)$ から d への射 $\widehat{f}$ がただ一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"'] & G(F_0(c)) \arrow[dl, "G(\widehat{f})"] & F_0(c) \arrow[d, dashed, "\exists!\widehat{f}"'] \\ G(d) & & d \end{tikzcd}$$

命題 2.7. 随伴の定義にでてきた写像 F_0 は，$F^{ob} : ob(\mathcal{C}) \to ob(\mathcal{D})$ を $F^{ob}(c) = F_0(c)$，$F^{arrow} : \mathcal{C}(c, c') \to \mathcal{D}(F^{ob}(c), F^{ob}(c'))$ を $F^{arrow}(f) = \widehat{\eta_{c'} \circ f}$ と定めることにより，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手 F に拡張できる．

証明. $c, c', c'' \in ob(\mathcal{C})$，$f : c \to c'$，$g : c' \to c''$ について，

1. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
2. $F(id_c) = id_{F(c)}$

を示せばよい．まず 1 を示す．F の定義より，

$$F(g \circ f) = \widehat{\eta_{c''} \circ g \circ f},\ F(g) \circ F(f) = \widehat{\eta_{c''} \circ g} \circ \widehat{\eta_{c'} \circ f}$$

が成り立つ．また，随伴の定義より，$\eta_{c''} \circ g \circ f = G(\widehat{\eta_{c''} \circ g \circ f}) \circ \eta_c$ をみたす $F(c)$ から $F(c'')$ への射 $\widehat{\eta_{c''} \circ g \circ f}$ がただ一つ存在する．一方，

$$\begin{aligned} G(\widehat{\eta_{c''} \circ g} \circ \widehat{\eta_{c'} \circ f}) \circ \eta_c &= G(\widehat{\eta_{c''} \circ g}) \circ G(\widehat{\eta_{c'} \circ f}) \circ \eta_c \\ &= G(\widehat{\eta_{c''} \circ g}) \circ \eta_{c'} \circ f \\ &= \eta_{c''} \circ g \circ f \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\eta_{c''} \circ \widehat{g \circ f} = \widehat{\eta_{c''} \circ g} \circ \widehat{\eta_{c'} \circ f}$ となるので，$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ が成り立つ．次に 2 を示す．F の定義より

$$F(id_c) = \widehat{\eta_c \circ id_c}$$

が成り立つ．随伴の定義より $\eta_c \circ id_c = G(\widehat{\eta_c \circ id_c}) \circ \eta_c$ をみたす $F(c)$ から $F(c)$ への射 $\widehat{\eta_c \circ id_c}$ がただ一つ存在する．また，

$$\begin{aligned} G(id_{F(c)}) \circ \eta_c &= id_{G(F(c))} \circ \eta_c \\ &= \eta_c \circ id_c \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\widehat{\eta_c \circ id_c} = id_{F(c)}$ となるので，$F(id_c) = id_{F(c)}$ が成り立つ．□

命題 2.8. 随伴の定義に出てきた写像 η は $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ から $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ への自然変換である．

証明. $c, c' \in ob(\mathcal{C})$，$f : c \to c'$ とすると，$\widehat{\eta_{c'} \circ f} : F(c) \to F(c')$ の一意性と，F の定義から次の可換性が得られる．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Id_{\mathcal{C}}(c) = c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "Id_{\mathcal{C}}(f)=f"'] & G(F(c)) \arrow[d, "G(F(f))=G(\widehat{\eta_{c'} \circ f})"] \\ c' & Id_{\mathcal{C}}(c') = c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & G(F(c')) \end{tikzcd}$$

□

随伴 $\langle F_0, G, \eta \rangle$ が与えられたとき，命題 2.7 の方法により F_0 を拡張して得られる関手 F を G の**左随伴**といい，関手 G を F の**右随伴**という．

2.2　順序集合と順序数

この節では順序集合および順序数の基本的概念を紹介する．

2.2.1　順序集合

定義 2.9. 集合 A と A 上の順序関係 $\leq$ の組 $(A, \leq)$ を**順序集合**という．

順序集合 $(A, \leq)$ を A と略記することもある．

定義 2.10. A を順序集合とする．A の部分集合 D が次をみたすとき，D を**有向集合**という．

$$\forall a\ ,\ \forall b \in D.(\exists c \in D.a \leq c\ ,\ b \leq c)$$

定義 2.11. A を順序集合とする．$a \in A$ が任意の $x \in X$ について $x \leq a$ をみたすとき a を X の**上界**といい，a が X の上界の中で最小のとき，a を X の**上限**または**最小上界**という．また，$a \in A$ が任意の $x \in X$ について $a \leq x$ をみたすとき a を X の**下界**といい，a が X の下界の中で最大のとき，a を X の**下限**または**最大下界**という．

定義 2.12. A, A' を順序集合とする．関数 $f : A \to A'$ と任意の $a, b \in A$ について，

$$a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$$

をみたすとき f を**単調関数**という．

定義 2.13. $a \in A$ が A 上の写像 f に対して $f(a) = a$ をみたすとき，a を f の**不動点**という．

2.2.2　順序数の定義

集合族 A が,

$$X \in Y, Y \in A \Longrightarrow X \in A$$

をみたすとき，**推移的**という．

定義 2.14. 集合 A は次をみたすとき**順序数**という.

- A は推移的である.
- A の任意の元は推移的である.

順序数全体の集まりを Ord と表す．また Ord 上の順序 $\leq$ は,

$$\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \alpha \in \beta \text{ または } \alpha = \beta$$

と定義される.

命題 2.15. 順序数の任意の元は順序数である.

証明. α を順序数としその任意の元を β とすると，β は推移的である．さらに β の任意の元を γ とすると，α は推移的なので γ は α の元である．よって，γ は推移的である．以上より β は順序数である． □

命題 2.16. α を順序数とするとき，$\alpha \cup \{\alpha\}$ は順序数である.

証明. $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ とする．$\beta \in \alpha$ のときは，命題 2.15 より β は順序数である．よって，β は推移的である．$\gamma \in \beta$ とすると α は推移的なので $\gamma \in \alpha$ である．$\alpha \subset \alpha \cup \{\alpha\}$ より，$\alpha \cup \{\alpha\}$ は順序数である．$\beta \in \{\alpha\}$ のときは，$\beta = \alpha$ であり，β は推移的である．$\gamma \in \beta$ とすると，$\beta = \alpha \subset \alpha \cup \{\alpha\}$ なので，$\alpha \cup \{\alpha\}$ は推移的である．以上より，$\alpha \cup \{\alpha\}$ は順序数である． □

命題 2.17. Ord は集合ではない.

証明. Ord の任意の元は順序数の定義により推移的である．Ord が集合であると仮定すると，命題 2.15 より Ord 自身も推移的な集合である．以上より，Ord が集合ならば Ord 自身も順序数となり，Ord $\in$ Ord が成り立つ．これは，自分自身を元とするような集合が存在しないという事実に反する． □

命題 2.18. Ord から集合 S への単射は存在しない．

証明. Ord から S への単射が存在するならば，S から Ord への全射が存在する．この全射による S の像は集合である．これは命題 2.17 に反する． □

順序数は後続順序数と極限順序数に分けられる．

定義 2.19. ある順序数 α について $\alpha+1$ と表すことのできる順序数を**後続順序数**，そうでないものを**極限順序数**という．ただし，$\alpha+1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ と定義する．

2.2.3 超限帰納法

超限帰納法とは，自然数についての数学的帰納法を拡張したものである．自然数 n についての数学的帰納法とは，次の 1，2 をみたすとき自然数 n に対する命題 $P(n)$ が任意の自然数 n について成り立つ，という原理である．

1. $P(0)$ が成り立つ．
2. $P(n)$ が成り立つならば $P(n+1)$ が成り立つ．

順序数 α についての超限帰納法とは，次の 1，2 をみたすとき順序数 α に対する命題 $P(\alpha)$ が任意の順序数 α について成り立つ，という原理である．

1. $P(0)$ が成り立つ．
2. (a) 後続順序数 α について，$P(\alpha)$ が成り立つならば $P(\alpha+1)$ が成り立つ．
   (b) 極限順序数 λ について，任意の $\alpha < \lambda$ について $P(\alpha)$ が成り立つならば $P(\lambda)$ が成り立つ．

2.3 単口木言語

この節では単口木と呼ばれる特別な木のなす言語と，それらの基本的性質について述べる．

2.3.1 単口木言語の定義

Σ を関数記号の集合，r を Σ からすべての自然数からなる集合 $\mathcal{N}$ への写像とするとき，Σ と r の組 (Σ, r) を**ランク付けられた集合**という．(Σ, r) を略して単に Σ と書くことがある．Σ_n でランク n の記号すべてからなる集合 $\{a \in \Sigma \mid r(a) = n\}$ を表す．

定義 2.20. Σ 上の**単口木**すべてからなる集合 T_Σ を次のように帰納的に定義する．

- $\square \in T_\Sigma$ $(\square \notin \Sigma)$
- $\Sigma_0 \subseteq T_\Sigma$
- $a \in \Sigma_n$，$t_1, \cdots, t_n \in T_\Sigma$ ならば $a(t_1, \cdots, t_n) \in T_\Sigma$

T_Σ の部分集合を Σ 上の**単口木言語**という．

命題 2.21. $(\wp(T_\Sigma), \cup, \emptyset)$ はべき等可換モノイドをなす．

2.3.2 単口木言語の連接

定義 2.22. $t \in T_\Sigma$，$L \subseteq T_\Sigma$ について $t \cdot L$ を次のように定義する．

- $t = \square$ ならば $t \cdot L = L$
- $t \in \Sigma_0$ ならば $t \cdot L = \{t\}$
- $t = a(t_1, \cdots, t_n)$ ならば $t \cdot L = \{a(u_1, \cdots, u_n) \mid u_i \in t_i \cdot L\}$

補題 2.23. $t \in T_\Sigma$，$L, L' \subseteq T_\Sigma$，$\mathcal{L} \subseteq \wp(T_\Sigma)$ について次が成り立つ．

1. $t \cdot \{\Box\} = \{t\}$

2. $L \subseteq L'$ ならば $t \cdot L \subseteq t \cdot L'$

3. $\mathcal{L}$ が $\subseteq$ に関して有向ならば $t \cdot (\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup \{t \cdot L' \mid L' \in \mathcal{L}\}$

証明. 1 を t の構成に関する帰納法により示す．$t = \Box$ のとき $t \cdot \{\Box\} = \Box \cdot \{\Box\} = \{t\}$ より成り立つ．$t \in \Sigma_0$ のとき $t \cdot \{\Box\} = \{t\}$ より成り立つ．$t = a(t_1, \cdots, t_n)$ のとき $i \in \{1, \cdots n\}$ について $t_i \cdot \{\Box\} = \{t_i\}$ を仮定すると，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
t \cdot \{\Box\} &= \{a(u_i, \cdots, u_n) \mid u_i \in t_i \cdot \{\Box\}\} \\
&= \{a(u_1, \cdots, u_n) \mid u_i \in \{t_i\}\} \qquad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= \{a(t_1, \cdots, t_n)\} \\
&= \{t\}
\end{aligned}
$$

よって 1 が成り立つ．2 を t の構成に関する帰納法により示す．$t = \Box$ のとき $t \cdot L = L$ かつ $t \cdot L' = L'$ より成り立つ．$t \in \Sigma_0$ のとき $t \cdot L = \{t\} = t \cdot L'$ より成り立つ．$t = a(t_1, \cdots, t_n)$ のとき $i \in \{1, \cdots, n\}$ について $L \subseteq L'$ ならば $t_i \cdot L \subseteq t_i \cdot L'$ となることを仮定すると，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
t \cdot L &= \{a(u_1, \cdots, u_n) \mid u_i \in t_i \cdot L\} \\
&\subseteq \{a(u_1, \cdots, u_n) \mid u_i \in t_i \cdot L'\} \quad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= t \cdot L'
\end{aligned}
$$

よって 2 が成り立つ．次に 3 を示す．$L' \in \mathcal{L}$ について $L' \subseteq \bigcup \mathcal{L}$ なので，2 より，$L' \in \mathcal{L}$ について $t \cdot L' \subseteq t \cdot (\bigcup \mathcal{L})$ であるから $\bigcup \{t \cdot L' \mid L' \in \mathcal{L}\} \subseteq t \cdot (\bigcup \mathcal{L})$ が成り立つ．$t \cdot (\bigcup \mathcal{L}) \subseteq \bigcup \{t \cdot L' \mid L' \in \mathcal{L}\}$ を t の構成に関する帰納法により示す．

$t = \Box$ のとき，

$$\begin{aligned} \Box \cdot (\bigcup \mathcal{L}) &= \bigcup \mathcal{L} \\ &= \bigcup \{L' \mid L' \in \mathcal{L}\} \\ &= \bigcup \{\Box \cdot L' \mid L' \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

より成り立つ．$t \in \Sigma_0$ のとき，

$$\begin{aligned} t \cdot (\bigcup \mathcal{L}) &= \{t\} \\ &= \bigcup \{t \cdot L' \mid L' \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

より成り立つ．$t = a(t_1, \cdots, t_n)$ のとき，$i \in \{1, \cdots, n\}$ について

$$t_i \cdot (\bigcup \mathcal{L}) = \bigcup \{t_i \cdot L' \mid L' \in \mathcal{L}\}$$

を仮定すると，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} & a(u_1, \cdots, u_n) \in t \cdot (\bigcup \mathcal{L}) \\ \iff & \forall i \in \{1, \cdots, n\}.u_i \in t_i \cdot (\bigcup \mathcal{L}) \\ \Longrightarrow & \forall i \in \{1, \cdots, n\}.\exists L_i \in \mathcal{L}.u_i \in t_i \cdot L_i \quad \text{（帰納法の仮定より）} \\ \Longrightarrow & \exists L \in \mathcal{L}.\forall i \in \{1, \cdots, n\}.u_i \in t_i \cdot L \quad \text{（$\mathcal{L}$ は有向なので）} \\ \iff & \exists L \in \mathcal{L}.a(u_1, \cdots, u_n) \in t \cdot L \\ \iff & a(u_1, \cdots, u_n) \in \bigcup \{t \cdot L' \mid L' \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

よって3が成り立つ． □

$L, L' \subseteq T_\Sigma$ について $L \cdot L'$ を，

$$L \cdot L' = \bigcup \{t \cdot L' \mid t \in L\}$$

と定義すると $\cdot$ は $\wp(T_\Sigma)$ 上の二項演算に拡張される．この定義より次が成り立つ．

命題 2.24. $L \subseteq \wp(T_\Sigma)$ は $\cdot$ と $\emptyset$ について次をみたす．

$$\begin{aligned} \{\Box\} \cdot L &= L \\ \emptyset \cdot L &= \emptyset \end{aligned}$$

また，補題2.23の1，2より次が成り立つ．

命題 2.25. $L, L', L'' \subseteq \wp(T_\Sigma)$ は $\cdot$ について次をみたす．

$$\begin{array}{rcl} L \cdot \{\Box\} &=& L \\ L' \subseteq L'' &\Longrightarrow& L \cdot L' \subseteq L \cdot L'' \end{array}$$

補題 2.26. $L, L', L'' \subseteq T_\Sigma$，$\mathcal{L} \subseteq \wp(T_\Sigma)$ について次が成り立つ．

1. $(\bigcup \mathcal{L}) \cdot L = \bigcup \{L' \cdot L \mid L' \in \mathcal{L}\}$
2. $(L \cdot L') \cdot L'' = L \cdot (L' \cdot L'')$

証明. 1は，

$$\begin{array}{rcl} t \in (\bigcup \mathcal{L}) \cdot L &\Longleftrightarrow& \exists t' \in \bigcup \mathcal{L}. t \in t' \cdot L \\ &\Longleftrightarrow& \exists L' \in \mathcal{L}. \exists t' \in L'. t \in t' \cdot L \\ &\Longleftrightarrow& \exists L' \in \mathcal{L}. t \in L' \cdot L \\ &\Longleftrightarrow& t \in \bigcup \{L' \cdot L \mid L' \in \mathcal{L}\} \end{array}$$

より成り立つ．次に2を示す．t の構成に関する帰納法により，$t \in T_\Sigma$，$L', L'' \subseteq T_\Sigma$ について，

$$(t \cdot L') \cdot L'' = t \cdot (L' \cdot L'')$$

なので，次が成り立つ．

$$\begin{array}{rcll} (L \cdot L') \cdot L'' &=& (\bigcup \{t \cdot L' \mid t \in L\}) \cdot L'' & \\ &=& \bigcup \{(t \cdot L') \cdot L'' \mid t \in L\} & \text{（1より）} \\ &=& \bigcup \{t \cdot (L' \cdot L'') \mid t \in L\} & \\ &=& L \cdot (L' \cdot L'') & \end{array}$$

よって2が成り立つ．　□

命題2.24，命題2.25および補題2.26より次が得られる．

命題 2.27. $(\wp(T_\Sigma), \cdot, \{\Box\})$ はモノイドをなす．

$L \cdot \emptyset = \emptyset$ が一般には成り立たないことが，次の例から分かる．

例 2.28. $c \in \Sigma_0$ とすると $\cdot$ の定義より $\{c\} \cdot \emptyset = \{c\} \neq \emptyset$.

$L \cdot (L_1 \cup L_2) = (L \cdot L_1) \cup (L \cdot L_2)$ が一般には成り立たないことが，次の例から分かる．

例 2.29. $a \in \Sigma_2$ と $t \neq t'$ であるような t，$t' \in T_\Sigma$ について，次が成り立つ．

$$\begin{array}{rcl}\{a(\Box,\Box)\} \cdot \{t\} \cup \{a(\Box,\Box)\} \cdot \{t'\} & = & \{a(t,t), a(t',t')\} \\ & \subsetneq & \{a(t,t), a(t,t'), a(t',t), a(t',t')\} \\ & = & \{a(\Box,\Box)\} \cdot (\{t\} \cup \{t'\})\end{array}$$

命題 2.30. $\wp(T_\Sigma)$ は $L, L', L'' \subseteq T_\Sigma$ について次をみたす．

1. $L \cdot \emptyset = \emptyset \Longleftrightarrow \Sigma_0 = \emptyset$

2. $(L \cdot L') \cup (L \cdot L'') = L \cdot (L' \cup L'') \Longleftrightarrow \forall n \geq 2.\ \Sigma_n = \emptyset$

証明. まず 1 を示す．$t \in T_\Sigma$ の構成に関する帰納法により，

$$t \cdot \emptyset = \emptyset \Longleftrightarrow \Sigma_0 = \emptyset$$

なので，$\Sigma_0 = \emptyset$ ならば $L \cdot \emptyset = \bigcup \{t \cdot \emptyset \mid t \in L\} = \emptyset$ が成り立つ．次に逆を示す．$\Sigma_0 \neq \emptyset$ を仮定すると $t \cdot \emptyset \neq \emptyset$ であるから $L \cdot \emptyset = \bigcup \{t \cdot \emptyset \mid t \in L\} \neq \emptyset$ が成り立つ．よって 1 が成り立つ．次に 2 を示す．

$$\forall n \geq 2.\ \Sigma_n = \emptyset \Longrightarrow (L \cdot L') \cup (L \cdot L'') = L \cdot (L' \cup L'')$$

を示すには，任意の $n \geq 2$ に対して $\Sigma_n = \emptyset$ を仮定し，$t \in T_\Sigma$ の構成に関する帰納法により，

$$(t \cdot L') \cup (t \cdot L'') = t \cdot (L' \cup L'')$$

を示せば十分である．$t=\Box$ のとき $\Box\cdot(L'\cup L'')=L'\cup L''=(\Box\cdot L')\cup(\Box\cdot L'')$ より成り立つ．$t\in\Sigma_0$ のとき $t\cdot(L'\cup L'')=\{t\}=(t\cdot L')\cup(t\cdot L'')$ より成り立つ．$t=a(t')$，$t'\cdot(L'\cup L'')=(t'\cdot L')\cup(t'\cdot L'')$ のとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} t\cdot(L'\cup L'') &= \{a(u)\mid u\in t'\cdot(L'\cup L'')\} \\ &= \{a(u)\mid u\in(t'\cdot L')\cup(t'\cdot L'')\} \\ &= (t\cdot L')\cup(t\cdot L'') \end{aligned}$$

よって，$(t\cdot L')\cup(t\cdot L'')=t\cdot(L'\cup L'')$ が成り立つ．次に逆を示す．$\Sigma_n\neq\emptyset$ となる $n\geq 0$ の存在を仮定すると，$a\in\Sigma_n$ について $a(\Box,\cdots,\Box)\in T_\Sigma$ である．$t\neq t'$ であるような t，$t'\in T_\Sigma$ について，

$$a(\Box,\cdots,\Box)\cdot\{t\}\cup a(\Box,\cdots,\Box)\cdot\{t'\}\subsetneq a(\Box,\cdots,\Box)\cdot(\{t\}\cup\{t'\})$$

となるので 2 が成り立つ．　$\Box$

第3章　べき等左半環

この章ではべき等左半環とこれに関連する構造の定義を紹介し，それらの例を与える．また，べき等左半環上に $*$-連続性と D-連続性の二つの連続性を定義する．ここで，$*$-連続性の条件は [4] における $*$-連続性の条件を弱めたものである．

3.1　べき等左半環の定義

定義 3.1. **べき等左半環**とは，集合 S，二項演算 $+$，$\cdot$，S の元 0，1 からなる五つ組 $(S, +, \cdot, 0, 1)$ で次をみたすものである．

- $(S, +, 0)$ がべき等可換モノイドをなす．
- $(S, \cdot, 1)$ がモノイドをなす．
- 任意の $a, b, c \in S$ について次をみたす．

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot c &= a\cdot c + b\cdot c \\ 0\cdot a &= 0 \\ a\cdot b + a\cdot c &\leq a\cdot(b+c) \end{aligned}$$

ここで，自然な順序 $\leq$ は，

$$a \leq b \iff a + b = b$$

と定義される．$a\cdot b$ は ab と $\cdot$ を省略して書くことがある．

注意 3.2. $a, b, c \in S$ について $ab + ac = a(b + c),\ a0 = 0$ をみたすべき等左半環 S を**べき等半環**という.

定義 3.3. 組 $(S, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ が次をみたすとき**緩クリーニ代数** [9] という.

- $(S, +, \cdot, 0, 1)$ がべき等左半環をなす.
- 演算 * が各 $a, b \in S$ について次をみたす.

$$
\begin{array}{rcl}
1 + aa^* & \leq & a^* \\
ab \leq b & \Longrightarrow & a^*b \leq b
\end{array}
$$

定義 3.4. 緩クリーニ代数 $(S, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ が $a, b, c \in S$ について

$$
\begin{array}{rcl}
a0 & = & 0 \\
ab + ac & = & a(b + c) \\
b(a + 1) \leq b & \Longrightarrow & ba^* \leq b
\end{array}
$$

をみたすとき，それぞれ 0 **公理，**+**公理，**D **公理**をみたすという.

D 公理をみたす緩クリーニ代数を**単口木クリーニ代数** [10] という．D 公理と 0 公理をみたす緩クリーニ代数を**確率クリーニ代数** [7, 8] という．D 公理，0 公理および + 公理をみたす緩クリーニ代数は**クリーニ代数** [5] である.

3.2 $*$-連続，D-連続なべき等左半環と例

S をべき等左半環とするとき，各 $a \in S$ に対して，写像 $\varphi_a : S \to S$ を,

$$\varphi_a(x) = ax + 1$$

と定義し，自然数 n について，べきを次のように帰納的に定義する.

- $\varphi_a^0(x) = x$
- $\varphi_a^{n+1}(x) = \varphi_a(\varphi_a^n(x))$

また，$A \subseteq S$ の $\leq$ に関する上限が存在するとき，これを $\sum A$ と書く．

命題 3.5. $\{\varphi_a^n(0) \mid n \geq 0\}$ は有向集合である．

証明. $n \geq 0$ について $\varphi_a^n(0) \leq \varphi_a^{n+1}(0)$ を示せば十分なので，これを $n \geq 0$ についての帰納法により示す．$n = 0$ のとき，$\varphi_a^0(0) = 0 \leq a0 + 1 = \varphi_a^1(0)$ より成り立つ．$\varphi_a^n(0) \leq \varphi_a^{n+1}(0)$ を仮定すると，

$$
\begin{aligned}
\varphi_a^n(0) \leq \varphi_a^{n+1}(0) \quad &\Longrightarrow \quad a\varphi_a^n(0) \leq a\varphi_a^{n+1}(0) \\
&\Longrightarrow \quad a\varphi_a^n(0) + 1 \leq a\varphi_a^{n+1}(0) + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi(\varphi_a^n(0)) \leq \varphi(\varphi_a^{n+1}(0)) \\
&\Longleftrightarrow \quad \varphi_a^{n+1}(0) \leq \varphi_a^{n+2}(0)
\end{aligned}
$$

となるので $\varphi_a^{n+1}(0) \leq \varphi_a^{n+2}(0)$ が成り立つ． □

定義 3.6. $*$-**連続なべき等左半環**とは，集合 S，二項演算 $+$，$\cdot$，単項演算 *，S の元 0，1 からなる六つ組 $(S, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ で次をみたすものである．

- $(S, +, \cdot, 0, 1)$ がべき等左半環をなす．
- 任意の $a, b, c \in S$ について，S は $\{a\varphi_b^n(0)c \mid n \geq 0\}$ の上限を持つ．
- 任意の $a, b, c \in S$ について $ab^*c = \displaystyle\sum_{n \geq 0} a\varphi_b^n(0)c$.

対象を $*$-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を ILS^* と書く．

補題 3.7. S を $*$-連続なべき等左半環とし，$a, b \in S$ とするとき，任意の自然数 n について次が成り立つ．

1. $ab \leq b \Longrightarrow \varphi_a^n(0)b \leq b$

2. $b(a+1) \leq b \Longrightarrow b\varphi_a^n(0) \leq b$

証明. 1，2とも n についての帰納法により示す．まず1を示す．$n = 0$ のとき，$\varphi_a^0(0)b = 0b = 0 \leq b$ より成り立つ．$\varphi_a^n(0)b \leq b$ を仮定すると，次が成り立つ．

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a^{n+1}(0)b & = & (a\varphi_a^n(0)+1)b \\ & = & a\varphi_a^n(0)b + b \\ & \leq & ab + b \\ & \leq & b + b \\ & = & b \end{array}$$

よって1が成り立つ．次に2を示す．$n = 0$ のとき，$b\varphi_a^0(0) = b0 \leq b$ より成り立つ．$n = 1$ のとき，$b\varphi_a^1(0) = b(a0+1) \leq b(a+1) \leq b$ より成り立つ．$b\varphi_a^{n+1}(0) \leq b$ を仮定すると，$1 \leq a\varphi_a^n(0) + 1 = \varphi_a^{n+1}(0)$ より，次が成り立つ．

$$\begin{array}{rcl} b\varphi_a^{n+2}(0) & = & b(a\varphi_a^{n+1}(0)+1) \\ & \leq & b(a\varphi_a^{n+1}(0) + \varphi_a^{n+1}(0)) \\ & = & b(a+1)\varphi_a^{n+1}(0) \\ & \leq & b\varphi_a^{n+1}(0) \\ & \leq & b \end{array}$$

よって2が成り立つ． □

次の命題から $*$-連続なべき等左半環は単口木クリーニ代数であるということが分かる．

命題 3.8. S を $*$-連続なべき等左半環とする．$a, b \in S$ について次が成り立つ．

1. $1 + aa^* \leq a^*$

2. $ab \leq b \Longrightarrow a^*b \leq b$

3. $b(a+1) \leq b \Longrightarrow ba^* \leq b$

証明. まず 1 を示す．

$$1 \le a0 + 1 \le \sum_{n \ge 0} \varphi_a^n(0) = a^*$$

より $1 \le a^*$ が成り立つ．また，

$$aa^* = a \sum_{n \ge 0} \varphi_a^n(0) = \sum_{n \ge 0} a\varphi_a^n(0) \le \sum_{n \ge 1} \varphi_a^n(0) \le \sum_{n \ge 0} \varphi_a^n(0) = a^*$$

より $aa^* \le a^*$ が成り立つ．以上より 1 が成り立つ．次に 2，3 を示す．補題 3.7 より $ab \le b$ のとき，

$$a^*b = \sum_{n \ge 0} \varphi_a^n(0)b \le b$$

が成り立ち，$b(a+1) \le b$ のとき，

$$ba^* = \sum_{n \ge 0} b\varphi_a^n(0) \le b$$

が成り立つ．よって 2，3 が成り立つ． □

定義 3.9. 0 **公理をみたす** $*$**-連続なべき等左半環**とは，任意の元 a について $a0 = 0$ をみたす $*$-連続なべき等左半環である．$+$ **公理をみたす** $*$**-連続なべき等左半環**とは，任意の元 a, b, c について $ab + ac = a(b + c)$ をみたす $*$-連続なべき等左半環である．

- 対象を 0 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を ILS_0^* と書く．
- 対象を $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を ILS_+^* と書く．
- 対象を 0 公理と $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を $\mathsf{ILS}_{0,+}^*$ と書く．

命題 3.8 より，次が成り立つ．

系 3.10. S を $*$-連続なべき等左半環とするとき，

- S が 0 公理をみたすならば S は D 公理と 0 公理をみたす緩クリーニ代数（確率クリーニ代数）であり，
- S が $+$ 公理をみたすならば S は D 公理と $+$ 公理をみたす緩クリーニ代数であり，
- S が 0 公理と $+$ 公理をみたすならば S は D 公理，0 公理および $+$ 公理をみたす緩クリーニ代数（クリーニ代数）である．

注意 3.11. S を 0 公理と $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環とするとき，$a \in S$ と自然数 n について $\varphi_a^{n+1}(0) = \sum_{0 \le k \le n} a^k$ なので，$\sum_{n \ge 0} \varphi_a^n(0) = \sum_{n \ge 0} a^n$ が成り立つ．よって，S は $*$-連続なクリーニ代数である．

定義 3.12. 任意の部分集合 A と元 a について次をみたすべき等左半環 S を，**完備べき等左半環**という．

- S は $A \subseteq S$ の上限を持つ．
- $(\sum A)a = \sum\{xa \mid x \in A\}$.

例 3.13. $\wp(T_\Sigma)$ は命題 *2.21*，*2.27*，*2.24* の *2*，補題 *2.26* の *1* より完備べき等左半環である．

定義 3.14. 完備べき等左半環 S が S の任意の有向部分集合 A と S の元 a について次をみたすとき，D-**連続なべき等左半環**という．

$$a \sum A = \sum\{ax \mid x \in A\}$$

例 3.15. $\wp(T_\Sigma)$ は例 *3.13* と補題 *2.23* の *3* より D- 連続なべき等左半環である．

命題 3.16. D-連続なべき等左半環は $*$-連続なべき等左半環でもある．

証明. S を D-連続なべき等左半環とするとき，$a \in S$ に対して，$a^* = \sum_{n \geq 0} \varphi_a^n(0)$ と定める．命題 3.5 より $\{\varphi_a^n(0) \mid n \geq 0\}$ が有向集合なので $ab^*c = \sum_{n \geq 0} a\varphi_b^n(0)c$ が成り立つ．したがって，S は $*$-連続なべき等左半環でもある． □

例 3.17. 命題 *3.16* より，$\wp(T_\Sigma)$ は $*$-連続なべき等左半環でもある．

対象を D-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を ILS^D と書く．

定義 3.18. 0 **公理をみたす** D**-連続なべき等左半環**とは，任意の元 a について $a0 = a$ をみたす D-連続なべき等左半環である．$+$ **公理をみたす** D**-連続なべき等左半環**とは，任意の元 a, b, c について $ab + ac = a(b + c)$ をみたす D-連続なべき等左半環である．

- 対象を 0 公理をみたす D-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を ILS_0^D と書く．
- 対象を $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を ILS_+^D と書く．
- 対象を 0 公理と $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を $\mathsf{ILS}_{0,+}^D$ と書く．

例 3.19. 例 *2.28* と例 *2.29* より，$\wp(T_\Sigma)$ は D-連続なべき等左半環であるが，0 公理と $+$ 公理をみたすとは限らない．命題 *2.30* より，$\Sigma_0 = \emptyset$ のとき，$\wp(T_\Sigma)$ は 0 公理をみたす D-連続なべき等左半環である．任意の $n \geq 2$ に対して $\Sigma_n = \emptyset$ のとき，$\wp(T_\Sigma)$ は $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環である．$\Sigma = \Sigma_1$ のとき，$\wp(T_\Sigma)$ は 0 公理および $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環である．

命題 3.16 より次が成り立つ．

系 3.20. S を D-連続なべき等左半環とするとき，

- S が 0 公理をみたすならば S は 0 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環であり,
- S が $+$ 公理をみたすならば S は $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環であり,
- S が 0 公理と $+$ 公理をみたすならば S は 0 公理と $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環である.

例 3.21. 系 *3.20* より，$\wp(T_\Sigma)$ は,

- $\Sigma_0 = \emptyset$ のとき 0 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環であり,
- 任意の $n \geq 2$ に対して $\Sigma_n = \emptyset$ のとき $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環であり,
- $\Sigma = \Sigma_1$ のとき，0 公理と $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環である.

第4章　$*$-イデアル

この章では，$*$-連続なべき等左半環の $*$-イデアルを定義し，その例を与える．ここで，$*$-イデアルの条件は [4] における $*$-イデアルの条件を弱めたものである．

4.1　$*$-イデアルの定義

定義 4.1. S を $*$-連続なべき等左半環とする．S の部分集合 A が，次をみたすとき，S の $*$-**イデアル**という．

- A は空集合でない．
- A は $+$ について閉じている．
- A は $\leq$ について下向きに閉じている．
- 任意の $n \geq 0$ について $a\varphi_b^n(0)c \in A$ ならば $ab^*c \in A$.

$\mathcal{I}(S)$ で $*$-連続なべき等左半環 S の $*$-イデアル全体のなす集合を表すことにする．空集合でない集合 A について，I が A を含む最小の $*$-イデアルであるとき，A **は** I **を生成する**という．A によって生成される $*$-イデアルを $\langle A \rangle$ と書く．A が一点集合 $\{a\}$ のときは $\langle \{a\} \rangle$ を $\langle a \rangle$ と略して書き，単項イデアルという．$\langle \_ \rangle$ は空でない S の部分集合上で定義される写像である．また，$\langle \_ \rangle$ は単調かつべき等である．すなわち，$A \subseteq B$ ならば $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ および $\langle \langle A \rangle \rangle = \langle A \rangle$ が成り立つ．

補題 4.2. S を $*$-連続なべき等左半環とするとき，$\mathcal{I}(S)$ の空でない部分集合 $\mathcal{A}$ に対して，

$$\langle\bigcup\mathcal{A}\rangle = \langle\bigcup\{\langle A\rangle \mid A \in \mathcal{A}\}\rangle$$

が成り立つ．

証明. $\langle\bigcup\mathcal{A}\rangle \subseteq \langle\bigcup\{\langle A\rangle \mid A \in \mathcal{A}\}\rangle$ は $\langle\_\rangle$ の単調性より成り立つ．また，$A \in \mathcal{A}$ について $\langle\_\rangle$ の単調性より $\langle A\rangle \subseteq \langle\bigcup\mathcal{A}\rangle$ であるから，$\langle\_\rangle$ の単調性とべき等性より $\langle\bigcup\{\langle A\rangle \mid A \in \mathcal{A}\}\rangle \subseteq \langle\bigcup\mathcal{A}\rangle$ が成り立つ．□

S を $*$-連続なべき等左半環とする．$A, B \subseteq S$ について，

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\} \\ A \odot B &= \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\} \\ A\downarrow &= \{y \mid \exists x \in A.\ y \leq x\} \\ A_* &= \{ab^*c \mid \forall n \geq 0.\ a\varphi_b^n(0)c \in A\} \end{aligned}$$

と定義すると，単項イデアルについて，

$$\langle a\rangle = \{a\}\downarrow$$

が成り立ち，さらに，

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \odot C &\subseteq (A \odot C) \oplus (B \odot C) \\ A \odot (B\downarrow) &\subseteq (A \odot B)\downarrow \\ (A\downarrow) \odot B &\subseteq (A \odot B)\downarrow \\ A \odot (B_*) &\subseteq (A \odot B)_* \\ (A_*) \odot B &\subseteq (A \odot B)_* \end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 4.3. S を $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環とするとき，$A, B, C \subseteq S$ について次が成り立つ．

$$C \odot (A \oplus B) \subseteq (C \odot A) \oplus (C \odot B)$$

空でない $A \subseteq S$ に対して，集合演算 τ を次のように定義する．

$$\tau(A) = (A \oplus A) \cup A \downarrow \cup A_*$$

命題 4.4. S を $*$-連続なべき等左半環とするとき，$A, B \subseteq S$ について次が成り立つ．

1. $A \subseteq \tau(A)$
2. $A \subseteq B \Longrightarrow \tau(A) \subseteq \tau(B)$
3. $A : *$-イデアル $\Longleftrightarrow A \neq \emptyset, \tau(A) \subseteq A$

証明. まず 1 を示す．$a \in A$ に対して，$a + a \in A \oplus A$ なので $A \subseteq A \oplus A \subseteq \tau(A)$ が成り立つ．次に 2 を示す．$A \subseteq B$ ならば $A \oplus A \subseteq B \oplus B, A \downarrow \subseteq B \downarrow, A_* \subseteq B_*$ なので，$\tau(A) \subseteq \tau(B)$ が成り立つ．次に 3 を示す．A を $*$-イデアルと仮定すると，$A \neq \emptyset$ である．さらに，

$$\begin{aligned}
A \oplus A &= \{a + a' \mid a, a' \in A\} \\
&= \{a + a' \in A \mid a, a' \in A\} \\
&\subseteq A \\
A \downarrow &= \{y \mid \exists x \in A.\ y \leq x\} \\
&= \{y \in A \mid \exists x \in A.\ y \leq x\} \\
&\subseteq A \\
A_* &= \{ab^*c \mid \forall n \geq 0.\ a\varphi_b^n(0)c \in A\} \\
&= \{ab^*c \in A \mid \forall n \geq 0.\ a\varphi_b^n(0)c \in A\} \\
&\subseteq A
\end{aligned}$$

なので，

$$\tau(A) = (A \oplus A) \cup A \downarrow \cup A_* \subseteq A$$

が成り立つ．次に逆を示す．仮定より，

$$A \oplus A \subseteq A,\ A \downarrow \subseteq A,\ A_* \subseteq A$$

であるから，

- $A \neq \emptyset$
- $\forall a, \forall a' \in A, a + a' \in A \oplus A \subseteq A$
- $a \leq a', a' \in A \Longrightarrow a \in A \downarrow \subseteq A$
- $\forall n \geq 0.\ a\varphi_b^n(0)c \in A \Longrightarrow ab^*c \in A_* \subseteq A$

が成り立つ．よって A は $*$-イデアルである．以上より 3 が成り立つ．　□

命題 4.4 より，$*$-イデアル I がある $A \subseteq S$ によって生成されるならば，I は A を含む τ の最小不動点である．τ を用いて，任意の空でない $A \subseteq S$ に対して超限列を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \tau^0(A) &= A \\ \tau^{\alpha+1}(A) &= \tau(\tau^\alpha(A)) \quad (\alpha : \text{後続順序数}) \\ \tau^\lambda(A) &= \bigcup_{\alpha<\lambda} \tau^\alpha(A) \quad (\lambda : \text{極限順序数}) \\ \tau^*(A) &= \bigcup_{\alpha} \tau^\alpha(A) \end{aligned}$$

補題 4.5. 任意の順序数 α，β，$A \subseteq S$ について，

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow \tau^\alpha(A) \subseteq \tau^\beta(A)$$

が成り立つ．

証明. α についての超限帰納法により示す．$\alpha = 0$ のとき $\tau^0(A) = A \subseteq \tau^\beta(A)$ より成り立つ．後続順序数 $\alpha + 1, \beta + 1$ については，

$$\tau^{\alpha+1}(A) = \tau(\tau^\alpha(A)) \subseteq \tau(\tau^\beta(A)) = \tau^{\beta+1}(A)$$

より成り立つ．極限順序数 λ，任意の順序数 β については，

$$\tau^\lambda(A) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \tau^\alpha(A) \subseteq \tau^\beta(A)$$

より成り立つ． □

補題 4.6. $A \subseteq S$ について，

$$\tau^\kappa(A) = \tau^{\kappa+1}(A)$$

をみたす順序数 κ が存在する．

証明. 任意の順序数 κ について $\tau^\kappa(A) \neq \tau^{\kappa+1}(A)$ と仮定すると補題 4.5 より，任意の順序数 κ について $\tau^\kappa(A) \subsetneq \tau^{\kappa+1}(A)$ であり，$\mathsf{Ord} \cong \{\tau^\kappa(A) \mid \kappa \in \mathsf{Ord}\}$ が成り立つ．命題 2.18 より，$\{\tau^\kappa(A) \mid \kappa \in \mathsf{Ord}\}$ から $\wp(S)$ への単射は存在しない．これは $\{\tau^\kappa(A) \mid \kappa \in \mathsf{Ord}\} \subseteq \wp(S)$ に反する． □

補題 4.7. $A \subseteq S$ について，

$$\tau^*(A) = \langle A \rangle$$

が成り立つ．

証明. 補題 4.6 より，$\tau^\kappa(A) = \tau^{\kappa+1}(A)$ をみたす最小の順序数 κ が存在する．$\kappa < \beta$ に対して $\tau^\beta(A) = \tau^\kappa(A)$ より，$\tau^*(A) = \tau^\kappa(A)$ が成り立つ．よって，

$$\tau(\tau^*(A)) = \tau(\tau^\kappa(A)) = \tau^{\kappa+1}(A) = \tau^\kappa(A) = \tau^*(A)$$

が成り立つ．$\langle A \rangle$ は A を含む τ の最小の不動点なので $\langle A \rangle \subseteq \tau^*(A)$ が成り立つ．次に，逆を示すために，任意の順序数 α について $\tau^\alpha(A) \subseteq \langle A \rangle$ が成り立つことを，

順序数 α についての超限帰納法により示す．$\alpha = 0$ のとき $\tau^0(A) = A \subseteq \langle A \rangle$ より成り立つ．後続順序数 α については，

$$\tau^{\alpha+1}(A) = \tau(\tau^\alpha(A)) \subseteq \tau(\langle A \rangle) = \langle A \rangle$$

より成り立つ．極限順序数 λ については，

$$\tau^\lambda(A) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \tau^\alpha(A) \subseteq \langle A \rangle$$

より成り立つ．よって任意の順序数 α について $\tau^\alpha(A) \subseteq \langle A \rangle$ なので，$\tau^*(A) \subseteq \langle A \rangle$ が成り立つ．以上より，$\tau^*(A) = \langle A \rangle$ が成り立つ．　□

補題 4.8. S を $*$-連続なべき等左半環，$A, B \subseteq S$ とするとき次が成り立つ．

1. $\tau(A) \odot B \subseteq \tau(A \odot B)$

2. S が $+$ 公理をみたすならば $A \odot \tau(B) \subseteq \tau(A \odot B)$

証明. 1 は

$$\begin{aligned}
\tau(A) \odot B &= ((A \oplus A) \cup A{\downarrow} \cup A_*) \odot B \\
&= ((A \oplus A) \odot B) \cup (A{\downarrow} \odot B) \cup (A_* \odot B) \\
&\subseteq ((A \odot B) \oplus (A \odot B)) \cup (A \odot B){\downarrow} \cup (A \odot B)_* \\
&= \tau(A \odot B)
\end{aligned}$$

より成り立つ．2 は，

$$\begin{aligned}
A \odot \tau(B) &= A \odot ((B \oplus B) \cup B{\downarrow} \cup B_*) \\
&= (A \odot (B \oplus B)) \cup (A \odot B{\downarrow}) \cup (A \odot B_*) \\
&\subseteq ((A \odot B) \oplus (A \odot B))) \cup (A \odot B{\downarrow}) \cup (A \odot B_*) \quad \text{（注意 4.3 より）} \\
&\subseteq ((A \odot B) \oplus (A \odot B)) \cup (A \odot B){\downarrow} \cup (A \odot B)_* \\
&= \tau(A \odot B)
\end{aligned}$$

より成り立つ．　□

補題 4.9. S を $*$-連続なべき等左半環，$A, B \subseteq S$ とするとき次が成り立つ．

1. $\langle A \odot B \rangle = \langle \langle A \rangle \odot B \rangle$

2. S が $+$ 公理をみたすならば $\langle A \odot B \rangle = \langle A \odot \langle B \rangle \rangle$

証明. $\langle A \odot B \rangle \subseteq \langle \langle A \rangle \odot B \rangle$ は τ の単調性から成り立つ．次に，逆を示すために，任意の順序数 α について，$\tau^{\alpha}(A) \odot B \subseteq \langle A \odot B \rangle$ が成り立つことを α についての超限帰納法により示す．$\alpha = 0$ のときは，

$$\tau^{0}(A) \odot B = A \odot B \subseteq \langle A \odot B \rangle$$

より成り立つ．後続順序数 α については，

$$\begin{aligned}
\tau^{\alpha+1}(A) \odot B &= \tau(\tau^{\alpha}(A)) \odot B \\
&\subseteq \tau(\tau^{\alpha}(A) \odot B) \quad \text{（補題 4.8 の 1 より）} \\
&\subseteq \tau(\langle A \odot B \rangle) \quad \text{（帰納法の仮定と } \tau \text{ の単調性より）} \\
&= \langle A \odot B \rangle
\end{aligned}$$

より成り立つ．極限順序数 λ については，

$$\begin{aligned}
\tau^{\lambda}(A) \odot B &= (\bigcup_{\alpha<\lambda} \tau^{\alpha}(A)) \odot B \\
&= \bigcup_{\alpha<\lambda} (\tau^{\alpha}(A) \odot B) \\
&\subseteq \langle A \odot B \rangle \quad \text{（帰納法の仮定より）}
\end{aligned}$$

より成り立つ．よって任意の順序数 α について $\tau^{\alpha}(A) \odot B \subseteq \langle A \odot B \rangle$ なので，$\tau^{*}(A) \odot B \subseteq \langle A \odot B \rangle$ が成り立つ．さらに，$\langle \_ \rangle$ の単調性より，

$$\begin{aligned}
\langle \langle A \rangle \odot B \rangle &= \langle \tau^{*}(A) \odot B \rangle \\
&\subseteq \langle A \odot B \rangle
\end{aligned}$$

なので，1 が成り立つ．次に 2 を示す．$\langle A \odot B \rangle \subseteq \langle A \odot \langle B \rangle \rangle$ は τ の単調性から成り立つ．次に，逆を示すために，任意の順序数 α について，$A \odot \tau^{\alpha}(B) \subseteq \langle A \odot B \rangle$

が成り立つことを α についての超限帰納法により示す．$\alpha = 0$ のときは，

$$A \odot \tau^0(B) = A \odot B \subseteq \langle A \odot B \rangle$$

より成り立つ．後続順序数 α については，

$$\begin{aligned} A \odot \tau^{\alpha+1}(B) &= A \odot \tau(\tau^{\alpha}(B)) \\ &\subseteq \tau(A \odot \tau^{\alpha}(B)) \quad \text{（補題 4.8 の 2 より）} \\ &\subseteq \tau(\langle A \odot B \rangle) \quad \text{（帰納法の仮定と } \tau \text{ の単調性より）} \\ &= \langle A \odot B \rangle \end{aligned}$$

より成り立つ．極限順序数 λ については，

$$\begin{aligned} A \odot \tau^{\lambda}(B) &= A \odot (\bigcup_{\alpha<\lambda} \tau^{\alpha}(B)) \\ &= \bigcup_{\alpha<\lambda} (A \odot \tau^{\alpha}(B)) \\ &\subseteq \langle A \odot B \rangle \quad \text{（帰納法の仮定より）} \end{aligned}$$

より成り立つ．あとは 1 と同様にして示すことができる．　$\Box$

4.2　$*$-イデアルの例

$\Sigma_1 = \{b, c\}$，$\Sigma_2 = \{a\}$，$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ とする．このとき $\wp(T_\Sigma)$ は例 3.21 より（0 公理をみたす）$*$-連続なべき等左半環である．

$$\begin{aligned} M_n &= \{a(\Box, \Box)\} \cdot (\varphi^n_{\{b(\Box)\}}(\emptyset) \cup \{c(\Box)\}) \\ M'_n &= M_n \cup \{a(b^k(\Box), b^l(\Box)) \mid k, l \geq 0\} \end{aligned}$$

とおく．ただし，$b^0(\Box) = \Box$，$b^{n+1}(\Box) = b(b^n(\Box))$ とする．この節では単口木言語の集合 $\{M'_n \mid n \geq 0\}{\downarrow}$ が $*$-イデアルであることを示す．

$\{M'_n \mid n \geq 0\}{\downarrow}$ が空集合でないことと，$\subseteq$ について下向きに閉じていることは明らかである．

補題 4.10. $m \leq n \Longrightarrow M'_m \subseteq M'_n$

証明.

$$\begin{aligned} m \leq n &\Longrightarrow \varphi^m_{\{b(\Box)\}}(\emptyset) \cup \{c(\Box)\} \subseteq \varphi^n_{\{b(\Box)\}}(\emptyset) \cup \{c(\Box)\} && \text{（命題 3.5 より）} \\ &\Longrightarrow M_m \subseteq M_n && \text{（命題 2.25 より）} \\ &\Longrightarrow M'_m \subseteq M'_n \end{aligned}$$

□

命題 4.11. $\{M'_n \mid n \geq 0\}\!\downarrow$ は $\cup$ について閉じている.

証明. $A, B \in \{M'_n \mid n \geq 0\}\!\downarrow$ とすると，$A \subseteq M'_m, B \subseteq M'_n$ をみたす $m, n \geq 0$ が存在する．$p = \max(m, n)$ とおくと，補題 4.10 より，$A \cup B \subseteq M'_p$ が成り立つ．よって，$A \cup B \in \{M'_n \mid n \geq 0\}\!\downarrow$ である.　□

命題 4.12. $\forall m \geq 0.\ L_1 \cdot \varphi^m_{L_2}(\emptyset) \cdot L_3 \in \{M'_n \mid n \geq 0\}\!\downarrow \Longrightarrow L_1 \cdot L_2^* \cdot L_3 \in \{M'_n \mid n \geq 0\}\!\downarrow$

証明. L_1, L_2, L_3 のいずれかが空集合のとき，または $L_2 = \{\Box\}$ のときは明らか．それ以外のとき,

$$\begin{aligned} M'_0 &= \{a(c(\Box), c(\Box))\} \cup \{a(b^k(\Box), b^l(\Box)) \mid k, l \geq 0\} \\ M'_{n+1} &= \{a(c(\Box), c(\Box))\} \cup \{a(b^k(\Box), b^l(\Box)) \mid k, l \geq 0\} \\ &\quad \cup \{a(b^k(\Box), c(\Box)) \mid 0 \leq k \leq n\} \cup \{a(c(\Box), b^l(\Box)) \mid 0 \leq l \leq n\} \end{aligned}$$

であるから，$L_1 \cdot \varphi^m_{L_2}(\emptyset) \cdot L_3 \in \{M'_n \mid n \geq 0\}\!\downarrow$ をみたす L_1, L_2, L_3 について，次が成り立つ.

- $t \in L_2$ ならば a も c も t に出現しない．すなわち，L_2 が一点集合でないならば $t = b^k(\Box)$ をみたす $k \geq 0$ が存在し，L_2 が一点集合ならば $t = b^k(\Box)$ をみたす $k > 0$ が存在する.

- $t \in L_1$ ならば c は t に出現せず，a は t の根としてしか出現しない．すなわち，$t = a(b^k(\Box), b^l(\Box))$ をみたす $k, l \geq 0$ が存在する．
- $t \in L_3$ には a も c も出現しない．すなわち，$t = b^k(\Box)$ をみたす $k \geq 0$ が存在する．

よって，L_1, L_2, L_3 がすべて空集合ではなく，$L_2 \neq \{\Box\}$ のとき任意の $m \geq 0$ について $L_1 \cdot \varphi^m_{L_2}(\emptyset) \cdot L_3 \in \{M'_n \mid n \geq 0\}{\downarrow}$ をみたすならば $L_1 \cdot L_2^* \cdot L_3 \subseteq M'_0$ が成り立つ．したがって，$L_1 \cdot L_2^* \cdot L_3 \in \{M'_n \mid n \geq 0\}{\downarrow}$ となる．$\Box$

以上より $\{M'_n \mid n \geq 0\}{\downarrow}$ は $*$-イデアルである．

第5章　$*$-連続なべき等左半環と D-連続なべき等左半環

この章では，$*$-連続なべき等左半環と D-連続なべき等左半環の間の関手の構成方法を与え，その性質を述べる．まず，D-連続なべき等左半環から $*$-連続なべき等左半環への包含関手を構成する．次に本論文の主題である $*$-連続なべき等左半環のイデアル完備化について，$+$ 公理をみたす場合と $+$ 公理をみたさない場合に分けて考察する．$+$ 公理をみたす場合は [4] と同様の結果を得ることを示し，$+$ 公理をみたさない場合は [4] と同様の結果を得ることはできないということを，反例与えることにより示す.

5.1　ILS^D から ILS^* への関手

D-連続なべき等左半環が $*$-連続なべき等左半環であることはすでに命題 3.16 で示した．このとき $a^* = \sum_{n\geq 0} \varphi_a^n(0)$ と定めた.

命題 5.1. S, S' を D-連続なべき等左半環，$f : S \to S'$ をその準同型とするとき任意の $n \geq 0$ について $\varphi_{f(a)}^n(0) = f(\varphi_a^n(0))$ が成り立つ.

証明. n についての帰納法により示す．$n = 0$ のとき，

$$\varphi_{f(a)}^0(0) = 0 = f(0) = f(\varphi_a^0(0))$$

より成り立つ．$\varphi^n_{f(a)}(0) = f(\varphi^n_a(0))$ を仮定すると，

$$
\begin{aligned}
\varphi^{n+1}_{f(a)}(0) &= \varphi_{f(a)}(\varphi^n_{f(a)}(0)) \\
&= \varphi_{f(a)}(f(\varphi^n_a(0))) \quad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= f(a)f(\varphi^n_a(0)) + 1 \\
&= f(a\varphi^n_a(0)) + f(1) \\
&= f(a\varphi^n_a(0) + 1) \\
&= f(\varphi^{n+1}_a(0))
\end{aligned}
$$

なので成り立つ．□

命題 5.1 より，

$$f^*(a) = \sum_{n\geq 0} \varphi^n_{f(a)}(0) = \sum_{n\geq 0} f(\varphi^n_a(0)) = f(a^*)$$

であるから f は * を保存する．よって，ILS^D は ILS^* の部分圏である．ILS^D から ILS^* への包含関手を $G : \mathsf{ILS}^D \to \mathsf{ILS}^*$ と表す．ILS^*_0，ILS^*_+ および $\mathsf{ILS}^*_{0,+}$ は ILS^* の充満部分圏である．ILS^*_0，ILS^*_+ および $\mathsf{ILS}^*_{0,+}$ から ILS^* への包含関手をそれぞれ E^*_0，E^*_+ および $E^*_{0,+}$ と表す．また，ILS^D_0，ILS^D_+ および $\mathsf{ILS}^D_{0,+}$ は ILS^D の充満部分圏である．ILS^D_0，ILS^D_+ および $\mathsf{ILS}^D_{0,+}$ から ILS^D への包含関手をそれぞれ E^D_0，E^D_+ および $E^D_{0,+}$ と表す．$S, S' \in ob(\mathsf{ILS}^*_v)$ と $Q, Q' \in ob(\mathsf{ILS}^D_v)$ について次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
E^*_v(S) &= S \\
E^D_v(Q) &= Q \\
\mathsf{ILS}^*_v(S, S') &= \mathsf{ILS}^*(E^*_v(S), E^*_v(S')) \\
\mathsf{ILS}^D_v(Q, Q') &= \mathsf{ILS}^D(E^D_v(Q), E^D_v(Q'))
\end{aligned}
$$

ただし v は 0 または $+$ または $0, +$ である．

- ILS^D_0 は ILS^*_0 の部分圏であり，ILS^D_0 から ILS^*_0 への包含関手を G_0 と表す．

- ILS_{+}^{D} は ILS_{+}^{*} の部分圏であり，ILS_{+}^{D} から ILS_{+}^{*} への包含関手を G_{+} と表す.
- $\mathsf{ILS}_{0,+}^{D}$ は $\mathsf{ILS}_{0,+}^{*}$ の部分圏であり，$\mathsf{ILS}_{0,+}^{D}$ から $\mathsf{ILS}_{0,+}^{*}$ への包含関手を $G_{0,+}$ と表す.

このとき,

$$G_v = G \circ E_v^D$$

が成り立つ．ただし v は 0 または $+$ または $0,+$ である．

5.2　$+$ 公理をみたす場合

5.2.1　ILS_{+}^{*} と ILS_{+}^{D}

S を $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環とするとき，順序集合 $(\mathcal{I}(S), \subseteq)$ を考える．このとき $I, J \in \mathcal{I}(S)$，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}(S)$ に対して,

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{A} &:= \langle \bigcup \mathcal{A} \rangle \\ I + J &:= \sum \{I, J\} \\ I \cdot J &:= \langle I \odot J \rangle \end{aligned}$$

と定義する．

命題 5.2. S を $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環とする．このとき，$I \in \mathcal{I}(S)$ と $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}(S)$ について次が成り立つ．

1. $\langle 0 \rangle \cdot I = \langle 0 \rangle$
2. $\langle 1 \rangle \cdot I = I = I \cdot \langle 1 \rangle$
3. $(\sum \mathcal{A}) \cdot I = \sum \{J \cdot I \mid J \in \mathcal{A}\}$

4. $\mathcal{A}$ が $\subseteq$ に関する有向集合ならば $I \cdot (\sum \mathcal{A}) = \sum\{I \cdot J \mid J \in \mathcal{A}\}$

5. $I \cdot (J + J') = I \cdot J + I \cdot J'$

証明. 1 は $\odot$ の定義から成り立つ．次に 2 を示す．

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle \cdot I &= \langle \langle 1 \rangle \odot I \rangle \\ &= \langle \{1\} \odot I \rangle \quad (\text{補題 4.9 より}) \\ &= \langle I \rangle \\ &= I \end{aligned}$$

$I \cdot \langle 1 \rangle = I$ も同様に示すことができる．次に 3 を示す．

$$\begin{aligned} (\sum \mathcal{A}) \cdot I &= \langle (\sum \mathcal{A}) \odot I \rangle \\ &= \langle \langle \bigcup \mathcal{A} \rangle \odot I \rangle \\ &= \langle (\bigcup \mathcal{A}) \odot I \rangle \quad (\text{補題 4.9 より}) \\ &= \langle \bigcup \{J \odot I \mid J \in \mathcal{A}\} \rangle \\ &= \langle \bigcup \{\langle J \odot I \rangle \mid J \in \mathcal{A}\} \rangle \quad (\text{補題 4.2 より}) \\ &= \langle \bigcup \{J \cdot I \mid J \in \mathcal{A}\} \rangle \\ &= \sum \{J \cdot I \mid J \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

4 も 3 と同様に示すことができる．次に 5 を示す．まず，$\cdot$ の単調性と $*$-イデアルの定義より $I \cdot (J + J') \supseteq I \cdot J + I \cdot J'$ が成り立つ．次に逆を示す．

$$\begin{aligned} I \cdot (J + J') &= \langle I \odot \langle J \cup J' \rangle \rangle \\ &= \langle I \odot (J \cup J') \rangle \quad (\text{補題 4.9 より}) \\ &= \langle (I \odot J) \cup (I \odot J') \rangle \\ &\subseteq \langle \langle I \odot J \rangle \cup \langle I \odot J' \rangle \rangle \\ &= I \cdot J + I \cdot J' \end{aligned}$$

以上より 5 が成り立つ． □

命題 5.2 より，$\mathcal{I}(S)$ は $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環である．

S を $+$ 公理をみたすべき等左半環とする．$\langle x\rangle = \{x\}\downarrow$ より S から $\mathcal{I}(S)$ への写像

$$x \mapsto \langle x\rangle$$

が次の性質をみたすことが分かる．

命題 5.3. 写像 $\langle \_ \rangle : S \to \mathcal{I}(S)$ は単射であり，かつ $+$，$\cdot$，*，0，1 を保存する．

証明.

- 写像 $\langle \_ \rangle : S \to \mathcal{I}(S)$ が単射であることを示す．$a, b \in S$ に対して $\{a\}\downarrow = \{b\}\downarrow$ とする．$a \in \{a\}\downarrow$ より $a \leq b$ である．さらに，$b \in \{b\}\downarrow$ より $b \leq a$ であるから，$a = b$ が成り立つ．よって $\langle \_ \rangle$ は単射である．

- $+$ を保存することを示す．まず，$\langle x+y\rangle \subseteq \langle x\rangle + \langle y\rangle$ を示す．$z \in \langle x+y\rangle$ とすると $\langle x+y\rangle = \{x+y\}\downarrow$ より，$z \leq x+y$ であり，

$$\{x\}\downarrow = \langle x\rangle \subseteq \langle x\rangle \cup \langle y\rangle \subseteq \langle\langle x\rangle \cup \langle y\rangle\rangle$$

$$\{y\}\downarrow = \langle y\rangle \subseteq \langle x\rangle \cup \langle y\rangle \subseteq \langle\langle x\rangle \cup \langle y\rangle\rangle$$

が成り立つ．$\langle\langle x\rangle \cup \langle y\rangle\rangle$ は $*$-イデアルであり，$x+y \in \langle\langle x\rangle \cup \langle y\rangle\rangle$ かつ $z \leq x+y$ なので，$z \in \langle\langle x\rangle \cup \langle y\rangle\rangle$ が成り立つ．次に逆を示す．$\{x\}\downarrow, \{y\}\downarrow \subseteq \{x+y\}\downarrow$ なので $\langle x\rangle, \langle y\rangle \subseteq \langle x+y\rangle$ である．よって $\langle x\rangle \cup \langle y\rangle \subseteq \langle x+y\rangle$ である．$\langle \_ \rangle$ の単調性から $\langle\langle x\rangle \cup \langle y\rangle\rangle \subseteq \langle x+y\rangle$ が成り立つ．

- $\cdot$ を保存することを示す．まず $\langle x\cdot y\rangle \subseteq \langle x\rangle \cdot \langle y\rangle$ を示す．$z \in \langle x\cdot y\rangle$ とすると $\langle x\cdot y\rangle = \{x\cdot y\}\downarrow$ より $z \leq x\cdot y$ である．$x \in \{x\}\downarrow$，$y \in \{y\}\downarrow$，

$$\{x\}\downarrow \odot \{y\}\downarrow \subseteq \langle \{x\}\downarrow \odot \{y\}\downarrow\rangle = \langle\langle x\rangle \odot \langle y\rangle\rangle = \langle x\rangle \cdot \langle y\rangle$$

より $x\cdot y \in \langle x\rangle \cdot \langle y\rangle$ である．したがって $z \in \langle x\rangle \cdot \langle y\rangle$ である．次に逆を示す．$z \in \{x\}\downarrow \odot \{y\}\downarrow$ とすると $a \in \{x\}\downarrow$ と $b \in \{y\}\downarrow$ が存在して $z = a\cdot b$ が成り立

つ．さらに，$a \leq x$，$b \leq y$ なので，$z = a \cdot b \leq x \cdot y$ であり，$x \cdot y \in \{x \cdot y\}{\downarrow}$ と $\langle x \cdot y \rangle = \{x \cdot y\}{\downarrow}$ より $z \in \langle x \cdot y \rangle$ が成り立つ．

- * を保存することを示す．まず，$\langle a \rangle^* \subseteq \langle a^* \rangle$ を示すために，任意の自然数 n について $\varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) \subseteq \langle a^* \rangle$ が成り立つことを n についての帰納法により示す．$n = 0$ のとき $\varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle \subseteq \langle a^* \rangle$ より成り立つ．$\varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) \subseteq \langle a^* \rangle$ を仮定すると，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\varphi^{n+1}_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) &= \varphi_{\langle a \rangle}(\varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle)) \\
&= \langle a \rangle \cdot \varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) + \langle 1 \rangle \\
&\subseteq \langle a \rangle \cdot \langle a^* \rangle + \langle 1 \rangle \qquad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= \langle \{a\} \odot \{a^*\} \rangle + \langle 1 \rangle \\
&= \langle aa^* \rangle + \langle 1 \rangle \\
&= \langle \{aa^*, 1\} \rangle \\
&\subseteq \langle aa^* + 1 \rangle \\
&\subseteq \langle a^* \rangle
\end{aligned}
$$

よって任意の自然数 n について $\varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) \subseteq \langle a^* \rangle$ が成り立つ．したがって，$\langle a \rangle^* \subseteq \langle a^* \rangle$ となることが分かる．次に $\langle a^* \rangle \subseteq \langle a \rangle^*$ を示すために，まず任意の自然数 n について $\varphi^n_a(0) \in \varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle)$ が成り立つことを n についての帰納法により示す．$n = 0$ のとき $0 \in \langle 0 \rangle$ より成り立つ．$\varphi^n_a(0) \in \varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle)$ を仮定すると，次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\varphi^{n+1}_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) &= \varphi_{\langle a \rangle}(\varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle)) \\
&= \langle a \rangle \cdot \varphi^n_{\langle a \rangle}(\langle 0 \rangle) + \langle 1 \rangle \\
&\supseteq \langle a \rangle \cdot \langle \varphi^n_a(0) \rangle + \langle 1 \rangle \qquad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= \langle \{a\} \odot \{\varphi^n_a(0)\} \rangle + \langle 1 \rangle \\
&= \langle a\varphi^n_a(0) \rangle + \langle 1 \rangle \\
&= \langle \{a\varphi^n_a(0), 1\} \rangle
\end{aligned}
$$

$a\varphi_a^n(0)+1 \in \langle\{a\varphi_a^n(0),1\}\rangle$ かつ $a\varphi_a^n(0)+1 = \varphi_a(\varphi_a^n(0)) = \varphi_a^{n+1}(0)$ より $\varphi_a^{n+1}(0) \in \varphi_{\langle a\rangle}^{n+1}(\langle 0\rangle)$ である．よって任意の自然数 n について $\varphi_a^n(0) \in \varphi_{\langle a\rangle}^n(\langle 0\rangle)$ が成り立つ．$\langle a\rangle^* = \langle\bigcup_{n\geq 0}\varphi_{\langle a\rangle}^n(\langle 0\rangle)\rangle$ なので $a^* \in \langle a\rangle^*$ つまり $\{a^*\} \subseteq \langle a\rangle^*$ となる．$\langle a^*\rangle$ は $\{a^*\}$ を含む最小のイデアルなので $\langle a^*\rangle \subseteq \langle a\rangle^*$ が成り立つ．

- 0 と 1 を保存することは明らかである．

□

命題 5.3 より，写像 $\langle\_\rangle : S \to \mathcal{I}(S)$ は ILS_+^* における S から $\mathcal{I}(S)$ への射である．S を $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環，Q を $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環とする．S から $G(Q)$ への準同型 g と $A \subseteq S$ について，

$$g[A] = \{g(x) \mid x \in A\}$$

と定義すると，$A, B \subseteq S$ について次が成り立つ．

$$\begin{aligned} g[A \odot B] &= g[A] \odot g[B] \\ g[A \oplus B] &= g[A] \oplus g[B] \\ g[A{\downarrow}] &\subseteq g[A]{\downarrow} \\ g[A_*] &\subseteq g[A]_* \end{aligned}$$

補題 5.4. 空でない $A \subseteq S$ と順序数 α について次が成り立つ．

$$g[\tau(A)] \subseteq \tau(g[A]) \tag{5.1}$$

$$g[\tau^\alpha(A)] \subseteq \tau^\alpha(g[A]) \tag{5.2}$$

$$g[\langle A\rangle] \subseteq \langle g[A]\rangle \tag{5.3}$$

$$\langle g[\langle A\rangle]\rangle = \langle g[A]\rangle \tag{5.4}$$

証明. まず,

$$
\begin{aligned}
g[\tau(A)] &= g[(A \oplus A) \cup A{\downarrow} \cup A_*] \\
&= g[A \oplus A] \cup g[A{\downarrow}] \cup g[A_*] \\
&\subseteq (g[A] \oplus g[A]) \cup g[A]{\downarrow} \cup g[A]_* \\
&= \tau(g[A])
\end{aligned}
$$

より (5.1) が成り立つ．次に (5.2) を，順序数 α についての超限帰納法により示す．$\alpha = 0$ のときは $g[\tau^0(A)] = g[A] = \tau^0(g[A])$ より成り立つ．後続順序数 α に対しては，$g[\tau^\alpha(A)] \subseteq \tau^\alpha(g[A])$ を仮定すると,

$$
\begin{aligned}
g[\tau^{\alpha+1}(A)] &= g[\tau(\tau^\alpha(A))] \\
&\subseteq \tau(g[\tau^\alpha(A)]) \quad \text{（(5.1) より）} \\
&\subseteq \tau(\tau^\alpha(g[A])) \quad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= \tau^{\alpha+1}(g[A])
\end{aligned}
$$

より成り立つ．極限順序数 λ に対しては,

$$
\begin{aligned}
g[\tau^\lambda(A)] &= g[\bigcup_{\alpha<\lambda} \tau^\alpha(A)] \\
&= \bigcup_{\alpha<\lambda} g[\tau^\alpha(A) \\
&\subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} \tau^\alpha(g[(A)]) \quad \text{（帰納法の仮定より）} \\
&= \tau^\lambda(g[A])
\end{aligned}
$$

より成り立つ．よって任意の順序数 α に対して (5.2) が成り立つ．次に (5.2) と $\tau^*(A) = \langle A \rangle$ より,

$$
\begin{aligned}
g[\langle A \rangle] &= g[\tau^*(A)] \\
&\subseteq \tau^*(g[A]) \\
&= \langle g[A] \rangle
\end{aligned}
$$

なので，(5.3) が成り立つ．最後に (5.3) と $\langle \_ \rangle$ の単調性とべき等性より，

$$\begin{aligned}\langle g[\langle A\rangle]\rangle &\subseteq \langle\langle g[A]\rangle\rangle \\ &= \langle g[A]\rangle\end{aligned}$$

が成り立ち，$\langle \_ \rangle$ の単調性と g の単調性より，$\langle g[\langle A\rangle]\rangle \supseteq \langle g[A]\rangle$ なので，(5.4) が成り立つ．□

(5.4) より，$I \in \mathcal{I}(S)$ が $A \subseteq S$ によって生成されるならば，$g[I]$ と $g[A]$ は同じ $*$-イデアルを生成する．Q の任意の部分集合の上限は Q に存在するので，$I \in \mathcal{I}(S)$ について，$g[I]$ の上限は Q に存在し，それを $\sum g[I]$ と表す．

補題 5.5. $I \in \mathcal{I}(S)$ とするとき，I の任意の生成集合 A について $\sum g[I] = \sum g[A]$ が成り立つ．

証明. 補題 5.4 より，I の任意の生成集合 A について，$\langle g[I]\rangle = \langle g[\langle A\rangle]\rangle = \langle g[A]\rangle$ が成り立つ．また，$\langle g[I]\rangle = \langle g[A]\rangle \subseteq \langle \sum g[A]\rangle = (\sum g[A])\!\downarrow$ なので，$\sum g[A]$ は $g[I]$ の上界である．$\sum g[I]$ は $g[I]$ の最小上界なので，$\sum g[I] \leq \sum g[A]$ が成り立つ．さらに，$g[A] \subseteq g[I]$ なので $\sum g[A] \leq \sum g[I]$ が成り立つ．よって，$\sum g[A] = \sum g[I]$ が成り立つ．□

S を $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環，Q を $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環とする．準同型 $g : S \to G(Q)$ について，写像 $\widehat{g} : \mathcal{I}(S) \to Q$ を，

$$\widehat{g}(I) = \sum g[I]$$

と定義する．

命題 5.6. $\widehat{g}$ は $\sum, \cdot, 0, 1$ を保存する．

証明. $\mathcal{B} \subseteq \wp(Q)$ について，$\sum(\bigcup \mathcal{B}) = \sum\{\sum B \mid B \in \mathcal{B}\}$ であるから，

$$
\begin{array}{rcll}
\widehat{g}(\sum \mathcal{A}) & = & \sum g[\sum \mathcal{A}] & \\
& = & \sum g[\langle \bigcup \mathcal{A} \rangle] & \\
& = & \sum g[\bigcup \mathcal{A}] & \text{（補題 5.5 より）} \\
& = & \sum(\bigcup\{g[I] \mid I \in \mathcal{A}\}) & \\
& = & \sum\{\sum g[I] \mid I \in \mathcal{A}\} & \\
& = & \sum\{\widehat{g}[I] \mid I \in \mathcal{A}\} &
\end{array}
$$

が $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}(S)$ について成り立つ．$I, J \in \mathcal{I}(S)$ について，

$$
\begin{array}{rcll}
\widehat{g}(I \cdot J) & = & \sum g[I \cdot J] & \\
& = & \sum g[\langle I \odot J \rangle] & \\
& = & \sum g[I \odot J] & \text{（補題 5.5 より）} \\
& = & \sum g[I] \odot g[J] & \\
& = & (\sum g[I]) \cdot (\sum g[J]) & \text{（$g[J]$ は有向なので）} \\
& = & \widehat{g}(I) \cdot \widehat{g}(J) &
\end{array}
$$

が成り立つ．また，

$$\widehat{g}(\langle 0 \rangle) = \sum g[\langle 0 \rangle] = \sum g[\{0\}] = 0$$

$$\widehat{g}(\langle 1 \rangle) = \sum g[\langle 1 \rangle] = \sum g[\{1\}] = 1$$

が成り立つ．　□

定理 5.7. S を $+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環，Q を $+$ 公理をみたす D-連続なべき等左半環とする．準同型 $g : S \to G(Q)$ について，$\widehat{g}$ は，$g = \widehat{g} \circ \langle \_ \rangle$ であるような $\mathcal{I}(S)$ から Q への ILS_{+}^{D} における唯一の射である．

証明. 補題 5.5 より，$a \in S$ について，

$$\widehat{g}(\langle a \rangle) = \sum g[\langle a \rangle] = \sum g[\{a\}] = g(a)$$

が成り立つ．f を $\mathcal{I}(S)$ から Q への $g = f \circ \langle \_ \rangle$ をみたすような ILS_+^D における射と仮定すると，$I \in \mathcal{I}(S)$ について，

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(I) &= \sum g[I] \\
&= \sum \{g(a) \mid a \in I\} \\
&= \sum \{f(\langle a \rangle) \mid a \in I\} \quad \text{（仮定より）} \\
&= f(\sum \{\langle a \rangle \mid a \in I\}) \\
&= f(I)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって $\widehat{g} = f$ が成り立つ．□

$+$ 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環 S と準同型 $h : S \to S'$ について，

$$F_+(S) = \mathcal{I}(S) \quad \text{かつ} \quad F_+(h) = \widehat{\langle \_ \rangle \circ h}$$

と定義すると，F_+ は ILS_+^* から ILS_+^D への関手である．定理 5.7 より次が直ちに成り立つ．

系 5.8. 関手 $F_+ : \mathsf{ILS}_+^* \to \mathsf{ILS}_+^D$ は包含関手 $G_+ : \mathsf{ILS}_+^D \to \mathsf{ILS}_+^*$ の左随伴である．

5.2.2　$\mathsf{ILS}_{0,+}^*$ と $\mathsf{ILS}_{0,+}^D$

命題 5.9. S を 0 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環とするとき，$I \in \mathcal{I}(S)$ について $I \cdot \langle 0 \rangle = \langle 0 \rangle$ が成り立つ．

証明. $\langle 0 \rangle = \{0\}$ と，$a \cdot 0 = 0$ より，$I \cdot \langle 0 \rangle = \langle I \odot \{0\} \rangle = \langle 0 \rangle$ である．□

$F_{0,+} = F_+ \circ E^*_{0,+}$ と定義すると命題 5.9 より $F_{0,+}$ は $\mathsf{ILS}^*_{0,+}$ から $\mathsf{ILS}^D_{0,+}$ への関手になる．

$\mathsf{ILS}^*_{0,+}$ は ILS^*_+ の充満部分圏である．$\mathsf{ILS}^*_{0,+}$ から ILS^*_+ への包含関手を E^* と表す．また，$\mathsf{ILS}^D_{0,+}$ は ILS^D_+ の充満部分圏である．$\mathsf{ILS}^D_{0,+}$ から ILS^D_+ への包含関手を E^D と表す．$S, S' \in ob(\mathsf{ILS}^*_{0,+})$ と $Q, Q' \in ob(\mathsf{ILS}^D_{0,+})$ について次が成り立つ．

$$\begin{aligned} E^*(S) &= S \\ E^D(Q) &= Q \\ \mathsf{ILS}^*_{0,+}(S, S') &= \mathsf{ILS}^*_+(E^*(S), E^*(S')) \\ \mathsf{ILS}^D_{0,+}(Q, Q') &= \mathsf{ILS}^D_+(E^D(Q), E^D(Q')) \end{aligned}$$

このとき，

$$G_{0,+} = G_+ \circ E^D$$

が成り立つ．

定理 5.10. 関手 $F_{0,+} : \mathsf{ILS}^*_{0,+} \to \mathsf{ILS}^D_{0,+}$ は包含関手 $G_{0,+} : \mathsf{ILS}^D_{0,+} \to \mathsf{ILS}^*_{0,+}$ の左随伴である．

証明. $S \in ob(\mathsf{ILS}^*_{0,+})$，$Q \in ob(\mathsf{ILS}^D_{0,+})$，$g \in \mathsf{ILS}^D_{0,+}(F_{0,+}(S), Q)$ とすると，次が成り立つ．

$$G_{0,+}(Q) = (G_+ \circ E^D)(Q) = G_+(E^D(Q)) = G_+(Q)$$

$$F_{0,+}(S) = (F_+ \circ E^*_{0,+})(S) = F_+(E^*_{0,+}(S)) = F_+(S)$$

よって，系 5.8 から，$\widehat{g}$ は $g = \widehat{g} \circ \langle \_ \rangle$ であるような，$F_{0,+}(S)$ から Q への $\mathsf{ILS}^D_{0,+}$ における唯一の射である． $\square$

5.3　$+$ 公理をみたさない場合

$+$ 公理をみたさない場合でも，ILS^D から ILS^* への包含関手 G と，ILS_0^D から ILS_0^* への包含関手 G_0 が得られることは，この章のはじめに示した．この節では，$+$ 公理をみたさない場合，$*$-連続なべき等左半環と D-連続なべき等左半環の間の随伴がイデアル完備化からは得られないことを示す．まず $+$ 公理をみたさない $*$-連続なべき等左半環の具体例を与え，その $*$-イデアル全体が D-連続なべき等左半環になっていないことを示す．

以下，$\Sigma_1 = \{b, c\}$，$\Sigma_2 = \{a\}$，$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ の場合を考える．このとき $\wp(T_\Sigma)$ は 0 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環である．

補題 5.11. $\{a(\Box,\Box)\} \cdot (\{b(\Box)\}^* \cup \{c(\Box)\}) \notin \{M'_n \mid n \geq 0\}{\downarrow}$

証明.

$$\begin{aligned}
&\{a(\Box,\Box)\} \cdot (\{b(\Box)\}^* \cup \{c(\Box)\}) \\
&\qquad = \{a(c(\Box), c(\Box))\} \cup \{a(b^k(\Box), c(\Box)) \mid k \geq 0\} \\
&\qquad\qquad \cup \{a(c(\Box), b^l(\Box)) \mid l \geq 0\} \cup \{a(b^k(\Box), b^l(\Box)) \mid k, l \geq 0\}
\end{aligned}$$

なので $\{a(\Box,\Box)\} \cdot (\{b(\Box)\}^* \cup \{c(\Box)\}) \notin \{M'_n \mid n \geq 0\}{\downarrow}$ である．□

$$\begin{aligned}
I &= \langle \{a(\Box,\Box)\} \rangle \ (= \{\emptyset, \{a(\Box,\Box)\}\}) \\
J_n &= \langle \varphi^n_{\{b(\Box)\}}(\emptyset) \cup \{c(\Box)\} \rangle \\
\mathcal{A} &= \{J_n \mid n \geq 0\}
\end{aligned}$$

とおくと，任意の $n \geq 0$ について $J_n \subseteq J_{n+1}$ なので，$\mathcal{A}$ は $\subseteq$ に関する有向集合であるが，次の二つの補題は $I \cdot (\sum \mathcal{A}) \neq \sum \{I \cdot J \mid J \in \mathcal{A}\}$ を示している．

補題 5.12. $\{a(\Box,\Box)\} \cdot (\{b(\Box)\}^* \cup \{c(\Box)\}) \in I \cdot (\sum \mathcal{A})$

証明. $\sum\mathcal{A}$ は定義より $\bigcup\mathcal{A}$ を含む最小のイデアルである．よって $\sum\mathcal{A}$ は $\subseteq$ について下向きに閉じているので，$\{c(\Box)\}\in\mathcal{A}$ であり，かつ任意の $n\geq 0$ に対して $\varphi^n_{\{b(\Box)\}}\in\sum\mathcal{A}$ が成り立つ．したがって，$*$-イデアルの定義より，$\{b(\Box)\}^*\in\sum\mathcal{A}$ である．また，$\sum\mathcal{A}$ は $\cup$ のもとで閉じているので $\{b(\Box)\}^*\cup\{c(\Box)\}\in\sum\mathcal{A}$ である．したがって，$I\odot(\sum\mathcal{A})\subseteq I\cdot(\sum\mathcal{A})$ より $\{a(\Box,\Box)\}\cdot(\{b(\Box)\}^*\cup\{c(\Box)\})\in I\cdot(\sum\mathcal{A})$ が成り立つ． □

補題 5.13. $\{a(\Box,\Box)\}\cdot(\{b(\Box)\}^*\cup\{c(\Box)\})\notin\sum\{I\cdot J\mid J\in\mathcal{A}\}$

証明. 補題 5.11 より $\{a(\Box,\Box)\}\cdot(\{b(\Box)\}^*\cup\{c(\Box)\})\notin\{M'_n\mid n\geq 0\}{\downarrow}$ なので $\bigcup\{I\cdot J\mid J\in\mathcal{A}\}\subseteq\{M'_n\mid n\geq 0\}{\downarrow}$ を示せばよい．$\varphi^n_{\{b(\Box)\}}(\emptyset)\cup\{c(\Box)\}$ は J_n で最大の言語なので，

$$\begin{aligned} I\odot J_n &= \{\emptyset,\{a(\Box,\Box)\}\}\odot\{L\mid L\in J_n\} \\ &= \{\emptyset\}\cup\{\{a(\Box,\Box)\}\cdot L\mid L\in J_n\} \\ &= \{\{a(\Box,\Box)\}\cdot L\mid L\in J_n\} \qquad (\emptyset\in J_n \text{ より}) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $L\in I\odot J_n$ ならば $L\subseteq M_n$ が成り立つ．したがって，任意の $n\geq 0$ に対して $I\odot J_n\subseteq\{M'_n\mid n\geq 0\}{\downarrow}$ が成り立つ．$I\cdot J_n$ は，$I\odot J_n$ を含む最小のイデアルなので，任意の $n\geq 0$ について $I\odot J_n\subseteq\{M'_n\mid n\geq 0\}{\downarrow}$ が成り立つ．ゆえに $\bigcup\{I\cdot J\mid J\in\mathcal{A}\}\subseteq\{M'_n\mid n\geq 0\}{\downarrow}$ が成り立つ． □

以上より，$\mathcal{I}(\wp(T_\Sigma))$ が D-連続なべき等左半環ではないことが分かる．$\wp(T_\Sigma)$ は，$*$-連続なべき等左半環でもあるので，イデアル完備化をおこなっても，

- 0 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環から 0 公理をみたす D-連続なべき等左半環は得られるとは限らず，
- $*$-連続なべき等左半環から D-連続なべき等左半環も得られるとは限らない，

ということが分かる．

第6章　まとめ

本論文では $*$-連続なべき等左半環のイデアル完備化について考察し，次のような結果を得た．

1. $+$ 公理をみたす場合は，イデアル完備化により，

   - 包含関手 $G_+ : \mathsf{ILS}^D_+ \to \mathsf{ILS}^*_+$ の左随伴 $F_+ : \mathsf{ILS}^*_+ \to \mathsf{ILS}^D_+$ と，
   - 包含関手 $G_{0,+} : \mathsf{ILS}^D_{0,+} \to \mathsf{ILS}^*_{0,+}$ の左随伴 $F_{0,+} : \mathsf{ILS}^*_{0,+} \to \mathsf{ILS}^D_{0,+}$

   が得られる．

2. $+$ 公理をみたさない場合は，イデアル完備化をおこなっても，

   - 0 公理をみたす $*$-連続なべき等左半環から 0 公理をみたす D- 連続なべき等左半環は得られるとは限らないため，包含関手 $G_0 : \mathsf{ILS}^D_0 \to \mathsf{ILS}^*_0$ の左随伴は得られず，
   - $*$-連続なべき等左半環から D-連続なべき等左半環は得られるとは限らないため，包含関手 $G : \mathsf{ILS}^D \to \mathsf{ILS}^*$ の左随伴は得られない．

以上をまとめると，次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{ILS}^*_+ \arrow[r, shift left, "F_+"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{ILS}^D_+ \arrow[l, shift left, "G_+"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{ILS}^*_{0,+} \arrow[r, shift left, "F_{0,+}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{ILS}^D_{0,+} \arrow[l, shift left, "G_{0,+}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{ILS}^*_0 \arrow[r, shift left, dotted, "\times" marking] & \mathsf{ILS}^D_0 \arrow[l, shift left, "G_0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathsf{ILS}^* \arrow[r, shift left, dotted, "\times" marking] & \mathsf{ILS}^D \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

D-連続なべき等左半環は，任意の部分集合に対して上限を持つべき等左半環として定義した．これを制限して，可算部分集合に対してのみ上限を持つような，ω-連続なべき等左半環を考えることもできる．対象を $+$ 公理をみたす ω-連続なべき等左半環，射をその間の準同型とする圏を ILS_+^ω と書くとき，イデアル完備化により下の図のような二つの随伴が得られるかどうか，今後考えてみたい．

$$\mathsf{ILS}_+^* \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathsf{ILS}_+^\omega \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} \mathsf{ILS}_+^D$$

本論文で与えた $*$-イデアルは，[4] の $*$-イデアルとは異なるものであることはすでに述べた．結果として，$+$ 公理をみたさない $*$- 連続なべき等左半環をイデアル完備化しても D-連続なべき等左半環は得られないことが分かった．今後，$*$-イデアルの定義に改善の余地がないかどうかを，反例を参考に再度検討したい．

また，緩クリーニ代数は次をみたすとは限らないので，本論文での $*$-連続性は緩クリーニ代数には強すぎる．

$$b(a+1) \leq b \to ba^* \leq b$$

さらに，[2] において，すべての自然数と 0 でない最小の極限順序数からなる集合上の上向きに閉じた二項多重関係全体からなる集合のなす緩クリーニ代数を考えると，各元 a について $a^* = \sum_{n\geq 0} \varphi_a^n(0)$ が成り立たないことが示されている．緩クリーニ代数に適した $*$-連続性と $*$-イデアルについては，より詳しい考察が必要である。

謝辞

古澤仁先生には，本論文を作成するにあたり数々の助言を頂きましたこと，並びにこの３年間丁寧かつ熱心な指導を賜りましたことを深く感謝致します.

丸野隆明先生には，学部在籍時から現在まで様々な助言と激励を賜りましたことを深く御礼申し上げます.

本論文の審査を担当して頂いた新森修一先生，青木敏先生に深く感謝致します. 與倉昭治先生には2009年9月福岡にて開催された「第３回 論理と計算に関するセミナー」にて本研究に関連する口頭発表を行なった折，科学研究費補助金 基盤研究（C）「代数的空間および滑層空間の位相幾何的総合研究」（課題番号21540088）より旅費の援助を頂きました．愛甲正先生には2009年10月佐賀にて開催された「第１２１回 数学会九州支部例会」にて本研究に関連する口頭発表を行った折，個人研究費より旅費の援助を頂きました．貴重な機会を与えて下さったことに深く感謝致します.

津曲紀宏先輩には，本研究における議論と検討にあたって数多くの助言を頂きましたことを深く感謝致します.

他諸先生方，学科事務室，他研究室の皆様には，折に触れて様々な形でサポートして頂きましたことを心より御礼申し上げます.

大学院生活２年間院生室で苦楽をともにした同期生の皆様に感謝致します．また，毎週のセミナーにつきあってくれた研究室の後輩諸子にも感謝致します.

最後に私事になりますが，これまで私を理解し，支え続けてくれた家族に感謝します.

参考文献

[1] J.H. Conway. Regular Algebra and Finite Machines. Chapman and Hall (1971).

[2] H. Furusawa, K. Nishizawa, N. Tsumagari. Multirelational Models of Lazy, Monodic Tree, and Probabilistic Kleene Algebras. to appear in *Bulletin of Informatics and Cybernetics*.

[3] H. Furusawa, F. Sanda. $*$-continuous Idempotent Left Semirings and Their Ideal Completion. In: Berghammer, R.,Jaoua, A.M., Möller, B. (eds.) Relations and Kleene Algebra in Computer Science. LNCS, vol. 5827, pp. 119-133. Springer (2009).

[4] D. Kozen. On Kleene Algebras and Closed Semirings. In: Rovan, B. (ed.) MFCS 1990. LNCS, vol. 452, pp. 26-47. Springer (1990).

[5] D. Kozen. A Completeness Theorem for Kleene Algebras and the Algebra of Regular Events. *Information and Computation*, 110: 366-390 (1994).

[6] S. マックレーン 著, 三好博之/高木理 訳. 圏論の基礎, 2005

[7] A. McIver, E. Cohen, and C. Morgan. Using Probabilistic Kleene Algebra for Protocol Verification. In R.A. Schmidt, editor, *Relations and Kleene Algebra in Computer Science, volume 4136 of LNCS*, pp. 296–310. Springer, 2006.

[8] A. McIver and T. Weber. Towards Automated Proof Support for Probabilistic Distributed Systems. In G. Sutcliffe and A. Voronkov, editors, *Proceedings of Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, volume 3835 of LNAI*, pp. 534–548. Springer, 2005.

[9] B. Möller. Lazy Kleene Algebra. In: D. Kozen, (ed.) MPC 2004. LNCS, vol. 3125, pp. 252-273. Springer (2004).

[10] T. Takai and H. Furusawa. Monodic Tree Kleene Algebra. *Relations and Kleene Algebra in Computer Science, volume 4136 of LNCS*, pp. 402–416, 2006.