緩クリーニ代数の関係モデル

著者	津曲 紀宏
URL	http://hdl.handle.net/10232/10238

修士論文

緩クリーニ代数の関係モデル

津曲 紀宏

鹿児島大学大学院 理工学研究科

数理情報科学専攻 博士前期課程

平成21年2月

指導教官　古澤 仁 准教授

目次

第1章　序論

緩クリーニ代数はクリーニ代数の変形として Bernhard Möller [10] によって提案された代数系である．本論文では二項関係の拡張である二項多重関係について考察し，これが緩クリーニ代数の関係モデルであることの証明を与える．さらに緩クリーニ代数に公理を追加した代数を紹介し，その関係モデルも与える．

クリーニ代数は正規言語の等式理論の健全かつ完全な公理化として，1994 年に Kozen [5] によって与えられた．クリーニ代数が正規言語を公理的に扱うための代数であるのに対し，緩クリーニ代数は有限列・無限列の言語まで扱えるよう規則を緩めた代数である．一般にクリーニ代数の関係モデルは二項関係全体であることが知られており，その事実はクリーニ代数の拡張に影響を与えた．従って，緩クリーニ代数の関係モデルを明らかにすることは緩クリーニ代数にも同様の拡張がもたらすと期待できる．

上向きに閉じた二項多重関係は非決定的なプログラムの述語変換意味論の新たな枠組みとして研究されている概念である [6, 14, 15]．上向きに閉じた二項多重関係によってプログラムを解釈することの利点は，天使的（angelic）非決定性と悪魔的（demonic）非決定性の両方を同じ枠組みの中で自然な形でとらえることができる点である．

Parikh [12] はゲーム理論を数理論理的に取り扱うことを目的として，ゲーム論理と呼ばれる体系を構築した．Parikh のゲーム論理の意味も，上向きに閉じた二項多重関係によって与えられる．ここでは，天使的非決定性と悪魔的非決定性の両方が自然な形で与えられるという特徴を利用して，2 人ゲームのプレイヤーとオ

ポーネントの挙動をとらえている．尚，ゲーム論理については，Pauly と Parikh による論文 [13] によって概観を得ることができる．

Goranko [4] と Venema [20] は，ゲーム論理に現れる演算を代数的な視点から研究し，反復を含まないゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルを与えた．しかし，反復を含むゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルは未だに明らかになっていない．

本研究では，上向きに閉じた二項多重関係全体が緩クリーニ代数の関係モデルであることを証明した．これは，二項多重関係が緩クリーニ代数であるために要求される性質をもつという予想のもと，二項多重関係の基本的な性質を詳細に調べた末に得られた結果である．

また，その過程においては二項多重関係の反射的推移的閉包に関する考察が重要な位置を占めた．反射的推移的閉包は先述のゲーム論理において“ 反復 ”に相当するものである．しかし，二項多重関係の応用研究では，非決定性ばかりに興味が向いていて，反復についての言及はその重要性にも係わらず，殆どなされてこなかった．その原因の一つは反射的推移的閉包の考察の不足にあると考える．本論文では，二項多重関係の反射的推移的閉包の構成方法も明らかにする．

以下に本論文の構成を示す．

第 2 章では二項多重関係の定義を紹介したのち，その基本的な性質を述べる．また，二項多重関係における演算について詳しく議論する．第 3 章では二項多重関係の反射的推移的閉包について詳細に考察し，その構成方法を与える．さらに，有限性を考慮した二項多重関係を提案し，その場合の反射的推移的閉包についても言及する．第 4 章では，まず，緩クリーニ代数の定義を述べる．そして，第 2,3 章の結果を元に，本研究の主題である，緩クリーニ代数の関係モデルを与える．加えて，緩クリーニ代数の公理を強めたものについて言及し，その関係モデルも与える．最後に第 5 章を以て本論文のまとめとする．尚，本論文は過日発表した論文 [3, 17, 18, 19] の内容を加筆訂正の上，再構成したものである．

第2章　二項多重関係

二項多重関係は二項関係の拡張である．特に，上向きに閉じた二項多重関係は非決定的なプログラムの述語変換意味論の新たな枠組みとして，近年注目されつつある [6, 14, 15]．上向きに閉じた二項多重関係の特徴は，１つの枠組みの中で天使的（angelic）非決定性と悪魔的（demonic）非決定性を同時に扱うことができる，という点である．

Parikh [12] はゲーム理論を数理論理的に取り扱うことを目的として，ゲーム論理と呼ばれる体系を構築した．前述の天使的非決定性と悪魔的非決定性の両方をとらえられるという特徴は，ゲーム論理 [12] においては 2 人ゲームのプレイヤーとオポーネントの挙動をとらえる際に有用なものである．

本章では，Rewitzky らの論文 [6, 14, 15] を参考にしながら，二項多重関係の定義と基本的な性質を紹介する．尚，ここで示す具体例は全て独自に与えたものである．

2.1　二項多重関係の定義

二項多重関係とは，二項関係を拡張したものである．ある固定された集合 A 上の二項関係は，直積集合 $A \times A$ の部分集合で与えられる．従って，通常の二項関係は，集合 A 上の”要素と要素”の関係であるといえる．これに対して，二項多重関係は，A 上の”要素と部分集合”の関係である．以下にその定義を述べる．尚，$\wp(A)$ で集合 A のべき集合を表すことにする．

定義 2.1. 集合 A に対し，直積集合 $A \times \wp(A)$ の部分集合 $R \subseteq A \times \wp(A)$ を，A 上の**二項多重関係**という.

集合 A 上の二項多重関係全体からなる集合を $\mathsf{MRel}(A)$ で表すことにする．また，$\mathsf{MRel}(A)$ 上の，最大の二項多重関係 ∇ は $A \times \wp(A)$ であり，最小の二項多重関係 0 は空集合 $\emptyset$ である.

定義 2.2. 集合 A 上の二項多重関係 $R \subseteq A \times \wp(A)$ が

$$\forall x \in A,\ \forall X, Y \subseteq A,\ [\ (x, X) \in R\ \wedge\ X \subseteq Y \implies (x, Y) \in R\ ].$$

をみたすとき，R は**上向きに閉じている**という.

集合 A 上の上向きに閉じた二項多重関係全体からなる集合を $\mathsf{UMRel}(A)$ と表記する.

命題 2.3. 二項多重関係 ∇，0 は上向きに閉じている.

証明. 任意の $x \in A,\ X \subseteq A$ について $(x, X) \in \nabla$ であるから，$\nabla \in \mathsf{UMRel}(A)$. また，$\forall x \in A,\ \forall X, Y \subseteq A,\ [\ (x, X) \in \emptyset\ \wedge\ X \subseteq Y \implies (x, Y) \in \emptyset\ ]$ より，$\emptyset \in \mathsf{UMRel}(A)$. □

2.2 二項多重関係における演算

本節では二項多重関係における演算を紹介し，その性質について詳細な証明を与える.

2.2.1 和集合, 共通集合

二項関係では $\{r_\lambda \subseteq A \times A \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda$, 共通集合 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda$ がそれぞれ，$\{r_\lambda \subseteq A \times A \mid \lambda \in \Lambda\}$ の上限と下限を与える演算であった．二項多重関係でも同様のことがいえる.

定義 2.4. Λ を添え字集合とし，$\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathsf{MRel}(A)$ とするとき，二項多重関係の**和集合** $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$，**共通集合** $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ は次のとおりである．

$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda &:= \{(x,X) \in A \times \wp(A) \mid \exists\lambda{\in}\Lambda.((x,X) \in R_\lambda)\},\\ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda &:= \{(x,X) \in A \times \wp(A) \mid \forall\lambda{\in}\Lambda.((x,X) \in R_\lambda)\}.\end{aligned}$$

上向きに閉じた二項多重関係たちの和集合，共通集合は，それぞれ上向きに閉じている．すなわち，$\mathsf{UMRel}(A)$ は，集合演算 $\bigcup, \bigcap$ について閉じている．

命題 2.5. $\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathsf{UMRel}(A)$ のとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ は上向きに閉じている．

証明. $x \in A$，$X, Y \subseteq A$ について，

$$\begin{aligned}(x,X) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \;\wedge\; X \subseteq Y &\iff \exists\lambda \in \Lambda.(x,X) \in R_\lambda \;\wedge\; X \subseteq Y\\ &\iff \exists\lambda \in \Lambda.[(x,X) \in R_\lambda \;\wedge\; X \subseteq Y]\\ &\implies \exists\lambda \in \Lambda.(x,Y) \in R_\lambda\\ &\iff (x,Y) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,X) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \;\wedge\; X \subseteq Y &\iff \forall\lambda \in \Lambda.(x,X) \in R_\lambda \;\wedge\; X \subseteq Y\\ &\iff \forall\lambda \in \Lambda.[(x,X) \in R_\lambda \;\wedge\; X \subseteq Y]\\ &\implies \forall\lambda \in \Lambda.(x,Y) \in R_\lambda\\ &\iff (x,Y) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda.\end{aligned}$$

□

命題 2.6. $(\mathsf{UMRel}(A), \cup, \cap, 0, \nabla)$ は完備分配束である．すなわち，次が成り立つ．

- $(\mathsf{UMRel}(A), \cup, \cap)$ は束である．

- $P, Q, R \in \mathsf{UMRel}(A)$ について, 次の $\mathit{2}$ つが成り立つ.

$$\begin{aligned}(P \cup Q) \cap R &= (P \cap R) \cup (Q \cap R)\\ (P \cap Q) \cup R &= (P \cup R) \cap (Q \cup R).\end{aligned}$$

- 空でない任意の $\mathcal{M} \subseteq \mathsf{UMRel}(A)$ について, 上限 $\bigcup \mathcal{M}$, 下限 $\bigcap \mathcal{M}$ が存在する.

命題 2.3 より，$\mathsf{UMRel}(A)$ 上の最大元は ∇，最小元は 0 である．また，最小元 0 が $\emptyset$ であることから，次が成り立つ.

命題 2.7. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ について, $0 \cup R = R \cup 0 = R$, $0 \cap R = R \cap 0 = 0$.

注意 2.1. 命題 *2.6,2.7* より $(\mathsf{UMRel}(A), \cup, 0)$ はべき等可換モノイドである．すなわち $P, Q, R \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して次をみたす.

$$\begin{aligned}(P \cup Q) \cup R &= P \cup (Q \cup R)\\ 0 \cup R &= R\\ P \cup Q &= Q \cup P\\ R \cup R &= R\ .\end{aligned}$$

2.2.2　合成

一般に、二項関係 r, p の合成 $r \cdot p$ は,

$$r \cdot p = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A.[(x, y) \in r \wedge (y, z) \in p]\}$$

で与えられる．これに相当するものとして, 次を定義する.

定義 2.8. $R, P \in \mathsf{MRel}(A)$ とする．二項多重関係の**合成** $R; P \in \mathsf{MRel}(A)$ を次によって定義する.

$$(x, X) \in R; P \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \exists Y \subseteq A.[(x, Y) \in R \ \wedge\ \forall y \in Y.(y, X) \in P]\}$$

合成 ; は包含関係を保存する．すなわち，合成演算 ; は $\mathsf{MRel}(A)$ 上の順序関係 $\subseteq$ に関して単調である．

命題 2.9. $R, R', P, P' \in \mathsf{MRel}(A)$ とするとき，

$$R \subseteq R' \wedge P \subseteq P' \implies R; P \subseteq R'; P'$$

証明. $x \in A$, $X \subseteq A$ について，

$$\begin{aligned}(x, X) \in R; P &\iff \exists Y \subseteq A.[(x, Y) \in R \ \wedge \ \forall y \in Y.(y, X) \in P] \\ &\implies \exists Y \subseteq A.[(x, Y) \in R' \ \wedge \ \forall y \in Y.(y, X) \in P'] \\ &\iff (x, X) \in R'; P'\end{aligned}$$

□

また，合成の定義から，零元則について次が成り立つ．

命題 2.10. $R \in \mathsf{MRel}(A)$ は, 合成 ; と 0 について次をみたす.

$$\begin{aligned} 0; R &= 0 \\ 0 &\subseteq R; 0 \end{aligned}$$

なお、$R; 0 \subseteq 0$ は, 以下の反例により一般には成立しないことがわかる．

例 2.1. $A = \{x\}$ とする．$(x, \emptyset) \in \nabla$ であるので，$\nabla; 0 = \nabla$ となり，$\nabla \not\subseteq 0$ がいえる．

上向きに閉じた二項多重関係の合成もまた，上向きに閉じている．すなわち，$\mathsf{UMRel}(A)$ は合成演算 ; について閉じている．

命題 2.11. $R, P \in \mathsf{UMRel}(A)$ のとき，それらの合成 $R; P$ は上向きに閉じている．

証明. $x \in A$，$X, Z \subseteq A$ について，

$$
\begin{aligned}
&(x,X) \in R;P \wedge X \subseteq Z \\
&\quad\iff \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in R \ \wedge \ \forall y \in Y.(y,X) \in P] \wedge X \subseteq Z \\
&\quad\Longrightarrow \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in R \ \wedge \ \forall y \in Y.[(y,X) \in P \ \wedge \ X \subseteq Z]] \\
&\quad\Longrightarrow \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in R \ \wedge \ \forall y \in Y.(y,Z) \in P] \\
&\quad\iff (x,Z) \in R;P
\end{aligned}
$$

□

命題 2.12. 上向きに閉じた二項多重関係は, 合成 ; について結合則をみたす. すなわち，$R, P, Q \in \mathsf{UMRel}(A)$ とするとき，

$$
P;(Q;R) = (P;Q);R
$$

証明. $(P;Q);R \subseteq P;(Q;R)$ を示す．$x \in A$, $X \subseteq A$ のとき，

$$
\begin{aligned}
& (x,X) \in (P;Q);R \\
\iff\ & \exists Z \subseteq A.[(x,Z) \in P;Q \wedge \forall z \in Z.(z,X) \in R] \\
\iff\ & \exists Z \subseteq A.[\exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \wedge \forall y \in Y.(y,Z) \in Q] \wedge \forall z \in Z.(z,X) \in R] \\
\Longrightarrow\ & \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \wedge \forall y \in Y.\exists Z \subseteq A.[(y,Z) \in Q \wedge \forall z \in Z.(z,X) \in R]] \\
\iff\ & \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \wedge \forall y \in Y.(y,X) \in Q;R] \\
\iff\ & (x,X) \in P;(Q;R) \ .
\end{aligned}
$$

$P;(Q;R) \subseteq (P;Q);R$ を示す．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \ \wedge \ \forall y \in Y.(y,X) \in Q;R] \\
&\qquad \Longrightarrow \exists Z \subseteq A.[(x,Z) \in P;Q \wedge \forall z \in Z.(z,X) \in R]
\end{aligned}
$$

を示せばよい.

$\exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \ \wedge \ \forall y \in Y.(y,X) \in Q;R]$. とする．$Y = \emptyset$ のとき, Z として $\emptyset$ をとれば明らか．$Y \neq \emptyset$ のとき, 各 $y \in Y$ に対して, $Z_y \subseteq A$ が存在して,

$$
(y, Z_y) \in Q \ \wedge \ \forall z \in Z_y.(z,X) \in R
$$

である．$Z_0 = \bigcup_{y \in Y} Z_y$ とすると, Q が上向きに閉じていることより, 各 $y \in Y$ に対して, $(y, Z_0) \in Q$ である．また, $\forall z \in Z_0.(z, X) \in R$. 従って,

$$\exists Y \subseteq A.[(x, Y) \in P \ \wedge \ \forall y \in Y.(y, Z_0) \in Q] \ \wedge \ \forall z \in Z_0.(z, X) \in R$$

すなわち，$(x, X) \in (P; Q); R$. □

注意 2.2. $P, Q, R \in \mathsf{MRel}(A)$，$P; (Q; R) \subseteq (P; Q); R$ は一般には成立しない．次のような集合 $A = \{x, y\}$ 上の二項多重関係を考える．

$$R = \{\ (x, \{x, y\}),\ (y, \{x, y\})\ \},$$
$$Q = \{\ (x, \{y\}),\ (y, \{x\})\ \}.$$

ここで R は上向きに閉じているが，Q は上向きに閉じていない．$R; Q = 0$ であるので, $(R; Q); R = 0; R = 0$．一方, $Q; R = R$ であるので，$R; (Q; R) = R; R = R$ となる．従って，$R; (Q; R) \not\subseteq (R; Q); R$ がいえる．

通常の二項関係における恒等関係は $\mathit{1} = \{(x, x) \in A \times A \mid x \in A\}$ で与えられ，これは合成に関する単位元である．二項多重関係において、合成に関する単位元は所属関係である．

定義 2.13. 二項多重関係 $1 \subseteq A \times \wp(A)$ を次のように定義する．

$$1 \ := \ \{(x, X) \in A \times \wp(A) \mid x \in X\}$$

命題 2.14. 二項多重関係 1 は，上向きに閉じている．

証明. $x \in A$，$X, Y \subseteq A$ について，

$$\begin{aligned} (x, X) \in 1 \ \wedge \ X \subseteq Y \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in X \ \wedge \ X \subseteq Y \\ &\Longrightarrow \quad x \in Y \\ &\Longleftrightarrow \quad (x, Y) \in 1 \end{aligned}$$

□

二項多重関係 1 は，合成についての単位元である．

命題 2.15. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ とするとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned} 1;R &= R \\ R;1 &= R \end{aligned}$$

証明. $1;R \subseteq R$ を示す．$(x,X) \in 1;R$ とすると，

$$\exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in 1 \ \wedge \ \forall y \in Y.(y,X) \in R] \ .$$

1 の定義より, $x \in Y$．さらに $\forall y \in Y.(y,X) \in R$ より, $(x,X) \in R$.

$R \subseteq 1;R$ を示す．$(x,X) \in R$ とすると，$(x,\{x\}) \in 1$ であるから, $(x,X) \in 1;R$.

$R;1 \subseteq R$ を示す．$(x,X) \in R;1$ とすると，

$$\exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in R \ \wedge \ \forall y \in Y.(y,X) \in 1]$$

$\forall y \in Y.(y,X) \in 1$ より, $\forall y \in Y.y \in X$．すなわち, $Y \subseteq X$．$(x,Y) \in R$ であり，R が上向きに閉じているので, $(x,X) \in R$.

$R \subseteq R;1$ を示す．$(x,X) \in R$ とすると，$\forall y \in X.(y,X) \in 1$ は 1 の定義より明らかであるから，$(x,X) \in R;1$. □

命題 2.12 と命題 2.15 より, 次がえられる.

命題 2.16. $(\mathsf{UMRel}(A), ;, 1)$ はモノイドである.

2.2.3 集合演算と合成の分配律

二項多重関係における集合演算と合成の分配律について考察する．通常の二項関係の場合，$p \subseteq A \times A$, $\{r_\lambda \subseteq A \times A \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
p \cdot (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda) &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(p \cdot r_\lambda), && (2.1)\\
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda) \cdot p &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(r_\lambda \cdot p), && (2.2)\\
p \cdot (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda) &\subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(p \cdot r_\lambda), && (2.3)\\
(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda) \cdot p &\subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(r_\lambda \cdot p) && (2.4)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．しかし，二項多重関係において式 (2.1) は成り立つとは限らない．また，上向きに閉じた二項多重関係においては式 (2.4) が等号成立する．

ここでは上記の 4 つの分配律について議論し，成立するものについては証明を与え，成り立つとは限らないものについては反例を与える．まず，和集合 $\bigcup$ と合成 ; に関する分配律をみていく．

命題 2.17. $P \in \mathsf{UMRel}(A)$，$\{R_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathsf{UMRel}(A)$ とするとき次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P; R_\lambda &\subseteq P; (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda)\\
(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda); P &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda; P
\end{aligned}
$$

証明. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P; R_\lambda \subseteq P; (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda)$ を示す．合成の単調性から次が明らかである．

$$
\begin{aligned}
(x, X) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P; R_\lambda &\iff \exists \kappa \in \Lambda.[(x, X) \in P; R_\kappa]\\
&\implies (x, X) \in P; R_\kappa\\
&\implies (x, X) \in P; (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda) .
\end{aligned}
$$

次に，$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda);P \ = \ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda;P$ を示す.

$$
\begin{aligned}
& (x,X)\in(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda);P \\
\iff\ & \exists Y\subseteq A.[(x,Y)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \wedge \forall y\in Y.(y,X)\in P] \\
\iff\ & \exists Y\subseteq A.[\exists\kappa\in\Lambda.(x,Y)\in R_\kappa \wedge \forall y\in Y.(y,X)\in P)] \\
\iff\ & \exists\kappa\in\Lambda.(\exists Y\subseteq A.[(x,Y)\in R_\kappa \wedge \forall y\in Y.(y,X)\in P]) \\
\iff\ & \exists\kappa\in\Lambda.((x,X)\in R_\kappa;P) \\
\iff\ & (x,X)\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda;P \quad .
\end{aligned}
$$

□

$P;(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda) \ \subseteq \ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P;R_\lambda$ は一般には成立しない．以下がその反例である.

例 2.2. $A=\{x,y\}$ とする．A 上の二項多重関係,

$$R \ = \ \{\ (x,\{y\}),\ (x,\{x,y\}),\ (y,\{x,y\})\ \}.$$

について考えると，$(y,\{y\})\in R;(1\cup R)$ であるが，$(y,\{y\})\notin R;1\cup R;R$ である．従って，$R;(1\cup R)\not\subseteq R;1\cup R;R$ がいえる．

続いて，共通集合 $\bigcap$，合成 ; に関する分配律についてみていく．

命題 2.18. $P\in\mathsf{UMRel}(A)$，$\{R_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}\subseteq\mathsf{UMRel}(A)$ とするとき次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
P;(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda) \ &\subseteq\ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} P;R_\lambda \\
(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda);P \ &=\ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda;P
\end{aligned}
$$

証明.　$P;(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} P;R_\lambda$ を示す.

$$\begin{aligned}
& (x,X) \in P;(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda) \\
\iff\ & \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \ \wedge\ \forall y \in Y.(y,X) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda] \\
\iff\ & \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \ \wedge\ \forall y \in Y.\forall\lambda \in \Lambda.((y,X) \in R_\lambda)] \\
\iff\ & \exists Y \subseteq A.\forall\lambda \in \Lambda.[(x,Y) \in P \ \wedge\ \forall y \in Y.(y,X) \in R_\lambda] \\
\implies\ & \forall\lambda \in \Lambda.\exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in P \ \wedge\ \forall y \in Y.(y,X) \in R_\lambda] \\
\iff\ & \forall\lambda \in \Lambda.(x,X) \in P;R_\lambda \\
\iff\ & (x,X) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} P;R_\lambda \ .
\end{aligned}$$

$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda);P \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda;P$ を示す.

$$\begin{aligned}
& (x,X) \in (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda);P \\
\iff\ & \exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda \ \wedge\ \forall y \in Y.(y,X) \in P] \\
\iff\ & \exists Y \subseteq A.[\forall\lambda\in\Lambda.(x,Y) \in R_\lambda \ \wedge\ \forall y \in Y.(y,X) \in P] \\
\iff\ & \exists Y \subseteq A.\forall\lambda\in\Lambda.[(x,Y) \in R_\lambda \ \wedge\ \forall y \in Y.(y,X) \in P] \\
\implies\ & \forall\lambda\in\Lambda.\exists Y \subseteq A.[(x,Y) \in R_\lambda \ \wedge\ \forall y \in Y.(y,X) \in P] \\
\iff\ & \forall\lambda\in\Lambda.(x,X) \in R_\lambda;P \\
\iff\ & (x,X) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda;P \ .
\end{aligned}$$

$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda;P \subseteq (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda);P$ を示す．$(x,X) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda;P$ とする．$\forall\lambda \in \Lambda.(x,X) \in R_\lambda;P$ であるから，各 λ ごとに

$$\exists Y_\lambda \subseteq A.[(x,Y_\lambda) \in R_\lambda \ \wedge\ \forall y \in Y_\lambda.(y,X) \in P] \ .$$

ここで，$Y_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ とおくと，R_λ たちが上向きに閉じていることから $\forall\lambda \in \Lambda.(x,Y_0) \in R_\lambda$，すなわち $(x,Y_0) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ である．$\forall y \in Y_0.(y,X) \in P$ なので，$(x,X) \in (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda);P$ がいえる． □

注意 2.3. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda ; P \subseteq (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda); P$ は，R_λ たちがすべて上向きに閉じていなければ，成立するとは限らない．次のような集合 $A = \{x, y\}$ 上の二項多重関係を考える．

$$\begin{aligned} &R_1 = \{(x, \{x, y\})\}, \quad R_2 = \{(x, \{x\})\}, \\ &P = \{(x, \{x, y\}),\ (y, \{x, y\})\}\ . \end{aligned}$$

R_1 は上向きに閉じているが，R_2 は上向きに閉じていない．$R_1; P = R_2; P = \{(x, \{x, y\})\}$ であるので，$R_1; P \cap R_2; P = \{(x, \{x, y\})\}$．一方，$R_1 \cap R_2 = 0$ なので，$(R_1 \cap R_2); P = 0; P = 0$．従って，$R_1; P \cap R_2; P \not\subseteq (R_1 \cap R_2); P$ がいえる．

また，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} P; R_\lambda \subseteq P; (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda)$ は以下の反例により，一般には成立しない．

例 2.3. $A = \{x, y, z\}$ とする．$\mathsf{UMRel}(A)$ の元，

$$\begin{aligned} P &= \{(x, W) \mid W \neq \emptyset\} \\ R &= \{(x, \{y\}),\ (x, \{x, y\}),\ (y, \{x, y\})\} \\ R' &= \{(x, \{x, y\}),\ (y, \{y\}),\ (y, \{x, y\})\} \end{aligned}$$

について考えると，$(x, \{y\}) \in P; R \cap P; R'$ であるが，$(x, \{y\}) \notin P; (R \cap R')$ である．従って，$P; R \cap P; R' \not\subseteq P; (R \cap R')$ がいえる．

第 3 章　多重関係の反射的推移的閉包

二項多重関係の反射的推移的閉包はゲーム論理における“ 反復 ”に相当する．Goranko [4] と Venema [20] はゲーム論理に現れる演算を代数的な視点から研究し，反復を含まないゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルを与えた．しかし，反復を含むゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルは未だに明らかになっていない．これを明らかにするには，反復に相当する反射的推移的閉包の構成方法についてより詳しい考察が必要と思われる．

本章では前章の議論をふまえて，二項多重関係の反射的推移的閉包の構成方法について厳密に考察することにする．まず，二項関係における反射的推移的閉包の定義を紹介し，これに相当する上向きに閉じた二項多重関係 $\mathsf{UMRel}(A)$ における反射的推移的閉包の定義を与える．多重関係の反射的推移的閉包の構成はその定義から直ちに得られるものもあるが，ここではその他の構成方法についても考察する．

3.1　反射的推移的閉包の定義

集合 A 上の二項関係 $r \subseteq A \times A$ の反射的推移的閉包 r^* とは，r を含む反射的 $(\mathit{1} \subseteq x)$ かつ推移的 $(x \cdot x \subseteq x)$ な関係のうち最小の関係，すなわち，

$$\bigcap\{x \mid \mathit{1} \cup r \cup x \cdot x \subseteq x\}$$

で与えられる．二項多重関係における反射的推移的閉包も同様に与えられる．

定義 3.1. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ の**反射的推移的閉包** R^* とは，R を含む反射的 $(1 \subseteq \xi)$ かつ推移的 $(\xi \cdot \xi \subseteq \xi)$ な関係のうち，最小の関係である．

定義より，ただちに次がいえる．

命題 3.2. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ の反射的推移的閉包は，

$$\bigcap \{\xi \in \mathsf{UMRel}(A) \mid 1 \cup R \cup \xi;\xi \subseteq \xi\} \ .$$

3.2 反射的推移的閉包：有限性を考慮しない場合

ここでは有限性を考慮しない場合，すなわち何ら制限を加えていない場合の，上向きに閉じた二項多重関係の反射的推移的閉包について議論する．

一般に，A 上の二項関係 $r \subseteq A \times A$ の反射的推移的閉包は次の構成方法で与えられることが知られている．

$$\bigcup_{n \geq 0} r^n$$

但し，r^n は $r^0 = \mathit{1}$，$r^{n+1} = r \cdot r^n$ によって定義される．

文献 [6] では，二項多重関係においても上記の構成で反射的推移的閉包が得られるとしているが，これは誤りである．以下にその反例を挙げる．

例 3.1. $A = \{x, y, z\}$ とする．$\mathsf{UMRel}(A)$ の元

$$R \ = \ \{(x, W) \mid z \in W\} \ \cup \ \{(y, W) \mid \{x, z\} \subseteq W\} \ \cup \ \{(z, W) \mid \{x, z\} \subseteq W\}.$$

について考える．$R;R \subseteq R$ であることより，

$$\bigcup_{n \geq 0} R^n = R \cup 1 \ .$$

従って，命題 *2.15*，命題 *2.17* より

$$\begin{aligned} (\bigcup_{n \geq 0} R^n);(\bigcup_{n \geq 0} R^n) &= (R \cup 1);(R \cup 1) \\ &= R;(R \cup 1) \cup (R \cup 1) \ . \end{aligned}$$

である. $(y,\{z\}) \in R;(R\cup 1)$ であるが, $(y,\{z\}) \notin R\cup 1$ となることから,

$$(\bigcup_{n\geq 0} R^n);(\bigcup_{n\geq 0} R^n) \not\subseteq R\cup 1 = (\bigcup_{n\geq 0} R^n).$$

すなわちこの $\bigcup_{n\geq 0} R^n$ は推移律をみたさない.

$R \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して, 次のような写像 $\varphi_R : \mathsf{UMRel}(A) \to \mathsf{UMRel}(A)$ を考える.

$$\varphi_R(\xi) := R;\xi \cup 1 \ \ .$$

写像 φ_R は単調である，すなわち $\xi \subseteq \eta \implies \varphi_R(\xi) \subseteq \varphi_R(\eta)$. また，$\varphi_R^n(\xi)$ を

$$\varphi_R^0(\xi) = \xi, \quad \varphi_R^{n+1}(\xi) = \varphi_R(\varphi_R^n(\xi))$$

によって定義する.

順序集合 $(\mathsf{UMRel}(A), \subseteq)$ は, 最小元 0 を持ち, 任意の有向部分集合 $D \subseteq \mathsf{UMRel}(A)$ に対して上限 $\bigcup D$ が存在するので，完全順序集合（complete partially ordered set）である.

完全順序集合の不動点定理 [2, 11] によれば，φ_R が連続であれば, $\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ が二項多重関係 $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ の最小不動点である，といえる.

完全順序集合 L 上の写像 $f : L \to L$ が連続であるとは，L の有向部分集合 D にたいして $\bigvee f(D)$ が存在して，$f(\bigvee D) = \bigvee f(D)$ が成り立つことである．ただし，$\bigvee B$ は $B \subseteq L$ の上限を表す.

しかしながら，φ_R は連続であるとは限らない. 以下はその反例である.

例 3.2. 自然数全体からなる集合を $\mathbb{N}$ とし，ω を任意の自然数に対して $n < \omega$ となるような元だとして，$A = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ とする.

$$R = \{(\omega, W) \in A \times \wp(A) \mid \mathbb{N} \subseteq W\}$$

$$P_i = \{(x, W) \in A \times \wp(A) \mid i \in \mathbb{N} \ \wedge \ x \leq i \ \wedge \ \mathbb{N} \subseteq W\}$$

とすると，$\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ は UMRel$(\mathbb{N} \cup \{\omega\})$ の有向部分集合である．ここで，$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} R; P_i = \emptyset$ であることから，$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_R(P_i) = 1$．また，$\varphi_R(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i) = R; (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i) \cup 1$ である．$(\omega, \mathbb{N})$ は $R; (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i)$ の元であるが，1 の元ではない．よって，$\varphi_R(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i) \not\subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_R(P_i)$ となり，φ_R は連続でないといえる．

さらに，次の例から $\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$ が R の反射的推移的閉包にならない場合があることがわかる．

例 3.3. $A = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ とする．UMRel(A) の元，

$$R = \{(x, X) \in A \times \wp(A) \mid \{y \in \mathbb{N} \mid y < x\} \subseteq X\}$$

を考えると，$(x, \emptyset) \in \varphi_R^n(0) \iff x < n$ が成り立つので，

$$(x, \emptyset) \in \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0) \iff x \in \mathbb{N}$$

が成り立つ．よって，$(\omega, \emptyset) \notin \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$ である．一方，$(\omega, \mathbb{N}) \in R$ であり，任意の自然数 n に対して $(n, \emptyset) \in \bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$ なので，$(\omega, \emptyset) \in R; (\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0))$ が成り立つ．合成 ; の単調性より，

$$(\omega, \emptyset) \in (\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)); (\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0))$$

が成り立つので，$\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$ は推移的ではない．

以上により，$\bigcup_{n \geq 0} R^n(0)$ ，$\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$ が $R \in$ UMRel(A) の反射的推移的閉包であるとは限らないことがいえた．

次に，$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ について考え，これが $R \in$ UMRel(A) の反射的推移的閉包であることを示す．

$P \in \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ ならば，φ_R の定義より明らかに $1 \subseteq P$ であり，さらに，$R = R; 1 \subseteq R; P \subseteq R; P \cup 1 \subseteq P$ が成り立つので，$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ は R を含む反射的関係である．

$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ が推移的であるためには次の 2 つが成り立てば十分である．

$$R; (\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}) \subseteq \bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \tag{3.1}$$

$$R; P \subseteq P \implies (\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}); P \subseteq P \tag{3.2}$$

Knaster-Tarski の不動点定理 [2, 11] によると，完備束 $(L, \leq)$ 上の単調写像 f の最小不動点は,

$$\bigwedge\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$$

で与えられる．ただし，$\bigwedge B$ は $B \subseteq L$ の下限を表す．従って，$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ は，$\mathsf{UMRel}(A)$ 上の単調写像 φ_R の最小不動点であるので，ただちに次がいえる．

定理 3.3. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して，(3.1) の包含関係が成り立つ.

条件 (3.2) を示すには少し準備が必要である．$R, Q \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して, R の Q に関する**右剰余**を

$$R \diagup Q := \bigcup\{\xi \mid \xi; Q \subseteq R\}$$

と定める．

命題 3.4. $Q, R \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して，$(R \diagup Q); Q \subseteq R$ が成り立つ.

証明. 命題 2.17 より,

$$(R \diagup Q); Q = (\bigcup\{\xi \mid \xi; Q \subseteq R\}); Q = \bigcup\{\xi; Q \mid \xi; Q \subseteq R\} \subseteq R\ .$$

□

命題 3.5. $P, Q, R \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して，$P; Q \subseteq R \iff P \subseteq R \diagup Q$ が成り立つ.

証明. $P; Q \subseteq R$ ならば，$P \in \{\xi \mid \xi; Q \subseteq R\}$ より $P \subseteq R \diagup Q$．逆に $P \subseteq R \diagup Q$ とすると，命題 3.4 より，$P; Q \subseteq (R \diagup Q); Q \subseteq R$.　□

定理 3.6. $R, P \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して次が成り立つ.

$$R;P \subseteq P \implies (\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\});P \subseteq P$$

証明. $R;P \subseteq P$ ならば，命題2.17より，

$$\begin{aligned} R;(P／P);P &= R;(\bigcup\{\xi \mid \xi;P \subseteq P\});P \\ &= R;(\bigcup\{\xi;P \mid \xi;P \subseteq P\}) \\ &\subseteq R;P \end{aligned}$$

なので，$P \cup R;(P／P);P \subseteq P$ がいえる．さらに命題2.17, 3.5より

$$\begin{aligned} & P \cup R;(P／P);P \subseteq P \\ \iff & (1 \cup R;(P／P));P \subseteq P \\ \iff & 1 \cup R;(P／P) \subseteq P／P \\ \implies & \bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq P／P \\ \iff & (\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\});P \subseteq P \ . \end{aligned}$$

□

以上で $\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ が $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ を含み，反射的かつ推移的であることを示した．次に最小性を示す.

命題 3.7. $R, \chi \in \mathsf{UMRel}(A)$ とする．χ が R を含み反射的かつ推移的であるならば，

$$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq \chi$$

が成り立つ.

証明. χ が R を含み推移的であることから，合成の単調性により $R;\chi \subseteq \chi;\chi \subseteq \chi$ をみたす．さらに，χ が反射的であることから，$\varphi_R(\chi) \subseteq \chi$ なので，$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq \chi$ が成り立つ. □

以上の議論により，UMRel(A) の元 R の反射的推移的閉包が次のように与えられることがわかった．

定理 3.8. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して，$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ は R の反射的推移的閉包である．

3.3　反射的推移的閉包：有限性を考慮した場合

上向きに閉じた二項多重関係 R に対して，$(x, X) \in R$ ならば $(x, Y) \in R$ かつ $Y \subseteq X$ となるような有限集合 Y が存在するとき，R は**有限的**であるという．

定義 3.9. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ が

$$(x, W) \in R \quad \Longrightarrow \quad \exists Z : \text{有限集合}.[Z \subseteq W \wedge (x, Z) \in R]$$

をみたすとき，R は**有限的**（*finitary*）である，という．

有限的な UMRel(A) の元全体の集合を UMRel$_f(A)$ で表す．

UMRel$_f(A)$ については，以下のことがわかる．

命題 3.10. UMRel$_f(A)$ について次が成り立つ．

- UMRel$_f(A)$ は，$\bigcup$ や ; について閉じている．
- 0，∇ および 1 は UMRel$_f(A)$ の元である．
- (UMRel$_f(A), \cup, 0)$ はべき等可換モノイド．
- (UMRel$_f(A), ;, 1)$ はモノイド．
- 命題 2.17 の 2 つの式が成り立つ．

上記が成り立つ一方で，UMRel$_f(A)$ は $\bigcap$ について閉じていない．

例 3.4. $i \in \mathbb{N}$ とし，$R_i = \{(1, X) \in \mathbb{N} \times \wp(\mathbb{N}) \mid i \in X\}$ とすると，任意の i について $R_i \in \mathsf{UMRel}_f(\mathbb{N})$ であるが，

$$\bigcap\{R_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{(1, \mathbb{N})\}$$

となり，R_i $(i \in \mathbb{N})$ の共通部分は有限的でない．

$R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ に対して，$\varphi_R : \mathsf{UMRel}_f(A) \to \mathsf{UMRel}_f(A)$ を前節と同様に

$$\varphi_R(\xi) = R; X \cup 1$$

と定義すると，φ_R は単調写像である．

$\mathsf{UMRel}_f(A)$ 上で，$\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ が反射的推移的閉包であるか考察する．

$$\begin{array}{rcl} 1 & \subseteq & R; 0 + 1 = \varphi_R(0) \\ R & \subseteq & R; (R; 0 + 1) + 1 = \varphi_R^2(0) \end{array}$$

であるので, $\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ は R を包含し反射的である．

補題 3.11. 任意の自然数 n について，$\varphi_R^n(0) \subseteq \varphi_R^{n+1}(0)$ が成り立つ．

証明. n についての数学的帰納法で示す．$n = 0$ のとき,

$$\varphi_R^0(0) = 0 \subseteq R; 0 + 1 = \varphi_R^1(0) \ \ .$$

$\varphi_R^n(0) \subseteq \varphi_R^{n+1}(0)$ と仮定すると,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_R^{n+1}(0) & = & R; \varphi_R^n(0) + 1 \\ & \subseteq & R; \varphi_R^{n+1}(0) + 1 \\ & = & \varphi_R^{n+2}(0) \ \ . \end{array}$$

□

$\mathsf{UMRel}_f(A)$ 上で, $\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ が推移的であることは, 命題 2.17 より
$(\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)); (\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)) = \bigcup_{k\geq 0} \varphi_R^k(0); (\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0))$ なので, 任意の $k \geq 0$ について,

$$\varphi_R^k(0); (\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)) \subseteq \bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$$

であることを示せばよい．

補題 3.12. $R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ のとき, 任意の $k \geq 0$ について次が成り立つ.

$$\varphi_R^k(0);(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) \subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$$

証明. k についての数学的帰納法で示す. $k=0$ のとき,

$$\varphi_R^0(0);(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) = 0;(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) = 0 \subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0) \ .$$

$\varphi_R^k(0);(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) \subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$ を仮定する．命題 2.17 より,

$$\begin{aligned}
\varphi_R^{k+1}(0);(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) &= (R;\varphi_R^k(0)+1);(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) \\
&= R;\varphi_R^k(0);(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) + 1;(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) \\
&\subseteq R;(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) + \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0) \ .
\end{aligned}$$

以下, $R;(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) \subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$ を示す. $(x,W) \in R;(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0))$ と仮定すると, R が有限的なので, 有限集合 Y が存在して,

$$(x,Y) \in R \wedge \forall y \in Y. \exists k.(y,W) \in \varphi_R^k(0) \ .$$

$Y = \emptyset$ のとき, $(x,W) \in R \subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$.

$Y \neq \emptyset$ のとき, 各 $y \in Y$ について, 自然数 k_y が存在して, $(y,W) \in \varphi_R^{k_y}(0)$ である. $k_0 = sup\{k_y \mid y \in Y\}$ とおけば, 補題 3.11 より $i \leq j \implies \varphi_R^i(0) \subseteq \varphi_R^j(0)$ なので,

$$\forall y \in Y.(y,W) \in \varphi_R^{k_0}(0).$$

従って，$(x,W) \in R;\varphi_R^{k_0}(0)$. これにより,

$$\begin{aligned}
R;\varphi_R^{k_0}(0) &\subseteq R;\varphi_R^{k_0}(0)+1 \\
&= \varphi_R^{k_0+1}(0) \\
&\subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)
\end{aligned}$$

となるので $R;(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) \subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$ である. 従って，$\varphi_R^{k+1}(0);(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) \subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$ がいえる. □

ここまで，$\mathsf{UMRel}_f(A)$ 上で $\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$ は, R を含む反射的推移的な多重関係であることを示してきた．次に最小性を示す.

補題 3.13. $R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ に対して, χ を反射的推移的で R を含む有限的な上向きに閉じた二項多重関係とするとき, $\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0) \subseteq \chi$ である.

証明. n についての数学的帰納法を用いて，$\varphi_R^n(0) \subseteq \chi$ を示す．$n = 0$ のとき，$\varphi_R^0(0) = 0 \subseteq \chi$ である．$\varphi_R^n(0) \subseteq \chi$ を仮定すると，$\varphi_R^{n+1}(0) = R;\varphi_R^n(0)+1 \subseteq R;\chi+1$．$\chi$ が R を含み反射的推移的であることから $R;\chi+1 \subseteq \chi;\chi+1 \subseteq \chi+1 \subseteq \chi$．　□

以上により, 次の定理が得られた.

定理 3.14. $R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ に対して，$\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$ は R の反射的推移的閉包である.

集合 A の有限部分集合の全体を $\wp_f(A)$ と書くことにし，$A \times \wp_f(A)$ の部分集合を**有限二項多重関係**と呼ぶことにする．さらに，上向きに閉じた有限二項多重関係の全体を $\mathsf{UMRel}_F(A)$ と書くことにする．$\mathsf{UMRel}_F(A)$ は $\bigcup$，$\bigcap$ および ; について閉じており，次の性質をみたすことがわかる.

命題 3.15. $\mathsf{UMRel}_F(A)$ について次が成り立つ.

- $(\mathsf{UMRel}_F(A), \cup, \cap, 0, \nabla)$ は完備分配束をなす.
- $(\mathsf{UMRel}_F(A), ;, 1)$ はモノイドをなす.
- 命題 *2.17*，*2.18* の全ての式が成り立つ.

$\mathsf{UMRel}_f(A)$ から $\mathsf{UMRel}_F(A)$ への写像 G を

$$G(R) = \{(x, X) \mid (x, X) \in R \wedge X \text{ は有限}\}$$

によって定める.

命題 3.16. 上で定めた写像 G は全単射であり，$\bigcup, ;, \nabla, 0, 1$ を保存する.

証明. $P \in \mathsf{UMRel}_F(A)$ に対して，

$$R = \{(x,X) \mid \exists Y \in \wp_f(A).(x,Y) \in P \wedge Y \subseteq X\}$$

とすると，$R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ である．$(x,X) \in G(R)$ であることと

$$\exists Y \in \wp_f(A).(x,Y) \in P \wedge Y \subseteq X \wedge X \in \wp_f(A)$$

とは同値であることに注意すると，P が上向きに閉じていることから $G(R) \subseteq P$ であり，この逆は，上の論理式で Y として特に X をとれば良い．よって，G は全射である．

次に，$G(R) = G(R')$ と仮定すると，G の定義より，X が有限集合の場合

$$(x,X) \in R \iff (x,X) \in R'$$

となる．$(x,Y) \in R$ とすると $(x,Z) \in R$ かつ $Z \subseteq Y$ となるような有限集合 Z が存在する．Z が有限集合なので $(x,Z) \in R'$ となり，R' が上向きに閉じていることから $(x,Y) \in R'$ を得る．この逆も同様に示すことができるので，G が単射であることがわかる．

G が $\bigcup, \nabla, 0, 1$ を保存することと，$G(R);G(P) \subseteq G(R;P)$ であることは，G およびそれぞれの演算の定義より容易に示すことができる．$G(R;P) \subseteq G(R);G(P)$ は，G および ; の定義に加えて R が有限的なことを用いることにより示すことができる． □

$R \in \mathsf{UMRel}_F(A)$ に対して，φ_R を前節と同様に定義すると，$\mathsf{UMRel}_F(A)$ から $\mathsf{UMRel}_F(A)$ への単調写像であり，命題 3.16 より次の性質を得る．

命題 3.17. $R \in \mathsf{UMRel}_F(A)$ とするとき，$\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$ は R の反射的推移的閉包である．

$\mathsf{UMRel}_F(A)$ は $\mathsf{UMRel}_f(A)$ と異なり $\bigcap$ について閉じているので，$\bigcup_{n \geq 0} \varphi_R^n(0)$ と $\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ を比較することが可能である．そのために必要な補題を準備する．

補題 3.18. $R \in \mathsf{UMRel}_F(A)$ とする．$n \geq 0$ について $\varphi_R^n(0) \subseteq \varphi_R^{n+1}(0)$.

証明. n に関する数学的帰納法により示す．$n = 0$ のとき，$\varphi_R^0(0) = 0$ より成り立つ．$\varphi_R^n(0) \subseteq \varphi_R^{n+1}(0)$ と仮定すると，

$$\begin{array}{rcl} \varphi_R^{n+1}(0) & = & R; \varphi_R^n(0) \cup 1 \\ & \subseteq & R; \varphi_R^{n+1}(0) \cup 1 \\ & = & \varphi_R^{n+2}(0) \end{array}$$

となり，任意の $n \geq 0$ について成り立つことがわかる． □

$\mathsf{UMRel}_F(A)$ において次の等式が成り立つ．

定理 3.19. $\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0) = \bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$

証明. $\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0) \subseteq \bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ を示すためには，任意の $Q \in \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ について，$\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0) \subseteq Q$, すなわち，

$$\varphi_R^n(0) \subseteq Q \quad (n \geq 0)$$

を示せばよいので，n についての帰納法によりこれを示す．$n = 0$ のときは明らかに成り立つ．$\varphi_R^n(0) \subseteq Q$ と仮定すると，

$$\varphi_R^{n+1}(0) = R; \varphi_R^n(0) \cup 1 \subseteq R; Q \cup 1 \subseteq Q$$

が成り立つ．

$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\} \subseteq \bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ を示すためには，$\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0) \in \{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ を示せばよい．$1 \subseteq \varphi_R(0)$ より，$1 \subseteq \bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ であるので，
$R; (\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)) \subseteq \bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ を示せは十分である．$(x, W) \in R; (\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0))$ と仮定すると，

$$(x, Y) \in R \wedge \forall y \in Y. \exists k. (y, W) \in \varphi_R^k(0)$$

となるような有限集合Yが存在する．$Y=\emptyset$のとき, $(x,W)\in R$かつ$R\subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$より$(x,W)\in\varphi_R^n(0)$．$Y\neq\emptyset$のとき, 各$y\in Y$について, $(y,W)\in\varphi_R^{k_y}(0)$となる$k_y$が存在する．

$$k_0=\max\{k_y\mid y\in Y\}$$

とおけば, 補題3.11より，各$y\in Y$に対して$(y,W)\in\varphi_R^{k_0}(0)$が成り立つ．従って，$(x,W)\in R;\varphi_R^{k_0}(0)$である．さらに，

$$\begin{aligned} R;\varphi_R^{k_0}(0) &\subseteq R;\varphi_R^{k_0}(0)\cup 1\\ &= \varphi_R^{k_0+1}(0)\\ &\subseteq \bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)\ . \end{aligned}$$

従って，$(x,W)\in\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)$を得る． □

$\mathsf{UMRel}_f(A)$の元の族$\{R_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$に対して，

$$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda=G^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}G(R_\lambda))$$

と定義すると，明らかに$G(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}G(R_\lambda)$であるので，命題3.16より$\bigwedge_{\lambda\in\Lambda}R_\lambda$は$\mathsf{UMRel}_f(A)$上の順序$\subseteq$に関する$\{R_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$の下限であり，組$(\mathsf{UMRel}_f(A),\cup,\wedge,0,\nabla)$は完備分配束をなす．さらに，命題3.16と定理3.19より，$\mathsf{UMRel}_f(A)$において次の等式が成り立つことがわかる．

系 3.1. $R\in\mathsf{UMRel}_f(A)$に対して，$\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)=\bigwedge\{\xi\mid\varphi_R(\xi)\subseteq\xi\}$である．

第4章　緩クリーニ代数

緩クリーニ代数は 2004 年に Möller [10] によって提案された，クリーニ代数を拡張した代数系である．クリーニ代数は正規言語の等式理論の健全かつ完全な公理化として，Kozen [5] によって与えられた．クリーニ代数という名前は計算機科学の基礎理論に多大な貢献した Stephen Cole Kleene に由来する．以下に，クリーニ代数の定義を与える．

定義 4.1. クリーニ代数とは，集合 K とその上の二項演算 $+, \cdot$，単項演算 *，および K の元 $0, 1$ の六つ組 $(K, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ で，次が成り立つようなものである．

- $(K, +, 0)$ は，べき等可換モノイド．
- $(K, \cdot, 1)$ は，モノイド．
- 演算 $\cdot$ は演算 $+$ に関する分配律をみたす．すなわち次が成り立つ．

$$(a+b)c \quad = \quad ac+bc \tag{4.1}$$

$$a(b+c) \quad = \quad ab+ac \tag{4.2}$$

- 0 は $\cdot$ に関する零元である．すなわち次が成り立つ．

$$0a \quad = \quad 0 \tag{4.3}$$

$$a0 \quad = \quad 0 \tag{4.4}$$

- 演算 * はについて次をみたす.

$$1 + aa^* \quad \leq \quad a^* \tag{4.5}$$

$$1 + a^*a \quad \leq \quad a^* \tag{4.6}$$

$$ab \leq b \quad \Longrightarrow \quad a^*b \leq b \tag{4.7}$$

$$ab \leq a \quad \Longrightarrow \quad ab^* \leq a \tag{4.8}$$

ただし $a, b, c \in K$ である．また，上記において，$\cdot$ は省略されており，K 上の順序 $\leq$ は $a \leq b \iff a + b = b$ で定義される.

Möller は正規言語の代数であるクリーニ代数の公理を有限列・無限列の言語まで扱えるように弱めた代数系を提案し，これを緩クリーニ代数と呼んだ．具体的には，クリーニ代数の定義では

- 演算 $\cdot$ の演算 $+$ について，”左右両側”の分配律 (4.1), (4.2)
- 演算 0 の演算 $\cdot$ について，”左右両側”の零元則 (4.3), (4.4)

をみたすことが必要であるのに対し，緩クリーニ代数では

- 演算 $\cdot$ の演算 $+$ について，”左”分配律 (4.1)
- 演算 0 の演算 $\cdot$ について，”左”零元則 (4.3)

を要するよう公理を弱めた．緩クリーニ代数は，Cohen の omega Algebra [1] や von Wright の Demonic Refinement Algebra [21] などに共通する特徴を捉えている.

一般に二項関係全体がクリーニ代数の関係モデルであることが知られており，その事実はクリーニ代数の拡張に影響を与えた．従って，緩クリーニ代数の関係モデルを明らかにすることは，緩クリーニ代数にも同様の拡張を期待させるものとして，有意義であると考える.

本章では，前章までの議論を基に緩クリーニ代数の関係モデルを与える．始めに緩クリーニ代数の定義を紹介し，次に二項多重関係全体が緩クリーニ代数の関係モデルであることを示す．そして，緩クリーニ代数より強い代数，すなわち緩

クリーニ代数に公理を追加した代数を紹介し，その関係モデルも与える．

4.1 緩クリーニ代数の定義

緩クリーニ代数を定義する前に，少し準備をする．

定義 4.2. 組 $(K,+,\cdot,0,1)$ は次をみたすとき，**べき等左半環**（*idempotent left semiring*）という．

- $(K,+,0)$ は，べき等可換モノイド．
- $(K,\cdot,1)$ は，モノイド．
- 演算 $\cdot$ は単調で，左零元則および演算 $+$ との左分配律をみたす：

$$\begin{array}{rcl} 0a & = & 0 \\ (a+b)c & = & ac+bc \ . \end{array}$$

ただし $a,b,c \in K$．また演算 $\cdot$ は省略されている．順序 $\leq$ は $a \leq b \iff a+b=b$ で定義される．

定義 4.3. 組 $(K,+,\cdot,{}^*,0,1)$ が次をみたすとき．**緩クリーニ代数**（*lazy Kleene algebra*）という．

- $(K,+,\cdot,0,1)$ は，べき等左半環．
- 演算 * は $a,b \in K$ について次をみたす．

$$1+aa^* \quad \leq \quad a^* \tag{4.9}$$

$$ab \leq b \quad \Longrightarrow \quad a^*b \leq b \tag{4.10}$$

4.2 緩クリーニ代数の関係モデル

ここでは，2, 3 章の結果を用いて，上向きに閉じた二項多重関係全体 $\mathsf{UMRel}(A)$ が緩クリーニ代数の公理をみたすことを示す．

命題 4.4. $(\mathsf{UMRel}(A), \cup, ;, 0, 1)$ は，べき等左半環である．

証明. 注意 2.1 より $(\mathsf{UMRel}(A), \cup, 0)$ はべき等可換モノイドである．また，命題 2.16 から，$(\mathsf{UMRel}(A), ;, 1)$ はモノイドである．さらに命題 2.9，2.10，2.17 より，演算 ; は単調であり，左零元則および演算 $\cup$ について左分配律をみたす．従って，$(\mathsf{UMRel}(A), \cup, ;, 0, 1)$ は，べき等左半環である． □

続いて，$\mathsf{UMRel}(A)$ 上の演算 * を定義し，緩クリーニ代数の * に関する規則をみたすことを示す．$\mathsf{UMRel}(A)$ 上の演算 * は反射的推移的閉包によって定義する．

定義 4.5. $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して，$\mathsf{UMRel}(A)$ 上の演算 * を次のように定義する．

$$R^* := \bigcap \{\xi \mid R;\xi \cup 1 \subseteq \xi\}$$

式 (4.9)，(4.10) に相当する条件，すなわち，$R, P \in \mathsf{UMRel}(A)$ に対して，

$$\begin{aligned} 1 \cup R;R^* &\subseteq R^* \\ R;P \subseteq P &\implies R^*;P \subseteq P \end{aligned}$$

が成り立つことは，定理 3.3，3.6 において既に示した．以上のことから次が得られる．

定理 4.6. 組 $(\mathsf{UMRel}(A), \cup, ;, ^*, 0, 1)$ は，緩クリーニ代数である．

4.3　公理を追加した緩クリーニ代数とその関係モデル

本節では緩クリーニ代数の定義に対して，３つの公理，0 公理，+公理，D 公理について考える．

単口木クリーニ代数は高井，古澤 [16] によって 2006 年に提案された．これは単口木言語という木言語の部分クラスを扱えるようにクリーニ代数を拡張した代数系である．

確率クリーニ代数は McIver ら [7, 9] によって，確率システムの検証におけるモデルの抽象化を目的として提案された．彼女らは確率システムのモデルを確率クリーニ代数によってある程度小さくしてから検証を始めるという手法を提案し，特定の問題に対して有用であることを示した [7, 9].

この 2 つのクリーニ代数は，それぞれ別の目的で提案されたものであるが，どちらも以下に論ずる公理の幾つかを緩クリーニ代数の定義に加えることで得られる代数である．

前節では二項多重関係全体 $\mathsf{UMRel}(A)$ が緩クリーニ代数の関係モデルであることを示したが，ここでは $\mathsf{UMRel}(A)$ が下記の公理をみたすための条件を考察し，上記の各クリーニ代数の関係モデルを与える．

定義 4.7. 緩クリーニ代数 $(K, +, \cdot, {}^*, 0, 1)$ が，$a, b, c \in K$ について

$$a0 = 0 \tag{4.11}$$

$$ab + ac = a(b + c) \tag{4.12}$$

$$a(b + 1) \le a \implies ab^* \le a \tag{4.13}$$

をみたすとき，それぞれ 0 **公理**，+**公理**，D **公理**をみたすという．

緩クリーニ代数は 0 公理，+公理をみたすとは限らない．このことは $\mathsf{UMRel}(A)$ が緩クリーニ代数をなすという定理 4.6 と，例 2.1，2.2 からそれぞれわかる．また，緩クリーニ代数は D 公理もみたすとは限らない．$\mathsf{UMRel}(A)$ において，D 公理 (4.13) に相当する

$$P; (R + 1) \subseteq P \implies P; (\bigcap\{\xi \mid R; \xi \cup 1 \subseteq \xi\}) \subseteq P \tag{4.14}$$

の反例を以下に与える．

例 4.1. $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とし，$\mathsf{UMRel}(\mathbb{N})$ の元

$$P = \{(n, W) \in \mathbb{N} \times \wp(\mathbb{N}) \mid W \text{ は無限集合}\}$$

$$R = \{(0, \emptyset)\} \cup \{(n, W) \in \mathbb{N} \times \wp(\mathbb{N}) \mid \exists m \in W. n \le m + 1\}$$

について考えると，$P;(R+1) = P;R \subseteq P$ がいえる．$R;\xi+1 \subseteq \xi \implies \forall k \in \mathbb{N}.(k,\{0\}) \in \xi$ であることを示す．$R;\xi+1 \subseteq \xi$ とする．$k=0$ のとき，$(0,\{0\}) \in R = R;1 \subseteq R;\xi \subseteq \xi$ である．$(k,\{0\}) \in \xi$ を仮定すると，$(k+1,\{k\}) \in R$ より $(k+1,\{0\}) \in R;\xi \subseteq \xi$．$\bigcap\{\xi \mid R;\xi \cup 1 \subseteq \xi\}$ は φ_R の最小不動点であるから，任意の自然数 k について $(k,\{0\}) \in \bigcap\{\xi \mid R;\xi \cup 1 \subseteq \xi\}$ が成り立つ．ある自然数 n について，$(n,\mathbb{N}) \in P$ なので，$(n,\{0\}) \in P;(\bigcap\{\xi \mid R;\xi \cup 1 \subseteq \xi\})$．一方で，$(n,\{0\}) \notin P$ であるので，$P;(\bigcap\{\xi \mid R;\xi \cup 1 \subseteq \xi\}) \not\subseteq P$ がいえる．

以上により，緩クリーニ代数が 0 公理，+公理，D 公理をみたすとは限らないことがいえた．

緩クリーニ代数と 3 つの公理，クリーニ代数については次がいえる．

命題 4.8. D 公理，0 公理，+公理をみたす緩クリーニ代数はクリーニ代数である．

証明. D 公理，0 公理，+公理をみたす緩クリーニ代数 $(K,+,\cdot,{}^*,0,1)$ がクリーニ代数であることを示す．仮定より $(K,+,0)$ はべき等可換モノイドで，$(K,\cdot,1)$ はモノイドであり，各演算について

$$\begin{aligned} a+a &= a \\ 0a &= 0 \\ a0 &= 0 \\ a(b+c) &= ab+ac \\ (a+b)c &= ac+bc \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに演算 * について

$$\begin{aligned} 1+aa^* &\leq a^* \\ ab \leq b &\implies a^*b \leq b \end{aligned}$$

が成り立つ．また，この 2 つの式から $a^*a^* \le a^*$ がいえる．従って $1 + a^*a \le a^*$ が成り立つことは，$1 \le a^*$ であることから

$$a^*a = a^*(a1) \le a^*(aa^*) \le a^*a^* \le a^*$$

によって導かれる．$ab \le a \implies ab^* \le a$ を示す．$ab \le a$ とすると，+公理をみたすことから $a(b+1) = ab + a1 = ab + a \le a$ がいえる．さらに D 公理をみたすので $ab^* \le a$ である．

逆に，クリーニ代数 $(K, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ が D 公理，0 公理，+公理をみたす緩クリーニ代数であることを示す．クリーニ代数の定義より，$(K, +, \cdot, 0, 1)$ はべき等左半環であり，+公理と 0 公理をみたす．また，クリーニ代数の演算 * に関する公理から

$$\begin{aligned} 1 + aa^* &\le a^* \\ ab \le b &\implies a^*b \le b \end{aligned}$$

がいえる．$a(b+1) \le a$ とすると $ab + a \le a$ である．これと演算 * に関する公理から $ab^* \le a$ がいえるので，D 公理 $a(b+1) \le a \implies ab^* \le a$ が成り立つ． □

4.3.1 D 公理をみたす緩クリーニ代数

すでに，上向きに閉じた二項多重関係全体 $\mathsf{UMRel}(A)$ は定義 4.7 の 3 つの公理を一般にみたさないことは述べた．続いて，同じ観点から，3.3 節で定義した有限的な上向きに閉じた二項多重関係 $\mathsf{UMRel}_f(A)$ について考察する．

命題 3.10 より，$\mathsf{UMRel}_f(A)$ がべき等左半環であることは明らかである．

$\mathsf{UMRel}_f(A)$ 上の演算 * を，$R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ に対して，

$$R^* := \bigcup_{n \ge 0} \varphi_R^n(0)$$

と定義する．補題 3.12 より次が明らかである．

命題 4.9. $R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ について，$1 + R; R^* \subseteq R^*$ が成り立つ．

次に，緩クリーニ代数の * に関するもう 1 つの公理 (4.10) を示す．命題 2.17 より，

$$R^*; P = (\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)); P = \bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0); P$$

なので, 次の補題が示されれば十分である.

補題 4.10. $R, P \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ とするとき，$R; P \subseteq P$ ならば次が成り立つ.

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \varphi_R^n(0); P \subseteq P$$

証明. n についての数学的帰納法で示す．$n = 0$ のとき，$\varphi_R^0(0); P = 0; P = 0 \subseteq P$. $\varphi_R^n(0); P \subseteq P$ を仮定する.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_R^{n+1}(0); P & = & (R; \varphi_R^n(0) + 1); P \\ & = & R; \varphi_R^n(0); P + 1; P \\ & \subseteq & R; P + P \\ & \subseteq & P + P \\ & = & P\ . \end{array}$$

□

命題 4.11. $R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ について，$R; P \subseteq P \implies R^*; P \subseteq P$ が成り立つ.

続いて, D 公理 (4.13) に相当する

$$P; (R+1) \subseteq P \quad \Longrightarrow \quad P; (\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)) \subseteq P \tag{4.15}$$

が成り立つことを示す．このため，いくつかの補題を与える.

補題 4.12. $P, R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ とするとき，$P; (R+1) \subseteq P$ ならば, 次の 2 つが成り立つ.

- $\bigcup_{n\geq 0} P; (R+1)^n \subseteq P$.

- $n \geq 0$ について, $\varphi_R^n(0) \subseteq (R+1)^n$.

証明. $P;(R+1) \subseteq P$ を仮定する.

$\bigcup_{n\geq 0} P;(R+1)^n \subseteq P$ を示すには，$P;(R+1)^n \subseteq P$ を n についての数学的帰納法で示せばよい．

$n=0$ のとき $P;(R+1)^0 = P;1 = P$．$P;(R+1)^n \subseteq P$ を仮定すると，

$$P;(R+1)^{n+1} = P;(R+1)^n \subseteq P;(R+1) \subseteq P.$$

$\varphi_R^n(0) \subseteq (R+1)^n$ を n についての数学的帰納法で示す.

$n=0$ のとき $\varphi_R^0(0) = 0 \subseteq 1 = (R+1)^0$．$\varphi_R^n(0) \subseteq (R+1)^n$ を仮定すると

$$\begin{aligned}
\varphi_R^{n+1}(0) &= R;\varphi_R^n(0)+1 \\
&\subseteq R;(R+1)^n+1 \\
&\subseteq R;(R+1)^n+1;(R+1)^n \\
&= (R+1);(R+1)^n \\
&= (R+1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

補題 4.12 を用いて, 次が成り立つ.

補題 4.13. $P, R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ とするとき, $P;(R+1) \subseteq P$ ならば,

$$P;R^* \subseteq \bigcup_{n\geq 0} P;(R+1)^n.$$

証明. $(x,W) \in P;R^*$ を仮定する. P が有限的であることから, 有限集合 Y が存在して,

$$(x,Y) \in P \wedge \forall y \in Y.\exists k.(y,W) \in \varphi_R^k(0)$$

$Y = \emptyset$ のとき $(x,W) \in P$ は明らか. $Y \neq \emptyset$ のとき 各 $y \in Y$ について 自然数 k_y が存在して, $(y,W) \in \varphi_R^{k_y}(0)$ である. そこで $k_0 = sup\{k_y \mid y \in Y\}$ とおけば, 補題

3.11 より $i \leq j \implies \varphi_R^i(0) \subseteq \varphi_R^j(0)$ なので,

$$\forall y \in Y.(y, W) \in \varphi_R^{k_0}(0).$$

従って, $(x, W) \in P; \varphi_R^{k_0}(0)$. 補題 4.12 より $\varphi_R^{k_0}(0) \subseteq (R+1)^{k_0}$ なので, $P; \varphi_R^{k_0}(0) \subseteq P; (R+1)^{k_0}$. 従って，$(x, W) \in \bigcup_{n \geq 0} P; (R+1)^n$ がいえる. □

上の補題 と補題 4.12 を用いれば, 式 (4.15) が成り立つことがわかる.

命題 4.14. $P, R \in \mathsf{UMRel}_f(A)$ について, $P; (R+1) \subseteq P \implies P; R^* \subseteq P$ が成り立つ.

命題 4.9, 4.11, 4.14 により，$\mathsf{UMRel}_f(A)$ が緩クリーニ代数の演算 * に関する公理と D 公理をみたすことを示した.

以上により，$\mathsf{UMRel}_f(A)$ が D 公理をみたす緩クリーニ代数をなすことが示された.

定義 4.15. D 公理をみたす緩クリーニ代数 $(K, +, \cdot, ^*, 0, 1)$ を，**単口木クリーニ代数** [16] という.

この定義から直ちに次が成り立つ.

定理 4.16. 組 $(\mathsf{UMRel}_f(A), \cup, ;, ^*, 0, 1)$ は，単口木クリーニ代数である.

例 2.1，2.2 に現れる二項多重関係はいずれも有限的なので，これらは $\mathsf{UMRel}_f(A)$ においても 0 公理，+公理の反例である.

また，Kozen [5] のクリーニ代数では, D 公理：$P; (R+1) \subseteq P \implies P; R^* \subseteq P$ の代わりに,

$$P; R \subseteq P \implies P; R^* \subseteq P \tag{4.16}$$

という, より強い条件になっている. 以下の例により, $\mathsf{UMRel}_f(A)$ がこの条件をみたさないことを言及しておく.

例 4.2. 例 3.1 における $R \in \mathsf{UMRel}(A)$ は $R;R \subseteq R$ をみたす．この R について，$(y,\{z\}) \in R;(R+1)$ である．さらに，

$$R;(R+1) = R;\varphi_R^2(0) \subseteq R;(\bigcup_{n\geq 0}\varphi_R^n(0)) = R;R^*$$

より $(y,\{z\}) \in R;R^*$．しかし, $(y,\{z\}) \notin R$．従って，$R;R \subseteq R$ であるが $R;R^* \not\subseteq R$ となり不成立.

4.3.2 D 公理, 0 公理をみたす緩クリーニ代数

上向きに閉じた二項多重関係が 0 公理をみたすための条件として, 次の定義を加える.

定義 4.17. 集合 A 上の二項多重関係 R が, 任意の $x \in A$ について $(x,\emptyset) \notin R$ であるとき, R は**全域的**（*total*）であるという.

最小関係 0, ; に関する単位元 1 は明らかに全域的である. 集合 A 上の全域的かつ有限的な上向きに閉じた二項多重関係全体を $\mathsf{UMRel}_f^+(A)$ と表記する.

$\mathsf{UMRel}_f^+(A)$ は, 演算 $\bigcup$, ; について閉じている. 従って, それらの組み合わせで定められた演算 * についても閉じているということになる.

組 $\mathsf{UMRel}_f^+(A)$ は D 公理と 0 公理をみたす緩クリーニ代数である.

定義 4.18. D 公理と 0 公理をみたす緩クリーニ代数 $(K,+,\cdot,^*,0,1)$ を，**確率クリーニ代数** [7, 9] という.

この定義から直ちに次が成り立つ.

定理 4.19. 組 $(\mathsf{UMRel}_f^+(A),+,;,^*,0,1)$ は，確率クリーニ代数である.

クリーニ代数であるためには，+公理と式 (4.16) をみたす必要があるが，例 2.2, 4.2 に現れる二項多重関係は有限的かつ全域的なので，これらは $\mathsf{UMRel}_f^+(A)$ につ

いての+公理と式 (4.16) の反例でもある．従って，$\mathsf{UMRel}^{+}_{f}(A)$ もクリーニ代数であるとは限らない．

第 5 章　まとめ

本論文では二項関係の拡張である二項多重関係について詳細に議論し，上向きに閉じた二項多重関係全体が緩クリーニ代数の関係モデルであることを示した．同時に，緩クリーニ代数に公理を追加した代数についてもその関係モデルを与えた．単口木クリーニ代数の関係モデルは有限的な上向きに閉じた二項多重関係全体，確率クリーニ代数の関係モデルは全域的で有限的な上向きに閉じた二項多重関係全体である．表 5.1 はこれらの結果をまとめたものである．今回明らかにした関係モデルは今後，緩クリーニ代数の拡張を考察する際の足掛かりになることが期待される．

上記の議論のために集合 A 上の上向きに閉じた二項多重関係全体 $\mathsf{UMRel}(A)$ とその中で有限的なものだけを集めて得られる $\mathsf{UMRel}_f(A)$，および上向きに閉じた有限二項多重関係の全体 $\mathsf{UMRel}_F(A)$ のそれぞれにおける反射的推移的閉包の構成方法について調査し，次のような結果を得た．

- $\mathsf{UMRel}(A)$ において元 R の反射的推移的閉包は $\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ によって構成することができる．しかし，$\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ は必ずしも R の反射的推移的閉包になるとは限らない．

- $\mathsf{UMRel}_f(A)$ において元 R の反射的推移的閉包は $\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ によって構成することができる [3]．$\mathsf{UMRel}_f(A)$ は，$\bigcap$ に関して閉じていないことから，$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ を考えることはできないが，元の族の $\subseteq$ に関する下限が存在し，これを用いた構成 $\bigwedge\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ によっても R の反射的推移的閉包を与えることができる．

表 5.1: 各クリーニ代数の関係モデル

	$\mathsf{UMRel}(A)$	$\mathsf{UMRel}_f(A)$	$\mathsf{UMRel}_f^+(A)$
緩クリーニ代数	○	○	○
単口木クリーニ代数	×	○	○
確率クリーニ代数	×	×	○
クリーニ代数	×	×	×

表 5.2: 各二項多重関係の反射的推移的閉包の構成

	$\mathsf{UMRel}(A)$	$\mathsf{UMRel}_f(A)$	$\mathsf{UMRel}_F(A)$
$\bigwedge\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$	–	○	–
$\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$	○	×	○
$\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$	×	○	○
$\bigcup_{n\geq 0} R^n$	×	×	×

- $\mathsf{UMRel}_F(A)$ において元 R の反射的推移的閉包は $\bigcap\{\xi \mid \varphi_R(\xi) \subseteq \xi\}$ および $\bigcup_{n\geq 0} \varphi_R^n(0)$ によって構成することができる．

表 5.2 は以上を表にまとめたものである．加えて，$\mathsf{UMRel}_f(A)$ と $\mathsf{UMRel}_F(A)$ の間に合成とこれに関する単位元，包含関係 $\subseteq$ に関する最小元，最大元，上限および下限を保存する全単射を具体的に与えた．$\mathsf{UMRel}_f(A)$ と $\mathsf{UMRel}_F(A)$ における反射的推移的閉包の構成に関する新しい結果は，この全単射を用いることによって得られたものである．

Goranko [4] と Venema [20] はゲーム論理に現れる演算を代数的な視点から研究し，反復を含まないゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルを与えたが，反復を

含むゲーム論理の健全かつ完全な代数モデルは未だに明らかになっていない．今回，ゲーム論理の反復に相当する反射的推移的閉包の構成方法が明らかになったことで，反復を含む健全かつ完全な代数モデルの構築が期待される．

本論文で与えた確率クリーニ代数の関係モデルは，確率システムの検証等に有用だと考えられる．McIver ら [8] による確率システムの関係的モデルを用いた検証には，確率の計算に由来する複雑な数値計算による多大な計算コストが要求されるため，実用的な規模の問題を扱うのは困難である．彼女らの手法を実用化するには，モデルの抽象化が不可欠である．McIver らのモデルは確率クリーニ代数をなすこと [7, 9] から我々の与えた確率クリーニ代数の関係モデルを基に，確率システムの抽象化技法を構築できると予想される．この予想に沿って，McIver らのモデルを抽象化する技法を構築し，実用的な問題に適用可能な検証方法を提案することを，今後の研究課題としたい．

謝辞

古澤仁先生には，本稿執筆にあたり数多くの助言を与えて下さったこと，ならびにこの 2 年間細やかなご指導を賜りましたことを深く感謝致します.

また，本論文の審査を担当して頂いた酒井宦先生，新森修一先生に深く御礼申し上げます.

西澤弘毅先生（鳥取環境大学）は本研究内容について多くの有益なコメントを下さいました．また，2008 年 8 月には共同研究のため東北大学へお招きいただいた上，科学研究費補助金 若手研究（B）「モデル検査における抽象化の再利用」（課題番号 20700004）より旅費の援助を頂きました．心より感謝申し上げます.

與倉昭治先生には 2008 年 4 月ドイツで開催された国際会議にて本研究の口頭発表を行なった折，科学研究費補助金 基盤研究（C）「代数多様体のトポロジーおよびその周辺に関する総合的研究」（課題番号 19540094）より旅費の援助を頂きました．貴重な機会を与えて下さったことに深く感謝いたします.

青山究先生には学部 4 年次にご指導いただき，その後も多くの示唆を与えて下さったことを深く御礼申し上げます.

他諸先生方，学科事務室，他研究室の皆様には，折に触れて様々な形でサポートして頂きましたことを心より御礼申し上げます．また，毎週のセミナーで議論に参加してくれた研究室の後輩諸子にも感謝いたします.

最後に，これまで精神的にも経済的にも支え続けてくれた家族，温かい励ましを送ってくれた友人たちに感謝します.

参考文献

[1] Ernie Cohen. Separation and Reduction. In R. Backhouse and J.N. Oliveira, editors, *Mathematics of Program Construction, volume 1837 of LNCS*, pp. 45–59. Springer, 2000.

[2] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, second edition, 2002.

[3] H. Furusawa, N. Tsumagari, and K. Nishizawa. A Non-Probabilistic Relational Model of Probabilistic Kleene Algebras. In R. Berghammer, B. Möller, and G. Struth, editors, *Relations and Kleene Algebra in Computer Science, volume 4988 of LNCS*, pp. 110–122. Springer, 2008.

[4] Valentin Goranko. The Basic Algebra of Game Equivalences. *Studia Logica 75(2)*, pp. 221–238, 2003.

[5] Dexter Kozen. A Completeness Theorem for Kleene Algebras and the Algebra of Regular Events. *Information and Computation, 110*, pp. 366–390, 1994.

[6] C. Martin, S. Curtis, and I. Rewitzky. Modelling Nondeterminism. In Dexter Kozen, editor, *Mathematics of Program Construction, volume 3125 of LNCS*, pp. 228–251. Springer, 2004.

[7] Annabelle McIver, Ernie Cohen, and Carroll Morgan. Using Probabilistic

Kleene Algebra for Protocol Verification. In R.A. Schmidt, editor, *Relations and Kleene Algebra in Computer Science, volume 4136 of LNCS*, pp. 296–310. Springer, 2006.

[8] Annabelle McIver and Carroll Morgan. *Abstraction, Refinement and Proof for Probabilistic Systems*. Springer, 2005.

[9] Annabelle McIver and Tjark Weber. Towards Automated Proof Support for Probabilistic Distributed Systems. In G. Sutcliffe and A. Voronkov, editors, *Proceedings of Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, volume 3835 of LNAI*, pp. 534–548. Springer, 2005.

[10] Bernhard Möller. Lazy Kleene Algebra. In Dexter Kozen, editor, *Mathematics of Program Construction, volume 3125 of LNCS*. Springer, 2004.

[11] 小野寛晰. 情報代数. 情報数学講座第 2 巻. 共立出版, 1994.

[12] Rohit Parikh. The Logic of Games. *Annals of Discrete Mathematics 24*, pp. 111–140, 1985.

[13] M. Pauly and R. Parikh. Game Logic - An Overview. *Studia Logica 75(2)*, pp. 165–182, 2003.

[14] I. Rewitzky and C. Brink. Monotone Predicate Transformers as Up-Closed Multirelations. In R.A. Schmidt, editor, *Relations and Kleene Algebra in Computer Science, volume 4136 of LNCS*, pp. 311–327. Springer, 2006.

[15] Ingrid Rewitzky. Binary Multirelations. In H. de Swart, E. Orlowska, G. Schmidt, and M. Roubens, editors, *Theory and Applications of Relational Structures as Knowledge Instruments, volume 2929 of LNCS*, pp. 256–271. Springer, 2003.

[16] T. Takai and H. Furusawa. Monodic Tree Kleene Algebra. *Relations and Kleene Algebra in Computer Science, volume 4136 of LNCS*, pp. 402–416, 2006.

[17] N. Tsumagari, K. Nishizawa, and H. Furusawa. Multirelational Model of Lazy Kleene Algebra. In *Relations and Kleene Algebra in Computer Science, PhD Programme at RelMiCS10/AKA5, Frauenwörth, Germany, April 7 - April 11 2008, Proceedings, Technical Report, Institut für Informatik, 2008-04*, pp. 73–77. Universität Augsburg, 2008.

[18] 津曲紀宏, 西澤弘毅, 古澤仁. 二項多重関係の反射的推移的閉包. 日本ソフトウェア科学会第 25 回大会論文集（CD-ROM）, 2008.

[19] 津曲紀宏, 西澤弘毅, 古澤仁. 二項多重関係の反射的推移的閉包. 火の国情報シンポジウム論文集（CD-ROM）, 2008.

[20] Yde Venema. Representation of Game Algebras. *Studia Logica 75(2)*, pp. 239–256, 2003.

[21] J. von Wright. From Kleene algebra to refinement algebra. In E. Boiten and B. Möller, editors, *Mathematics of Program Construction, volume 2386 of LNCS*, pp. 233–262. Springer, 2002.