群上のセルオートマトンの特徴付けについて

著者	鈴木 敬太
URL	http://hdl.handle.net/10232/26260

修士論文

群上のセルオートマトン
の特徴付けについて

鈴木敬太

鹿児島大学大学院 理工学研究科

数理情報科学専攻 博士前期課程

平成28年2月

目次

第1章　はじめに

本論文では，Tullio Ceccherini-Silberstein と Michel Coornaert による著書 Cellular Automata and Groups [7] の第 1 章にもとづき群上のセルオートマトンの，群や位相，一様構造などの諸概念を用いた特徴付けについて述べ，特徴付けに用いられる性質たちの相互関係について議論する．

文献 [3] によるとセルオートマトンの理論は 1950 年代に John von Neumann と Stanislaw Ulam によって考え出されたものであり，格子状に並んだセルの状態が局所的に定義される写像によって離散時間で変化していく計算モデルである．例えば，交通流や災害発生時の避難流動などのシミュレーションに用いられる．応用に重点を置いたセルオートマトンの教科書としては文献 [3] 以外にも [8, 14] などがある．文献 [13] にもセルオートマトンの応用例が紹介されている．これらの応用には整数によってセルを番号付けした 1 次元セルオートマトンや整数の組によってセルを番号付けした 2 次元セルオートマトンでアルファベットが有限な場合を考えることが多い．Stephen Wolfram は 1 次元セルオートマトンが偏微分方程式の離散的近似解を与え，さらにはセルオートマトンにより自然界の様々なモデル化が可能であることを指摘した [5, 6]．また John Horton Conway が考案したライフゲームは 2 次元セルオートマトンの有名な例である．セルの番号付けを整数や整数の組に限定せず，セルが一般の群の元によって番号付けられたものを群上のセルオートマトンとよび，アルファベットの有限性も仮定しない．要するに群上のセルオートマトンは通常よく知られたセルオートマトンの一般化といえる．

文献 [7] には，群上のセルオートマトンの，位相，一様構造および群の諸概念を

用いた大域的な性質による特徴付けが 3 つ紹介されている．本論文では命題 3.6，定理 3.23，定理 3.28 がこれにあたる．本研究ではこれらの命題，定理に用いられる性質たちの相互関係を，文献 [7] で示されている証明を詳細化したり，性質たちの間に依存関係がないことを裏付ける反例を明示することによって整理した．

　本論文の構成は以下のとおりである．第 2 章では以後の議論に必要となる位相，一様構造および群の基本的な概念やその性質を紹介する．位相については文献 [9, 10]，一様構造については文献 [1, 2, 4]，群については文献 [11, 12, 15] を参考にした．第 3 章ではセルオートマトンの定義と特徴付けについて述べる．第 4 章では群上のセルオートマトンの特徴付けに用いられる性質たちの相互関係を整理し，これを本論文のまとめとする．なお文献 [7] の第 1 章で紹介されている群上のセルオートマトンの性質のなかで特徴付けとは直接関係のない性質についても学んだので，これらをまとめたものを付録とした．

第2章　準備

ここでは，今後の議論に必要となる位相，一様構造および群に関する基本的な概念とそれらの性質について説明する．

2.1　位相

X を集合とし，$\mathscr{O}$ を X の部分集合の族とする．$\mathscr{O}$ が次の 3 つの条件

- $\emptyset \in \mathscr{O}, X \in \mathscr{O}$
- $U_1, U_2 \in \mathscr{O} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathscr{O}$
- $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{O} \implies \bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{O}$

を満たすとき，$\mathscr{O}$ を X の**位相**といい，組 $(X, \mathscr{O})$ を**位相空間**という．例えば，族 $\{\emptyset, X\}$ は集合 X の位相であり，これを X の**密着位相**とよぶ．また，べき集合 2^X も X の位相であり，これを X の**離散位相**とよぶ．位相空間 $(X, \{\emptyset, X\})$ は**密着空間**とよばれ，$(X, 2^X)$ は**離散空間**とよばれる．考えている位相が文脈から明らかな場合は，組 $(X, \mathscr{O})$ と明示せず，単に X を位相空間とよぶこともある．

$(X, \mathscr{O})$ を位相空間とするとき，$\mathscr{O}$ に属する X の部分集合を X の**開集合**とよぶ．また，補集合 V^c が $\mathscr{O}$ に属する X の部分集合 V を X の**閉集合**とよぶ．X の元 x を含む開集合を x の**（開）近傍**[1] という．x の近傍の全体を $\mathscr{N}(x)$ で表し，これを x

[1] 本論文では文献 [10] と同様に開近傍のことを単に近傍とよぶことにする．

の近傍系という．近傍系 $\mathscr{N}(x)$ の部分族 $\mathscr{N}^*(x)$ は

$$U \in \mathscr{N}(x) \implies \exists V \in \mathscr{N}^*(x). V \subseteq U$$

をみたすとき x の基本近傍系とよばれる．

　$\mathscr{O}_1$ と $\mathscr{O}_2$ をともに X の位相とするとき，$\mathscr{O}_1 \subseteq \mathscr{O}_2$ であることを $\mathscr{O}_1$ は $\mathscr{O}_2$ より弱い（粗い）といったり，$\mathscr{O}_2$ は $\mathscr{O}_1$ より強い（細かい）といったりする．あきらかに，密着位相はどんな位相よりも弱い位相であり，逆に離散位相はどんな位相よりも強い位相である．

　位相空間 $(X,\mathscr{O})$ の相異なる 2 点 $x,y \in X$ に対して x の近傍 U と y の近傍 V が存在して，

$$U \cap V = \emptyset$$

が成り立つとき，ハウスドルフ空間とよぶ．離散空間 $(X,2^X)$ においては，相異なる $x,y \in X$ に対して $\{x\},\{y\}$ はそれぞれ x,y の近傍であり，かつ $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ なので離散空間はハウスドルフ空間である．

　位相空間 $(X,\mathscr{O}_X)$ と $Y \subseteq X$ とする．このとき

$$\mathscr{O}_Y = \{G \cap Y : G \in \mathscr{O}_X\}$$

と定めると，$\mathscr{O}_Y$ は Y の 1 つの位相構造であり，$(Y,\mathscr{O}_Y)$ を $(X,\mathscr{O}_X)$ の部分（位相）空間とよぶ．また，$\mathscr{O}_Y$ を Y における $\mathscr{O}_X$ の相対位相という．

　$(X,\mathscr{O})$ において，

- $X = U \cup V$
- $U \cap V = \emptyset$
- $U \neq \emptyset$ かつ $V \neq \emptyset$

を満たす U と V の組を X を分割する開集合の組という．X を分割する開集合の組が存在しないとき X を連結空間とよぶ．逆に X を分割する開集合の組が存在する

とき X を**非連結空間**とよぶ．また X の部分空間 Y が連結空間であるとき，Y は X の**連結な集合**であるという．任意の $x \in X$ に対して，x を含む X の連結な集合全体の和集合を x の**連結成分**といい，任意の $x \in X$ に対して，x の連結成分が 1 点集合のとき X を**完全非連結**という．

例 **2.1.** X を離散空間とすると，$\{x\}$ は X の連結な集合である．$Y \subseteq X$ に x および x と異なる X の元が少なくとも 1 つ含まれているとすると，

- $Y = (Y \setminus \{x\}) \cup \{x\}$
- $(Y \setminus \{x\}) \cap \{x\} = \emptyset$
- $Y \setminus \{x\} \neq \emptyset$ かつ $\{x\} \neq \emptyset$

であるので，Y は連結でない．したがって，x を含む連結な集合で元の個数が 2 以上のものは存在しない．よって x の連結成分は 1 点集合である．以上より，離散空間は完全非連結であることがわかる．

位相空間 X の部分集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ をみたすとき，X の**被覆**という．とくに $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が開集合の族のとき**開被覆**という．位相空間 X の各開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対しある有限部分集合 $B \subseteq \Lambda$ が存在し $(U_\lambda)_{\lambda \in B}$ も X の開被覆であるとき X を**コンパクト位相空間**という．例えば X が有限集合のとき位相空間 $(X, \mathscr{O}_X)$ はコンパクト位相空間である．また離散空間 $(X, 2^X)$ がコンパクトであることと X が有限であることは同値である．

X の部分集合の族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ は任意の有限部分集合 $B \subseteq \Lambda$ に対して $\bigcap_{\lambda \in B} A_\lambda \neq \emptyset$ であるとき**有限交叉性をもつ**という．補集合を考えることにより，X がコンパクトであることと X の各閉集合族 $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が有限交叉性をもつならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ となることは同値であることがわかる．

補題 2.2. X を集合とし，$\mathscr{M}$ を X の部分集合族で有限交叉性をもつものとすると，集合族の集まり

$$\mathfrak{X} = \{\mathscr{A} : \mathscr{M} \subseteq \mathscr{A},\ \mathscr{A} \text{ は有限交叉性をもつ}\}$$

には集合の包含関係に関する極大元 $\mathscr{X}$ が存在し，次をみたす.

1. $\mathscr{X}$ は有限交叉性をもつ
2. $N \in \mathscr{X}$ に対し $N \subseteq A$ ならば $A \in \mathscr{X}$
3. $N_1, N_2 \in \mathscr{X}$ ならば $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{X}$
4. 任意の $N \in \mathscr{X}$ に対し $A \cap N \neq \emptyset$ ならば $A \in \mathscr{X}$

証明. まず，ツォルンの補題を用いて $\mathfrak{X}$ が包含関係に関する極大元をもつことを示す．$\{\mathscr{A}_\gamma \in \mathfrak{X} \colon \gamma \in \Gamma\}$ を全順序集合とする．このとき

$$\mathscr{A}_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{A}_\gamma$$

とすると，$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{A}_\Gamma$ なので，$\mathscr{A}_\Gamma$ がこの全順序集合の上限になることを示すには $\mathscr{A}_\Gamma$ が有限交叉性をもつことを示せば十分である．$\mathscr{A}_\Gamma$ の定義より，

$$M_1, M_2, \cdots, M_s \in \mathscr{A}_\Gamma$$

に対して $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s \in \Gamma$ が存在して

$$M_1 \in \mathscr{A}_{\gamma_1}, M_2 \in \mathscr{A}_{\gamma_2}, \cdots, M_s \in \mathscr{A}_{\gamma_s}$$

となる．ここで，$\{\mathscr{A}_{\gamma_1}, \mathscr{A}_{\gamma_2}, \cdots, \mathscr{A}_{\gamma_s}\}$ は全順序かつ有限集合なので最大限 $\mathscr{A}_{\gamma_{s_0}}$ をもち，これは

$$M_1, M_2, \cdots, M_s \in \mathscr{A}_{\gamma_{s_0}}$$

をみたす．$\mathscr{A}_{\gamma_{s_0}}$ は有限交叉性をもつので $\bigcap_{i=1}^{s} M_i \neq \emptyset$ となり $\mathscr{A}_\Gamma$ は有限交叉性をもつ．以上により $\mathscr{A}_\Gamma$ が $\{\mathscr{A}_\gamma \in \mathfrak{X} \colon \gamma \in \Gamma\}$ の上限であることがいえた．したがって，ツォルンの補題より $\mathfrak{X}$ には包含関係に関する極大元 $\mathscr{X}$ が存在する．次に $\mathscr{X}$ の性質 1 から 4 を示す.

1. $\mathscr{X} \in \mathfrak{X}$ であることから $\mathscr{X}$ は有限交叉性をもつ.

2. $N \in \mathscr{X}$ かつ $N \subseteq A$ とすると，有限部分集合 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{X} \cup \{A\}$ に対し，$(\mathscr{B} \setminus \{A\}) \cup \{N\}$ は $\mathscr{X}$ の有限部分集合なので 1 より $\bigcap((\mathscr{B} \setminus \{A\}) \cup \{N\}) \neq \emptyset$ となり，
$$\bigcap((\mathscr{B} \setminus \{A\}) \cup \{N\}) \subseteq \bigcap((\mathscr{B} \setminus \{A\}) \cup \{A\}) = \bigcap \mathscr{B}$$
より $\bigcap \mathscr{B} \neq \emptyset$ がいえる．したがって $\mathscr{X} \cup \{A\} \in \mathfrak{X}$ かつ $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X} \cup \{A\}$ であるが $\mathscr{X}$ は $\mathfrak{X}$ の極大元であることから $A \in \mathscr{X}$ となる.

3. $N_1, N_2 \in \mathscr{X}$ とすると，有限部分集合 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{X} \cup \{N_1 \cap N_2\}$ に対し，$(\mathscr{B} \setminus \{N_1 \cap N_2\}) \cup \{N_1, N_2\}$ は $\mathscr{X}$ の有限部分集合なので 1 より
$$\bigcap((\mathscr{B} \setminus \{N_1 \cap N_2\}) \cup \{N_1, N_2\}) \neq \emptyset$$
となり，
$$\bigcap((\mathscr{B} \setminus \{N_1 \cap N_2\}) \cup \{N_1, N_2\}) = \bigcap((\mathscr{B} \setminus \{N_1 \cap N_2\}) \cup \{N_1 \cap N_2\}) = \bigcap \mathscr{B}$$
より $\bigcap \mathscr{B} \neq \emptyset$ がいえる．したがって $\mathscr{X} \cup \{N_1 \cap N_2\} \in \mathfrak{X}$ かつ $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X} \cup \{N_1 \cap N_2\}$ であるが $\mathscr{X}$ は $\mathfrak{X}$ の極大元であることから $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{X}$ となる.

4. 任意の $N \in \mathscr{X}$ に対して $A \cap N \neq \emptyset$ とすると，有限部分集合 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{X}$ に対し，3 より $\bigcap \mathscr{B} \in \mathscr{X}$ なので $(\bigcap \mathscr{B}) \cap A \neq \emptyset$ となる．したがって $\mathscr{X} \cup \{A\} \in \mathfrak{X}$ かつ $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{X} \cup \{A\}$ であるが $\mathscr{X}$ は $\mathfrak{X}$ の極大元であることから $A \in \mathscr{X}$ となる.

□

$(X,\mathscr{O}_X)$ と $(Y,\mathscr{O}_Y)$ をそれぞれ位相空間とし，f を X から Y への写像とする．Y の任意の開集合 U の f による逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合であるとき，f は**連続写像**とよばれる．定義より 2 つの連続写像の合成は連続写像である．

命題 2.3. X,Y を位相空間，$f\colon X\to Y$ を連続写像とし，$A\subseteq X$ を X の連結な集合とするとき，$f(A)$ は Y の連結な集合である．

証明. まず，$f(A)$ は Y の部分集合なので相対位相を考えることで，部分空間となる．$f(A)$ を連結な集合でないと仮定すると，$G\neq\emptyset, H\neq\emptyset$ であり，$f(A)=G\cup H$，$G\cap H=\emptyset$ となるような Y の開集合 G,H が存在する．ここで，$U=f^{-1}(G)$，$V=f^{-1}(H)$ とおくと，f は連続だったので，U,V は X の開集合であり，$U\cap A$，$V\cap A$ は部分空間 A の開集合である．

$$
\begin{aligned}
A\subseteq f^{-1}(f(A)) &= f^{-1}(G\cup H)\\
&= f^{-1}(G)\cup f^{-1}(H)\\
&= U\cup V
\end{aligned}
$$

より，$A=(U\cap A)\cup(V\cap A)$ であることがわかる．また，

$$
\begin{aligned}
U\cap V &= f^{-1}(G)\cap f^{-1}(H)\\
&= f^{-1}(G\cap H)\\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

となるので，$(U\cap A)\cap(V\cap A)=\emptyset$ となり，A が連結であることに反する．したがって，$f(A)$ は Y の連結な集合である． □

X を集合とし，$(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする．ここで，各 λ に対し Y_λ の位相を $\mathscr{O}_\lambda$ とし，f_λ を X から Y_λ への写像とする．すべての f_λ を連続写像とするような最弱位相 $\mathscr{T}$ を X の $(f_\lambda\colon X\to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に付随する**始位相**とよぶ．実際，始位相 $\mathscr{T}$ は次のようにして与えることができる．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F} &= \{{f_\lambda}^{-1}(U)\colon U\in\mathscr{O}_\lambda,\ \lambda\in\Lambda\}\\
\mathscr{B} &= \{\textstyle\bigcap\mathscr{A}\colon \mathscr{A}\subseteq\mathscr{F},\ \mathscr{A}\text{ は有限}\}
\end{aligned}
$$

$$\mathscr{T} \;=\; \{\bigcup \mathscr{A} \colon \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}\}$$

するとあきらかに，$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ が成り立つ．ここで与えた X の部分集合族 $\mathscr{T}$ が本当に X の $(f_\lambda \colon X \to Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に付随する始位相になっていることを確認する．

命題 2.4. 集合 X と X の部分集合の族 $\mathscr{T}$ の組 $(X, \mathscr{T})$ は位相空間である．

証明. 位相空間の 3 つの条件を確かめる．

（$\emptyset \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$）$\emptyset \in \mathscr{O}_\lambda$ であり，かつ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ なので，$\emptyset \in \mathscr{F}$ が成り立つ．また，$Y_\lambda \in \mathscr{O}_\lambda$ であり，かつ f_λ は X から Y_λ への写像であるので $X = {f_\lambda}^{-1}(Y_\lambda)$ である．ゆえに $X \in \mathscr{F}$ である．$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{T}$ だったので，$\emptyset \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$ が成り立つ．

（$U_1, U_2 \in \mathscr{T} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}$）$U_1, U_2 \in \mathscr{T}$ とすると, ある $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \subseteq \mathscr{B}$ が存在して，$U_1 = \bigcup \mathscr{A}_1, U_2 = \bigcup \mathscr{A}_2$ となる．したがって，

$$\begin{aligned} U_1 \cap U_2 &= (\bigcup \mathscr{A}_1) \cap (\bigcup \mathscr{A}_2) \\ &= \bigcup \{A_1 \cap A_2 \colon A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2\} \\ &= \bigcup \{\bigcap \{A_1, A_2\} \colon A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2\} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\{\bigcap \{A_1, A_2\} \colon A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2\} \subseteq \mathscr{B}$ を示せばよい．ここで $B \in \{\bigcap \{A_1, A_2\} \colon A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2\}$ とすると，ある $A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_2$ が存在して，$B = A_1 \cap A_2$．いま，$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \subseteq \mathscr{B}$ なので，この A_1, A_2 に対して，$\mathscr{F}$ のある有限部分族 $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2 \subseteq \mathscr{F}$ が存在して，$A_1 = \bigcap \mathscr{C}_1, A_2 = \bigcap \mathscr{C}_2$ とできる．したがって，

$$B = (\bigcap \mathscr{C}_1) \cap (\bigcap \mathscr{C}_2) = \bigcap (\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2)$$

が成り立つ．$\mathscr{C}_1$ と $\mathscr{C}_2$ は $\mathscr{F}$ の有限部分族なので，$\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ も $\mathscr{F}$ の有限部分族である．したがって，$B \in \mathscr{B}$．以上により，$U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}$ となる．

（$\mathscr{U} \subseteq \mathscr{T} \implies \bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{T}$）$\mathscr{U} \subseteq \mathscr{T}$ とし，$U \in \mathscr{U}$ とすると，ある $\mathscr{A}_U \subseteq \mathscr{B}$ が存在して，$U = \bigcup \mathscr{A}_U$ となる．したがって

$$\begin{aligned} \bigcup \mathscr{U} &= \bigcup \{\bigcup \mathscr{A}_U \colon U \in \mathscr{U}\} \\ &= \bigcup (\bigcup \{\mathscr{A}_U \colon U \in \mathscr{U}\}) \end{aligned}$$

が成り立つ．各 $U \in \mathscr{U}$ に対して $\mathscr{A}_U \subseteq \mathscr{B}$ より $\bigcup\{\mathscr{A}_U : U \in \mathscr{U}\} \subseteq \mathscr{B}$ なので $\bigcup\mathscr{U} \in \mathscr{T}$ となる． □

命題 2.5. $\mathscr{T}$ は $f_\lambda : X \to Y_\lambda$ を連続写像とするような最弱な位相である．

証明. （連続性）$U \in \mathscr{O}_\lambda$ とする．すると，$f_\lambda{}^{-1}(U) \in \mathscr{F}$ であり，$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{T}$ だったので，$f_\lambda{}^{-1}(U) \in \mathscr{T}$ である．したがって，連続である．
（最弱性）$\mathscr{O}$ を X の位相とし，$f_\lambda : X \to Y_\lambda$ が $(X, \mathscr{O})$ から $(Y_\lambda, \mathscr{O}_\lambda)$ への連続写像だとする．このとき，$\mathscr{T} \subseteq \mathscr{O}$ を示す．$U \in \mathscr{T}$ とすると，$\mathscr{B}$ のある部分族 $\mathscr{A}$ が存在して，$U = \bigcup\mathscr{A}$ と表せる．よって，$U \in \mathscr{O}$ を示すためには，$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{O}$ を示せばよい．$B \in \mathscr{B}$ とすると，$\mathscr{F}$ のある有限部分族 $\mathscr{C}$ が存在して，$B = \bigcap\mathscr{C}$ と表せる．よって，$B \in \mathscr{O}$ を示すためには，$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{O}$ を示せばよい．$C \in \mathscr{F}$ とすると，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在し，$V \in \mathscr{O}_\lambda$ が存在して，$C = f_\lambda{}^{-1}(V)$ と表せる．ここで，仮定より，$f_\lambda{}^{-1}(V) \in \mathscr{O}$ である．よって $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{O}$ が成り立つ．以上により，$\mathscr{T} \subseteq \mathscr{O}$ がいえた． □

以上により集合族 $\mathscr{T}$ が X の $(f_\lambda : X \to Y_\lambda)_{\lambda_\Lambda}$ に付随する始位相であることが確認できた．

$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし，$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とする．このとき，X から X_λ への射影 $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ に付随する始位相を**直積位相**とよび，位相空間 X を**直積空間**とよぶ．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，X_λ が離散空間であるとき直積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を**直積離散空間**といいその位相を**直積離散位相**という．

命題 2.6. ハウスドルフ空間の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ はハウスドルフ空間である．

証明. $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と $y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ をそれぞれ X の相異なる元とすると，ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して，$x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$ である．ここで，$x_{\lambda_0}, y_{\lambda_0} \in X_{\lambda_0}$ であり，X_{λ_0} はハウスドルフ空間だった．ゆえに，x_{λ_0} と y_{λ_0} に対して，$U \cap V = \emptyset$ を満たすようなそれぞれの

近傍 U と V が存在する．それぞれ射影 π_{λ_0} に関する逆像を考えると，${\pi_{\lambda_0}}^{-1}(U)$ と ${\pi_{\lambda_0}}^{-1}(V)$ は X の開集合でしかも $x \in {\pi_{\lambda_0}}^{-1}(U)$ かつ $y \in {\pi_{\lambda_0}}^{-1}(V)$ であり，

$$\begin{aligned} {\pi_{\lambda_0}}^{-1}(U) \cap {\pi_{\lambda_0}}^{-1}(V) &= {\pi_{\lambda_0}}^{-1}(U \cap V) \\ &= {\pi_{\lambda_0}}^{-1}(\emptyset) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

なので X はハウスドルフ空間である．　□

命題 2.7. 完全非連結である位相空間の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は完全非連結である．

証明. $C \subseteq X$ を連結な集合とし，$x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を C の相異なる元とすると，ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$ である．π_{λ_0} を X から X_{λ_0} への射影だとすると，命題 2.3 より，$\pi_{\lambda_0}(C)$ は X_{λ_0} の連結な集合であり，X_{λ_0} は完全非連結なので，$\pi_{\lambda_0}(C)$ は 1 点集合である．ところが，$\{x_{\lambda_0}, y_{\lambda_0}\} \subseteq \pi_{\lambda_0}(C)$ である．これは X_{λ_0} が完全非連結であることに矛盾する．ゆえに C は 1 点集合となる．したがって，X は完全非連結である．　□

定理 2.8 (チコノフの定理). コンパクト空間の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ はコンパクトである．

証明. $\mathscr{M}$ を X の閉集合の族で有限交叉性をもつものとすると，補題 2.2 より $\mathfrak{X} = \{\mathscr{A} : \mathscr{M} \subseteq \mathscr{A}, \mathscr{A}$ は有限交叉性をもつ$\}$ には極大元 $\mathscr{X}$ が存在する．$\mathscr{X} \in \mathfrak{X}$ なので有限部分集合 $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{X}$ に対し $\bigcap \mathscr{B} \neq \emptyset$ となる．つまり，ある $x \in X$ が存在し $x \in \bigcap \mathscr{B}$ となる．この x に対し $\pi_\lambda(x) = x_\lambda$ とおくと，任意の $B \in \mathscr{B}$ に対し $x_\lambda \in \pi_\lambda(B)$ なので，$\bigcap_{B\in\mathscr{B}} \pi_\lambda(B) \neq \emptyset$ となる．したがって $\{\pi_\lambda(A) : A \in \mathscr{X}\}$ は有限交叉性をもつ．ここで $\overline{\pi_\lambda(A)} = \{x \in X_\lambda : \forall V \in \mathscr{N}(x). V \cap \pi_\lambda(A) \neq \emptyset\}$ と定めると，定義より $\pi_\lambda(A) \subseteq \overline{\pi_\lambda(A)}$ となるので，$\{\overline{\pi_\lambda(A)} : A \in \mathscr{X}\}$ も有限交叉性をもつ．X_λ はコンパクトだったので $\bigcap_{A\in\mathscr{X}} \overline{\pi_\lambda(A)} \neq \emptyset$ となり，選択公理よりある $x \in X$ が存在して $\pi_\lambda(x) \in \bigcap_{A\in\mathscr{X}} \overline{\pi_\lambda(A)}$

が成り立つ．この x に対して $U \in \mathcal{N}(x)$ とすると，ある $\lambda_1, \cdots \lambda_n \in \Lambda$ が存在して開集合 $U_{\lambda_1} \subseteq X_{\lambda_1}, \cdots, U_{\lambda_n} \subseteq X_{\lambda_n}$ がとれてしかも

$$x \in \pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$$
$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \subseteq U$$

がともに成り立つ．ここで $\lambda_j \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ とすると，$\pi_{\lambda_j}(x) \in U_{\lambda_j}$ であり，かつ任意の $A \in \mathscr{X}$ に対し $\pi_{\lambda_j}(x) \in \overline{\pi_{\lambda_j}(A)}$ となり，$U_{\lambda_j} \in \mathcal{N}(\pi_{\lambda_j}(x))$ なので $U_{\lambda_j} \cap \pi_{\lambda_j}(A) \neq \emptyset$ が成り立つ．つまり $\pi_{\lambda_j}^{-1}(U_{\lambda_j}) \cap A \neq \emptyset$ がいえる．補題 2.2 の 4 より各 $\lambda_j \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ に対し $\pi_{\lambda_j}^{-1}(U_{\lambda_j}) \in \mathscr{X}$ であり，3 より

$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \in \mathscr{X}$$

なので任意の $F \in \mathscr{M}$ に対し，$\mathscr{M} \subseteq \mathscr{X}$ であることから，

$$(\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})) \cap F \in \mathscr{X}$$

が成り立つ．さらに

$$\pi_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \subseteq U$$

より $U \cap F \neq \emptyset$ となる．ここで $\overline{F} = \{z \in X : \forall V \in \mathcal{N}(z), V \cap F \neq \emptyset\}$ と定めると，$x \in U$ より $x \in \overline{F}$ である．さらに，$a \in \overline{F}$ とすると，F は閉集合であることから $a \in F^c$ ならば $F^c \in \mathcal{N}(a)$ となり，矛盾 $F^c \cap F \neq \emptyset$ が導かれるので，$a \in F$，つまり $\overline{F} = F$ がいえる．以上のことから任意の $F \in \mathscr{M}$ に対し $x \in F$ が成り立ち $\bigcap \mathscr{M} \neq \emptyset$ となり X はコンパクト空間となる．

□

A, G を集合とし，G から A への写像全体のなす集合

$$A^G = \prod_{g \in G} A = \{x \colon G \to A\}$$

と，$g \in G$ 毎に $x \in A^G$ を $\pi_g(x) = x(g)$ に対応させる射影 $\pi_g\colon A^G \to A$ の族 $(\pi_g\colon A^G \to A)_{g\in G}$ を考えることにする．A が離散空間であるとき，A^G の $(\pi_g\colon A^G \to A)_{g\in G}$ に付随する始位相は A^G の直積離散位相である．これまでの議論により，A^G の直積離散位相 $\mathscr{T}_{A^G}$ は，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_{A^G} &= \{\pi_g{}^{-1}(U)\colon U \in 2^A,\ g \in G\} \\
\mathscr{B}_{A^G} &= \{\textstyle\bigcap\mathscr{A}\colon \mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}_{A^G},\ \mathscr{A}\ \text{は有限}\} \\
\mathscr{T}_{A^G} &= \{\textstyle\bigcup\mathscr{A}\colon \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}_{A^G}\}
\end{aligned}
$$

によって構成されることがわかる．$\mathscr{F}_{A^G}$ の元を A^G の**シリンダ**とよぶことにすると直積離散空間 A^G の開集合とは A^G の有限個のシリンダの共通部分たちのなす族の和集合であらわすことができる集合であるといえる．以後，特に位相を指定しない限り，位相空間 A^G は直積離散空間をあらわすことにする．

$a \in A$ と $g \in G$ に対して，集合 $C(g,a)$ を

$$
C(g,a) = \pi_g{}^{-1}(\{a\}) = \{x \in A^G\colon x(g) = a\}
$$

と定め，A^G の**初等シリンダ**とよぶ．A の任意の部分集合 U に対して $\pi_g{}^{-1}(U)$ は A^G の開集合であるので，A^G の初等シリンダは A^G の開集合である．また，

$$
x \in C(g,a)^c \iff x \notin C(g,a) \iff x(g) \neq a \iff x \in \pi_g^{-1}(\{a\}^c)
$$

より，A^G の初等シリンダは A^G の閉集合でもある．さらに，初等シリンダが開集合であることから，A^G の有限個の初等シリンダの共通部分たちのなす族の和集合は A^G の開集合である．一方，$\mathscr{C}$ を有限個のシリンダの族とすると $G \times 2^A$ の有限部分集合 $\mathscr{S}$ が存在して，$\mathscr{C} = \{\pi_g^{-1}(V)\colon (g,V) \in \mathscr{S}\}$ となる．いま，$\Omega_{\mathscr{S}} = \{g \in G\colon (g,V) \in \mathscr{S}\}$ とし，$\bigcap\mathscr{C}$ の各元 x ごとに $C_x = \bigcap_{g\in\Omega_{\mathscr{S}}} C(g,x(g))$ とすると，$x \in C_x$ なので，$\bigcap\mathscr{C} \subseteq \bigcup_{x\in\bigcap\mathscr{C}} C_x$ が成り立つ．また，

$$
\begin{aligned}
y \in C_x &\iff \forall g \in \Omega_{\mathscr{S}}.\ y(g) = x(g) \\
&\implies \forall (g,V) \in \mathscr{S}.\ y(g) \in V \quad (x \in \textstyle\bigcap\mathscr{C}\ \text{より})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall (g,V)\in\mathscr{S}.\, y\in\pi_g^{-1}(V)\\
&\iff y\in\bigcap\mathscr{C}
\end{aligned}
$$

より，$\bigcup_{x\in\bigcap\mathscr{C}} C_x\subseteq\bigcap\mathscr{C}$ が成り立つ．よって，$\Omega_{\mathscr{S}}$ が有限集合であることに気を付けると，A^G の有限個のシリンダの共通部分は，A^G の有限個の初等シリンダの共通部分たちのなす族の和集合としてあらわすことができるということがわかる．したがって，A^G の任意の開集合は A^G の有限個の初等シリンダの共通部分たちのなす族の和集合としてあらわすことができる．ようするに，A^G の部分集合 U について，

- U が A^G の開集合であることと，
- U が有限個の初等シリンダの共通部分たちのなす族の和集合としてあらわすことができること

は同値である．

$x\in A^G$ と $\Omega\subseteq G$ に対して，Ω の元 g を $x(g)$ に対応させる Ω から A への写像を $x|_\Omega$ と書き，x の Ω への制限という．$x\in A^G$ と G の有限部分集合 Ω に対して A^G の部分集合 $V(x,\Omega)$ を

$$V(x,\Omega)=\{y\in A^G\colon\ x|_\Omega=y|_\Omega\}$$

と定める．ここで，

$$
\begin{aligned}
z\in\{y\in A^G\colon\ x|_\Omega=y|_\Omega\} &\iff \forall g\in\Omega.\, x(g)=z(g)\\
&\iff z\in\textstyle\bigcap_{g\in\Omega} C(g,x(g))
\end{aligned}
$$

より，$V(x,\Omega)=\bigcap_{g\in\Omega} C(g,x(g))$ が成り立つ．

命題 2.9. $x\in A^G$ に対して A^G の部分集合の族

$$\{V(x,\Omega)\colon\ \Omega \text{は} G \text{の有限部分集合}\}$$

は x の基本近傍系である．

証明. U を $x \in A^G$ を含む A^G の開集合とすると，有限個の初等シリンダの共通部分の族 $\mathscr{C}$ が存在して，$U = \bigcup \mathscr{C}$ である．$x \in U$ と仮定したので，$C \in \mathscr{C}$ が存在して，$x \in C$ となる．さらに，有限個の初等シリンダの族 $\mathscr{D}$ が存在して，$C = \bigcap \mathscr{D}$ である．$x \in C$ なので，各 $C(g,a) \in \mathscr{D}$ に対し，$x \in C(g,a)$ となり，$x(g) = a$ が成り立つ．したがって，

$$\Omega = \{g \in G \colon C(g,a) \in \mathscr{D}\}$$

とすれば，Ω は有限集合であり，

$$\begin{aligned} & C(h,x(h)) \in \{C(g,x(g)) \colon g \in \Omega\} \\ \iff & h \in \Omega \\ \iff & \exists a \in A.\, C(h,a) \in \mathscr{D} \\ \iff & C(h,x(h)) \in \mathscr{D} && (x(h) = a \text{ より}) \end{aligned}$$

より $\mathscr{D} = \{C(g,x(g)) \colon g \in \Omega\}$ なので，

$$V(x,\Omega) = \bigcap_{g \in \Omega} C(g,x(g)) = \bigcap \mathscr{D} \subseteq U$$

となる．よって，族 $\{V(x,\Omega) \colon \Omega \text{は} G \text{の有限部分集合}\}$ は点 x の基本近傍系である． □

命題 2.10. A^G はハウスドルフかつ完全非連結である．

証明. A は離散空間であるので，ハウスドルフかつ完全非連結である．$A^G = \prod_{g \in G} A$ であるので，命題2.6と命題2.7より，A^G はハウスドルフかつ完全非連結である． □

命題 2.11. A が有限集合ならば A^G はコンパクトである．

証明. A が有限集合ならば $(A, 2^A)$ はコンパクトなので，定理2.8より A^G はコンパクトである． □

2.2　一様空間

X を集合とする．二項関係 $\Delta_X \subseteq X \times X$ を

$$(x,y) \in \Delta_X \iff x = y$$

と定め，**恒等関係**とよぶ．また，X 上の二項関係 $R \subseteq X \times X$ と $y \in X$ に対し $R[y] \subseteq X$ を

$$x \in R[y] \iff (x,y) \in R$$

と定める．関係 R に対し関係 $R^{-1} \subseteq X \times X$ を

$$(x,y) \in R^{-1} \iff (y,x) \in R$$

と定め，R の**逆関係**とよぶ．とくに $R = R^{-1}$ のとき R は**対称である**という．2 つの関係 $R, S \subseteq X \times X$ に対し関係 $R;S \subseteq X \times X$ を

$$(x,y) \in R;S \iff \exists z \in X.\ (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S$$

と定め，R と S の**合成**とよぶ．

X 上の二項関係の族（$X \times X$ の部分集合族）$\mathscr{U}$ が

- $V \in \mathscr{U} \implies \Delta_X \subseteq V$
- $V \in \mathscr{U}$ かつ $V \subseteq V' \subseteq X \times X \implies V' \in \mathscr{U}$
- $V \in \mathscr{U}$ かつ $W \in \mathscr{U} \implies V \cap W \in \mathscr{U}$
- $V \in \mathscr{U} \implies V^{-1} \in \mathscr{U}$
- $V \in \mathscr{U} \implies \exists W \in \mathscr{U}.\ W;W \subseteq V$

をみたすとき $\mathscr{U}$ を X の**一様構造**といい，組 $(X, \mathscr{U})$ を**一様空間**という．また $\mathscr{U}$ の元を X の**近縁**とよぶ．例えば $\{X \times X\}$ は X の一様構造である．また Δ_X を含むよう

な関係をすべて集めた族も X の一様構造であり，これを**離散一様構造**とよぶ．また X の一様構造が離散一様構造であるときその一様空間を**離散一様空間**とよぶ．$\{X\times X\}$ は X 上の最小の一様構造であり，また離散一様構造は X 上の最大の一様構造である．考えている一様構造が文脈から明らかな場合は，組 $(X,\mathscr{U})$ と明示せず，単に X を一様空間とよぶこともある．

$(X,\mathscr{U})$ を一様空間とする．X の部分集合の族 $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ を

$$O\in\mathscr{O}_{\mathscr{U}} \iff \forall x\in O.\ \exists V\in\mathscr{U}.\ V[x]=O$$

と定める．すると次が成り立つ．

命題 2.12. $(X,\mathscr{O}_{\mathscr{U}})$ は位相空間をなす．

証明. $x\in X$ に対し $(X\times X)[x]=X$ であることから $X\in\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ であり，かつ $\emptyset$ からは元が取れないことから $\emptyset\in\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ である．また $U_1,U_2\in\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ とし，$x\in U_1\cap U_2$ とすると，ある近縁 $V_1,V_2\in\mathscr{U}$ が存在して $U_1=V_1[x]$ かつ $U_2=V_2[x]$ であるので $U_1\cap U_2=V_1[x]\cap V_2[x]$ となり，さらに

$$\begin{aligned}
V_1[x]\cap V_2[x] &= \{y\in X\colon (y,x)\in V_1\}\cap\{y\in X\colon (y,x)\in V_2\}\\
&= \{y\in X\colon (y,x)\in V_1 \text{かつ} (y,x)\in V_2\}\\
&= \{y\in X\colon (y,x)\in V_1\cap V_2\}\\
&= (V_1\cap V_2)[x]
\end{aligned}$$

であることと $V_1\cap V_2$ は X の近縁であることから $U_1\cap U_2\in\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ が成り立つ．また $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ とし，$x\in\bigcup\mathscr{A}$ とすると，ある $A\in\mathscr{A}$ が存在して $x\in A$ であり，x に対して近縁 $V\in\mathscr{U}$ が存在して $A=V[x]$ をみたす．

$$V'=V\cup\{(y,x)\colon y\in\bigcup\mathscr{A}\}$$

とおくと，$V\subseteq V'\subseteq X\times X$ より $V'\in\mathscr{U}$ であり，$V'[x]=\bigcup\mathscr{A}$ となるので $\bigcup\mathscr{A}\in\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ が成り立つ．　□

この $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ を $\mathscr{U}$ に付随する位相とよぶ．

例 2.13.

1. $(X, \{X \times X\})$ に付随する位相は近縁が $X \times X$ のみであることから X と空集合だけからなる X の部分集合の族となるので密着位相である．

2. X を離散一様空間とすると，Δ_X は X の近縁であることから $x \in \{x\}$ に対し $\Delta_X[x] = \{x\}$ となり，$\{x\}$ は X の開集合となる．したがって離散一様構造に付随する位相は離散位相である．

$(X, \mathscr{U})$ を一様空間とする．$x \in X$ ごとに

$$\mathscr{U}_x = \{V[x] : V \in \mathscr{U}\}$$

と定める．$\mathscr{U}$ が上向きに閉じていることから $\mathscr{U}_x$ も上向きに閉じていることがわかる．同様にして，$\mathscr{U}_x$ が $\cap$ について閉じていることもわかる．さらに，

$$\begin{aligned} O \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}} &\iff \forall x \in O.\ \exists V \in \mathscr{U}.\ V[x] = O \\ &\iff \forall x \in O.\ O \in \mathscr{U}_x \end{aligned}$$

である．

命題 2.14. $N \subseteq X$ が $x \in X$ の近傍であるための必要十分条件は

$$\exists V \in \mathscr{U}.\ N = \{y \in X : V[x] \in \mathscr{U}_y\}$$

が成り立つことである．

証明. $N \subseteq X$ を $x \in X$ の近傍とすると，$x \in N$ より $V \in \mathscr{U}$ が存在して $V[x] = N$ である．この $V \in \mathscr{U}$ に対し

$$\begin{aligned} z \in \{y \in X : V[x] \in \mathscr{U}_y\} &\iff V[x] \in \mathscr{U}_z \\ &\iff \exists W \in \mathscr{U}.\ V[x] = W[z] \\ &\iff \exists W \in \mathscr{U}.\ W[z] = N \\ &\iff z \in N \end{aligned}$$

が成り立つので，$N=\{y\in X: V[x]\in\mathscr{U}_y\}$ となる．逆に $V\in\mathscr{U}$ に対して $N=\{y\in X: V[x]\in\mathscr{U}_y\}$ とすると，$z\in N$ に対し $W\in\mathscr{U}$ が存在して $V[x]=W[z]$ である．$W\in\mathscr{U}$ より $W'\in\mathscr{U}$ が存在して $W';W'\subseteq W$ となり $W'\subseteq W';W'$ であることから $W'[z]\subseteq W[z]$ が成り立つ．$a\in W'[z]$ に対し $W'[a]$ を考える．$b\in W'[a]$ とすると，$(b,a)\in W'$ であり $(a,z)\in W'$ だったので $(b,z)\in W';W'$ となる．したがって $(b,z)\in W$ なので $b\in W[z]$ となり $W'[a]\subseteq W[z]$ が成り立つ．ここで $\mathscr{U}_a$ は $\subseteq$ に関して上向きに閉じていたので $W[z]\in\mathscr{U}_a$ となる．今 $V[x]=W[z]$ なので $V[x]\in\mathscr{U}_a$ となり $a\in N$ である．したがって $W'[z]\subseteq N$ となり $\mathscr{U}_z$ も $\subseteq$ に関して上向きに閉じていたことから $N\in\mathscr{U}_z$ が成り立つ．以上のことから N は開集合であり，さらに $V[x]\in\mathscr{U}_x$ であることから $x\in N$ がいえるので N は $x\in X$ の近傍である． □

$\mathscr{U}$ を X 上の一様構造とする．$x\in X$ と $V\in\mathscr{U}$ に対し，

$$\begin{aligned} z\in\{y\in X: V[x]\in\mathscr{U}_y\} &\iff V[x]\in\mathscr{U}_z \\ &\iff \exists W\in\mathscr{U}.\, V[x]=W[z] \\ &\implies z\in V[x] \end{aligned}$$

となるので $\{y\in X: V[x]\in\mathscr{U}_y\}\subseteq V[x]$ が成り立つ．

$\mathscr{U}$ を X 上の一様構造とする．$Y\subseteq X$ とし，$\mathscr{U}_Y=\{V\cap(Y\times Y): V\in\mathscr{U}\}$ とすると，$\mathscr{U}_Y$ は Y 上の一様構造となる．この一様構造を $\mathscr{U}$ に誘導された Y 上の一様構造という．$\mathscr{U}$ に付随する X の位相を $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$，$\mathscr{U}_Y$ に付随する Y の位相を $\mathscr{O}_{\mathscr{U}_Y}$ とすると，

$$\begin{aligned} & A\in\mathscr{O}_{\mathscr{U}_Y} \\ \iff & \forall x\in A.\ \exists V\in\mathscr{U}_Y.\, V[x]=A \\ \iff & \forall x\in A.\ \exists W\in\mathscr{U}.\, (W\cap(Y\times Y))[x]=A \\ \iff & \forall x\in A.\ \exists W\in\mathscr{U}.\, \{y\in X: (y,x)\in W\cap(Y\times Y)\}=A \\ \iff & \forall x\in A.\ \exists W\in\mathscr{U}.\, \{y\in X: (y,x)\in W\}\cap Y=A \\ \iff & \forall x\in A.\ \exists W\in\mathscr{U}.\, W[x]\cap Y=A \\ \iff & \exists O\subseteq X.\ \forall x\in O.\ \exists W\in\mathscr{U}.\, W[x]=O \text{ かつ } O\cap Y=A \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \forall x \in A.\ \exists W \in \mathscr{U}.\ \{y \in X : (y,x) \in W\} \cap Y = A \\
&\iff \forall x \in A.\ \exists W \in \mathscr{U}.\ W[x] \cap Y = A \\
&\iff \exists O \subseteq X.\ \forall x \in O.\ \exists W \in \mathscr{U}.\ W[x] = O \text{ かつ } O \cap Y = A \\
&\iff \exists O \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}}.\ O \cap Y = A \\
&\iff A \in \{U \cap Y : U \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}}\}
\end{aligned}
$$

となるので

$$\mathscr{O}_{\mathscr{U}_Y} = \{U \cap Y : U \in \mathscr{O}_{\mathscr{U}}\}$$

となる．よって $\mathscr{U}_Y$ に付随する Y の位相は Y おける $\mathscr{O}_{\mathscr{U}}$ の相対位相である．

$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ が各 $W \in \mathscr{U}$ に対してある $V \in \mathscr{B}$ が存在して $V \subseteq W$ をみたすとき $\mathscr{B}$ を $\mathscr{U}$ の**基本近縁系**という．

命題 2.15. X を集合，$\mathscr{B}$ を $X \times X$ の部分集合の族で空でないものとする．$\mathscr{B}$ が X 上の（ある一つの）一様構造の基本近縁系であることと $\mathscr{B}$ が次の 4 つをみたすことは同値である．

- $V \in \mathscr{B} \implies \Delta_X \subseteq V$
- $V \in \mathscr{B}$ かつ $W \in \mathscr{B} \implies \exists U \in \mathscr{B}.\ U \subseteq V \cap W$
- $V \in \mathscr{B} \implies \exists W \in \mathscr{B}.\ W \subset V^{-1}$
- $V \in \mathscr{B} \implies \exists W \in \mathscr{B}.\ W ; W \subset V$

証明. $(X, \mathscr{U})$ を一様空間とし，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{U}$ の基本近縁系と仮定する．

- $V \in \mathscr{B}$ とすると，$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ より $V \in \mathscr{U}$ なので $\Delta_X \subseteq V$ である．
- $V, W \in \mathscr{B}$ とすると，$V, W \in \mathscr{U}$ なので $V \cap W \in \mathscr{U}$ となり $\mathscr{B}$ が基本近縁系であることからある $U \in \mathscr{B}$ が存在して $U \subseteq V \cap W$ である．

- $V \in \mathscr{B}$ とすると，$V \in \mathscr{U}$ なので $V^{-1} \in \mathscr{U}$ となり $\mathscr{B}$ が基本近縁系であることからある $W \in \mathscr{B}$ が存在して $W \subseteq V^{-1}$ である．

- $V \in \mathscr{B}$ とすると，$V \in \mathscr{U}$ でありかつ $\mathscr{B}$ が基本近縁系であることからある $U \in \mathscr{U}$ が存在して $U;U \subseteq V$ となり，その U に対してある $W \in \mathscr{B}$ が存在して $W \subseteq U$ であることから $W;W \subseteq U;U \subseteq V$ が成り立つ．

逆に $\mathscr{B}$ が4つの条件をみたすと仮定し，$X \times X$ の部分集合の族 $\mathscr{U}$ を

$$V \in \mathscr{U} \iff \exists W \in \mathscr{B}.\, W \subseteq V$$

と定める．

- $V \in \mathscr{U}$ とすると，ある $W \in \mathscr{B}$ が存在して $W \subseteq V$ なので $\Delta_X \subseteq V$ である．

- $V \in \mathscr{U}$ かつ $V \subseteq V' \subseteq X \times X$ とすると，ある $W \in \mathscr{B}$ が存在して $W \subseteq V \subseteq V'$ なので $V' \in \mathscr{U}$ である．

- $V_1, V_2 \in \mathscr{U}$ とすると，ある $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ が存在して $U_1 \subseteq V_1$ かつ $U_2 \subseteq V_2$ なので $U_1 \cap U_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ となり，さらに $U \in \mathscr{B}$ が存在して $U \subseteq U_1 \cap U_2$ となる．したがってこの $U \in \mathscr{B}$ に対して $U \subseteq V_1 \cap V_2$ が成り立つので $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{U}$ である．

- $V \in \mathscr{U}$ とすると，ある $W \in \mathscr{B}$ が存在して $W \subseteq V$ となる．ここで $W^{-1} \subseteq V^{-1}$ であり，さらにある $U \in \mathscr{B}$ が存在して $U \subseteq W^{-1}$ となる．したがってこの $U \in \mathscr{B}$ に対して $U \subseteq V^{-1}$ が成り立つので $V^{-1} \in \mathscr{U}$ である．

- $V \in \mathscr{U}$ とすると，ある $W \in \mathscr{B}$ が存在して $W \subseteq V$ となる．ここである $U \in \mathscr{B}$ が存在して $U;U \subseteq W$ であり，かつ $U \subseteq U$ なので $U \in \mathscr{U}$ でありかつ $U;U \subseteq V$ をみたす．

以上のことからこの $\mathscr{U}$ は $\mathscr{B}$ を基本近縁系にもつ一様構造である．　□

X と Y を一様空間とし，写像 $f\colon X \to Y$ を考える．$X \times X$ から $Y \times Y$ への写像 $(f \times f)$ を $(x_1, x_2) \in X \times X$ に対し $(f \times f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$ と定める．Y の各近縁 W に対して X の近縁 V が存在して $(f \times f)(V) \subseteq W$ が成り立つとき $f\colon X \to Y$ は**一様連続**であるという．

$\mathscr{U}$ を X の一様構造，$\mathscr{B}$ を $\mathscr{U}$ の基本近縁系とし，$\mathscr{U}'$ を Y の一様構造，$\mathscr{B}'$ を $\mathscr{U}'$ の基本近縁系とする．写像 $f\colon X \to Y$ を考えると，

$$
\begin{aligned}
& f \text{ は一様連続} \\
\iff\ & \forall W \in \mathscr{U}'.\ \exists V \in \mathscr{U}.\ (f \times f)(V) \subseteq W \\
\implies\ & \forall U \in \mathscr{B}'.\ \exists V \in \mathscr{U}.\ (f \times f)(V) \subseteq U \quad (\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{U}' \text{ より}) \\
\implies\ & \forall U \in \mathscr{B}'.\ \exists O \in \mathscr{B}.\ (f \times f)(O) \subseteq U \quad (\mathscr{B} \text{ は } \mathscr{U} \text{ の基本近縁系})
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
& \forall U \in \mathscr{B}'.\ \exists O \in \mathscr{B}.\ (f \times f)(O) \subseteq U \\
\implies\ & \forall W \in \mathscr{U}'.\ \exists O \in \mathscr{B}.\ (f \times f)(O) \subseteq W \quad (\mathscr{B}' \text{ は } \mathscr{U}' \text{ の基本近縁系}) \\
\implies\ & \forall W \in \mathscr{U}'\ \exists O \in \mathscr{U}.\ (f \times f)(O) \subseteq W \quad (\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U} \text{ より}) \\
\iff\ & f \text{ は一様連続}
\end{aligned}
$$

なので，写像 $f\colon X \to Y$ が一様連続であることと各 $U \in \mathscr{B}'$ に対し $O \in \mathscr{B}$ が存在して $(f \times f)(O) \subseteq U$ をみたすことは同値である．

$f\colon X \to Y$ を一様連続とし，W を Y の近縁とすると，X の近縁 V が存在して $(f \times f)(V) \subseteq W$ となるので，この逆像を考えると

$$V \subseteq (f \times f)^{-1}((f \times f)(V)) \subseteq (f \times f)^{-1}(W)$$

が成り立ち $(f \times f)^{-1}(W)$ は X の近縁となる．逆に Y の近縁 W に対し $(f \times f)^{-1}(W)$ が X の近縁であるとき，X の基本近縁系の元 V が存在して $V \subseteq (f \times f)^{-1}(W)$ となるので，

$$(f \times f)(V) \subseteq (f \times f)((f \times f)^{-1}(W)) \subseteq W$$

が成り立ち f は一様連続となる．以上のことから $f\colon X\to Y$ が一様連続であることと Y の近縁 W に対し $(f\times f)^{-1}(W)$ が X の近縁になることは同値である．

命題 2.16. X,Y を一様空間とし，$f\colon X\to Y$ を一様連続写像とすると，それぞれの一様構造に付随する位相に関して f は連続写像となる．

証明．$f\colon X\to Y$ を一様連続とし，U を Y の開集合とする．$x\in f^{-1}(U)$ とすると $f(x)\in U$ であり，U が Y の開集合であることから Y の近縁 W が存在して $W[f(x)]=U$ となる．ここで f は一様連続だったので $(f\times f)^{-1}(W)$ は X の近縁である．$(f\times f)^{-1}(W)=V'$ とおく．$z\in f(V'[x])$ とすると，$y\in V'[x]$ が存在し $f(y)=z$ である．$y\in V'[x]$ より $(y,x)\in(f\times f)^{-1}(W)$ となり，$(f(y),f(x))\in W$ が成り立つ．したがって $z\in W[f(x)]$ となり $f(V'[x])\subseteq W[f(x)]$ となる．よって

$$V'[x]\subseteq f^{-1}(f(V'[x]))\subseteq f^{-1}(U)$$

なので $V=V'\cup\{(y,x)\colon y\in f^{-1}(U)\}$ とすると，$V[x]=f^{-1}(U)$ が成り立つことから $f^{-1}(U)$ は X の開集合である．□

補題 2.17. X をコンパクト一様空間とし，$(\Omega_i)_{i\in I}$ を X 上の開被覆とする．このとき X の近縁 Λ が存在して各 $x\in X$ に対し，ある $i\in I$ が存在して $\Lambda[x]\subseteq\Omega_i$ が成り立つ．

証明．$(\Omega_i)_{i\in I}$ は X の開被覆なので各 $x\in X$ に対し，ある $i(x)\in I$ が存在し $x\in\Omega_{i(x)}$ となる．$\Omega_{i(x)}$ は x の近傍なので X の近縁 V_x が存在し $V_x[x]=\Omega_{i(x)}$ となる．ここで X の近縁 W_x が存在して $W_x;W_x\subseteq V_x$ である．命題 2.14 より各 $\{y\in X\colon W_x[x]\in\mathscr{U}_y\}$ は x の近傍だったので $(\{y\in X\colon W_x[x]\in\mathscr{U}_y\})_{x\in X}$ は X の開被覆となる．ここで X はコンパクトだったので X の有限部分集合 A が存在し $X=\bigcup_{a\in A}\{y\in X\colon W_a[a]\in\mathscr{U}_y\}$ となり，各 $x\in X$ に対して $\{y\in X\colon W_x[x]\in\mathscr{U}_y\}\subseteq W_x[x]$ だったので $\bigcup_{a\in A}W_a[a]=X$ が成り立つ．$\Lambda=\bigcap_{a\in A}W_a$ とおく．$x\in X$ とすると，ある $a\in A$ が存在して $x\in W_a[a]$ と

なるので $(x,a)\in W_a$ である．$y\in\Lambda[x]$ とすると，$(y,x)\in\Lambda$ であり，今 $\Lambda\subseteq W_a$ なので $(y,x)\in W_a$ となる．よって $(y,a)\in W_a;W_a$ であり，さらに $W_a;W_a\subseteq V_a$ であることから $(y,a)\in V_a$ となり $y\in V_a[a]$ が成り立つ．よって $\Lambda[x]\subseteq V_a[a]$ となり，$\Lambda[x]\subseteq\Omega_{i(a)}$ である． □

定理 2.18. X をコンパクト一様空間，Y を一様空間とする．このとき $f\colon X\to Y$ がそれぞれの一様構造に付随する位相に関して連続ならば一様連続である．

証明. W を Y の近縁とすると，Y の近縁 V が存在して $V;V\subseteq W$ となる．$S=V\cap V^{-1}$ とおくと，S は対称であり，かつ $S\subseteq V$ より $S;S\subseteq W$ をみたす．$x\in X$ とすると，$\{y\in Y : S[f(x)]\in\mathscr{U}_y\}$ は $f(x)\in Y$ の近傍であり，f が連続なので $f^{-1}(\{y\in Y : S[f(x)]\in\mathscr{U}_y\})$ は X の開集合となる．$\Omega_x=f^{-1}(\{y\in Y : S[f(x)]\in\mathscr{U}_y\})$ とおくと，

$$f(\Omega_x)=f(f^{-1}(\{y\in Y : S[f(x)]\in\mathscr{U}_y\}))\subseteq\{y\in Y : S[f(x)]\in\mathscr{U}_y\}$$

が成り立つ．また $(\Omega_x)_{x\in X}$ は $x\in\Omega_x$ であることから X の開被覆なので補題 2.17 より X の近縁 Λ が存在し，各 $y\in X$ に対しある $x\in X$ が存在して $\Lambda[y]\subseteq\Omega_x$ となる．$(x_1,x_2)\in\Lambda$ とすると，$x_2\in X$ に対し $\Lambda[x_2]\subseteq\Omega_a$ をみたす $a\in X$ が存在するので $x_1,x_2\in\Lambda[x_2]$ であることから $x_1,x_2\in\Omega_a$ となる．$f(x_1),f(x_2)\in f(\Omega_a)$ より $S[f(a)]\in\mathscr{U}_{f(x_1)},S[f(a)]\in\mathscr{U}_{f(x_2)}$ が成り立つので $(f(x_1),f(a)),(f(x_2),f(a))\in S$ であり，S が対称であることから $(f(a),f(x_2))\in S$ となり $(f(x_1),f(x_2))\in S;S$ である．以上のことから $(f\times f)(\Lambda)\subseteq S;S$ が成り立ち，$S;S\subseteq W$ であったことから $(f\times f)(\Lambda)\subseteq W$ となる． □

X を集合とし，$(Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を一様空間の族とする．ここで，各 λ に対し f_λ を X から Y_λ への写像とする．すべての f_λ が一様連続となるような最弱一様構造を X の $(f_\lambda\colon X\to Y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に付随する**始一様構造**とよぶ．

$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を一様空間の族とし，$X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ とする．このとき，X から X_λ への射影 $\pi_\lambda\colon X\to X_\lambda$ に付随する始一様構造を**直積一様構造**とよび，一様空間 X を直

積一様空間とよぶ．各 $\lambda\in\Lambda$ に対し，X_λ が離散一様空間であるとき直積一様空間 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ を**直積離散一様空間**といいその一様構造を**直積離散一様構造**という．

A,G を集合とし，G から A への写像全体のなす集合

$$A^G=\prod_{g\in G}A=\{x\colon\ G\to A\}$$

と，$g\in G$ 毎に $x\in A^G$ を $\pi_g(x)=x(g)$ に対応させる射影 $\pi_g\colon\ A^G\to A$ の族 $(\pi_g\colon\ A^G\to A)_{g\in G}$ を考えることにする．A が離散一様空間であるとき，A^G の $(\pi_g\colon\ A^G\to A)_{g\in G}$ に付随する始一様構造は A^G の直積離散一様構造である．以後，特に一様構造を指定しない限り，一様空間 A^G は直積離散一様空間をあらわすことにする．

$W_\Omega\subseteq A^G\times A^G$ を

$$W_\Omega=\{(x,y)\in A^G\times A^G\colon x|_\Omega=y|_\Omega\}$$

と定める．すると次が成り立つ．

命題 2.19. A^G 上の二項関係の族

$$\{W_\Omega\colon \Omega \text{は} G \text{の有限部分集合}\}$$

は A^G の一様構造の基本近縁系である．

証明. 命題 2.15 より $\{W_\Omega\colon \Omega\text{は} G \text{の有限部分集合}\}$ が 4 つの条件をみたしていることを示せばよい．

- Ω を G の有限部分集合とすると，$x|_\Omega=x|_\Omega$ より $(x,x)\in W_\Omega$ である．

- Ω,Ω' を G の有限部分集合とすると，

$$\begin{aligned}(z,w)\in W_\Omega\cap W_{\Omega'} &\iff (z,w)\in W_\Omega \text{かつ} (z,w)\in W_{\Omega'}\\ &\iff z|_\Omega=w|_\Omega \text{かつ} z|_{\Omega'}=w|_{\Omega'}\\ &\iff z|_{\Omega\cup\Omega'}=w|_{\Omega\cup\Omega'}\\ &\iff (z,w)\in W_{\Omega\cup\Omega'}\end{aligned}$$

が成り立つので，G の有限部分集合 $\Omega\cup\Omega'$ は $W_{\Omega\cup\Omega'}\subseteq W_\Omega\cap W_{\Omega'}$ をみたす．

- Ω を G の有限部分集合とすると，

$$\begin{aligned} W_\Omega^{-1} &= \{(y,x) \colon x|_\Omega = y|_\Omega\} \\ &= W_\Omega \end{aligned}$$

であることから $W_\Omega \subseteq W_\Omega^{-1}$ をみたす．

- Ω を G の有限部分集合とし，$(z,w) \in W_\Omega ; W_\Omega$ とすると，ある $x \in A^G$ が存在して $(z,x) \in W_\Omega$ かつ $(x,w) \in W_\Omega$ である．この x に対して $z|_\Omega = x|_\Omega$ かつ $x|_\Omega = w|_\Omega$ なので $z|_\Omega = w|_\Omega$ となり $(z,w) \in W_\Omega$ が成り立つ．したがって $W_\Omega ; W_\Omega \subseteq W_\Omega$ である．

以上のことから $\{W_\Omega \colon \Omega$は G の有限部分集合 $\}$ は基本近縁系である．□

また，位相空間 A^G の基本近傍系の元 $V(x,\Omega)$ は

$$\begin{aligned} & z \in V(x,\Omega) \\ \iff & z \in \{y \in A^G \colon x|_\Omega = y|_\Omega\} \\ \iff & x|_\Omega = z|_\Omega \\ \iff & (x,z) \in W_\Omega \\ \iff & z \in \{y \in A^G \colon (x,y) \in W_\Omega\} \end{aligned}$$

より一様空間 A^G の基本近縁系の元 W_Ω を用いて

$$V(x,\Omega) = \{y \in A^G \colon (x,y) \in W_\Omega\}$$

と表すことができる．

2.3　群

空でない集合 M とその上の二項演算子 $\cdot$ 零項演算子 1_M が M の任意の元 m,n,l に対し

- $(m \cdot n) \cdot l = m \cdot (n \cdot l)$
- $m \cdot 1_M = m = 1_M \cdot m$

をみたすとき組 $(M, \cdot, 1_M)$ を**モノイド**とよぶ．これ以降しばしば $(M, \cdot, 1_M)$ を省略して M と書いたりする．空でない集合 G とその上の二項演算子 $\cdot$ 単項演算子 $^{-1}$ 零項演算子 1_G が G の任意の元 g に対して $g \cdot g^{-1} = 1_G = g^{-1} \cdot g$ をみたしかつ組 $(G, \cdot, 1_G)$ がモノイドであるとき組 $(G, \cdot, ^{-1}, 1_G)$ を**群**とよぶ．これ以降しばしば $(G, \cdot, ^{-1}, 1_G)$ を省略して G と書いたり $a \cdot b$ を ab と略記したりする．

群 G において元 h が任意の $g \in G$ に対して $gh = g = hg$ をみたすとき $h = h1_G = 1_G$ である．1_G を G の**単位元**とよぶ．また元 g に対して g' が $gg' = 1_G = g'g$ をみたすとき $g' = g'1_G = g'(gg^{-1}) = (g'g)g^{-1} = 1_G g^{-1} = g^{-1}$ である．g^{-1} を g の**逆元**とよぶ．単位元の逆元は $1_G{}^{-1} = 1_G{}^{-1} 1_G = 1_G$ より単位元自身である．任意の $g, g' \in G$ に対して，$gg' = g'g$ をみたすような群を**可換群**とよぶ.

例 2.20. 1. 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は二項演算子 $+$ と単項演算子 $-$ 零項演算子 0 とともに可換群をなす.

2. G，G' を群とする．$G \times G'$ 上の二項演算子 $\cdot$ を $(g, g'), (h, h') \in G \times G'$ に対し

$$(g, g') \cdot (h, h') = (g \cdot h, g' \cdot h')$$

単項演算子 $^{-1}$ を $(g, g') \in G \times G'$ に対し

$$(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$$

零項演算子 $1_{G \times G'} \in G \times G'$ を

$$1_{G \times G'} = (1_G, 1_{G'})$$

とそれぞれ要素ごとに定めると組 $(G \times G', \cdot, ^{-1}, 1_{G \times G'})$ は群をなす.

3. 1,2 より，$\mathbb{Z}^2$ 上の二項演算子 $+$ を $(a,b),(a',b') \in \mathbb{Z}^2$ に対し
$$(a,b) +' (a',b') = (a+a', b+b')$$
単項演算子 $-$ を $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ に対し
$$-(a,b) = (-a,-b)$$
零項演算子 $0_{\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{Z}^2$ を
$$0_{\mathbb{Z}^2} = (0,0)$$
とそれぞれ要素ごとに定めると $(\mathbb{Z}^2,+,-,0_{\mathbb{Z}^2})$ は可換群をなす.

M_1, M_2 をモノイドとし，$\psi\colon M_1 \to M_2$ を写像とする．$\psi(1_{M_1}) = 1_{M_2}$ が成り立ち，かつ任意の $x,y \in M_1$ に対して $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ が成り立つとき ψ をモノイドの準同型という．準同型写像 ψ に対し，$Ker(\psi) = \{x \in M_1\colon \psi(x) = 1_{M_2}\}$ を ψ の核といい，$Im(\psi) = \{\psi(x)\colon x \in M_1\}$ を ψ の像という．G_1, G_2 を群とし，$\psi\colon G_1 \to G_2$ を写像とする．任意の $x,y \in G_1$ に対して $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ が成り立つとき ψ を群の準同型という．準同型写像 $\psi\colon G_1 \to G_2$ に関して $\psi(1_{G_1}) = \psi(1_{G_1}1_{G_1}) = \psi(1_{G_1})\psi(1_{G_1})$ となるので
$$\psi(1_{G_1}) = \psi(1_{G_1})\psi(1_{G_1})^{-1} = 1_{G_2}$$
が成り立つ．つまり準同型写像は単位元を保つ．よって群の準同型はモノイドの準同型でもある．また各 $g \in G$ に対し，$\psi(g)\psi(g^{-1}) = \psi(gg^{-1}) = \psi(1_G) = 1_{G_2}$ となるので
$$\psi(g)^{-1} = \psi(g)^{-1}1_{G_2} = \psi(g)^{-1}\psi(g)\psi(g^{-1}) = \psi(g^{-1})$$
が成り立つ．つまり準同型写像は逆元を保つ．$\psi\colon M_1 \to M_2$ がモノイドの準同型であり，かつ全単射のとき ϕ をモノイドの同型写像とよび，このとき M_1 と M_2 は同型であるという．$\psi\colon G_1 \to G_2$ が群の準同型であり，かつ全単射のとき ψ を群の同型とよび，このとき G_1 と G_2 は同型であるという.

M をモノイドとし，N を M の部分集合とする．N が次の 2 つの条件

- $m, n \in N \implies mn \in N$
- $1_M \in N$

をみたすとき N を M の**部分モノイド**という．G を群とし，H を G の部分集合とする．H が次の 2 つの条件

- $g, h \in H \implies gh \in H$
- $g \in H \implies g^{-1} \in H$

を満たすとき，H を G の**部分群**という．部分群 H において $g \in H$ とすると，$g^{-1} \in H$ であるので，これと $gg^{-1} = 1_G$ より $1_G \in H$ である．

例 2.21.
1. 群 G に対して $\{1_G\} \subseteq G$ や G 自身は G の部分群である．
2. n の倍数の和も -1 倍も n の倍数なので

$$n\mathbb{Z} = \{nm \in \mathbb{Z} \colon m \in \mathbb{Z}\}$$

は $\mathbb{Z}$ の部分群である．

3. $\psi \colon G_1 \to G_2$ を準同型写像とする．
   (a) $x, y \in Ker(\psi)$ ならば $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = 1_{G_2}1_{G_2} = 1_{G_2}$ となるので $xy \in Ker(\psi)$ であり，かつ $x \in Ker(\psi)$ に対して $\psi(x^{-1}) = \psi(x)^{-1} = {1_{G_2}}^{-1} = 1_{G_2}$ となるので $x^{-1} \in Ker(\psi)$ であるから $Ker(\psi)$ は G_1 の部分群である．
   (b) $x, y \in G_1$ に対し，$\psi(x), \psi(y) \in Im(\psi)$ であって $xy \in G_1$ かつ $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ より $\psi(x)\psi(y) \in Im(\psi)$ であり，$x \in G_1$ に対し $\psi(x) \in Im(\psi)$ かつ $\psi(x^{-1}) \in Im(\psi)$ であって $\psi(x^{-1}) = \psi(x)^{-1}$ となるので $\psi(x)^{-1} \in Im(\psi)$ であるから $Im(\psi)$ は G_2 の部分群である．

H を G の部分群とするとき，G 上の関係 $\sim_R^H$ を $g,h \in G$ に対して

$$g \sim_R^H h \iff hg^{-1} \in H$$

で定義すると，$g,h,k \in G$ に対して

- $gg^{-1} = 1_G$ であり，H が部分群であることから $gg^{-1} \in H$ となり，$g \sim_R^H g$ が成り立ち，
- $g \sim_R^H h$ とすると $hg^{-1} \in H$ であり，$(hg^{-1})^{-1} = gh^{-1}$ なので，H が部分群であることから $gh^{-1} \in H$ となり，$h \sim_R^H g$ が成り立ち，
- $g \sim_R^H h, h \sim_R^H k$ とすると $hg^{-1}, kh^{-1} \in H$ であり，$kg^{-1} = kh^{-1}hg^{-1}$ なので，H が部分群であることから $kg^{-1} \in H$ となり、$g \sim_R^H k$ が成り立つ．

以上のことから $\sim_R^H$ は同値関係である．このとき $g \in G$ の関係 $\sim_R^H$ による同値類 $\{g' \in G\colon g' \sim_R^H g\}$ を Hg と書き，これを**右剰余類**という．また G 上の関係 $\sim_L^H$ を

$$g \sim_L^H h \iff g^{-1}h \in H$$

で定義すると，$\sim_L^H$ も同値関係である．このとき $g \in G$ の関係 $\sim_L^H$ による同値類 $\{g' \in G\colon g' \sim_L^H g\}$ を gH と書き，これを**左剰余類**という．例えば，任意の $g \in G$ に対して，$\{1_G\}g = \{g\}$，$g\{1_G\} = \{g\}$ であり，同値関係 $\sim_R^{\{1_G\}}$ と $\sim_L^{\{1_G\}}$ はいずれも等号と等しい．G が可換群であるときは，右剰余類と左剰余類が一致する．

例 2.22. 例 2.21 の 2 で紹介した $\mathbb{Z}$ の部分群 $n\mathbb{Z}$ について考える．

$$\begin{aligned} a \sim_L^{n\mathbb{Z}} b &\iff -a+b \in n\mathbb{Z} \\ &\iff b-a \in n\mathbb{Z} \\ &\iff b+(-a) \in n\mathbb{Z} \\ &\iff a \sim_R^{n\mathbb{Z}} b \end{aligned}$$

より，$\sim_L^{n\mathbb{Z}}$ と $\sim_R^{n\mathbb{Z}}$ は等しく，これらは「n を法として合同」という関係に一致している．さらに任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$a(n\mathbb{Z}) = \{b \in \mathbb{Z} \colon b - a \in n\mathbb{Z}\} = (n\mathbb{Z})a$$

より，a の右剰余類，左剰余類いずれも n を法として a と合同なものをすべて集めた集合である．

G の $\sim_R^H$ による商集合を $H\backslash G$ と書き，$\sim_L^H$ による商集合を G/H と書く．つまり，$H\backslash G = \{Hg \colon g \in G\}$，$G/H = \{gH \colon g \in G\}$ である．

G を群，$H \subseteq G$ を部分群とするとき対応 $gH \mapsto Hg^{-1}$ を考える．$g, h \in G$ に対し $gH = hH$ が成り立つとすると

$$\begin{aligned}
gH = hH \quad &\Longleftrightarrow \quad g \sim_L^H h \\
&\Longleftrightarrow \quad g^{-1}h \in H \\
&\Longleftrightarrow \quad (g^{-1}h)^{-1} \in H \qquad (H \subseteq G \text{ は部分群}) \\
&\Longleftrightarrow \quad h^{-1}(g^{-1})^{-1} \in H \\
&\Longleftrightarrow \quad g^{-1} \sim_R^H h^{-1} \\
&\Longleftrightarrow \quad Hg^{-1} = Hh^{-1}
\end{aligned}$$

が成り立つ．$(\Rightarrow)$ よりこの対応が G/H から $H\backslash G$ への写像であることがわかりさらに $(\Leftarrow)$ より単射であることがわかる．加えて，どんな $Hg \in H\backslash G$ に対しても

$$g^{-1}H \mapsto Hg$$

となるので全射であることもわかる．以上のことからこの対応は全単射である．よって $H\backslash G$ の濃度 $|H\backslash G|$ と G/H の濃度 $|G/H|$ は等しい．$H\backslash G$，G/H の濃度を $[G \colon H]$ と書き，H の G における**指数**という．

G を群とする．部分群 N が各 $g \in G$ に対し $Ng = gN$ をみたすとき N を**正規部分群**という．

例 2.23. 群 $\mathbb{Z}$ の部分群 $n\mathbb{Z}$ は例 2.22 より各 $a\in\mathbb{Z}$ に対し $a(n\mathbb{Z})=(n\mathbb{Z})a$ をみたすので $\mathbb{Z}$ の正規部分群である．

　定義よりただちに $G/N=N\backslash G$ が成り立つ．さらに，G/N について対応 $(gN,hN)\mapsto ghN$ は $(gN,hN)=(g'N,h'N)$ とすると，

$$\begin{aligned}
x\in ghN &\iff h^{-1}g^{-1}x\in N\\
&\iff g^{-1}x\in hN\\
&\iff g^{-1}x\in h'N && (hN=h'N\text{ より})\\
&\iff g^{-1}x\in Nh' && (N\text{ は正規部分群より})\\
&\iff g^{-1}x(h')^{-1}\in N\\
&\iff x(h')^{-1}\in gN\\
&\iff x(h')^{-1}\in g'N && (gN=g'N\text{ より})\\
&\iff x(h')^{-1}\in Ng' && (N\text{ は正規部分群より})\\
&\iff x(h')^{-1}(g')^{-1}\in N\\
&\iff x\in Ng'h'\\
&\iff x\in g'h'N && (N\text{ は正規部分群より})
\end{aligned}$$

となるので $ghN=g'h'N$ が成り立ちこの対応が写像であることがわかる．この写像を $\cdot$ と書くことにする．また，対応 $gN\mapsto g^{-1}N$ は $gN=g'N$ とすると，

$$\begin{aligned}
gN=g'N &\iff g\sim_L^N g'\\
&\iff g^{-1}g'\in N\\
&\iff (g^{-1}g')^{-1}\in N && (N\subseteq G\text{ は部分群より})\\
&\iff (g')^{-1}(g^{-1})^{-1}\in N\\
&\iff g^{-1}\sim_R^N (g')^{-1}\\
&\iff Ng^{-1}=N(g')^{-1}\\
&\iff g^{-1}N=(g')^{-1}N && (N\text{ は正規部分群より})
\end{aligned}$$

となるので，$g^{-1}N=(g')^{-1}N$ が成り立ちこの対応が写像であることがわかる．この写像を $^{-1}$ と書くことにする．すると次が成り立つ．

命題 2.24. 群 G とその正規部分群 N に対して組 $(G/N,\cdot,^{-1},1_GN)$ は群をなす．

証明. 任意の $gN,hN,kN\in G/N$ に対し $gN\cdot(hN\cdot kN)=gN\cdot hkN=ghkN=ghN\cdot kN=(gN\cdot hN)\cdot kN$ となるので結合律をみたし，任意の $gN\in G/N$ に対，$gN\cdot 1_GN=g1_GN=gN=1_GgN=1_GN\cdot gN$ となるので $1_GN\in G/N$ は単位元であり，さらに任意の $gN\in G/N$ に対し $gN\cdot g^{-1}N=gg^{-1}N=1_GN=g^{-1}gN=g^{-1}N\cdot gN$ となるので gN の逆元は $g^{-1}N$ である．以上のことから組 $(G/N,\cdot,^{-1},1_GN)$ は群をなす．　□

標準的な全射 $\rho\colon G\to G/N$ は $g,h\in G$ に対し

$$\rho(gh)=ghN=gNhN=\rho(g)\rho(h)$$

となるので準同型写像であるといえる．

例 2.25. 群 $\mathbb{Z}$ の商集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を考える．$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の演算を $a(n\mathbb{Z}),b(n\mathbb{Z})\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対し $a(n\mathbb{Z})\cdot b(n\mathbb{Z})=(a+b)(n\mathbb{Z})$ と定め，逆元を $a(n\mathbb{Z})\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対し $(a(n\mathbb{Z}))^{-1}=-a(n\mathbb{Z})$ と定めると組 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\cdot,^{-1},0(n\mathbb{Z}))$ は群をなす．また，標準的な全射 $\rho\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を考えると，$a\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\rho(a)=a(n\mathbb{Z})=(n\mathbb{Z})a=\{b\in\mathbb{Z}\colon b-a\in n\mathbb{Z}\}$$

である．簡単のため $\rho(a)$ を $\overline{a}$ で表すことにする．例 2.23 より $n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の正規部分群であることから ρ は準同型となる．

G を群とする．G から G への写像 L_g を各 $g'\in G$ に対して

$$L_g(g')=gg'$$

と定めると，

$$(L_{g_1}\circ L_{g_2})=L_{g_1g_2}$$

が成り立つ．G を群，X を集合とする．写像 $\varphi\colon G\times X\to X$ が $x\in X,\ g,h\in G$ に対して

- $\varphi(1_G,x)=x$
- $\varphi(g,\varphi(h,x))=\varphi(gh,x)$

を満たすとき，φ を**群 G の集合 X への（左）作用**という．群 G と集合 X に対して G の X への作用が存在するとき G は X へ**作用する**という．また，$g\in G$ ごとに写像 $\varphi_g\colon X\to X$ を $\varphi_g(x)=\varphi(g,x)$ と定める．群 G が集合 X に作用するとき任意の $g\in G$ に対して

$$Y=\{\varphi_g(y)\colon y\in Y\}$$

をみたす $Y\subseteq X$ を X の G **不変部分集合**という．$\varphi\colon G\times X\to X$ と $\varphi'\colon G\times Y\to Y$ を作用とする．写像 $\psi\colon X\to Y$ は $g\in G$ と $x\in X$ に対し $\psi(\varphi_g(x))=\varphi'_g(\psi(x))$ をみたすとき，つまり

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_g} & X \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ Y & \xrightarrow[\varphi'_g]{} & Y \end{array}$$

が可換になるとき ψ は G **同変**という．X を位相空間，φ を G の X への作用とする．各 $g\in G$ に対し，$\varphi_g : X\to X$ が連続写像のとき，群 G の位相空間 X への作用 φ が**連続**であるという．

第3章　セルオートマトン

この章では文献 [7] の第 1 章にもとづき群上のセルオートマトンに関する用語と定義および群や位相，一様構造などの諸概念を用いた特徴付けについて議論する．

3.1　様相集合およびシフト作用と直積離散位相

集合 A と群 G に対して，G から A への写像全体のなす集合 A^G を考えよう．以降，集合 A を**アルファベット**，A の元を**文字**，**記号**，**色**または**状態**などとよび，群 G を**域**とよぶ．さらに，A^G の元を**様相**，A^G を**様相集合**とよぶ．群 G の有限集合 Ω から G への写像 p を**パターン**とよび，Ω を p の**サポート**という．

群 G の元 $g \in G$ と様相 $x \in A^G$ に対して，$gx \in A^G$ を

$$gx = x \circ L_{g^{-1}}$$

と定めると，$G \times A^G$ から A^G への写像

$$(g,x) \mapsto gx$$

が得られる．これを G の A^G への**シフト作用**とよぶことにする．シフト作用は G の A^G への左作用である．実際，群 G の元 $g_1, g_2 \in G$ と様相 $x \in A^G$ に対し，

$$g_1(g_2x) = g_1(x \circ L_{g_2{}^{-1}}) = x \circ L_{g_2{}^{-1}} \circ L_{g_1{}^{-1}} = x \circ L_{g_2{}^{-1}g_1{}^{-1}} = x \circ L_{(g_1g_2)^{-1}} = (g_1g_2)x$$

が成り立ち，G 上の恒等写像を Id_G と書くことにすると，群 G の単位元 $1_G \in G$ に対し，$1_Gx = x \circ L_{1_G} = x \circ Id_G = x$ が成り立つ．

命題 3.1. 群 G の直積離散空間 A^G へのシフト作用は連続である．

証明. $\varphi\colon G\times A^G\to A^G$ をシフト作用とする．各 $g\in G$ に対し，写像 $\varphi_g : A^G\to A^G$ が連続であることを示す．$g,h\in G$，$x\in A^G$ とすると，

$$\begin{aligned}\pi_h\circ\varphi_g(x) &= \pi_h(gx)\\ &= gx(h)\\ &= x(g^{-1}h)\\ &= \pi_{g^{-1}h}(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．$U\in\mathscr{F}_{A^G}$ のとき，つまり U が A^G のシリンダであるとき，ある $V\in 2^A$ と $h\in G$ が存在して，$U={\pi_h}^{-1}(V)$ であるので，

$$\begin{aligned}{\varphi_g}^{-1}(U) &= {\varphi_g}^{-1}({\pi_h}^{-1}(V))\\ &= (\pi_h\circ\varphi_g)^{-1}(V)\\ &= (\pi_{g^{-1}h})^{-1}(V)\end{aligned}$$

であり，$\pi_{g^{-1}h}$ は A^G から A への射影なので，$(\pi_{g^{-1}h})^{-1}(V)$ は A^G の開集合である．よって ${\varphi_g}^{-1}(U)$ は A^G の開集合である．$U\in\mathscr{B}_{A^G}$ のとき，つまり A^G の有限個のシリンダの族 $\mathscr{A}$ が存在し，$U=\bigcap\mathscr{A}$ であるとき，

$$\begin{aligned}{\varphi_g}^{-1}(U) &= {\varphi_g}^{-1}(\textstyle\bigcap\mathscr{A})\\ &= \textstyle\bigcap_{B\in\mathscr{A}}{\varphi_g}^{-1}(B)\end{aligned}$$

である．各 $B\in\mathscr{A}$ に対して，B が A^G のシリンダであることから，${\varphi_g}^{-1}(B)$ は A^G の開集合であり，かつ $\mathscr{A}$ は有限だったので，$\bigcap_{B\in\mathscr{A}}{\varphi_g}^{-1}(B)$ も A^G の開集合である．$U\in\mathscr{T}_{A^G}$ のとき，つまり A^G の有限個のシリンダの共通部分たちの族 $\mathscr{A}$ が存在して，$U=\bigcup\mathscr{A}$ であるとき，

$$\begin{aligned}{\varphi_g}^{-1}(U) &= {\varphi_g}^{-1}(\textstyle\bigcup\mathscr{A})\\ &= \textstyle\bigcup_{B\in\mathscr{A}}{\varphi_g}^{-1}(B)\end{aligned}$$

である．各 $B \in \mathscr{A}$ に対して，B は有限個のシリンダの共通部分であることから，$\varphi_g{}^{-1}(B)$ は A^G の開集合であるので，$\bigcup_{B\in\mathscr{A}} \varphi_g{}^{-1}(B)$ も A^G の開集合である．以上より，A^G の開集合 U の φ_g による逆像 $\varphi_g{}^{-1}(U)$ が A^G の開集合となるので，φ_g は連続であることがわかる．したがって，A^G への G のシフト作用は連続である．　□

3.2　セルオートマトン

G を群，A を集合とする．

定義 3.2. 以下をみたす G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が存在するとき写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を群 G とアルファベット A 上の**セルオートマトン**とよぶ．

任意の $x \in A^G$ と $g \in G$ に対して

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)$$

が成り立つ．

ただし $(g^{-1}x)|_S$ は $g^{-1}x \in A^G$ の S への様相の制限である．

上の定義における G の有限部分集合 S を**記憶集合**とよび，$\mu\colon A^S \to A$ を τ の**局所定義写像**という．

定義 3.2 の等式は各 $x \in A^G$ に対し，様相 $\tau(x)$ が G の元 g を $\mu((g^{-1}x)|_S)$ に対応させる写像であるということなので記憶集合 S と局所定義写像 μ があれば τ を表現できるということがわかる．

注意 3.3.

1. $gx = x \circ L_{g^{-1}}$ だったので μ がセルオートマトン τ の局所定義写像ならば $\tau(x)(g) = \mu((x \circ L_g)|_S)$ が成り立つ．
2. $g = 1_G$ とすると $1_G x = x$ だったので μ がセルオートマトン τ の局所定義写像ならば $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ が成り立つ．制限 $x \mapsto x|_S$ によって定まる写像は A^G

c(NW)	c(N)	c(NE)
c(W)	c	c(E)
c(SW)	c(S)	c(SE)

図 3.1: セル c の近接する 8 個のセルの名前

から A^S への全射である．つまり任意の $y \in A^S$ に対しある $x \in A^G$ が存在して $x|_S = y$ が成り立つ．今 μ と μ' をセルオートマトン τ の局所定義写像すると，任意の $y \in A^S$ に対し

$$\mu(y) = \mu(x|_S) = \tau(x)(1_G) = \mu'(x|_S) = \mu'(y)$$

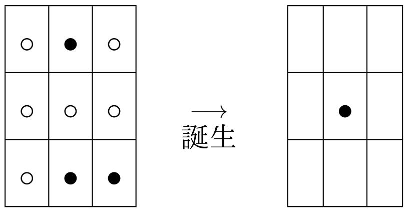
が成り立つのでセルオートマトン τ の局所定義写像 μ は一意的であることがわかる．したがってこの μ は S が定まればそれに付随して一意に定まるといえる．

例 3.4.　1. 無限個の四角形のセルからなる 2 次元直交格子を考える．各セルは live または dead の 2 つの状態になることが可能である．各セル c は 8 個の近接しているセルの影響を受ける．それらに図 3.1 のように名前を付ける．

以下 ● は live を表し，○ は dead を表すことにする．時間の経過に伴うセルの状態の変化を次の 4 つのルールで定める．

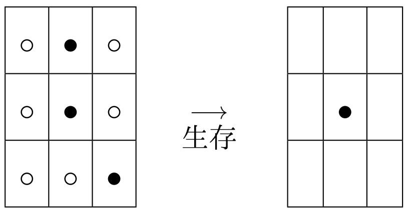
- **誕生**: セル c は時刻 t において dead で近接しているセルのうちちょうど

3 個が live のとき時刻 $t+1$ で live になる．例えば，下の図では，セル c は時刻 t では dead，近接する 3 つのセル c(N)，c(S)，c(SE) が live なので時刻 $t+1$ で live になる．



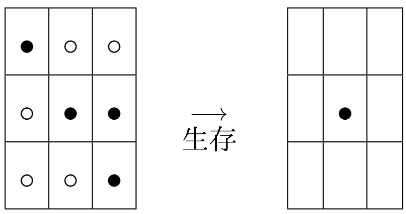
時刻 t　　　時刻 $t+1$

- **生存**: セル c は時刻 t において live で近接しているセルのうち 2 個または 3 個が live のとき時刻 $t+1$ で live になる．例えば，下の図では，セル c は時刻 t で live，近接する 2 つのセル c(N)，c(SE) が live なので時刻 $t+1$ で live になる．



時刻 t　　　時刻 $t+1$

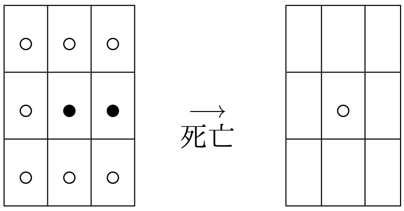
また下の図では，セル c は時刻 t では live，近接する 3 つのセル c(NW)，c(E)，c(SE) が live なので時刻 $t+1$ で live になる．



時刻 t　　　時刻 $t+1$

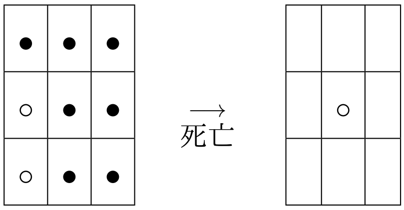
- **死亡**: セル c は時刻 t において live で近接しているセルのうち 1 個以下または 4 個以上が live のとき時刻 $t+1$ で dead になる．例えば，下の図では，セル c は時刻 t では live，近接する 1 つのセル c(E) のみが live な

ので時刻 $t+1$ で dead になる．



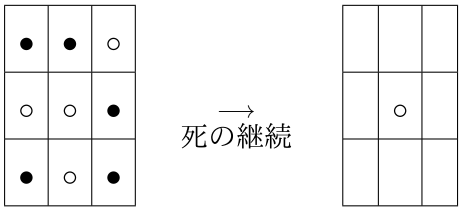
時刻 t　　時刻 $t+1$

また下の図では，セル c は時刻 t では live，近接する 6 つのセル c(NW)，c(N)，c(NE)，c(E)，c(SE)，c(S) が live なので時刻 $t+1$ で dead になる．



時刻 t　　時刻 $t+1$

- **死の継続**: セル c は時刻 t において dead で近接しているセルのうち 2 個以下または 4 個以上が live のとき時刻 $t+1$ で dead になる．例えば，下の図では，セル c は時刻 t で dead，近接する 5 つのセル c(NW)，c(N)，c(E)，c(SE)，c(SW) が live なので時刻 $t+1$ で dead になる．



時刻 t　　時刻 $t+1$

このルールで定めたセルたちの遷移は**ライフゲーム**とよばれる．ここで G を $\mathbb{Z}^2$，アルファベット A を $\{0,1\}$，記憶集合 S を $\{1,0,-1\}^2$ とし，局所定義写

像 $\mu\colon A^S \to A$ を $y \in A^S$ に対し次で定める．

$$\mu(y) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} \sum_{s\in S} y(s) = 3 \text{ の場合} \\ \sum_{s\in S} y(s) = 4 \text{ かつ } y(0,0) = 1 \text{ の場合} \end{cases} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

するとライフゲームとこのセルオートマトンは表 3.1 の通り対応する．ただしルールと局所定義写像の対応の詳細は表 3.2 に示す． 以上のことから

<table>
<tr><th>ライフゲーム</th><th>セルオートマトン</th></tr>
<tr><td>セル c</td><td>$c \in \mathbb{Z}^2$</td></tr>
<tr><td>○: dead　●: live</td><td>アルファベット $A = \{0,1\}$</td></tr>
<tr><td>盤面 x</td><td>様相 $x \in A^{\mathbb{Z}^2}$</td></tr>
<tr><td>盤面 x でセル c は●</td><td>$x(c) = 1$</td></tr>
<tr><td>盤面 x でセル c は○</td><td>$x(c) = 0$</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>c(NW)</td><td>c(N)</td><td>c(NE)</td></tr><tr><td>c(W)</td><td>c</td><td>c(E)</td></tr><tr><td>c(SW)</td><td>c(S)</td><td>c(SE)</td></tr></table></td><td>$c + S = \{c + s\colon s \in S\}$
ただし $S = \{-1,0,1\}^2$</td></tr>
<tr><td>ルール</td><td>$\mu\colon \{0,1\}^S \to \{0,1\}$</td></tr>
</table>

表 3.1: ライフゲームとセルオートマトンの対応表

ライフゲームはセルオートマトンをなすといえる．このセルオートマトン

ルール	$\mu\colon \{0,1\}^S \to \{0,1\}$
誕生	$\sum_{s\in S} y(s) = 3 \wedge y(0,0) = 0 \implies \mu(y) = 1$
生存	$\left\langle \begin{array}{l} (\sum_{s\in S} y(s) = 3 \\ \quad \vee \sum_{s\in S} y(s) = 4) \\ \wedge y((0,0)) = 1 \end{array} \right\rangle \implies \mu(y) = 1$
死亡	$\left\langle \begin{array}{l} (\sum_{s\in S} y(s) \leq 2 \\ \quad \vee \sum_{s\in S} y(s) \geq 5) \\ \wedge y((0,0)) = 1 \end{array} \right\rangle \implies \mu(y) = 0$
死の継続	$\left\langle \begin{array}{l} (\sum_{s\in S} y(s) \leq 2 \\ \quad \vee \sum_{s\in S} y(s) \geq 4) \\ \wedge y((0,0)) = 0 \end{array} \right\rangle \implies \mu(y) = 0$

表 3.2: ルールと局所定義写像の対応表

$\tau\colon A^G \to A^G$ を記憶集合 S と局所定義写像 μ とともに**ライフゲームのセルオートマトン**とよぶ.

2. $G = \mathbb{Z}$，$A = \mathbb{R}$ とし，写像 $\Delta\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ を $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\Delta(x)(n) = 2x(n) - x(n-1) - x(n+1)$$

で定める．すると Δ は記憶集合 $S = \{-1,0,1\} \subseteq \mathbb{Z}$ と $y \in \mathbb{R}^S$ に対し

$$\mu(y) = 2y(0) - y(-1) - y(1)$$

で定まる局所定義写像 $\mu\colon \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$ とともにセルオートマトンをなす．より一般的に，任意の群 G と体 $\mathbb{K}$ と G の有限部分集合 S について $x \in A^G$，$g \in G$ に対し，

$$\Delta_S(x)(g) = |S|x(g) - \sum_{s\in S} x(gs)$$

で定まる写像 $\Delta_S (= \Delta_S^G)\colon \mathbb{K}^G \to \mathbb{K}^G$ は，記憶集合 $S \cup \{1_G\}$ と $y \in \mathbb{R}^{S\cup\{1_G\}}$ に

対し

$$\mu(y) = |S|y(1_G) - \sum_{s\in S} y(s)$$

で定まる局所定義写像 $\mu\colon \mathbb{K}^{S\cup\{1_G\}} \to \mathbb{K}$ とともにセルオートマトンをなす．このセルオートマトンを G と S に付随する体 $\mathbb{K}$ 上の**離散ラプラシアン**とよぶ．

3. G を群とし，S を G の有限部分集合，$A = \{0,1\}$ とする．写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を $x \in A^G$ と $g \in G$ に対し次で定義する．

$$\tau(x)(g) = \begin{cases} 1 & \sum_{s\in S} x(gs) > \frac{|S|}{2} \text{の場合} \\ 0 & \sum_{s\in S} x(gs) < \frac{|S|}{2} \text{の場合} \\ x(g) & \sum_{s\in S} x(gs) = \frac{|S|}{2} \text{の場合} \end{cases}$$

このとき τ は記憶集合 $S \cup \{1_G\}$ と $y \in A^{S\cup\{1_G\}}$ に対し

$$\mu(y) = \begin{cases} 1 & \sum_{s\in S} y(s) > \frac{|S|}{2} \text{の場合} \\ 0 & \sum_{s\in S} y(s) < \frac{|S|}{2} \text{の場合} \\ y(1_G) & \sum_{s\in S} y(s) = \frac{|S|}{2} \text{の場合} \end{cases}$$

で定まる局所定義写像 $\mu\colon A^{S\cup\{1_G\}} \to A$ とともにセルオートマトンをなす．このセルオートマトンを G と S に付随する**多数決の作用**とよぶ．特に $G = \mathbb{Z}$，$S = \{-1,1\}$ のとき局所定義写像 μ を図示したものが図 3.2，τ による様相の変化の例を図示したものが図 3.3 である．

4. G を群，A を集合とし，$f\colon A \to A$ とする．このとき $\tau\colon A^G \to A^G$ を $x \in A^G$ に対し $\tau(x) = f \circ x$ で定めると，τ は記憶集合 $S = \{1_G\}$ と $y \in A^S$ に対し $\mu(y) = f(y(1_G))$ で定まる局所定義写像 $\mu\colon A^S \to A$ とともにセルオートマトンをなす．特に $f = Id_A$ のとき $\tau = Id_{A^G}$ であることがわかるので，Id_{A^G} はセルオートマトンである．

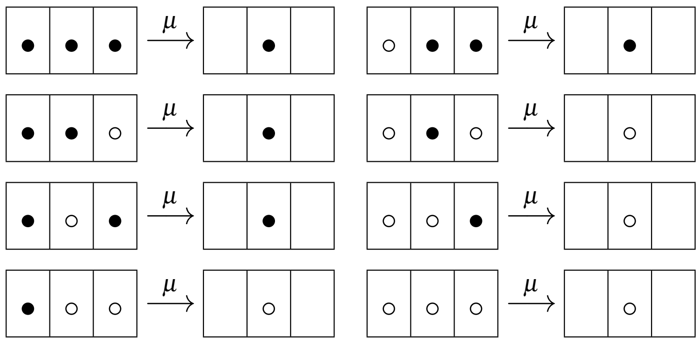


図 3.2: $S=\{-1,1\}$ に付随する多数決の作用の局所定義写像 μ

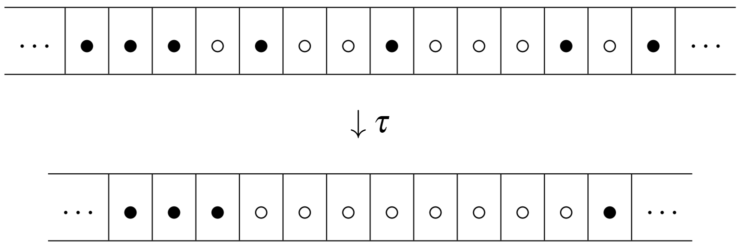


図 3.3: $S=\{-1,1\}$ に付随する多数決の作用 τ による様相の変化の例

5. G を群，A を集合，$s_0 \in G$ とする．写像 $R_{s_0}\colon G \to G$ を $g \in G$ に対し $R_{s_0}(g)=gs_0$ と定めると，$x \in A^G$ に対し $\tau(x)=x \circ R_{S_0}$ で定まる写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ は記憶集合 $S=\{s_0\}$ と $y \in A^S$ に対し $\mu(y)=y(s_0)$ で与えられる局所定義写像 $\mu\colon A^S \to A$ とともにセルオートマトンをなす．

命題 3.5. G を群，A を集合とする．任意のセルオートマトン $\tau\colon A^G \to A^G$ は G 同変である．

証明. S を τ の記憶集合，$\mu\colon A^S \to A$ を局所定義写像とすると，任意の $g,h \in G$ と $x \in A^G$ に対し

$$\tau(gx)(h)=\mu((h^{-1}gx)|_S)=\mu(((g^{-1}h)^{-1}x)|_S)=\tau(x)(g^{-1}h)=g\tau(x)(h)$$

が成り立つので，$\tau\colon A^G \to A^G$ は G 同変である． □

命題 3.6. G を群，A を集合とする．写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を考える．S を G の有限部分集合とし $\mu\colon A^S \to A$ とする．この時次の 2 つは同値である．

1. τ は記憶集合 S と局所定義写像 μ とともにセルオートマトンをなす.
2. τ は G 同変でありかつ任意の $x \in A^G$ に対し $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ が成り立つ.

証明. 注意 3.3 と命題 3.5 より 1 を仮定すると 2 は成り立つ．2 を仮定し 1 を示す．写像 τ が G 同変でありかつ任意の $x \in A^G$ に対し $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ が成り立つとすると，

$$\tau(x)(g) = g^{-1}\tau(x)(1_G) = \tau(g^{-1}x)(1_G) = \mu((g^{-1}x)|_S)$$

が成り立つので τ はセルオートマトンであるといえる．□

G が有限群のときは $\tau\colon A^G \to A^G$ が G 同変ならば $\mu\colon A^G \to A$ を $x \in A^G$ に対して $\mu(x) = \tau(x)(1_G)$ と定めることにより τ は記憶集合 G と局所定義写像 μ とともにセルオートマトンをなす.

群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が存在してこれらが $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ をみたすにもかかわらず G 同変でないためセルオートマトンではないような写像の例を示す.

例 3.7. $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，$G = \mathbb{Z}$ とし，$n \in \mathbb{Z}$ の同値類を $\overline{n} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とかくことにする．写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を $x \in A^G$，$n \in G$ に対し，

$$\tau(x)(n) = x(n) + \overline{n}$$

と定めると，$x, y \in A^G$ で $x|_{\{0\}} = y|_{\{0\}}$ となるものに対し，

$$\begin{aligned} \tau(x)(0) &= x(0) + \overline{0} \\ &= x(0) \\ &= y(0) \\ &= y(0) + \overline{0} \end{aligned}$$

$$= \quad \tau(y)(0)$$

となるので対応 $x|_{\{0\}} \mapsto \tau(x)(0)$ は写像であり，これを μ とおくと $\mu(x|_{\{0\}}) = \tau(x)(0)$ が成り立つ．ところが $n \in G$ に対し

$$x(n) = \begin{cases} \overline{0} & (n \text{ は奇数}) \\ \overline{1} & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

であるような様相 $x \in A^G$ を考えると，$\tau(x)$ は任意の $n \in G$ に対して $\tau(x)(n) = \overline{1}$ であることから $1\tau(x)$ は任意の $n \in G$ に対して $1\tau(x)(n) = \overline{1}$ となり，

$$1x(n) = \begin{cases} \overline{1} & (n \text{ は奇数}) \\ \overline{0} & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

となることから $\tau(1x)$ は任意の $n \in G$ に対し $\tau(1x)(n) = \overline{0}$ となる．$1\tau(x) \neq \tau(1x)$ なので τ は G 同変ではない．命題 3.6 よりセルオートマトンでない．

例 3.8. $A = \{a, b\}$，$G = \mathbb{Z}$ とする．写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を $x \in A^G$ に対し，

$$\tau(x) = \begin{cases} \vec{a} & x(n) = b \text{ となる } n \text{ が無限にある} \wedge x(0) = a \\ x_0 & x(n) = b \text{ となる } n \text{ が有限個しかない} \wedge x(0) = a \\ \vec{b} & \text{その他} \end{cases}$$

と定める．ただし様相 $\vec{a}, \vec{b} \in A^G$ は任意の $n \in G$ に対して $\vec{a}(n) = a$，$\vec{b}(n) = b$ とし，様相 x_0 は $x_0(0) = a$ かつ $x|_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}} = \vec{b}|_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ とする．任意の $x, y \in A^G$ に対し $x|_{\{0\}} = y|_{\{0\}}$ ならば $\tau(x)(0) = \tau(y)(0)$ なので対応 $x|_{\{0\}} \mapsto \tau(x)(0)$ を μ とかくことにすると $\mu(x|_{\{0\}}) = \tau(x)(0)$ が成り立つ．ところが $x \in A^G$ で $x(n) = b$ となる n が無限にあってしかも $x(0) = a$ かつ $x(-1) = b$ であるものを考えると，$\tau(x) = \vec{a}$ より $1\tau(x) = \vec{a}$ であり $1x(0) = x(-1) = b$ より $\tau(1x) = \vec{b}$ なので $1\tau(x) \neq \tau(1x)$ となり τ は G 同変ではない．命題 3.6 よりセルオートマトンではない．

例 **3.9.** $A=G=\mathbb{Z}$ とする．写像 $\tau\colon A^G\to A^G$ を $x\in A^G$，$n\in G$ に対し

$$\tau(x)(n)=\begin{cases} x(x(n)+n) & n\neq 0 \text{ の場合} \\ 0 & n=0 \text{ の場合}\end{cases}$$

と定める．写像 $\mu\colon A^{\{0\}}\to A$ を $y\in A^{\{0\}}$ に対し $\mu(y)=0$ と定める．$x\in A^G$ とすると，

$$\begin{aligned}\mu(x|_{\{0\}}) &= 0 \\ &= \tau(x)(0)\end{aligned}$$

が成り立つ．ところが $g\in G$ に対し $x(g)=1$ となる様相 $x\in A^G$ を考えると，

$$\tau(1x)(0) = 0$$

である一方，

$$\begin{aligned}1\tau(x)(0) &= \tau(x)(-1) \\ &= x(x(-1)+(-1)) \\ &= x(1+(-1)) \\ &= x(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

となるので $1\tau(x)\neq\tau(1x)$ となり，G 同変でない．したがって命題 3.6 より τ はセルオートマトンでない．

次は G 同変であるが $\tau(x)(1_G)=\mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S\to A$ が存在しないためセルオートマトンでない写像の例である．

例 **3.10.** $A=\{a,b\}$，$G=\mathbb{Z}$ とする．写像 $\tau\colon A^G\to A^G$ を $x\in A^G$ に対し，

$$\tau(x)=\begin{cases} \vec{a} & (x^{-1}(a) \text{ が 1 点集合}) \\ \vec{b} & (\text{その他})\end{cases}$$

と定める．ただし様相 $\vec{a},\vec{b}\in A^G$ は任意の $n\in G$ に対して $\vec{a}(n)=a$，$\vec{b}(n)=b$ とする．$n,m\in G$，$x\in A^G$ とすると，$\tau(x)=\vec{a}$ のとき $x^{-1}(a)$ は 1 点集合なので $x(l)=a$ となる

$l \in G$ がただ一つ存在する．ここで $nx(l') = a$ をみたす $l' \in G$ は $nx(l') = x((-n)+l')$ より $n+l$ のみである．したがって $\tau(nx) = \vec{a}$ である．また $\tau(x) = \vec{a}$ なので $n,m \in G$ に対し，

$$n\tau(x)(m) = \tau(x)((-n)+m) = a$$

となる．したがって $n\tau(x) = \vec{a}$ となり $\tau(nx) = n\tau(x)$ が成り立つ．$\tau(x) = \vec{b}$ のとき $x^{-1}(a)$ は空集合または 2 点以上を含む集合である．$x^{-1}(a)$ が空集合のとき，つまり $x = \vec{b}$ のときは $nx = \vec{b}$ なので

$$\tau(nx) = \vec{b} = n\vec{b} = n\tau(x)$$

となる．$x^{-1}(a)$ が 2 点以上を含む集合であるとき，つまり $x(l) = a$ をみたす $l \in G$ が 2 つ以上あるとき $nx(l') = a$ をみたす $l' \in G$ は $nx(l') = x((-n)+l')$ より $l' = n+l$ とすれば 2 つ以上存在することがいえる．したがって $\tau(nx) = \vec{b}$ となるので $\tau(nx) = n\tau(x)$ である．以上のことから τ は G 同変である．次に $\tau(x) = \vec{a}$ をみたす $x \in A^G$ を考える．S を G の有限部分集合とし，$y \in A^G$ を $m \in G$ に対し

$$y(m) = \begin{cases} x(m) & m \in S \text{ の場合} \\ a & \text{その他} \end{cases}$$

と定めると $x|_S = y|_S$ である．ところが $y^{-1}(a)$ が無限集合であることから $\tau(y) = \vec{b}$ となり，$\tau(x)(0) \neq \tau(y)(0)$ なので命題 3.6 より τ はセルオートマトンでない．

例 **3.11.** $G = A = \mathbb{Z}$ とする．写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を $x \in A^G$，$n \in G$ に対し

$$\tau(x)(n) = x(x(n)+n)$$

と定める．$x \in A^G$，$n,m \in G$ とすると，

$$\begin{aligned} n\tau(x)(m) &= \tau(x)((-n)+m) \\ &= x(x((-n)+m)+(-n)+m) \\ &= nx(nx(m)+m) \\ &= \tau(nx)(m) \end{aligned}$$

となり，τ は G 同変である．ここで $n_0 \in G \backslash \{0\}$ とし，各 $n \in G$ ごとに $x_n, y_n \in A^G$ を $m \in G$ に対し次のように定める．

$$x_n(m) = \begin{cases} n & m = 0 \text{ の場合} \\ n_0 & m = n \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$y_n(m) = \begin{cases} n & m = 0 \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

すると $x_n|_{G\backslash\{n\}} = y_n|_{G\backslash\{n\}}$ である．ここで，どんな有限集合 $F \subseteq G$ に対しても $G \backslash F \neq \emptyset$ より $n \in G \backslash F$ となる元 n が存在し，$n \notin F$ より $x_n|_F = y_n|_F$ となる．ところが

$$\begin{aligned} \tau(x_n)(0) &= x_n(x_n(0)+0) &= x_n(n) &= n_0 \\ \tau(y_n)(0) &= y_n(y_n(0)+0) &= y_n(n) &= 0 \end{aligned}$$

より $\tau(x_n) \neq \tau(y_n)$ なので命題 3.6 より τ はセルオートマトンでない．

次の例は G 同変でなく，さらに $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ も存在しないためセルオートマトンでない写像の例である．

例 3.12. $A = G = \mathbb{Z}$ とする．写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を $x \in A^G$，$n \in G$ に対し

$$\tau(x)(n) = x(x(n))$$

と定める．G の任意の有限部分集合 K を 1 つ固定し，0 でない $t \in G \backslash K$ に対して，$x_t, y_t \in A^G$ を

$$x_t(n) = t$$

$$y_t(n) = \begin{cases} t & n \in K \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．すると $x_t|_K = y_t|_K$ である．ところが

$$\tau(x_t)(0) = x_t(x_t(0)) = x_t(t) = t$$

であり，$0 \in K$ のとき

$$\tau(y_t)(0) = y_t(y_t(0)) = y_t(t) = 0$$

となり $0 \notin K$ のとき

$$\tau(y_t)(0) = y_t(y_t(0)) = y_t(0) = 0$$

となるのでいずれにせよ $\tau(y_t)(0) = 0$ である．したがって $\tau(x_t)(0) \neq \tau(y_t)(0)$ となる．さらに $x \in A^G$ を

$$x(n) = \begin{cases} 2 & n = 1 \text{ の場合} \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

とすると

$$\begin{aligned} 2\tau(x)(1) &= \tau(x)(-2+1) \\ &= x(x(-1)) \\ &= x(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(2x)(1) &= 2x(2x(1)) \\ &= 2x(x(-2+1)) \\ &= 2x(x(-1)) \\ &= 2x(1) \\ &= x(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので $2\tau(x) \neq \tau(2x)$ となり G 同変でもない．したがって命題 3.6 より τ はセルオートマトンでない．

命題 3.13. G を群，A を集合とする．このとき任意のセルオートマトン $\tau\colon A^G \to A^G$ は直積離散空間 A^G 上の連続写像である．

証明. W を A^G の開集合とし，$x \in \tau^{-1}(W)$ とすると，$\tau(x) \in W$ である．W は A^G の開集合なので，命題 2.9 より有限部分集合 $\Omega \subseteq G$ が存在して $V(\tau(x), \Omega) \subseteq W$ となる．$\Omega S = \{gs\colon g \in \Omega, s \in S\}$ と定めると，

$$
\begin{aligned}
& y \in V(x, \Omega S) \\
\iff\; & x|_{\Omega S} = y|_{\Omega S} \\
\iff\; & \forall g \in \Omega, \forall s \in S. x(gs) = y(gs) \\
\iff\; & \forall g \in \Omega, \forall s \in S. g^{-1}x(s) = g^{-1}x(s) \\
\iff\; & \forall g \in \Omega. g^{-1}x|_S = g^{-1}x|_S \\
\implies\; & \forall g \in \Omega. \mu(g^{-1}x|_S) = \mu(g^{-1}y|_S) \\
\iff\; & \forall g \in \Omega. \tau(x)(g) = \tau(y)(g) \qquad\qquad (\text{命題 3.6 より}) \\
\iff\; & \tau(x)|_\Omega = \tau(y)|_\Omega \\
\iff\; & \tau(y) \in V(\tau(x), \Omega)
\end{aligned}
$$

であり，さらに $\tau(y) \in \tau(V(x, \Omega S))$ であることから $\tau(V(x, \Omega S)) \subseteq V(\tau(x), \Omega)$ が成り立つ．ここで

$$\tau(V(x, \Omega S)) \subseteq V(\tau(x), \Omega) \subseteq W$$

でのそれぞれの τ による逆像を考えると

$$V(x, \Omega S) \subseteq \tau^{-1}(\tau(V(x, \Omega S))) \subseteq \tau^{-1}(V(\tau(x), \Omega)) \subseteq \tau^{-1}(W)$$

が成り立つので $x \in \tau^{-1}(W)$ に対し $V(x, \Omega S) \subseteq \tau^{-1}(W)$ となり，$\bigcup_{x \in \tau^{-1}(W)} V(x, \Omega S) \subseteq \tau^{-1}(W)$ が成り立つ．また $x \in \tau^{-1}(W)$ とすると，$x \in V(x, \Omega S)$ であるので $\tau^{-1}(W) \subseteq \bigcup_{x \in \tau^{-1}(W)} V(x, \Omega S)$ となる．以上のことから $\bigcup_{x \in \tau^{-1}(W)} V(x, \Omega S) = \tau^{-1}(W)$ が成り立つ．$V(x, \Omega S)$ は ΩS が G の有限部分集合であることから A^G の開集合であるので $\tau^{-1}(W)$ は A^G の開集合となり，τ は連続写像であることがわかる．$\square$

次は連続写像であるが G 同変でないためセルオートマトンではない写像の例である．

例 3.14. 例 3.7 で与えた写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を再び考える．この写像 τ は $\mu(x|_{\{0\}}) = \tau(x)(0)$ だが G 同変でないのでセルオートマトンでないことは例 3.7 ですでに確かめた．ここでは，この写像 τ が連続であることを確認する．W を A^G の開集合とし，$x \in \tau^{-1}(W)$ とすると $\tau(x) \in W$ である．つまり W は $\tau(x)$ の近傍なので，命題 2.9 よりある有限部分集合 $K \subseteq G$ が存在して $V(\tau(x), K) \subseteq W$ となる．$y \in V(x, K)$ とすると

$$\begin{aligned} y \in V(x,K) &\iff x|_K = y|_K \\ &\iff \forall n \in K.\ x(n) = y(n) \end{aligned}$$

であることから $n \in K$ に対して

$$\begin{aligned} \tau(x)(n) &= x(n) + \overline{n} \\ &= y(n) + \overline{n} \\ &= \tau(y)(n) \end{aligned}$$

となり $\tau(y) \in V(\tau(x), K)$ が成り立つ．さらに $z \in \tau(V(x,K))$ とすると，ある $y \in V(x,K)$ が存在して $\tau(y) = z$ であり，$y \in V(x,K)$ であることから $\tau(y) \in V(\tau(x),K)$ となり $z \in V(\tau(x),K)$ が成り立つ．つまり $\tau(V(x,K)) \subseteq V(\tau(x),K)$ がいえた．いま

$$\tau(V(x,K)) \subseteq V(\tau(x),K) \subseteq W$$

でのそれぞれの τ による逆像を考えると

$$V(x,K) \subseteq \tau^{-1}(\tau(V(x,K))) \subseteq \tau^{-1}(V(\tau(x),K)) \subseteq \tau^{-1}(W)$$

となり $x \in \tau^{-1}(W)$ に対して $V(x,K) \subseteq \tau^{-1}(W)$ なので $\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,K) \subseteq \tau^{-1}(W)$ が成り立つ．また $x \in \tau^{-1}(W)$ とすると $x \in V(x,K)$ より $\tau^{-1}(W) \subseteq \bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,K)$ となる．よって $\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,K) = \tau^{-1}(W)$ が成り立つ．以上のことから $\tau^{-1}(W)$ も A^G の開集合となり τ は連続写像となる．

例 3.15. 例 3.9 で与えた写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を再び考える．この写像 τ は $\tau(x)(0) = \mu(x|_{\{0\}})$ であるが G 同変でないのでセルオートマトンでないことは例 3.9 ですでに確かめた．ここでは，この写像 τ が連続であることを確認する．W を A^G の開集合とし，$x \in \tau^{-1}(W)$ とすると $\tau(x) \in W$ である．つまり W は $\tau(x)$ の近傍なので，命題 2.9 よりある有限部分集合 $K \subseteq G$ が存在して $V(\tau(x), K) \subseteq W$ となる．$F = K \cup \{x(k)+k : k \in K\}$ とし，$y \in V(x,F)$ とすると

$$
\begin{aligned}
y \in V(x,F) &\iff x|_F = y|_F \\
&\iff \forall g \in F.\ x(g) = y(g)
\end{aligned}
$$

でありかつ $K \subseteq F$ であることから，$k \in K$ に対し，$k \neq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\tau(x)(k) &= x(x(k)+k) \\
&= y(y(k)+k) \\
&= \tau(y)(k)
\end{aligned}
$$

$k = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
\tau(x)(0) &= 0 \\
&= \tau(y)(0)
\end{aligned}
$$

となり $\tau(y) \in V(\tau(x), K)$ が成り立つ．さらに $z \in \tau(V(x,F))$ とすると，ある $y \in V(x,F)$ が存在して $\tau(y) = z$ であり，$y \in V(x,F)$ であることから $\tau(y) \in V(\tau(x), K)$ となり $z \in V(\tau(x), K)$ が成り立つ．つまり $\tau(V(x,F)) \subseteq V(\tau(x), K)$ がいえた．いま

$$
\tau(V(x,F)) \subseteq V(\tau(x), K) \subseteq W
$$

でのそれぞれの τ による逆像を考えると

$$
V(x,F) \subseteq \tau^{-1}(\tau(V(x,F))) \subseteq \tau^{-1}(V(\tau(x),K)) \subseteq \tau^{-1}(W)
$$

となる．$x \in \tau^{-1}(W)$ に対して $V(x,F) \subseteq \tau^{-1}(W)$ となることから $\bigcup_{x \in \tau^{-1}(W)} V(x,F) \subseteq \tau^{-1}(W)$ が成り立ち，また $x \in \tau^{-1}(W)$ とすると $x \in V(x,F)$ であるので $\tau^{-1}(W) \subseteq$

$\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,F)$ となる．よって $\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,F) = \tau^{-1}(W)$ が成り立つ．以上のことから $\tau^{-1}(W)$ も A^G の開集合となり τ は連続写像となる．

次の例は連続写像であるが $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が存在しないのでセルオートマトンではない写像の例である．

例 3.16. 例 3.11 で与えた写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ について再び考える．この写像 τ は G 同変であるが $\tau(x)(0) = \mu(x|_S)$ となるような G の有限部分集合 S と $\mu\colon A^S \to A$ が存在しないのでセルオートマトンでないことは例 3.11 ですでに確かめた．ここでは，この写像 τ が連続であることを確認する．W を A^G の開集合とし，$x \in \tau^{-1}(W)$ とすると $\tau(x) \in W$ である．つまり W は $\tau(x)$ の近傍なので，命題 2.9 よりある有限部分集合 $K \subseteq G$ が存在して $V(\tau(x),K) \subseteq W$ となる．$F = K \cup \{x(k)+k : k \in K\}$ とし，$y \in V(x,F)$ とすると

$$
\begin{aligned}
y \in V(x,F) &\iff x|_F = y|_F \\
&\iff \forall g \in F.\ x(g) = y(g)
\end{aligned}
$$

でありかつ $K \subseteq F$ であることから，$k \in K$ に対し

$$
\begin{aligned}
\tau(x)(k) &= x(x(k)+k) \\
&= y(y(k)+k) \\
&= \tau(y)(k)
\end{aligned}
$$

となり $\tau(y) \in V(\tau(x),K)$ が成り立つ．さらに $z \in \tau(V(x,F))$ とすると，ある $y \in V(x,F)$ が存在して $\tau(y) = z$ であり，$y \in V(x,F)$ であることから $\tau(y) \in V(\tau(x),K)$ となり $z \in V(\tau(x),K)$ が成り立つ．つまり $\tau(V(x,F)) \subseteq V(\tau(x),K)$ がいえた．いま

$$\tau(V(x,F)) \subseteq V(\tau(x),K) \subseteq W$$

でのそれぞれの τ による逆像を考えると

$$V(x,F) \subseteq \tau^{-1}(\tau(V(x,F))) \subseteq \tau^{-1}(V(\tau(x),K)) \subseteq \tau^{-1}(W)$$

が成り立ち $x\in\tau^{-1}(W)$ に対して $V(x,F)\subseteq\tau^{-1}(W)$ となるので $\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)}V(x,F)\subseteq\tau^{-1}(W)$ が成り立つ．また $x\in\tau^{-1}(W)$ とすると $x\in V(x,F)$ であることから $\tau^{-1}(W)\subseteq\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)}V(x,F)$ となる．よって $\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)}V(x,F)=\tau^{-1}(W)$ が成り立つ．以上のことから $\tau^{-1}(W)$ も A^G の開集合となり τ は連続写像となる．

次の例は連続写像であるが，G 同変でなく $\tau(x)(1_G)=\mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S\to A$ も存在しないのでセルオートマトンではない写像の例である．

例 3.17. 例 3.12 で与えた写像 $\tau\colon A^G\to A^G$ について再び考える．この写像 τ は G 同変でなく $\tau(x)(1_G)=\mu(x|_S)$ となるような G の有限部分集合 S と $\mu\colon A^S\to A$ も存在しないのでセルオートマトンでないことは例 3.12 ですでに確かめた．ここでは，この写像 τ が連続であることを確認する．W を A^G の開集合とし，$x\in\tau^{-1}(W)$ とすると $\tau(x)\in W$ である．つまり W は $\tau(x)$ の近傍なので，命題 2.9 よりある有限部分集合 $K\subseteq G$ が存在して $V(\tau(x),K)\subseteq W$ となる．$F=K\cup\{x(k):k\in K\}$ とし，$y\in V(x,F)$ とすると

$$\begin{aligned} y\in V(x,F) &\iff x|_F=y|_F \\ &\iff \forall g\in F.\ x(g)=y(g) \end{aligned}$$

でありかつ $K\subseteq F$ であることから，$k\in K$ に対し

$$\begin{aligned} \tau(x)(k) &= x(x(k)) \\ &= y(y(k)) \\ &= \tau(y)(k) \end{aligned}$$

となりいずれにせよ $\tau(y)\in V(\tau(x),K)$ が成り立つ．さらに $z\in\tau(V(x,F))$ とすると，ある $y\in V(x,F)$ が存在して $\tau(y)=z$ であり，$y\in V(x,F)$ であることから $\tau(y)\in V(\tau(x),K)$ となり $z\in V(\tau(x),K)$ が成り立つ．つまり $\tau(V(x,F))\subseteq V(\tau(x),K)$ がいえた．いま

$$\tau(V(x,F))\subseteq V(\tau(x),K)\subseteq W$$

でのそれぞれの τ による逆像を考えると

$$V(x,F) \subseteq \tau^{-1}(\tau(V(x,F))) \subseteq \tau^{-1}(V(\tau(x),K)) \subseteq \tau^{-1}(W)$$

となる．$x \in \tau^{-1}(W)$ に対して $V(x,F) \subseteq \tau^{-1}(W)$ となることから $\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,F) \subseteq \tau^{-1}(W)$ が成り立ち，また $x \in \tau^{-1}(W)$ とすると $x \in V(x,F)$ であるので $\tau^{-1}(W) \subseteq \bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,F)$ となる．よって $\bigcup_{x\in\tau^{-1}(W)} V(x,F) = \tau^{-1}(W)$ が成り立つ．以上のことから $\tau^{-1}(W)$ も A^G の開集合となり τ は連続写像となる．

補題 3.18. G を群，A を集合とし，$\tau\colon A^G \to A^G$ は記憶集合 S とともにセルオートマトンなすとする．このとき $g \in G$ に対し $\tau(x)(g)$ は x の $gS = \{gs\colon s \in S\}$ への制限のみに依存する．つまり gS に対して，写像 ${}_g\mu\colon A^{gS} \to A$ が存在して $\tau(x)(g) = {}_g\mu(x|_{gS})$ をみたす．

証明. 定義 3.2 より $\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S)$ である．さらに各 $s \in S$ に対し $(g^{-1}x)|_S(s) = g^{-1}x(s) = x(gs)$ であり，かつ $gs \in gS$ である．よって各 $s \in S$ に対し $g^{-1}x|_S(s) = x|_{gS}(gs)$ である．今 x の gS への制限 $x|_{gS}$ に対し ${}_g\mu(x|_{gS}) = \mu((g^{-1}x)|_S)$ と定めると，${}_g\mu$ は A^{gS} から A への写像で $\tau(x)(g) = {}_g\mu(x|_{gS})$ をみたす． □

命題 3.19. G を群，A を集合とし，$\sigma\colon A^G \to A^G$ と $\tau\colon A^G \to A^G$ をセルオートマトンとすると，合成写像 $\sigma\circ\tau\colon A^G \to A^G$ はセルオートマトンとなる．さらに S と T をそれぞれ σ と τ の記憶集合とすると，$ST = \{st\colon s \in S, t \in T\}$ は $\sigma\circ\tau$ の記憶集合となる．

証明. 合成写像 $\sigma\circ\tau$ が G 同変であることと写像 $\kappa\colon A^{ST} \to A$ が存在し $\sigma\circ\tau(x)(1_G) = \kappa(x|_{ST})$ が成り立つことを示せば命題 3.6 より $\sigma\circ\tau$ はセルオートマトンであるといえる．σ，τ をセルオートマトンとすると，命題 3.5 よりそれぞれ G 同変であるので，$g \in G$，$x \in A^G$ に対し

$$\sigma\circ\tau(gx) = \sigma(\tau(gx)) = \sigma(g\tau(x)) = g\sigma(\tau(x)) = g(\sigma\circ\tau)(x)$$

が成り立ち，$\sigma \circ \tau$ は G 同変であるといえる．また，σ の S に付随する局所定義写像を $\mu : A^S \to A$，τ の T に付随する局所定義写像を $\nu : A^T \to A$ とし，A^{ST} から A への対応 κ を $\kappa(x|_{ST}) = \mu(\tau(x)|_S)$ で定めると，$s \in S$，$x, y \in A^G$ に対し $x|_{ST} = y|_{ST}$ ならば補題 3.18 より

$$\begin{aligned}
\tau(x)|_S(s) &= \tau(x)(s) \\
&= \nu((s^{-1}x)|_T) \\
&= {}_s\nu(x|sT) \\
&= {}_s\nu(y|sT) \qquad (sT \subseteq ST \text{ より}) \\
&= \nu((s^{-1}y)|_T) \\
&= \tau(y)(s) \\
&= \tau(y)|_S(s)
\end{aligned}$$

が成り立つので $\tau(x)|_S = \tau(y)|_S$ となり，対応 κ が写像であることがわかる．したがって $x \in A^G$ に対し，

$$\sigma \circ \tau(x)(1_G) = \mu(\tau(x)|_S) = \kappa(x|_{ST})$$

が成り立つ．以上のことから $\sigma \circ \tau : A^G \to A^G$ はセルオートマトンであり，ST はその記憶集合となっている．□

$CA(G;A)$ を A^G から A^G へのセルオートマトン全体からなる集合と定める．命題 3.19 と例 3.4 の 4 より次が成り立つ．

系 3.20. $\circ$ を写像の合成，$Id_{A^G} : A^G \to A^G$ を恒等写像とすると，組 $(CA(G;A), \circ, Id_{A^G})$ はモノイドをなす．

3.3　セルオートマトンの特徴付け

A が有限アルファベットであるときを考える．命題 2.11 より A が有限ならば A^G はコンパクトであった．このことから次の補題が成り立つ．

補題 3.21. G を群，A を有限アルファベットとし，A^G を直積離散空間とする．$\tau\colon A^G \to A^G$ が連続写像ならば G の有限部分集合 S と $\mu\colon A^S \to A$ が存在し任意の $x \in A^G$ に対し $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ が成り立つ．

証明. $\tau\colon A^G \to A^G$ を連続写像とすると，射影 $\pi_{1_G}\colon A^G \to A$ も連続写像だったので $\pi_{1_G} \circ \tau\colon A^G \to A$ は連続写像となる．$\{\tau(x)(1_G)\}$ は A の開集合なので $\pi_{1_G} \circ \tau$ による逆像 $(\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\})$ は A^G の開集合であり，

$$(\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\}) = \{y \in A^G\colon \tau(y)(1_G) = \tau(x)(1_G)\}$$

となるので $(\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\})$ は $x \in A^G$ の近傍である．したがって命題 2.9 より G の有限部分集合 Ω_x が存在して $V(x, \Omega_x) \subseteq (\pi_{1_G} \circ \tau)^{-1}(\{\tau(x)(1_G)\})$ となる．つまり

$$\begin{aligned} z \in V(x, \Omega_x) \quad &\Longrightarrow \quad z \in \{y \in A^G\colon \tau(y)(1_G) = \tau(x)(1_G)\} \\ &\Longleftrightarrow \quad \tau(x)(1_G) = \tau(z)(1_G) \end{aligned}$$

である．さらに $V(x, \Omega_x) \subseteq A^G$ であり，かつ $x \in A^G$ に対し $x \in V(x, \Omega_x)$ であることから $\bigcup_{x \in A^G} V(x, \Omega_x) = A^G$ が成り立つ．今 A は有限集合だったので，命題 2.11 より A^G はコンパクトである．したがって A^G の有限部分集合 F が存在して $\bigcup_{x \in F} V(x, \Omega_x) = A^G$ となる．$S = \bigcup_{x \in F} \Omega_x$ とし $y, z \in A^G$ が $y|_S = z|_S$ をみたすとする．$y \in A^G$ より $y \in \bigcup_{x \in F} V(x, \Omega_x)$ なので $x_0 \in F$ が存在して $y \in V(x_0, \Omega_{x_0})$ となり $\tau(y)(1_G) = \tau(x_0)(1_G)$ が成り立つ．また，$\Omega_{x_0} \subseteq S$ より $y|_{\Omega_{x_0}} = z|_{\Omega_{x_0}}$ であり，かつ $y \in V(x_0, \Omega_{x_0})$ より $y|_{\Omega_{x_0}} = x_0|_{\Omega_{x_0}}$ であるので $z|_{\Omega_{x_0}} = x_0|_{\Omega_{x_0}}$ すなわち $z \in V(x_0, \Omega_{x_0})$ となり $\tau(z)(1_G) = \tau(x_0)(1_G)$ が成り立つ．以上のことから A^S から A への対応 $x|_S \mapsto \tau(x)(1_G)$ は写像である．これを μ とかくことにすると $\mu(x|_S) = \tau(x)(1_G)$ が成り立つ．□

補題 3.21 の逆は成り立たない．次の例は $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が存在するが連続でない写像の例である．

例 3.22. 例 3.8 で与えた写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ について再び考える．この写像は $\tau(x)(0) = \mu(x|_{\{0\}})$ であることは例 3.8 ですでに確かめた．ここでは，τ が連続でないことを確認する．

$$V(\vec{a},\{2\}) = \{y \in A^G \colon \vec{a}|_{\{2\}} = y|_{\{2\}}\} = \bigcap_{g\in\{2\}} \pi_g^{-1}(\{\vec{a}(g)\})$$

なので $V(\vec{a},\{2\})$ は開集合である．$\tau^{-1}(V(\vec{a},\{2\}))$ が開集合でないことを示す．$x \in \tau^{-1}(V(\vec{a},\{2\}))$ とすると，$\tau(x) \in V(\vec{a},\{2\})$ より $\tau(x)|_{\{2\}} = \vec{a}|_{\{2\}}$ となるので $\tau(x) = \vec{a}$ である．したがって

$$\tau^{-1}(V(\vec{a},\{2\})) = \{x \in A^G \colon x(n) = b \text{ となる } n \text{ が無限にある} \wedge x(0) = a\}$$

と表せる．ここで $2^A = \{\{a\},\{b\},A,\emptyset\}$ なので

$$C \in \mathscr{F}_{A^G} \iff \begin{pmatrix} \exists g \in G.\ \pi_g^{-1}(\{a\}) = C & \text{または} \\ \exists g \in G.\ \pi_g^{-1}(\{b\}) = C & \text{または} \\ A^G = C & \text{または} \\ \emptyset = C & \end{pmatrix}$$

となる．したがって

$$B \in \mathscr{B}_{A^G} \iff \begin{pmatrix} \exists \Omega,\Omega' \subseteq G.\ \Omega,\Omega' \text{は有限} \\ B = (\bigcap_{g\in\Omega} \pi_g^{-1}(\{b\})) \cap (\bigcap_{g\in\Omega'} \pi_g^{-1}(\{a\})) \end{pmatrix}$$

となる．ここで空でない $U \subseteq A^G$ が開集合でないための十分条件は空でない任意の $B \in \mathscr{B}_{A^G}$ に対し $B \not\subseteq U$ となることである．G の有限部分集合 Ω,Ω' が $\Omega \cap \Omega' \neq \emptyset$ ならば

$$(\bigcap_{g\in\Omega} \pi_g^{-1}(\{b\})) \cap (\bigcap_{g\in\Omega'} \pi_g^{-1}(\{a\})) = \emptyset$$

となるので G の有限部分集合で $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$ となる Ω,Ω' のみを考慮する．そのような Ω ごとに $x_\Omega \in A^G$ を

$$x_\Omega(g) = \begin{cases} b & g \in \Omega \\ a & \text{その他} \end{cases}$$

とすると $x_\Omega \in (\bigcap_{g\in\Omega}\pi_g^{-1}(\{b\}))\cap(\bigcap_{g\in\Omega'}\pi_g^{-1}(\{a\}))$ かつ $x_\Omega \notin \tau^{-1}(V(\vec{a},\{2\}))$ となるので $(\bigcap_{g\in\Omega}\pi_g^{-1}(\{b\}))\cap(\bigcap_{g\in\Omega'}\pi_g^{-1}(\{a\})) \not\subseteq \tau^{-1}(V(\vec{a},\{2\}))$ が成り立つ．つまり $\tau^{-1}(V(\vec{a},\{2\}))$ は開集合でない．したがって τ は連続ではない．

アルファベットが有限の場合，群上のセルオートマトンは次のように特徴付けられる．

定理 3.23. G を群，A を有限アルファベットとし，$\tau\colon A^G \to A^G$ を写像，A^G は直積離散空間とする．このとき次の 2 つは同値である．

1. τ はセルオートマトンである
2. τ は連続写像かつ G 同変である

証明. 1 を仮定すると，命題 3.5 と命題 3.13 より 2 が成り立つ．この逆を示すには，命題 3.6 より $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ が成り立つことを示せばよい．2 を仮定すると定理 3.21 より 1 が成り立つ．　□

次の例は連続かつ G 同変であっても $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が存在しないのでセルオートマトンにならない写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ があることを示している．この例から命題 3.23 は A の有限性を仮定しないと成り立たないことがわかる．

例 3.24. 例 3.11 で与えた写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ について再び考える．この写像 τ は G 同変だが $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が存在しないのでセルオートマトンでないことは例 3.11 ですでに確かめた．また，例 3.16 においてこの写像 τ が連続であることも例 3.16 すでに確かめた．つまり，この写像 τ は連続かつ G 同変であるが，セルオートマトンではない．

例 3.11 で与えた写像 τ は直積離散空間 A^G 上の連続写像であるが直積離散一様空間上 A^G 上の一様連続写像ではないことを確認しよう．

例 3.25. この写像 τ が連続写像であることは例 3.16 ですでに確かめた．ここでは，この写像 τ が一様連続でないことを確認する．A^G の近縁 $W_{\{2\}}$ を考える．$(x,y) \in (\tau \times \tau)^{-1}(W_{\{2\}})$ とすると，

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in (\tau \times \tau)^{-1}(W_{\{2\}}) &\iff (\tau \times \tau)(x,y) \in W_{\{2\}} \\
&\iff \tau(x)|_{\{2\}} = \tau(y)|_{\{2\}} \\
&\iff \tau(x)(2) = \tau(y)(2)
\end{aligned}
$$

となる．ここで S を G の有限部分集合とし，$x_S, y_S \in A^G$ を $n \in G$ に対し

$$
x_S(n) = \begin{cases} 2 & (g \in S \text{ の場合}) \\ t_0 & (g = 2 \text{ の場合}) \\ t_1 & (g \in G \setminus (S \cup \{2\}) \text{ の場合}) \end{cases}
$$

$$
y_S(n) = \begin{cases} 2 & (g \in S \text{ の場合}) \\ t_0 & (g = 2 \text{ の場合}) \\ t_2 & (g \in G \setminus (S \cup \{2\}) \text{ の場合}) \end{cases}
$$

とする．ただし t_0 は $S \cup \{2\}$ の最大値，t_1, t_2 は $G \setminus (S \cup \{2\})$ の相異なる 2 つの元とする．すると $(x_S, y_S) \in W_S$ であり，かつ $t_0 + 2 \in G \setminus (S \cup \{2\})$ であることから

$$
\begin{aligned}
\tau(x_S)(2) &= x_S(x_S(2)+2) = x_S(t_0+2) = t_1 \\
\tau(y_S)(2) &= y_S(y_S(2)+2) = y_S(t_0+2) = t_2
\end{aligned}
$$

となるので $\tau(x_S)(2) \neq \tau(y_S)(2)$ すなわち $(\tau(x_S), \tau(y_S)) \notin (\tau \times \tau)^{-1}(W_{\{2\}})$ が成り立つ．したがって $W_S \not\subseteq (\tau \times \tau)^{-1}(W_{\{2\}})$ となり，$(\tau \times \tau)^{-1}(W_{\{2\}})$ は A^G の近縁でないので τ は一様連続ではない.

一様連続性を用いることにより次をえる.

補題 3.26. G を群，A を直積離散一様空間とし，A^G を直積離散一様空間とする．$\tau\colon A^G \to A^G$ が一様連続写像ならば G の有限部分集合 S と $\mu\colon A^S \to A$ が存在し任意の $x \in A^G$ に対し $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ が成り立つ．

証明. 命題 2.19 より，G の有限部分集合 Ω に対し $W_\Omega = \{(x,y) \in A^G \times A^G\colon x|_\Omega = y|_\Omega\}$ は A^G の近縁であり，τ を一様連続とすると A^G の近縁 V が存在して $(\tau\times\tau)(V) \subseteq W_\Omega$ となる．V は A^G の近縁であることから命題 2.19 より G の有限部分集合 S が存在して $W_S \subseteq V$ となるので

$$(\tau\times\tau)(W_S) \subseteq (\tau\times\tau)(V) \subseteq W_\Omega$$

が成り立つ．ここで $(z,w) \in (\tau\times\tau)(W_S)$ とすると，$(x,y) \in W_S$ が存在して $(\tau\times\tau)(x,y) = (z,w)$ であるので $(\tau(x),\tau(y)) \in W_\Omega$ となり，$x|_S = y|_S$ ならば $\tau(x)|_\Omega = \tau(y)|_\Omega$ が成り立つ．したがって特に $\Omega = \{1_G\}$ の場合を考えると対応 $x|_S \mapsto \tau(x)(1_G)$ は写像であり，これを μ とかくことにすると $\mu(x|_S) = \tau(x)(1_G)$ をみたす．　□

命題 2.16 より一様連続写像は連続写像でもあるので，例 3.22 は補題 3.26 の逆が一般的に成り立たないことを示している．次の例は補題 3.26 の結論に加えて連続性を仮定しても一様連続性を導くことはできないことを示している．

例 3.27. 例 3.9 で与えた写像 $\tau\colon A^G \to A^G$ を再び考える．この写像 τ が $\tau(x)(0) = \mu(x|_{\{0\}})$ であることは例 3.9 で確かめた．また連続であることは例 3.15 で確かめた．例 3.25 と同様に $W_{\{2\}} = \{(x,y) \in A^G \times A^G\colon x|_{\{2\}} = y|_{\{2\}}\}$ と定めると命題 2.19 より $W_{\{2\}}$ は A^G の近縁であるが例 3.25 と同じ理由で $(\tau\times\tau)^{-1}(W_{\{2\}})$ は A^G の近縁でないので τ は一様連続ではない．

一般に群上のセルオートマトンは次のように特徴づけられる．

定理 3.28. G を群，A を直積離散一様空間とし，$\tau\colon A^G \to A^G$ を写像，A^G を直積離散一様空間とする．このとき次の二つは同値である．

1. τ はセルオートマトンである

2. τ は一様連続かつ G 同変である

証明. 1 を仮定し，S を τ の記憶集合，V を A^G の近縁とする．$g \in G$ に対し $gS = \{gs \colon s \in S\}$ とすると，補題 3.18 より $x, y \in A^G$ に対し $x|_{gS} = y|_{gS}$ ならば $\tau(x)(g) = \tau(y)(g)$ が成り立ち，命題 2.19 より G の有限部分集合 Ω が存在して $W_\Omega \subseteq V$ である．これらより $g \in \Omega$ に対し $x|_{gS} = y|_{gS}$ ならば $\tau(x)(g) = \tau(y)(g)$ となる．よって $\Omega S = \{gs \colon g \in \Omega, s \in S\}$ とすると $(x, y) \in W_{\Omega S}$ ならば $(\tau(x), \tau(y)) \in W_\Omega$ が成り立つ．$(z, w) \in (\tau \times \tau)(W_{\Omega S})$ とすると，$(x, y) \in W_{\Omega S}$ が存在して $(\tau \times \tau)(x, y) = (z, w)$ である．ここで $(x, y) \in W_{\Omega S}$ より $(\tau(x), \tau(y)) \in W_\Omega$ となるので

$$(\tau \times \tau)(W_{\Omega S}) \subseteq W_\Omega \subseteq V$$

が成り立ち，τ は一様連続である．また命題 3.5 より τ は G 同変である．2 を仮定すると，補題 3.26 より 1 が成り立つ．

□

命題 2.16 より一様空間の間の写像が一様連続であるときそれぞれの一様構造に付随する位相に関して連続であり，定理 2.18 より一様空間の間の写像がそれぞれの一様構造に付随する位相に関して連続でありかつ定義域がコンパクトであるとき一様連続である．A^G 上の直積離散一様構造に付随する位相は直積離散位相であり，定理 2.11 より A が有限ならば A^G はコンパクトだった．つまり，定理 3.23 において τ は一様連続であるので，定理 3.23 は定理 3.28 の特別な場合といえる．

次の例は一様連続であるが G 同変でないのでセルオートマトンにならない写像の例である．

例 3.29. 例 3.7 で与えた写像 $\tau \colon A^G \to A^G$ を再び考える．この写像 τ は $\mu(x|_{\{0\}}) = \tau(x)(0)$ だが G 同変でないのでセルオートマトンでないことは例 3.7 ですでに確か

めた．ここでは，この写像τが一様連続であることを確認する．WをA^Gの近縁とすると，命題2.19よりGの有限部分集合Ωが存在して$W_\Omega \subseteq W$である．$(x,y) \in W_\Omega$とすると，

$$\begin{aligned}(x,y) \in W_\Omega &\iff x|_\Omega = y|_\Omega \\ &\iff \forall g \in \Omega.\ x(g) = y(g) \\ &\iff \forall g \in \Omega.\ x(g) + \overline{g} = y(g) + \overline{g} \\ &\iff \forall g \in \Omega.\ \tau(x)(g) = \tau(y)(g) \\ &\iff (\tau(x), \tau(y)) \in W_\Omega\end{aligned}$$

となる．さらに$(\tau \times \tau)(W_\Omega) = \{(\tau(x), \tau(y)) \colon (x,y) \in W_\Omega\}$なので$(\tau \times \tau)(W_\Omega) \subseteq W_\Omega$である．したがって

$$(\tau \times \tau)(W_\Omega) \subseteq W_\Omega \subseteq W$$

が成り立ちτは一様連続である．

第4章　まとめ

文献 [7] には群上のセルオートマトンを特徴付ける性質が3つ紹介されている．本論文では命題3.6，定理3.23，定理3.28がこれにあたる．ここで用いられた $\tau\colon A^G \to A^G$ の性質は

G.　τ は G 同変である

L.　$\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ となる有限部分集合 $S \subseteq G$ と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が存在する

C.　τ は直積離散空間の間の連続写像である

U.　τ は直積離散一様空間の間の一様連続写像である

の4つである．命題2.16よりUならばC，補題3.26よりUならばLという依存関係があることがわかる．またアルファベットが有限の場合は補題3.21よりCならばLという依存関係も成り立つ．

さらに，これまでに紹介した命題，定理および例によりこれら4つの性質の間の相互関係は次の図4.1のように整理できることがわかった．CAはセルオートマトンであることを表す．矢印は含意を表す．さらに実線で描かれた矢印は常に成り立つ性質，点線で描かれた矢印は常に成り立つとは限らない性質を表している．またラベル付けされている矢印にはそれぞれを説明している定理，命題および反例を明示しており，ラベル付けされていない矢印は明らかに成り立つ性質であることを意味している．GからG∧Cへの点線は例3.10でラベル付けされている．例3.10は性質GをみたすがLをみたさない写像を与えているが，その連続性については議論していない．しかし，例3.10はアルファベットが有限の場合を考えていて，しかも $\tau(x)(1_G) = \mu(x|_S)$ をみたす群 G の有限部分集合 S と写像 $\mu\colon A^S \to A$ が

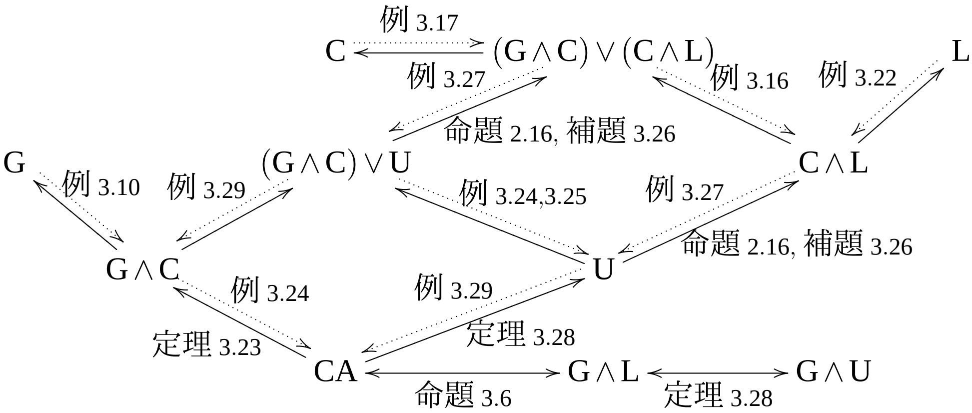


図 4.1: 特徴付けに用いられる性質たちの相互関係

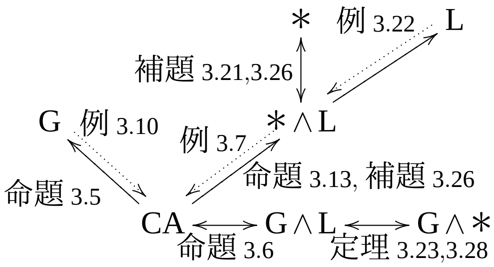


図 4.2: 特徴付けに用いられる性質たちの相互関係 (有限アルファベットの場合)

存在しないので補題 3.21 より連続写像でないことがわかる．

また，アルファベットが有限の場合，命題 2.16 と定理 2.18 より性質 C と性質 U は同値であるため性質たちの相互関係は次の図 4.2 のとおりになる．図中の記号の意味は図 4.1 と同様である．ただし $*$ には C または U のいずれかが入る．

謝辞

古澤仁先生には，本論文を作成するにあたり数多くの助言を与えてくださったこと，ならびに学部時代からこれまで並々ならぬご指導賜りましたことを深く感謝いたします.

本論文の審査を担当していただいた種市信裕先生，松本詔先生に深く御礼申し上げます.

伊藤稔先生には本論文作成のきっかけとなるコメントをいただきました．河原康雄先生（九州大学名誉教授），西澤弘毅先生（神奈川大学），高井利憲先生（奈良先端科学技術大学院大学），津曲紀宏先生（崇城大学）は本研究内容に関して数々の有益なアドバイスをくださいました．心より御礼申し上げます.

他諸先生方，学科事務室，他研究室の皆様には，折に触れて様々な形でサポートしていただきましたことを深く感謝いたします.

最後に私事になりますが，これまで支えてくれた家族，温かい励ましを送ってくれた友人に感謝します.

参考文献

[1] I.M. James. Topological and Uniform Spaces. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 1987.

[2] I.M. James. Introduction to Uniform Spaces. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 144. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[3] Joel L. Schiff（著）. 足立進, 礒川悌次郎, 今井克暢, 小松崎俊彦, 李佳（訳）. 梅尾博司, Ferdinand Peper（監訳）. セルオートマトン. 共立出版, 2011.

[4] J.R. Isbell. Uniform Spaces. Mathematical Surveys and Monographs Volume 12 American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1964.

[5] Stephen Wolfram. Cellular Automata and Complexity. Addison-Wesley, 1994.

[6] Stephen Wolfram. A New Kind of Science. Wolfram Media, Inc. , 2002.

[7] Tullio Ceccherini-Silberstein, Michel Coornaert. Cellular Automata and Groups. Springer, 2010.

[8] 加藤恭義, 光成友孝, 築山洋. セルオートマトン法 –複雑系の自己組織化と超並列処理–. 森北出版, 1998.

[9] 鎌田正良. 集合と位相, 現代数学ゼミナール 8. 近代科学社, 1989.

[10] 小林貞一, 逸見豊. 集合と位相空間の基礎・基本. 牧野書店, 2010.

[11] 白谷克巳. 代数学入門. 森北出版, 1991.

[12] 永尾汎. 代数学, 新数学講座 4. 朝倉書店, 1983.

[13] 西野哲郎, 若月光夫, 後藤隆彰. 応用オートマトン工学. コロナ社, 2012.

[14] 森下信. セルオートマトン複雑系の具象化. 養賢堂, 2003.

[15] 雪江明彦. 群論入門, 代数学 1. 日本評論社, 2010.

付 録A

ここでは文献 [7] の第 1 章で紹介されている群上のセルオートマトンの性質のなかで特徴付けとは直接関係のない性質の一部を述べる．

A.1 周期様相

G を群，A を集合とする．H を G の部分群とすると，様相 $x \in A^G$ が H で固定されているとき，すなわち各 $h \in H$ に対し $hx = x$ が成り立つとき，様相 x を H **周期**であるという．H 周期様相全体からなる集合を $\mathrm{Fix}(H)$ と書くことにする．

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Fix}(H) &\iff \forall h \in H.\ hy = y \\ &\iff \forall h \in H.\ y \in \{x \in A^G \colon hx = x\} \\ &\iff y \in \textstyle\bigcap_{h \in H} \{x \in A^G \colon hx = x\} \end{aligned}$$

より，$\mathrm{Fix}(H) = \bigcap_{h \in H} \{x \in A^G \colon hx = x\}$ が成り立つ．$g \in G$ とシフト作用 $\varphi \colon G \times A^G \to A^G$ に対して $\varphi_g(x) = gx$ であったので H 周期様相全体からなる集合 $\mathrm{Fix}(H)$ はどんな $h \in H$ についても φ_h の不動点となるような様相の集合といえる．つまり

$$x \in \mathrm{Fix}(H) \iff \forall h \in H.\ \varphi_h(x) = x$$

である．

例 A.1.

1. 群 G の単位元 1_G だけからなる集合 $\{1_G\}$ は G の部分群であった．定義より，$\mathrm{Fix}(\{1_G\}) \subseteq A^G$ である．一方，$x \in A^G$ に対して，$1_G x = x$ が成り立つので $x \in \mathrm{Fix}(\{1_G\})$ である．つまり，$A^G \subseteq \mathrm{Fix}(\{1_G\})$ となる．以上より，$\mathrm{Fix}(\{1_G\}) = A^G$ が成り立つ．

2. 群 G は自身の部分群であった．$x \in \mathrm{Fix}(G)$ とすると，任意の $g \in G$ に対し，$gx = x$ である．ゆえに，どんな $g \in G$ に対しても

$$\begin{aligned} x(g) &= gx(g) \\ &= x \circ L_{g^{-1}}(g) \\ &= x(g^{-1}g) \\ &= x(1_G) \end{aligned}$$

となるので，$\mathrm{Fix}(G)$ の元は定値様相であるといえる．また，x を定値様相とすると，任意の $g \in G$ に対して，$x(g) = x(1_G)$ である．ゆえに，

$$\begin{aligned} x(g) &= x(1_G) \\ &= x(g^{-1}g) \\ &= x \circ L_{g^{-1}}(g) \\ &= gx(g) \end{aligned}$$

となり，$x = gx$ より，$x \in \mathrm{Fix}(G)$ が成り立つ．つまり，$\mathrm{Fix}(G)$ は定値様相全体からなる集合である．さらに，このことから，$\mathrm{Fix}(G)$ は集合として A と同型であるといえる．

3. $\mathbb{Z}$ は加法に関して可換群であり，$n \in \mathbb{Z}$ に対して $n\mathbb{Z}$ はその部分群であった．n を正の整数とし，$x \in \mathrm{Fix}(n\mathbb{Z})$，$i \in \mathbb{Z}$ とすると，

$$\begin{aligned} x(i+n) &= x \circ L_n(i) \\ &= -nx(i) \\ &= x(i) \qquad (-n \in n\mathbb{Z}\text{ より}) \end{aligned}$$

である．また，様相 $x \in A^{\mathbb{Z}}$ が任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して $x(i+n) = x(i)$ を満たすならば，以下より，任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して $nmx = x$ が成り立つ．$m = 0$ のとき

$$n0x = 0x = 1_{\mathbb{Z}}x = x$$

が成り立つ．k を非負整数とし，$m=k$ のとき $nmx=x$ が成り立つとすると，

$$\begin{aligned} n(k+1)x &= (nk+n)x \\ &= (n+nk)x \\ &= n(nkx) \\ &= nx \qquad \text{(帰納法の仮定より)} \end{aligned}$$

であり，さらに $i\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$\begin{aligned} nx(i) &= x(-n+i) \\ &= x((-n+i)+n) \\ &= x(i) \end{aligned}$$

であることから，$n(k+1)x=x$ である．したがって m が任意の正整数のとき $nmx=x$ が成り立つ．m が負のとき，つまり，正の整数 k が存在して $m=-k$ のときは

$$\begin{aligned} n(-k)x &= -nkx \\ &= (-nk)nkx \qquad (nk\text{ は正の整数なので}) \\ &= (-nk+nk)x \\ &= 0x \\ &= 1_{\mathbb{Z}}x \\ &= x \end{aligned}$$

となることから，m が負の整数のとき $nmx=x$ が成り立つ．以上のことから，$\mathrm{Fix}(n\mathbb{Z})$ は任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対して $x(i)=x(i+n)$ が成り立つ様相全体の集合である．

補題 A.2. 群 G の元 g に対して A^G の部分集合 $\{x\in A^G\colon gx=x\}$ は直積離散空間 A^G の閉集合である．

証明. $g\in G$ に対して $y\in\{x\in A^G\colon gx=x\}^c$ とすると，$gy\neq y$ である．命題 2.10 より A^G はハウスドルフ空間だったので $gy\in U_{gy}$，$y\in V_y$ かつ $U_{gy}\cap V_y=\emptyset$ となる開集合

U_{gy}，V_y が存在する．命題3.1 よりシフト作用 $\varphi\colon G\times A^G\to A^G$ は連続写像だったので φ_g は連続となり，${\varphi_g}^{-1}(U_{gy})$ も開集合である．さらに $\varphi_g(y)=gy$ かつ $gy\in U_{gy}$ より $y\in{\varphi_g}^{-1}(U_{gy})$ であるので，$y\in{\varphi_g}^{-1}(U_{gy})\cap V_y$ となる．ここで $O_y={\varphi_g}^{-1}(U_{gy})\cap V_y$ とすると，O_y は y の近傍であるので

$$\{x\in A^G\colon gx=x\}^c\subseteq\bigcup_{y\in\{x\in A^G\colon gx=x\}^c}O_y$$

である．$x\in O_y$ とすると，$x\in{\varphi_g}^{-1}(U_{gy})$ かつ $x\in V_y$ となる．すなわち $\varphi_g(x)\in U_{gy}$ かつ $x\in V_y$ であり，$U_{gy}\cap V_y=\emptyset$ なので

$$gx=\varphi_g(x)\neq x$$

である．よって，$y\in\{x\in A^G\colon gx=x\}^c$ に対し $O_y\subseteq\{x\in A^G\colon gx=x\}^c$ が成り立ち，このことから

$$\bigcup_{y\in\{x\in A^G\colon gx=x\}^c}O_y\subseteq\{x\in A^G\colon gx=x\}^c$$

となる．以上より

$$\bigcup_{y\in\{x\in A^G\colon gx=x\}^c}O_y=\{x\in A^G\colon gx=x\}^c$$

が成り立ち，$\bigcup_{y\in\{x\in A^G\colon gx=x\}^c}O_y$ は開集合なので $\{x\in A^G\colon gx=x\}$ は閉集合である． □

命題 A.3. G を群とし，H を G の部分群とする．$\mathrm{Fix}(H)$ は直積離散空間 A^G の閉集合である．

証明. 補題 A.2 より G の部分群 H の元 h に対して $\{x\in A^G\colon hx=x\}^c$ は A^G の開集合である．したがって $\bigcup_{h\in H}\{x\in A^G\colon hx=x\}^c$ は A^G の開集合である．さらに

$$\begin{aligned}\textstyle\bigcup_{h\in H}\{x\in A^G\colon hx=x\}^c &= \left(\textstyle\bigcap_{h\in H}\{x\in A^G\colon hx=x\}\right)^c\\ &= \mathrm{Fix}(H)^c\end{aligned}$$

が成り立つ．以上のことから $\mathrm{Fix}(H)$ は A^G の閉集合である． □

群 G から商集合 $H\backslash G=\{Hg\colon g\in G\}$ への標準的な全射

$$\rho\colon G\to H\backslash G$$

$$g\mapsto Hg$$

を考える．$y\in A^{H\backslash G}$ すなわち $y\colon H\backslash G\to A$ とすると，合成写像 $y\circ\rho\colon G\to A$ は様相であり，$g\in G$，$h\in H$ に対して

$$\begin{aligned}(h(y\circ\rho))(g) &= y\circ\rho(h^{-1}g)\\ &= y(\rho(h^{-1}g))\end{aligned}$$

を満たす．ここで $(h^{-1}g)g^{-1}=h^{-1}$ かつ $h^{-1}\in H$ なので，$g\sim_R^H h^{-1}g$ である．つまり $h^{-1}g\in Hg$ なので $\rho(h^{-1}g)=Hg=\rho(g)$ となり，

$$\begin{aligned}y(\rho(h^{-1}g)) &= y(\rho(g))\\ &= y\circ\rho(g)\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，$y\circ\rho\in\mathrm{Fix}(H)$ である．

命題 A.4. H を G の部分群とし，$\rho\colon G\to H\backslash G$ を標準的な全射とする．$y\in A^{H\backslash G}$ に対して $\rho^*(y)=y\circ\rho$ で定まる写像 $\rho^*\colon A^{H\backslash G}\to\mathrm{Fix}(H)$ は全単射である．

証明. （単射性）$y_1,y_2\in A^{H\backslash G}$ とし，$\rho^*(y_1)=\rho^*(y_2)$ を満たすとする．$g\in G$ に対して $y_1\circ\rho(g)=y_2\circ\rho(g)$ であり，ρ は全射である．したがって $y_1=y_2$ となり，単射性がいえた．

（全射性）$x\in\mathrm{Fix}(H)$ とし，対応 $Hg\mapsto x(g)$ を考える．$Hg=Hg'$ とすると，$g\sim_R^H g'$ なので $g'g^{-1}\in H$ が成り立つ．$x\in\mathrm{Fix}(H)$ なので

$$\begin{aligned}x(g') &= g'g^{-1}x(g')\\ &= x((g'g^{-1})^{-1}g')\\ &= x(g(g')^{-1}g')\\ &= x(g)\end{aligned}$$

より $Hg = Hg'$ ならば $x(g) = x(g')$ が成り立つ．つまりこの対応は $H\backslash G$ から A への写像である．この写像を y と書くことにすると，

$$(\rho^*(y))(g) = y \circ \rho(g) = y(Hg) = x(g)$$

なので $\rho^*(y) = x$ となり，全射性がいえた． $\square$

系 A.5. A を有限集合とし，H を $[G\colon H]$ が有限となるような G の部分群とする．このとき $\mathrm{Fix}(H)$ は有限集合で $|\mathrm{Fix}(H)| = |A|^{[G\colon H]}$ が成り立つ．

証明. 命題 A.4 より $\mathrm{Fix}(H) \cong A^{H\backslash G}$ となるので，$|\mathrm{Fix}(H)| = |A^{H\backslash G}|$ である．$|A^{H\backslash G}| = |A|^{|H\backslash G|}$ かつ $[G\colon H] = |H\backslash G|$ より $|\mathrm{Fix}(H)| = |A|^{[G\colon H]}$ が成り立つ． $\square$

例えば，元の個数が k の有限集合 A と正の整数 n に対する $\mathbb{Z}$ の部分群 $n\mathbb{Z}$ について考えると系 A.5 と例 2.22 より $|\mathrm{Fix}(n\mathbb{Z})| = |A|^{[\mathbb{Z}\colon n\mathbb{Z}]} = k^n$ となる．

命題 A.6. N を群 G の正規部分群とすると，$\mathrm{Fix}(N)$ は A^G の G 不変部分集合である．

証明. $\mathrm{Fix}(N) = \{\varphi_g(y) : y \in \mathrm{Fix}(N)\}$ を示せばよい．$1_G \in G$ より

$$\mathrm{Fix}(N) \subseteq \{\varphi_g(y) : y \in \mathrm{Fix}(N)\}$$

である．$\{\varphi_g(y) : y \in \mathrm{Fix}(N)\} \subseteq \mathrm{Fix}(N)$ を示す．$\varphi_g(x) \in \{\varphi_g(y) : y \in \mathrm{Fix}(N)\}$ とする．$h \in N$ とすると，

$$\begin{aligned} h \in N &\iff (hg)g^{-1} \in N \\ &\iff hg \in Ng \\ &\iff hg \in gN \qquad (\text{Nは正規部分群より}) \\ &\iff g^{-1}hg \in N \end{aligned}$$

である．したがって $h' = g^{-1}hg$ とおくと $hg = gh'$ である．

$$\begin{aligned} h\varphi_g(x) &= hgx \\ &= gh'x \\ &= gx \\ &= \varphi_g(x) \end{aligned}$$

となるので $\varphi_g(x) \in \mathrm{Fix}(N)$ である．以上のことから $\mathrm{Fix}(N)$ は A^G の G 不変部分集合であるといえる． □

命題 A.6 より任意の $g \in G$ と $x \in \mathrm{Fix}(N)$ に対し $gx \in \mathrm{Fix}(N)$ となるので，対応 $(g,x) \mapsto gx$ は G の $\mathrm{Fix}(N)$ への作用である．同様に，対応 $(gN,x) \mapsto gx$ も G/N の $\mathrm{Fix}(N)$ への作用である．

命題 A.7. N を G の部分群とし，標準的な全射的準同型を $\rho\colon G \to G/N$ とすると，$\rho^*(y) = y \circ \rho$ で定まる写像 $\rho^*\colon A^{G/N} \to \mathrm{Fix}(N)$ は G/N 同変かつ全単射である．

証明. 命題 A.4 より，ρ^* は全単射である．いま G/N の $A^{G/N}$ への作用 φ と G/N の $\mathrm{Fix}(N)$ への作用 φ' をそれぞれ

$$\varphi_{gN}(x) = gNx, \quad \varphi'_{gN}(x) = gx$$

とし，

$$\begin{array}{ccc} A^{G/N} & \xrightarrow{\varphi_{gN}} & A^{G/N} \\ {\scriptstyle \rho^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho^*} \\ \mathrm{Fix}(N) & \xrightarrow[\varphi'_{gN}]{} & \mathrm{Fix}(N) \end{array}$$

が可換になることを示せばよい．$g' \in G$ に対し，

$$\begin{aligned}
\rho^*(\varphi_{gN}(y))(g') &= \rho^*(gNy)(g') \\
&= (gNy) \circ \rho(g') \\
&= gNy(\rho(g')) \\
&= y(g^{-1}N\rho(g')) \\
&= y((\rho(g))^{-1}\rho(g')) \\
&= y(\rho(g^{-1})\rho(g')) \\
&= y(\rho(g^{-1}g')) \qquad (\rho\text{が準同型より}) \\
&= y \circ \rho(g^{-1}g') \\
&= \rho^*(y)(g^{-1}g') \\
&= g\rho^*(y)(g')
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (g\rho^*(y))(g') \\
&= \varphi'_{gN}(\rho^*(y))(g')
\end{aligned}
$$

となり ρ^* は G/N 同変といえる． □

例 A.8. 群 $\mathbb{Z}$ と標準的な全射的準同型 $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を考える．A を集合とし，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の $A^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ への作用 φ と $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の $\mathrm{Fix}(n\mathbb{Z})$ への作用 φ' をそれぞれ

$$\varphi_{\overline{a}}(x) = \overline{a}x, \quad \varphi'_{\overline{a}}(x) = ax$$

とすると，$\rho^*\colon A^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \to \mathrm{Fix}(n\mathbb{Z})$ は $m \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$\rho^*(\varphi_{\overline{a}}(x))(m) = \varphi'_{\overline{a}}(\rho^*(x))(m)$$

が成り立つ．つまり

$$
\begin{tikzcd}
A^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \arrow[r, "\varphi_{\overline{a}}"] \arrow[d, "\rho^*"'] & A^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \arrow[d, "\rho^*"] \\
\mathrm{Fix}(n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi'_{\overline{a}}"'] & \mathrm{Fix}(n\mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

は可換になる．したがって ρ^* は全単射かつ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 同変である．

命題 A.9. $\tau\colon A^G \to A^G$ をセルオートマトン，H を G の部分群とする．このとき $\tau(\mathrm{Fix}(H)) \subseteq \mathrm{Fix}(H)$ が成り立つ．

証明. $x \in \mathrm{Fix}(H)$ とする．命題 3.5 より，

$$h\tau(x) = \tau(hx) = \tau(x)$$

が成り立つので，$\tau(x) \in \mathrm{Fix}(H)$ である． □

A.2 極小記憶集合

図 A.1 に示す局所定義写像 $\mu\colon \{0,1\}^{\{-1,0,1\}} \to \{0,1\}$ により与えられる群 $\mathbb{Z}$ とアルファベット $\{0,1\}$ 上のセルオートマトンと図 A.2 に示す局所定義写像 $\nu\colon \{0,1\}^{\{0,1\}} \to$

$\{0,1\}$ により与えられる群 $\mathbb{Z}$ とアルファベット $\{0,1\}$ 上のセルオートマトンは等しい．

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &0&\ \\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&0\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &0&\ \\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &1&\ \\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&0&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &1&\ \\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&0\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &1&\ \\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&0\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &1&\ \\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&1&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &0&\ \\\hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{\mu} \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ &0&\ \\\hline\end{array}$$

図 A.1: 局所定義写像 $\mu\colon \{0,1\}^{\{-1,0,1\}} \to \{0,1\}$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline\end{array} \xrightarrow{\nu} \begin{array}{|c|c|}\hline 0&\ \\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{\nu} \begin{array}{|c|c|}\hline 1&\ \\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline\end{array} \xrightarrow{\nu} \begin{array}{|c|c|}\hline 1&\ \\\hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{\nu} \begin{array}{|c|c|}\hline 0&\ \\\hline\end{array}$$

図 A.2: 局所定義写像 $\nu\colon \{0,1\}^{\{0,1\}} \to \{0,1\}$

一般に G を群，A を集合とし，$\tau\colon A^G \to A^G$ をセルオートマトン，S を τ の記憶集合，$\mu\colon A^S \to A$ を S に付随する局所定義写像とする．S' を $S \subseteq S'$ となる G の有限部分集合，$p\colon A^{S'} \to A^S$ を $A^{S'}$ から A^S への射影とし，$\mu'\colon A^{S'} \to A$ を $\mu' = \mu \circ p$ で定めると，

$$\tau(x)(g) = \mu((g^{-1}x)|_S) = \mu(p((g^{-1}x)|_{S'})) = \mu \circ p((g^{-1}x)|_{S'}) = \mu'((g^{-1}x)|_{S'})$$

が成り立つので，S' が τ の記憶集合であることがわかる [1]．したがって τ の記憶集合はただ 1 つだけ存在するというわけではないといえる．しかしながら，これ以

[1]注意 3.3 の 2 より S' に付随する局所定義写像は $\mu \circ p$ の他にはない．

降に示すことにより濃度が極小となる記憶集合はただ 1 つだけ存在することがいえる．

補題 A.10. $\tau\colon A^G \to A^G$ をセルオートマトン，S_1, S_2 を τ の記憶集合とすると，$S_1 \cap S_2$ も τ の記憶集合となる．

証明. 命題 3.6 より τ はセルオートマトンなので G 同変である．S_1 に付随する局所定義写像を $\mu_1\colon A^{S_1} \to A$，$S_2$ に付随する局所定義写像を $\mu_2\colon A^{S_2} \to A$ とし，$A^{S_1 \cap S_2}$ から A への対応 $x|_{S_1 \cap S_2} \mapsto \tau(x)(1_G)$ を考えることにする．$x, y \in A^G$ が $x|_{S_1 \cap S_2} = y|_{S_1 \cap S_2}$ をみたすならば，$x|_{S_1} = z|_{S_1}$ かつ $y|_{S_2} = z|_{S_2}$ をみたす $z \in A^G$ が存在し，μ_1 と μ_2 がそれぞれ S_1 と S_2 に付随する局所定義写像であることから，

$$\begin{aligned} \tau(x)(1_G) &= \mu_1(x|_{S_1}) = \mu_1(z|_{S_1}) = \tau(z)(1_G) \\ &= \mu_2(z|_{S_2}) = \mu_2(y|_{S_2}) = \tau(y)(1_G) \end{aligned}$$

が成り立つのでこの対応は写像であるといえる．この $A^{S_1 \cap S_2}$ から A への対応を μ とすると，$\mu(x|_{S_1 \cap S_2}) = \tau(x)(1_G)$ が成り立つ．以上のことから $S_1 \cap S_2$ は τ の記憶集合となる． □

命題 A.11. $\tau\colon A^G \to A^G$ をセルオートマトンとすると，濃度が極小となる τ の記憶集合 $S_0 \subseteq G$ がただ 1 つ存在する．さらに，S を G の有限部分集合とすると，S が τ の記憶集合であることと $S_0 \subseteq S$ が成り立つことは同値である．

証明. S_0 を濃度が極小となる τ の記憶集合とし，$S_1 \subseteq G$ を $|S_0| = |S_1|$ となる τ の記憶集合と仮定すると，補題 A.10 より $S_0 \cap S_1$ は τ の記憶集合である．さらに S_0 の濃度が極小であることから $|S_0| \leq |S_0 \cap S_1|$ となり $S_0 = S_0 \cap S_1$ が成り立つ．したがって $S_0 = S_1$ となる．また，S を τ の記憶集合と仮定すると，補題 A.10 より $S_0 \cap S$ は τ の記憶集合である．さらに S_0 の濃度が極小であることから $|S_0| \leq |S_0 \cap S|$ となり $S_0 = S_0 \cap S$ が成り立つ．したがって，$S_0 \subseteq S$ となる．また $S_0 \subseteq S$ を仮定すると S が τ の記憶集合であることはすでに述べた． □

これ以降濃度が極小となるような記憶集合のことを**極小記憶集合**とよぶ.

注意 A.12. $F\colon A^G \to A^G$ が定値写像であるとは，任意の $x \in A^G$ に対し $F(x) = x_0$ をみたす $x_0 \in A^G$ が存在することである．τ をセルオートマトンとすると，τ は G 同変であるので次の 2 つは同値である.

- τ が定値写像となる.
- 任意の $x \in A^G$ に対し $\tau(x)$ が定値様相となる.

また，$A^{\emptyset}$ が 1 点集合であることから，次の 2 つも同値である.

- τ が定値写像となる.
- τ の極小記憶集合が空集合である.

群 $\mathbb{Z}$ とアルファベット $\{0,1\}$ 上のセルオートマトンのうち $\{-1,0,1\}$ を記憶集合とするものは $2^{2^3} = 256$ 通り考えられる．このうち，$\emptyset$ を極小記憶集合とするセルオートマトンが 2 通り，$\{-1,0,1\}$ の 1 点部分集合を極小記憶集合とするセルオートマトンが 6 通り，$\{-1,0,1\}$ の 2 点部分集合を極小記憶集合とするセルオートマトンが 30 通り存在する．つまり，群 $\mathbb{Z}$ とアルファベット $\{0,1\}$ 上のセルオートマトンで $\{-1,0,1\}$ を極小記憶集合とするセルオートマトンは 218 通りのみとなる.

A.3　商群上のセルオートマトン

G を群，A を集合，$\tau\colon A^G \to A^G$ をセルオートマトンとし，G の正規部分群 N と標準的な全射的準同型 $\rho\colon G \to G/N$ を考える．命題 A.7 で示したとおり，写像 $\rho^*\colon A^{G/N} \to \mathrm{Fix}(N)$ を $x \in A^{G/N}$ に対し $\rho^*(x) = x \circ \rho$ と定めるとこれは全単射であった.

$$\begin{tikzcd} G/N \arrow[d, "x"'] \\ A \end{tikzcd} \quad \overset{\rho^*}{\mapsto} \quad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho^*(x)"'] & G/N \arrow[dl, "x"] \\ A \end{tikzcd}$$

一方，命題 A.9 より $\tau(\mathrm{Fix}(N)) \subseteq \mathrm{Fix}(N)$ だったので写像 $\overline{\tau}\colon A^{G/N} \to A^{G/N}$ を $\overline{\tau} = (\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{\mathrm{Fix}(N)} \circ \rho^*$ で定めることができる．いいかえれば $\overline{\tau}$ は τ の $\mathrm{Fix}(N)$ への制限に ρ^* を共役させたものである．つまり

$$\begin{array}{ccc} A^{G/N} & \xrightarrow{\rho^*} & \mathrm{Fix}(N) \\ {\scriptstyle\overline{\tau}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau|_{\mathrm{Fix}(N)}} \\ A^{G/N} & \xrightarrow[\rho^*]{} & \mathrm{Fix}(N) \end{array}$$

が可換になるということである．$S \subseteq G$ を τ の記憶集合，$\mu\colon A^S \to A$ を局所定義写像とすると $\overline{S} = \rho(S)$ は G/N の有限部分集合である．写像 $\pi\colon A^{\overline{S}} \to A^S$ を $y \in A^{\overline{S}}$ に対し $\pi(y) = y \circ \rho|_S$ で定める．

$$\begin{array}{ccccc} \overline{S} & & & S & \xrightarrow{\rho|_S} \overline{S} \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \overset{\pi}{\mapsto} & {\scriptstyle \pi(y)}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle y} \\ A & & & A & \end{array}$$

$x, y \in A^{\overline{S}}$ に対し $\pi(x) = \pi(y)$ が成り立つと仮定すると $h \in \overline{S}$ に対し $\rho|_S\colon S \to \overline{S}$ が全射であることから $s \in S$ で $\rho|_S(s) = h$ となるものが存在し，

$$\begin{aligned} x(h) &= x(\rho|_S(s)) = x \circ \rho|_S(s) = \pi(x)(s) \\ &= \pi(y)(s) = y \circ \rho|_S(s) = y(\rho|_S(s)) = y(h) \end{aligned}$$

となる．よって π は単射である．$\overline{\mu}\colon A^{\overline{S}} \to A$ を $\overline{\mu} = \mu \circ \pi$ と定める．

$$\begin{array}{cc} A^{\overline{S}} \xrightarrow{\pi} & A^S \\ {\scriptstyle\overline{\mu}}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\mu} \\ A & \end{array}$$

命題 A.13. $\overline{\tau}\colon A^{G/N} \to A^{G/N}$ は記憶集合 $\overline{S}$，局所定義写像 $\overline{\mu}\colon A^{\overline{S}} \to A$ とともに群 G/N 上のセルオートマトンをなす.

証明. $\overline{g} = \rho(g)$ とすると，$y \in A^{G/N}$，$g \in G$ に対し，

$$\begin{aligned} \overline{\tau}(y)(\overline{g}) &= ((\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{\mathrm{Fix}(N)} \circ \rho^*)(y)(\overline{g}) \\ &= ((\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{\mathrm{Fix}(N)})(y \circ \rho)(\overline{g}) \\ &= (\rho^*)^{-1}(\tau|_{\mathrm{Fix}(N)}(y \circ \rho))(\overline{g}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\rho^*)^{-1}(\tau|_{\mathrm{Fix}(N)}(y\circ\rho))(\overline{g}) \\
&= (\rho^*)^{-1}(\tau(y\circ\rho))(\overline{g}) && (y\circ\rho\in\mathrm{Fix}(N)\text{ より}) \\
&= \tau(y\circ\rho)\circ\rho^{-1}(\overline{g}) && ((\rho^*)^{-1}(y)=y\circ\rho^{-1}\text{より}) \\
&= \tau(y\circ\rho)(g) \\
&= \mu((g^{-1}(y\circ\rho))|_S)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．一方

$$
\begin{aligned}
&\overline{\mu}((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}}) \\
=\ &(\mu\circ\pi)((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}}) \\
=\ &\mu(\pi((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}}))
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $s\in S$ に対して

$$
\begin{aligned}
(g^{-1}(y\circ\rho))|_S(s) &= g^{-1}(y\circ\rho)(s) \\
&= (y\circ\rho)(gs) \\
&= y(\rho(gs)) \\
&= y(\rho(g)\rho(s)) \\
&= y(\overline{g}\rho(s)) \\
&= \overline{g}^{-1}y(\rho(s)) \\
&= (\overline{g}^{-1}y)\circ\rho(s) \\
&= (\overline{g}^{-1}y)\circ\rho|_S(s) \\
&= \pi((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}})(s)
\end{aligned}
$$

より $\pi((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}})=(g^{-1}(y\circ\rho))|_S$ が成り立つので，$\overline{\tau}(y)(\overline{g})=\overline{\mu}((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}})$ となり，$\overline{\tau}\colon A^{G/N}\to A^{G/N}$ は記憶集合 $\overline{S}$，局所定義写像 $\overline{\mu}\colon A^{\overline{S}}\to A$ とともに群 G/N 上のセルオートマトンをなすといえる． □

写像 $\Phi\colon CA(G;A)\to CA(G/N;A)$ を $\tau\in CA(G;A)$ に対し $\Phi(\tau)=\overline{\tau}$ と定めることにする．

命題 A.14. $\Phi\colon CA(G;A)\to CA(G/N;A)$ は全射的モノイド準同型である．

証明. $\tau, \sigma \in CA(G;A)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau\circ\sigma) &= (\rho^*)^{-1}\circ(\tau\circ\sigma)|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\rho^* \\
&= (\rho^*)^{-1}\circ\tau|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\sigma|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\rho^* \quad (\sigma(\mathrm{Fix}(N))\subseteq\mathrm{Fix}(N)) \\
&= (\rho^*)^{-1}\circ\tau|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ Id_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\sigma|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\rho^* \\
&= (\rho^*)^{-1}\circ\tau|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\rho^*\circ(\rho^*)^{-1}\circ\sigma|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\rho^* \\
&= \Phi(\tau)\circ\Phi(\sigma)
\end{aligned}$$

が成り立ち，かつ

$$\begin{aligned}
\Phi(Id_{A^G}) &= (\rho^*)^{-1}\circ Id_{A^G}|_{\mathrm{Fix}(N)}\circ\rho^* \\
&= (\rho^*)^{-1}\circ\rho^* \\
&= Id_{A^{G/N}}
\end{aligned}$$

が成り立つことから Φ は準同型写像となる．また，$\sigma\colon A^{G/N}\to A^{G/N}$ は記憶集合 $T\subseteq G/N$ と局所定義写像 $\nu\colon A^T\to A$ とともに G/N 上のセルオートマトンをなすとする．$S\subseteq G$ を $\rho|_S\colon S\to T$ が全単射となるようにとり，写像 $\mu\colon A^S\to A$ を $y\in A^S$ に対し $\mu(y)=\nu(y\circ\rho|_S^{-1})$ と定める．S を記憶集合，μ を局所定義写像とする G 上のセルオートマトンを τ と書くことにする．$g\in G$ に対し $\rho(g)$ を $\overline{g}$ と書くことにすると $\overline{g}\in G/N$ となる．$y\in A^{G/N}$，$\overline{g}\in G/N$ に対し，

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau)(y)(\overline{g}) &= \overline{\tau}(y)(\overline{g}) \\
&= \overline{\mu}((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}}) \\
&= \mu\circ\pi((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}}) \\
&= \mu(\pi((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}})) \\
&= \nu(\pi((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}})\circ\rho|_S^{-1}) \\
&= \nu((((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}})\circ\rho|_S)\circ\rho|_S^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu((\overline{g}^{-1}y)|_{\overline{S}}) \\
&= \nu((\overline{g}^{-1}y)|_T) \\
&= \sigma(y)(\overline{g})
\end{aligned}$$

が成り立つので Φ は全射である．以上のことから Φ は全射的モノイド準同型である． □

上の証明においては $S \subseteq G$ を $\rho|_S\colon S \to T$ が全単射になるようにとると述べた．実際 $T \subseteq G/N$ なので T の元である同値類それぞれの代表元を 1 つずつ集めるとそのような集合 S は得られる．また，μ と ν は，$z \in A^{\overline{S}}$ に対し

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(z) &= \mu \circ \pi(z) \\ &= \mu(\pi(z)) \\ &= \nu(\pi(z) \circ \rho|_S^{-1}) \end{aligned}$$

をみたし，$\rho(s) \in T$ に対し

$$\begin{aligned} \pi(z) \circ \rho|_S^{-1}(\rho(s)) &= \pi(z)(s) \\ &= z \circ \rho|_S(s) \\ &= z(\rho(s)) \end{aligned}$$

となることから $\overline{\mu} = \nu$ が成り立つ．

例 A.15. 例3.4の3の $G = \mathbb{Z}$，$A = \{0,1\}$ の場合と，例2.25で考えた商群の $n = 5$ の場合，つまり $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$ の場合を考える．$\tau\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ を $S = \{-1,1\}$ に付随する多数決の作用とし，$\mu\colon A^{S\cup\{0\}} \to A$ をその局所定義写像とする．ρ を例2.25で考えた標準的な全射的準同型 $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ とする．$\overline{\mu}\colon \{0,1\}^{\rho|_{S\cup\{0\}}(S\cup\{0\})} \to A$ を $\pi(y) = y \circ \rho|_{S\cup\{0\}}$ で定まる単射 $\pi\colon \{0,1\}^{\rho|_{S\cup\{0\}}(S\cup\{0\})} \to \{0,1\}^{S\cup\{0\}}$ により $\overline{\mu} = \mu \circ \pi$ とする．図 A.3 は $\overline{\mu}$ の構成について示したものである．ただし a,b,c は 0 または 1 であり，d は

$$d = \begin{cases} 1 & a+c = 2 \text{ の場合} \\ 0 & a+c = 0 \text{ の場合} \\ b & a+c = 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

により定まる．例 A.1 の 3 より

$$
\begin{array}{ccc} \overline{-1} & \overline{0} & \overline{1} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a} & \multicolumn{1}{c|}{b} & \multicolumn{1}{c|}{c} \\ \hline \end{array} \in \{0,1\}^{\rho|_{S\cup\{0\}}(S\cup\{0\})}
$$

$$\downarrow \pi$$

$$
\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a} & \multicolumn{1}{c|}{b} & \multicolumn{1}{c|}{c} \\ \hline \end{array} \in \{0,1\}^{S\cup\{0\}}
$$

$$\downarrow \mu$$

$$
\begin{array}{|c|c|c|} \hline & d & \\ \hline \end{array} \in \{0,1\}
$$

図 A.3: $\overline{\mu}$ の構成

$$\mathrm{Fix}(5\mathbb{Z}) = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \colon x(i) = x(i+5)\}$$

となる．例 A.8 で定めた全単射を $\rho^*\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \to \mathrm{Fix}(5\mathbb{Z})$ とする．これらにより，$\overline{\tau} = (\rho^*)^{-1} \circ \tau|_{\mathrm{Fix}(5\mathbb{Z})} \circ \rho^*$ で定まる $\overline{\tau}\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$ は $\rho|_{S\cup\{0\}}(S) = \{\overline{-1}, \overline{1}\}$ に付随する多数決の作用をなす．図 A.4 は $\overline{\tau}$ による様相の変化の例について示したものである．

A.4　セルオートマトンの制限

G を群，A を集合，H を G の部分群とする．$CA(G,H;A)$ を記憶集合 S が $S \subseteq H$ をみたすすべてのセルオートマトン $\tau\colon A^G \to A^G$ からなる集合とする．ゆえに $CA(G,H;A)$ は極小記憶集合が H に含まれるすべてのセルオートマトンからなる $CA(G;A)$ の部分集合である．

命題 A.16. 集合 $CA(G,H;A)$ は $CA(G;A)$ の部分モノイドである．

証明. $Id_{A^G} \in CA(G;A)$ は単位元であり，例 3.4 の 4 で見たとおり Id_{A^G} の記憶集合は $\{1_G\}$ であった．H は G の部分群なので $\{1_G\} \subseteq H$ である．よって $Id_{A^G} \in CA(G,H;A)$

$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
○	●	○	○	●

$$\downarrow \rho^*$$

$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\cdots$	○	○	●	○	●	○	○	●	○	●	○	$\cdots$

$$\downarrow \tau|_{\mathrm{Fix}(5\mathbb{Z})}$$

$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\cdots$	○	○	○	●	○	○	○	○	●	○	○	$\cdots$

$$\downarrow (\rho^*)^{-1}$$

$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
●	○	○	○	○

図 A.4: τ による様相の変化の例

が成り立つ．$\sigma, \tau \in CA(G,H;A)$ とする．S を σ の記憶集合とし，T を τ の記憶集合とすると，$S,T \subseteq H$ なので $ST \subseteq H$ であり，かつ命題 3.19 より ST は $\sigma \circ \tau$ の記憶集合である．したがって，$\sigma \circ \tau \in CA(G,H;A)$ が成り立つ． $\square$

$\tau \in CA(G,H;A)$ とし，$T, T' \subseteq H$ を τ の記憶集合，$\nu : A^T \to A$ と $\nu' : A^{T'} \to A$ を局所定義写像とする．写像 $\tau_{H,T} : A^H \to A^H$ と $\tau_{H,T'} : A^H \to A^H$ をそれぞれ $x \in A^H, h \in H$ に対し

$$\begin{aligned} \tau_{H,T}(x)(h) &= \nu((h^{-1}x)|_T) \\ \tau_{H,T'}(x)(h) &= \nu((h^{-1}x)|_{T'}) \end{aligned}$$

と定めるとこれらは H 上のセルオートマトンである．ここで，$\tilde{x} \in A^G$ を $\tilde{x}|_H = x$ となるようにとる．$h \in H$ と $t \in T$ に対し，

$$\begin{aligned} h^{-1}(\tilde{x})(t) &= \tilde{x}(ht) \\ &= x(ht) \end{aligned}$$

$$= \quad h^{-1}x(t)$$

が成り立ち，また同様に $t' \in T'$ に対しても $h^{-1}\tilde{x}(t') = h^{-1}x(t')$ が成り立つ．これらのことから

$$\begin{aligned}
\tau_{H,T}(x)(h) &= \nu((h^{-1}x)|_T) \\
&= \nu((h^{-1}\tilde{x})|_T) \\
&= \tau(\tilde{x})(h) \\
&= \nu'((h^{-1}\tilde{x})|_{T'}) \\
&= \nu'((h^{-1}x)|_{T'}) \\
&= \tau_{H,T'}(x)(h)
\end{aligned}$$

となり，$\tau_{H,T}$ は記憶集合 T に依らないことがわかる．今後 $\tau_{H,T}$ を単に τ_H と書くことにすると今までの議論より $CA(G,H;A)$ から $CA(H;A)$ への対応 $\tau \mapsto \tau_H$ は写像となる．逆に $\sigma \in CA(H;A)$ とし，S,S' を σ の記憶集合 $\mu\colon A^S \to A$ と $\mu'\colon A^{S'} \to A$ を局所定義写像とする．写像 $\sigma^{G,S}\colon A^G \to A^G$ と $\sigma^{G,S'}\colon A^G \to A^G$ をそれぞれ $\tilde{x} \in A^G, g \in G$ に対し

$$\begin{aligned}
\sigma^{G,S}(\tilde{x})(g) &= \mu((g^{-1}x)|_S) \\
\sigma^{G,S}(\tilde{x})(g) &= \mu'((g^{-1}x)|_{S'})
\end{aligned}$$

と定めるとこれらは G 上のセルオートマトンである．S_0 を σ の極小記憶集合とし，$\mu_0\colon A^{S_0} \to A$ を局所定義写像とすると，射影 $\pi\colon A^S \to A^{S_0}$ と $\pi'\colon A^{S'} \to A^{S_0}$ が存在し，$\mu = \mu_0 \circ \pi$，$\mu' = \mu_0 \circ \pi'$ が成り立つことから

$$\begin{aligned}
\sigma^{G,S}(\tilde{x})(g) &= \mu((g^{-1}\tilde{x})|_S) \\
&= \mu_0 \circ \pi((g^{-1}\tilde{x})|_S) \\
&= \mu_0((g^{-1}\tilde{x})|_{S_0}) \\
&= \mu_0 \circ \pi'((g^{-1}\tilde{x})|_{S'}) \\
&= \mu'((g^{-1}\tilde{x})|_{S'}) \\
&= \sigma^{G,S'}(\tilde{x})(g)
\end{aligned}$$

となり，$\sigma_{G,S}$ は記憶集合に依らないことがわかる．今後 $\sigma^{G,S}$ を単に σ^G と書くことにすると今までの議論より $CA(H;A)$ から $CA(G,H;A)$ への対応 $\sigma \mapsto \sigma^G$ は写像となる．

命題 A.17. 写像 $\tau \mapsto \tau_H$ は $CA(G,H;A)$ から $CA(H;A)$ へのモノイド同型であり，写像 $\sigma \mapsto \sigma^G$ はその逆写像である．

証明. 簡単のため $\alpha\colon CA(G,H;A) \to CA(H;A)$ を $\tau \in CA(G,H;A)$ に対し $\alpha(\tau) = \tau_H$ と定め，$\beta\colon CA(H;A) \to CA(G,H;A)$ を $\sigma \in CA(H;A)$ に対し $\beta(\sigma) = \sigma^G$ と定める．命題 A.16 より Id_{A^G} は $CA(G,H;A)$ の単位元である．$x \in A^H$ とし $\tilde{x} \in A^G$ は $\tilde{x}|_H = x$ をみたすとすると，

$$
\begin{aligned}
\alpha(Id_{A^G})(x)(h) &= (Id_{A^G})_H(x)(h) \\
&= Id_{A^G}(\tilde{x})(h) \\
&= \tilde{x}(h) \\
&= x(h) \\
&= Id_{A^H}(x)(h)
\end{aligned}
$$

となる．さらに $\tau, \tau' \in CA(G,H;A)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\alpha(\tau \circ \tau')(x)(h) &= (\tau \circ \tau')(\tilde{x})(h) \\
&= \tau(\tau'(\tilde{x}))(h)
\end{aligned}
$$

であり，τ の記憶集合を T，局所定義写像を ν とすると，

$$
\begin{aligned}
(\alpha(\tau) \circ \alpha(\tau'))(x)(h) &= \alpha(\tau)(\alpha(\tau')(x))(h) \\
&= \alpha(\tau)(\tau'(\tilde{x}))(h) \\
&= \tau_H(\tau'(\tilde{x}))(h) \\
&= \nu((h^{-1}(\tau'(\tilde{x})))|_T) \\
&= \tau(\tau'(\tilde{x}))(h)
\end{aligned}
$$

であることから，$\alpha(\tau\circ\tau')=\alpha(\tau)\circ\alpha(\tau')$ となる．以上のことから α はモノイド準同型である．つぎに α が全単射であり，かつ β がその逆写像になっていることを示すが $\sigma\in CA(H;A), \tau\in CA(G,H;A)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
(\alpha\circ\beta)(\sigma) &= \alpha(\beta(\sigma)) \\
&= \alpha(\sigma^G) \\
&= (\sigma^G)_H
\end{aligned}
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
(\beta\circ\alpha)(\tau) &= \beta(\alpha(\tau)) \\
&= \beta(\tau_H) \\
&= (\tau_H)^G
\end{aligned}
$$

であることから $(\sigma^G)_H=\sigma$ かつ $(\tau_H)^G=\tau$ を示せばよい．$x\in A^H$，$h\in H$ に対し，$\tilde{x}\in A^G$ は $\tilde{x}|_H=x$ をみたすものとし，S は σ の記憶集合，μ を局所定義写像とすると，

$$
\begin{aligned}
(\sigma^G)_H(x)(h) &= \sigma^G(\tilde{x})(h) \\
&= \mu((h^{-1}\tilde{x})|_S) \\
&= \mu((h^{-1}x)|_S) \\
&= \sigma(x)(h)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，$(\sigma^G)_H=\sigma$ がいえた．また，$\tilde{x}\in A^G$，$g\in G$ に対し，T は τ の集合記憶とし，ν を局所定義写像とすると，ν は τ_H の局所定義写像でもあったので，

$$
\begin{aligned}
(\tau_H)^G(\tilde{x})(g) &= \nu((g^{-1}\tilde{x})|_T) \\
&= \tau(\tilde{x})(g)
\end{aligned}
$$

が成り立ち，$(\tau_H)^G=\tau$ がいえた．以上のことから，$CA(G,H;A)$ と $CA(H;A)$ はモノイド同型である．□

$\tau\in CA(G,H;A)$ とし，$\tilde{x}\in A^G$ とする．$G/H=\{gH\colon g\in G\}$ を考える．$c\in G/H$ とすると，$A^G=\Pi_{c\in G/H}A^c$ と書ける．このことから $\tilde{x}=(\tilde{x}|_c)_{c\in G/H}$ と書き表すこと

ができる．ただし $\tilde{x}|_c$ は $\tilde{x}$ の c への制限である．ここで，$c \in G/H$，$g \in c$ とし，τ の記憶集合を $S \subseteq H$，μ を局所定義写像とすると，$gS \subseteq C$ であることから，ある写像 $c\mu\colon A^c \to A$ が存在し，

$$\begin{aligned} \tau(\tilde{x})(g) &= \mu((g^{-1}\tilde{x})|_S) \\ &= {}_g\mu(\tilde{x}|_{gS}) \\ &= c\mu(\tilde{x}|_c) \end{aligned}$$

となるので，$\tau(\tilde{x})(g)$ は $\tilde{x}$ の c への制限のみに依存しているといえる．写像 $\tau_c\colon A^c \to A^c$ は任意の $\tilde{x} \in A^G$ に対して $\tau_c(\tilde{x}|_c) = (\tau(\tilde{x}))|_c$ をみたすただ一つの写像であることから $\tau = \Pi_{c \in G/H}\tau_c$ と書ける．特に，$c = H$ のとき $\tau_H\colon A^H \to A^H$ は τ の H への制限で，H 上のセルオートマトンとなることがいえる．

$c \in G/H$，$g \in c$ とする．$\phi_g\colon H \to c$ を $h \in H$ に対し，$\phi_g(h) = gh$ と定める．$gh = gh'$ を仮定すると $h = g^{-1}gh = g^{-1}gh' = h'$ より ϕ_g は単射であり， $n \in c$ とすると $\phi_g(g^{-1}n) = n$ と $g^{-1}n \in H$ より ϕ_g は全射である．つまり ϕ_g は全単射である．また $\phi_g^*\colon A^c \to A^H$ を $x \in A^c$ に対し $\phi_g^*(x) = x \circ \phi_g$ と定めると，ϕ_g が全単射であることから ϕ_g^* も全単射であることがいえる．次の命題により τ_c と τ_H は ϕ_g^* により共役となることがわかる．

命題 A.18. $\tau_c = (\phi_g^*)^{-1} \circ \tau_H \circ \phi_g^*$ が成り立つ．つまり

$$\begin{array}{ccc} A^c & \xrightarrow{\tau_c} & A^c \\ {\scriptstyle \phi_g^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_g^*} \\ A^H & \xrightarrow[\tau_H]{} & A^H \end{array}$$

が可換になる．

証明. $x \in A^c$，$\tilde{x} \in A^G$ を $\tilde{x}|_c = x$ をみたすとすると，$h \in H$ に対し，

$$\begin{aligned} (\phi_g \circ \tau_c)(x)(h) &= \phi_g^*(\tau_c(x))(h) \\ &= (\tau_c(x) \circ \phi_g)(h) \\ &= \tau_c(x)(\phi_g(h)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau_c(x)(gh) \\
&= \tau(\tilde{x})(gh) \\
&= g^{-1}\tau(\tilde{x})(h) \\
&= \tau(g^{-1}\tilde{x})(h)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．また，

$$
\begin{aligned}
g^{-1}\tilde{x}(h) &= \tilde{x}(gh) \\
&= \tilde{x}|_c(gh) \\
&= x(gh) \\
&= x \circ \phi_g(h)
\end{aligned}
$$

であることから

$$
\begin{aligned}
(\tau_H \circ \phi_g^*)(x)(h) &= \tau_H(\phi_g^*(x))(h) \\
&= \tau_H(x \circ \phi_g)(h) \\
&= \tau(x \circ \phi_g)(h) \\
&= \tau(g^{-1}\tilde{x})(h)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上のことから $\phi_g^* \circ \tau_c = \tau_H \circ \phi_g^*$ である．さらに ϕ_g^* は全単射であったので，$\tau_c = (\phi_g^*)^{-1} \circ \tau_H \circ \phi_g^*$ が成り立つ． □

命題 A.19. G を群，A を集合，H を G の部分群，$\tau \in CA(G,H;A)$ とし，$\tau_H : A^H \to A^H$ を τ の H への制限により構成されるセルオートマトンとする．このとき次の 3 つが成り立つ．

1. τ が単射である $\iff$ τ_H が単射である
2. τ が全射である $\iff$ τ_H が全射である
3. τ が全単射である $\iff$ τ_H が全単射である

証明. $\tilde{x} \in A^G$ に対し $\tau_c(\tilde{x}|_c) = (\tau(\tilde{x}))|_c$ であることから

$$
\begin{aligned}
\tau\ \text{が単射である} &\iff \text{各}\ c \in G/H\ \text{に対し}\ \tau_c\ \text{が単射である}\\
&\iff \text{各}\ c \in G/H\ \text{に対し}\ \phi_g^* \circ \tau_c\ \text{が単射である}\\
&\iff \tau_H \circ \phi_g^*\ \text{が単射である}\\
&\iff \tau_H\ \text{が単射である}
\end{aligned}
$$

が成り立ち，また

$$
\begin{aligned}
\tau\ \text{が全射である} &\iff \text{各}\ c \in G/H\ \text{に対し}\ \tau_c\ \text{が全射である}\\
&\iff \text{各}\ c \in G/H\ \text{に対し}\ \phi_g^* \circ \tau_c\ \text{が全射である}\\
&\iff \tau_H \circ \phi_g^*\ \text{が全射である}\\
&\iff \tau_H\ \text{が全射である}
\end{aligned}
$$

も成り立つ．以上のことから

$$
\tau\text{が全単射である} \iff \tau_H\text{が全単射である}
$$

も成り立つ． □