

## <研究報告>層間剥離を有するはりの自由振動特性

著者	有富 正男, 平山 将行, 小田 美紀男
雑誌名	鹿児島大学工学部研究報告
巻	42
ページ	1-8
別言語のタイトル	VIBRATION CHARACTERISTICS OF DELAMINATED BEAMS
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10232/541">http://hdl.handle.net/10232/541</a>

## <研究報告>層間剥離を有するはりの自由振動特性

著者	有富 正男, 平山 将行, 小田 美紀男
雑誌名	鹿児島大学工学部研究報告
巻	42
ページ	1-8
別言語のタイトル	VIBRATION CHARACTERISTICS OF DELAMINATED BEAMS
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10232/00009229">http://hdl.handle.net/10232/00009229</a>

# 層間剥離を有するはりの自由振動特性

有富 正男\* 平山 将行\*\* 小田 美紀男\*

## VIBRATION CHARACTERISTICS OF DELAMINATED BEAMS

Masao ARITOMI, Masayuki HIRAYAMA and Mikio ODA

Free vibrations of cantilever and propped cantilever laminated beams with an initial delamination of arbitrary size and location are analyzed on the basis of the classical beam theory. Basic assumption is that the parts of the beam above and below the crack faces are regarded as two lapped beams hinged at both ends and are contacting one another. Distributions of mutual contact pressures between the delaminated layers are also analyzed. Analyses and experiments are carried out for the effects of the delamination length and the location of delaminations on the natural frequencies. Theoretical and experimental results agree well, which validates the analytical models assumed in our present study.

**Keywords :** Structural Analysis, Free Vibration, Laminated Beam, Delamination

### 1. まえがき

積層複合材料は軽量で高い剛性と強さをもつため、軽量化を必要とする小型船舶や航空機の構造材料として広く使用されている。しかしながら積層材料は、製造過程に生じた欠陥や面に垂直な低速の衝撃などによって、接着部分に剥離が生じやすい。この層間剥離は、積層構造物の強度と剛性の低下をもたらす。振動特性や安定性にも影響を与える。そこで、構造要素の積層はりや積層板の自由振動特性に及ぼす層間剥離の影響を明らかにすることは工学上重要である。しかもその結果は、材料の振動挙動の変化から、剥離の大きさとその発生位置を特定する手掛かりを与えるものである。

同種材を張り合わせて作られた積層はりが層間剥離を有する場合の自由振動を、Wangら<sup>1)</sup>は、剥離領域の上下のはりのたわみが異なるとして、MujumdarとSuryanarayan<sup>2)</sup>は剥離界面に常に相互接触力が作用し、上下のはりのたわみは等しいと仮定して、それぞれ理論解析している。TracyとPardoen<sup>3)</sup>は、中央面に剥離がある対称複合積層はりの自由振動を、上下のはりのたわみは等しいとして理論解析し、有限要素法および実験で求めた固有振動数と比較して理論の妥当性を検証している。ShenとGrady<sup>4)</sup>は複合積層はりを、HuとHwu<sup>5)</sup>は複合サンドイッチはりを取り上げ、はり断面の回転慣性とせん断変形を考慮して自由振動を理論解析し、剥離が固有振動数と振動モードに及ぼす影響を明らかにしている。

著者らは前報で<sup>6)</sup>、両端を単純支持された二層の異種材積層はりが層間剥離を有するときの自由振動を、剥離部分は両端がヒンジで止められた重ねはりとみなし<sup>7)</sup>、上下のはりのたわみは等しい

2000年7月15日受理

\* 機械工学科

\*\* 博士前期課程機械工学専攻

と仮定して理論解析を行った。本報ではそれに引き続き、一端が固定され、他端がそれぞれ自由と支持の片持りとまくら片持りを取り上げ、それらの自由振動特性に及ぼす剥離の影響を調査するとともに、さまざまな剥離条件の異種材積層はりを製作し、振動実験を行って理論結果の妥当性を検証する。

## 2. 理論解析

### 2.1 基礎式

第1図に示すような、2本の均質、等方性材料の長方形断面はりを接着して作られた異種材積層はりが、内部に層間剥離を有する場合を考える。はりの長さを $\ell$ 、幅は上下のはりともに $b$ とし、厚さ、縦弾性係数および密度は、上のはりについては $h_1, E_1, \rho_1$ 、下のはりについては $h_2, E_2, \rho_2$ とする。剥離は、はりの左端から $L_c$ の距離に中心をもち、長さが $2c$ の幅全体にわたるものとする。はりの両端から左右の剥離端までの距離をそれぞれ $\ell_1, \ell_2$ とし、材料に関する諸量を

$$I_j = bh_j^3/12, S_j = bh_j, D_j = E_j I_j, (j=1,2),$$

$$h = h_1 + h_2, S = S_1 + S_2, D = D_1 + D_2, \quad (1)$$

$\rho S = \rho_1 S_1 + \rho_2 S_2$ のように定める。接着部分の積層はりの、はり上から中立軸までの距離 $\eta$ と曲げ剛性 $D'$ は

$$\eta = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (2)$$

$$D' = D + \frac{E_1 h_1 E_2 h_2 b h^2}{4(E_1 h_1 + E_2 h_2)} \quad (3)$$

で与えられる。

剥離部分は第2図のように両端はヒンジで止められた重ねはりとみなし、上下のはりにはそれぞれ

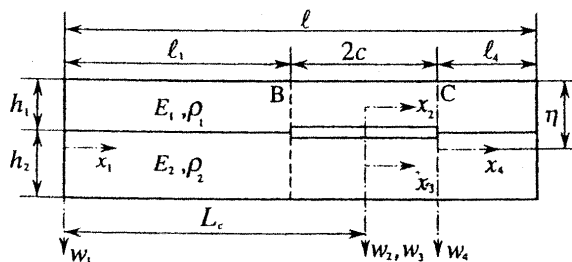


Fig. 1 Geometry of a laminated beam with a delamination

れ軸力 $Z$ が作用する。また振動中上下のはりが接すると、剥離界面に分布反力 $q(x,t)$ が作用すると仮定する。いま各諸量と時間 $t$ 、および第1図で定めた座標軸 $x_i$ 、たわみ $w_i$ を

$$(\xi_i, \bar{\ell}_i, \bar{\ell}_c, \bar{c}, \bar{L}_c) = (x_i, \ell_i, \ell_c, c, L_c)/\ell,$$

$$(\bar{w}_i, \bar{h}_i) = (w_i, h_i)/h, \bar{\rho}_i = \rho_i/\rho, \bar{D}_i = D_i/D,$$

$$(i=1\sim 4, j=1,2), \bar{D} = D/D', \alpha = E_1/E_2, \quad (4)$$

$$\bar{D}' = \frac{12D'}{E_2 b h^3}, \bar{q} = \frac{q \ell^4}{D' h}, \bar{Z} = \frac{Z \ell^2}{D'}, \tau = \frac{t}{\ell^2} \sqrt{\frac{D'}{\rho S}}$$

と無次元化すると、接着部分の積層はりの運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_i}{\partial \xi_i^4} = 0, (i=1,4) \quad (5)$$

となる。また、剥離部分の上下のはりの運動方程式は

$$\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^4} + \bar{Z} \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^2} + \bar{q} = 0 \quad (6)$$

$$\bar{\rho}_2 \bar{h}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \bar{D}_2 \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_3}{\partial \xi_3^4} - \bar{Z} \frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \xi_3^2} - \bar{q} = 0 \quad (7)$$

と表される。ここで、上下のはりのたわみは等しい( $\bar{w}_2 = \bar{w}_3$ )と仮定し、 $\xi_2 = \xi_3$ とおけるので式(6)と式(7)を加え合わせると、剥離部分の重ねはりの運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D} \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^4} = 0 \quad (8)$$

のように非常に簡単な式で表される。

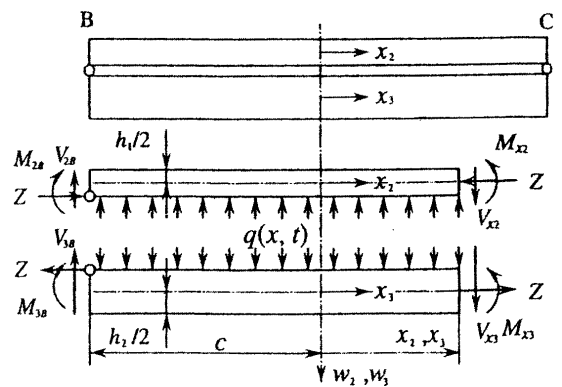


Fig. 2 Free body diagram in the delamination region

## 2. 2 解法

はりは調和運動をすると仮定し、無次元固有角振動数を  $\bar{p}$  とし、たわみ  $\bar{w}$  と軸力  $\bar{Z}$  を

$$\bar{w}_i(\xi, \tau) = X_i(\xi) \sin \bar{p} \tau, \quad (i=1, 2, 4) \quad (9)$$

$$\bar{Z}(\tau) = \bar{Z}_0 \sin \bar{p} \tau \quad (10)$$

とおくと、式 (5) および式 (8) より  $X_i(\xi_i)$  は

$$X_i(\xi_i) = C_{i1}(\sinh \lambda_i \xi_i + \sin \lambda_i \xi_i) + C_{i2}(\cosh \lambda_i \xi_i + \cos \lambda_i \xi_i) \\ + C_{i3}(\sinh \lambda_i \xi_i - \sin \lambda_i \xi_i) + C_{i4}(\cosh \lambda_i \xi_i - \cos \lambda_i \xi_i), \\ (i=1, 2, 4) \quad (11)$$

$$\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda^2 = \bar{p}, \quad \lambda_2 = \lambda^2 / \sqrt{D} = \bar{p} / \sqrt{D} \quad (12)$$

と得られる。このとき軸力の大きさ  $\bar{Z}_0$  は、剥離上面の繊維の伸びは剥離下面の繊維の伸びに等しいという条件<sup>8)</sup> から

$$\bar{Z}_0 = -\frac{3}{D^2 \bar{c}} \frac{\alpha \bar{h}_1 \bar{h}_2}{\alpha \bar{h}_1 + \bar{h}_2} \left[ \left( \frac{dX_2}{d\xi_2} \right)_{\xi_2=\bar{c}} - \left( \frac{dX_2}{d\xi_2} \right)_{\xi_2=-\bar{c}} \right] \quad (13)$$

で与えられる。ただし  $\alpha$  は、式 (4) 中で示した縦弾性係数の比である。また、剥離部分の上下のはりの相互接触力  $\bar{q}(\xi_2, \tau)$  は、上層のはりの運動方程式 (6) から

$$\bar{q}(\xi_2, \tau) = \left[ \bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \lambda^4 X_2 - \bar{D}_1 \bar{D} \frac{d^4 X_2}{d\xi_2^4} - \bar{Z}_0 \frac{d^2 X_2}{d\xi_2^2} \sin \bar{p} \tau \right] \sin \bar{p} \tau \quad (14)$$

と表される。

次に、片持はりの境界条件は

$$\xi_1 = 0 \text{ で } X_1 = 0, \quad \frac{dX_1}{d\xi_1} = 0 \\ \xi_4 = \bar{l}_4 \text{ で } \frac{d^2 X_4}{d\xi_4^2} = 0, \quad \frac{d^3 X_4}{d\xi_4^3} = 0 \quad (15)$$

であり、まくら片持はりの境界条件は

$$\xi_1 = 0 \text{ で } X_1 = 0, \quad \frac{dX_1}{d\xi_1} = 0 \\ \xi_4 = \bar{l}_4 \text{ で } X_4 = 0, \quad \frac{d^2 X_4}{d\xi_4^2} = 0 \quad (16)$$

となる。また、連続条件は次式で表される。

剥離先端 B ( $\xi_1 = \bar{l}_1, \xi_2 = -\bar{c}$ ) において

$$X_1 = X_2, \quad \frac{d^2 X_1}{d\xi_1^2} = \bar{D} \frac{d^2 X_2}{d\xi_2^2} - \frac{1}{2} \bar{Z}_0, \\ \frac{dX_1}{d\xi_1} = \frac{dX_2}{d\xi_2}, \quad \frac{d^3 X_1}{d\xi_1^3} = \bar{D} \frac{d^3 X_2}{d\xi_2^3} \quad (17)$$

剥離先端 C ( $\xi_2 = \bar{c}, \xi_4 = 0$ ) において

$$X_4 = X_2, \quad \frac{d^2 X_4}{d\xi_4^2} = \bar{D} \frac{d^2 X_2}{d\xi_2^2} - \frac{1}{2} \bar{Z}_0, \quad (18)$$

$$\frac{dX_4}{d\xi_4} = \frac{dX_2}{d\xi_2}, \quad \frac{d^3 X_4}{d\xi_4^3} = \bar{D} \frac{d^3 X_2}{d\xi_2^3}$$

式 (11) の  $X_i$  に、式 (15) または式 (16) の境界条件と式 (17), (18) の連続条件を適用し、剥離のない積層はりの正規関数  $X_1, X_4$  中の定数を消去すると

$$[B]\{C_i\} = \{0\} \quad (19)$$

の形の関係式が得られる。ここで  $[B]$  は 4 行 4 列の正方マトリックスである。これから振動数方程式

$$|B| = 0 \quad (20)$$

が得られる。

## 3. 計算結果

式 (20) は超越方程式となるため、固有値  $\lambda$  はニュートン法で計算した。数値計算では、上下のはりの縦弾性係数の比が  $\alpha=0.5$  で、密度の比が  $\rho_1/\rho_2=1.13$  の異種材積層はりを取り上げた。また、剥離長さが  $2\bar{c}=0.001 \sim 0.99$  の範囲で 1 次振動から 4 次振動まで計算し、 $2\bar{c}=0.001$  のときの  $\lambda$  の値はいずれの場合も一様断面はりの横振動の固有値と一致した。

### 3. 1 固有値と軸力

第 3 図は、スパン中央に剥離中心をもつまくら片持はりの、固有値と剥離部分の上下のはりに作用する軸力が、剥離の長さによってどのように変化するかを示したものである。軸力  $\bar{Z}_0$  は、第 2 図に示す方向の力を正とし、振動モードが略図で示される場合の、最大振幅が  $A=0.3h$  ( $\bar{A}=A/h=0.3$ ) のときの計算結果である。まず剥離長さが 0 に近づくと、固有値は一様まくら片持はりの 10.210 となっている。また、剥離長さが長くなると、固有値つまり固有振動数は減少し、その減少率は軸力が極値をとる付近では小さく、軸力が 0 付近では大きい。第 4 図は、剥離のスパン方向の位置が、片持はりの固有値と軸力に及ぼす影響を示したものである。剥離中心がモードの腹の付近に位置する場合に、軸力は最大で固有振動数も最大となり、モードの節の付近にある場合には、軸力はほぼ 0

で固有振動数は最小となっている。これらのことより、剥離部分の上下のはりに作用する軸力は、剥離によって固有振動数が減少するのを抑える傾向にあるといえる。

### 3. 2 振動モードと剥離界面の接触力

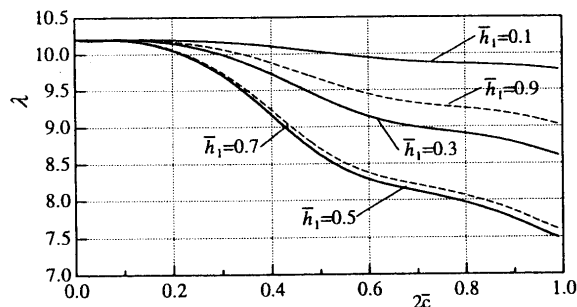
第5図は、スパン中央に長さ $2\bar{c}=0.3$ の剥離をもつ積層はりの、最大振幅が $\bar{A}=0.3$ のときの振動モードである。図中の縦の2本の一点鎖線が剥離端を表す。剥離部分の重ねはりの曲げ剛性 $D$ が接着部分の積層はりの曲げ剛性 $D$ に比べて小さいため、モードの節は剥離のないはりに比べて剥離の中心方向へ移動している。

次に、剥離界面に分布する接触力 $\bar{q}$ は、式(14)からわかるように時間の関数である。そこでここでは

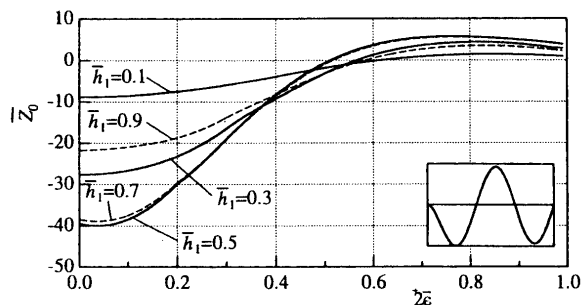
$$\tau_0 = \frac{n+1/2}{\bar{p}} \pi, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

の時刻における接触力の分布 $\bar{q}_0$ を

$$\bar{q}_0(\xi_2) = \bar{q}(\xi_2, \tau_0) = \pm \left[ \bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \lambda^4 X_2 - \bar{D}_1 \bar{D} \frac{d^4 X_2}{d\xi_2^4} \mp \bar{Z}_0 \frac{d^2 X_2}{d\xi_2^2} \right] \quad (22)$$

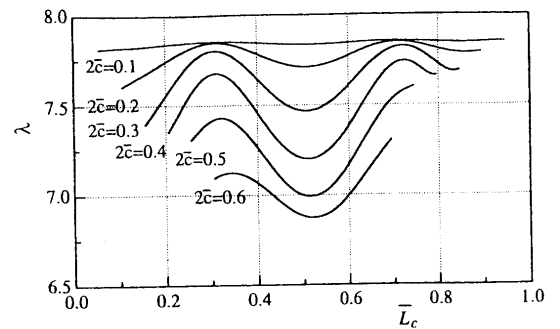


(a) Characteristic value

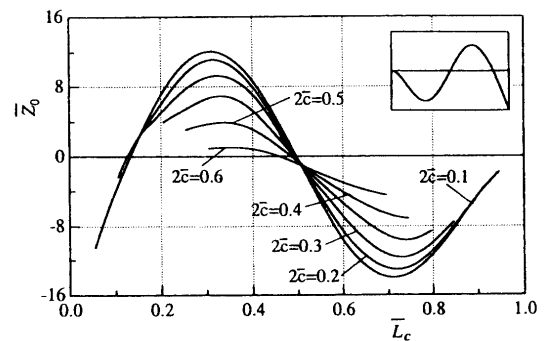


(b) Axial force ( $\bar{A}=0.3$ )

Fig. 3 Effect of delamination length on characteristic value and axial force (propped cantilever beam, third mode,  $\bar{L}_c=0.5$ ,  $\alpha=0.5$ )

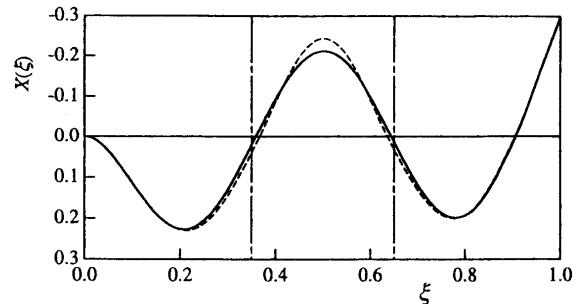


(a) Characteristic value

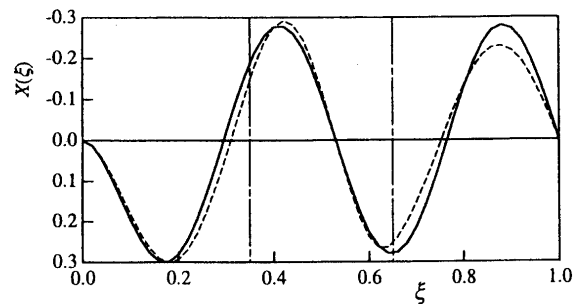


(b) Axial force ( $\bar{A}=0.3$ )

Fig. 4 Effect of spanwise location of delamination on characteristic value and axial force (cantilever beam, third mode,  $\bar{h}_1=0.3$ ,  $\alpha=0.5$ )



(a) Cantilever beam



(b) Propped cantilever beam

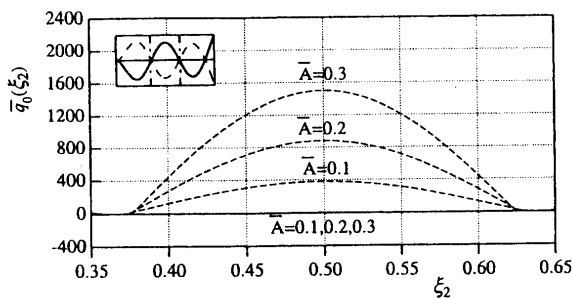
— integral beam, - - -  $2\bar{c}=0.3$ ,  $\bar{L}_c=0.5$

Fig. 5 Mode shape (fourth mode,  $\bar{h}_1=0.3$ ,  $\alpha=0.5$ )

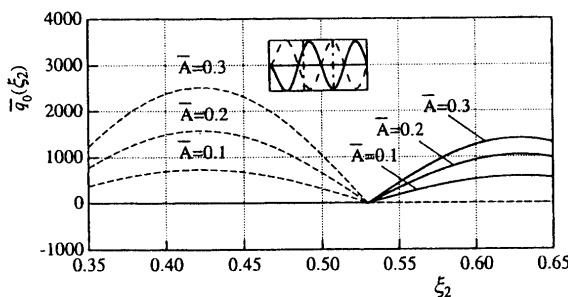
で計算した。第6図は、第5図と同じ積層はりの接触力分布である。ただし、物理的に $\bar{q}_0$ の値は負とはならないので、式(22)の計算結果が負の場合には $\bar{q}_0 = 0$ として図示した。この $\bar{q}_0 = 0$ の領域では、上下のはりが接触して両者のたわみが等しい、という仮定は成立しなくなる。また、振動モードの略図の実線と点線に対応する接触力分布がそれぞれの線で表されている。計算に用いた積層はりには、曲げ剛性比が $D_1/D_2 \approx 0.04$ と、上層はりの曲げ剛性が下層はりの曲げ剛性に比べてかなり小さいので、接触力は鉛直下方へたわんだ剥離領域のみに発生し、鉛直下方でのモードの腹で最大となることがわかる。さらに、最大振幅の大きいほど、接触力の値も大きくなる。

#### 4. 実験

解析結果の妥当性を検討するため、剥離条件が異なる25種類の積層はりをそれぞれ製作し、微小振幅の振動実験を行った。



(a) Cantilever beam



(b) Propped cantilever beam

Fig. 6 Normal pressure distribution along delamination region (fourth mode,  $2\bar{c}=0.3$ ,  $\bar{L}_c=0.5$ ,  $\bar{h}_1=0.3$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\bar{\rho}_1=1.09$ )

#### 4.1 試験片と実験要領

試験片寸法は厚さ  $h=1\text{mm}$ 、幅  $b=30\text{mm}$ 、長さが片持りでは $l=200\text{mm}$ 、まくら片持りでは $l=280\text{mm}$ である。試験片は厚さが $1\text{mm}$ となるように、さまざまな厚さの $E_1=120\text{GPa}$ 、 $\rho_1=8.78\text{g/cm}^3$ のりん青銅の上層はりと、 $E_2=182\text{GPa}$ 、 $\rho_2=7.77\text{g/cm}^3$ のステンレスばね鋼の下層はりを組み合わせて、シアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して製作した。そのとき、所定の剥離長さとし剥離位置をもつ試験片を製作するため、まず2枚の透明なアクリル板を使用し、接着剤が未接着部分へ浸透することを考慮した、接着剤の適切な貼付位置と量を試行錯誤で取得した。さらに、この方法でりん青銅とステンレスばね鋼を接着し、重りを載せて24時間経過後、剥離先端付近と接着部分を切断して、接着部分にむらがなく、しかもほぼ所定の剥離が得られたかを調査し、適切な接着方法を確立した後、試験片製作に取り掛かった。

固定端は支持台に置かれた試験片を押さえ板で挟み、4本のボルトに $5.88\text{Nm}$ の一定トルクをかけて締め付けた。面内可動支持は回転とともに軸方向の移動が可能となるように、第7図のごとくベアリングを取り付けたローラで試験片を上下から挟んでボルトで軽く押さえつけた。振動実験は次のようにして行った。まず、発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅して電磁石に入力し、試験片のモードの腹の位置を加振する。このとき、加振振動数を変化させ、パワーアンプの電圧とレーザー変位計の出力電圧をメモリーハイコーダーに取り込み、リサージュ図形を描かせて共振点を検出し、固有振動数を計測する。また測定した変位波形はメモリーハイコーダーに入力する。なお、今回使用した電磁石では3次以上の振動実験を行うことはできなかった。

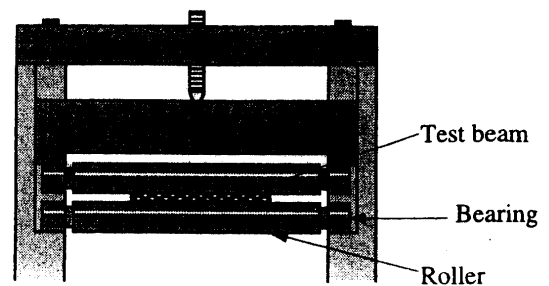


Fig. 7 Movable support

#### 4. 2 実験結果と考察

第8図は、横軸に剥離の厚さ方向の位置を、縦軸に固有振動数をとって、実験値と理論結果を比較したものである。図において、 $\bar{h}_1=0$  と  $\bar{h}_1=1$  のときがそれぞれ厚さ1mmのステンレスばね鋼はりとりん青銅はりとなるが、それらの固有振動数の測定結果は、図中に示したその誤差からわかるように理論値とよく一致している。したがって、実験装置に取り付けられた試験片は、一端固定・他端自由あるいは一端固定・他端支持の境界条件を満足しているものといえる。また、剥離の厚さ方向の位置が変わると、特に2次振動では固有振動数の値はかなり変化するが、実験値は理論曲線によく合っている。

第9図は、固有振動数に及ぼす剥離長さの影響を、実験値と理論曲線を比較して示したものである。この図で  $2\bar{c}=0$  のときは、0.3mmのりん青銅と0.7mmのステンレスばね鋼を完全接着させた積層はりであるが、その誤差からもわかるように、固有振動数の実験値はいずれの場合も理論値と非常によく一致している。したがって、今回の振動実験では、試験片の接着層は固有振動数の値には

ほとんど影響を与えないことがわかる。また剥離長さが長くなるにつれて、固有振動数の実験値は理論曲線に沿って減少している。

第10図は、固有振動数が剥離のスパン方向の位置によってどのように変化するかを示したものである。固有振動数は、剥離中心がモードの腹に近づくとき第9図の剥離のない ( $2\bar{c}=0$ ) 積層はりの値に接近し、モードの節に近づくとき低くなるが、理論とともに実験によっても確認できる。

#### 5. あとがき

本報告では、剥離を有する異種材積層はりの自由振動を、剥離部分は両端がヒンジで止められた重ねはりともみなし、上下のはりのたわみは等しいと仮定して理論解析を行った。しかしながら、剥離界面の接触力の計算結果からもわかるように、振動中剥離部分は接触する領域としない領域が混在する。そこで、剥離条件の異なる試験片を製作して振動実験を行い、測定した固有振動数を理論結果と比較してみると両者はよく一致した。したがって、剥離部分の全面接触を仮定したモデルは、

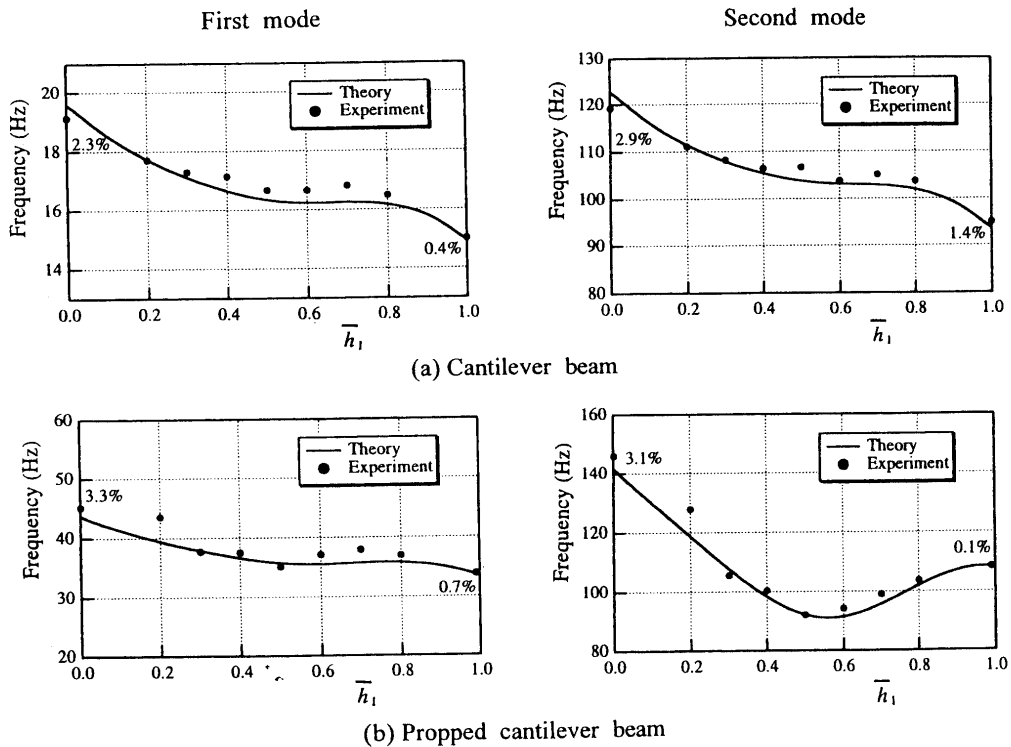


Fig. 8 Effect of thickness-wise location of delamination on natural frequencies ( $2\bar{c}=0.4$ ,  $\bar{L}_c=0.5$ )



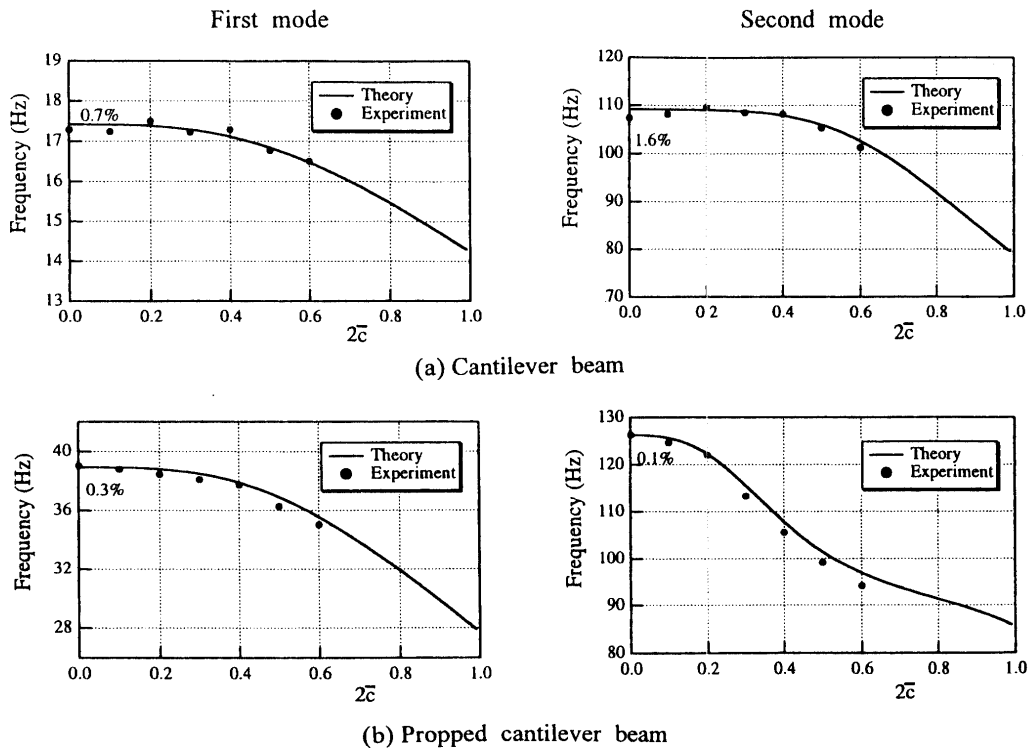


Fig. 9 Effect of delamination length on natural frequencies ( $\bar{L}_r=0.5$ ,  $\bar{h}_1=0.3$ )

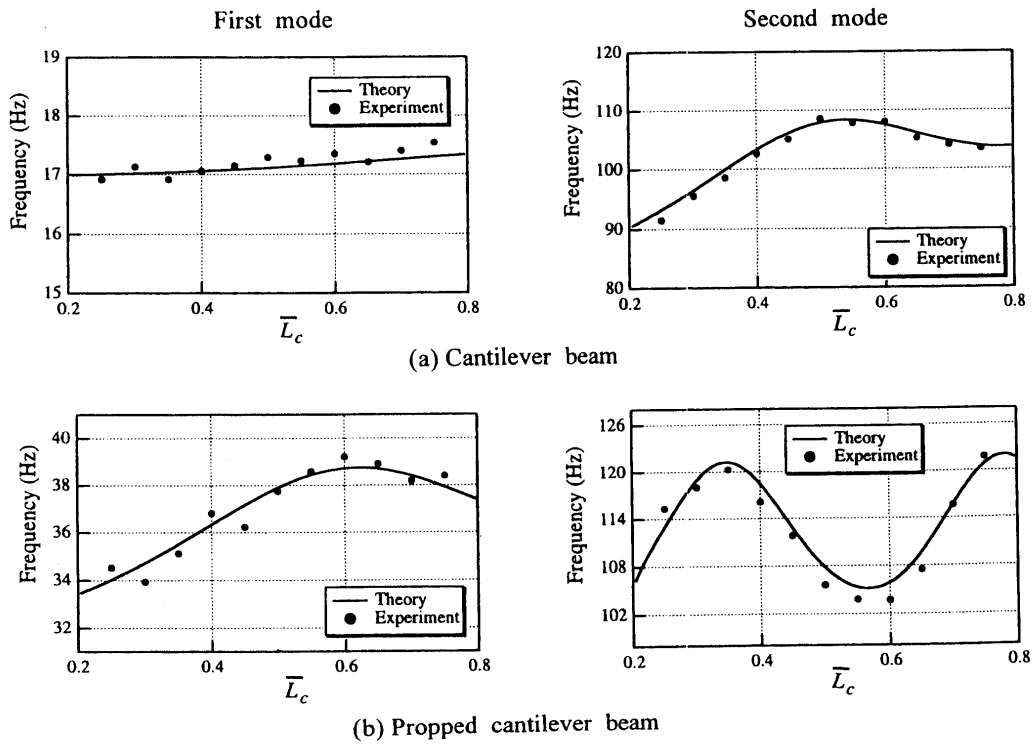


Fig. 10 Effect of span-wise location of delamination on natural frequencies ( $2\bar{c}=0.4$ ,  $\bar{h}_1=0.3$ )

矛盾を含んでいるとはいえ，剥離を有する積層はりの自由振動を解析する際には，簡単でしかも有効な方法といえる．また計算結果から，剥離部分の上下のはりに作用する軸力は，剥離によって固有振動数が減少するのを抑える傾向にあることがわかった．

#### 参考文献

- 1) Wang, J. T. S., Liu, Y. Y. and Gibby, J. A. : Vibrations of Split Beams, *J. Sound Vib.*, 84(4), pp.491-502(1982).
- 2) Mujumdar, P. M. and Suryanarayan, S. : Flexural Vibrations of Beams with Delaminations, *J. Sound Vib.*, 125(3), pp.441-461(1988).
- 3) Tracy, J.J. and Pardoan, G.C. : Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Laminates, *J. Compos. Mater.*, 23(12), pp.1200- 1215(1989).
- 4) Shen, M. H. and Grady, J. E. : Free Vibrations of Delaminated Beams, *AIAA J.*, 30(5), pp.1361-1370(1992).
- 5) Hu, J.S. and Hwu, C. : Free Vibration of Delaminated Composite Sandwich Beams, *AIAA J.*, 33(10), pp.1911-1918(1995).
- 6) 有富正男, 隈元健, 小田美紀男, 戸谷真之 : はく離を有する積層はりの自由振動, *日本機械学会論文集 C 編*, 65(638), pp.3943-3950(1999).
- 7) 戸谷真之, 小野孝, 宮脇正, 桐岡健 : 三点曲げを受ける積層はりの支持点中央に位置する界面はく離の進展解析, *日本機械学会論文集 A 編*, 58(548), pp.599-606(1992).
- 8) Toya, M., Aritomi, M. and Chosa, A. : Energy Release Rates for an Interface Crack Embedded in a Laminated Beam Subjected to Three-Point Bending, *Trans. ASME., J. Appl. Mech.*, 64(2), pp.375-382(1997).