導写像による言語間の関連について

鹿児島大学理学部紀要（数学・物理・化学）
No. 9, p. 15–17, 1976.

導写像による言語間の関連について

藤野　精一*・富樫　　昭**

(1976年9月28日受理)

On Relation between Languages by Derivative-Mapping

Seiiti HUZINO and Akira TOGASI

Abstract

In this paper we shall give a necessary and sufficient condition for satisfying the relation $\partial_u L_1 = L_2$ for some $u \in X^*$.

著者の一人は [1] で言語のカテゴリ **Lang** を構成する際，対象 L_1 から対象 L_2（アルファベット X（固定）上の言語である）への射のクラス **Lang** (L_1, L_2) として

$$\mathbf{Lang}\ (L_1, L_2) \equiv \{\partial_u \mid \text{ある } u \in X^* \text{ に対して } \partial_u L_1 = L_2\}$$

を与えた。ここに ∂_u は [2] で定義した導写像で，各 $L \subset X^*$ に対して

$$\partial_u L \equiv \{w \mid uw \in L\}$$

で定義される。この射のクラスが意味のあるものであることをたしかめるため，ここでは L_1 と L_2 とがどのような関係のとき $\partial_u L_1 = L_2$ となるかを調べておこう。

まず，次の定義を与える。

定義　各 $u \in X^*$ に対して導写像 ∂_u の核 $Ker(\partial_u)$ とは

$$Ker(\partial_u) \equiv \{w \mid w \in X^* \text{ かつ } \partial_u w = \phi\}$$

で定義される集合をいう。

例　$X = \{a, b\}$ のとき，

$$Ker(\partial_a) = \lambda + b \cdot X^*$$

$$Ker(\partial_{ab}) = \lambda + (b + aa) \cdot X^*$$

注．任意の導写像 $\partial_u (u \neq \lambda)$ に対して，一般に，核 $Ker(\partial_u)$ は無限集合である。

定理　L_1, L_2 をアルファベット X の上の言語とする。このとき，$\partial_u L_1 = L_2$ であるための必要十分条件は，$L_1 = uL_2 + C$ となる言語 C が $Ker(\partial_u)$ の中にとれることである。

証明　(i) 十分なること：これは，明らかである。すなわち

$$\partial_u L_1 = \partial_u (uL_2 + C)$$

*)　九州大学理学部数学教室 (Department of Mathematics, Kyushu University).
**)　鹿児島大学理学部数学教室 (Department of Mathematics, Kagoshima University).

$$= L_2 + \partial_u C$$

$$= L_2 \qquad (C\text{ の仮定より } \partial_u C = \phi)$$

(ii) 必要なること： $u=\lambda$ のときは $C=\phi$ と，とればよい。 $u \neq \lambda$ とし， $u=a_1a_2\cdots a_m$ $(a_i \in X;\ i=1,2,\ \cdots m;\ m \geqq 1)$ とする。

このとき，

$$L_1 = \delta(L_1) + \sum_{a \in X} a\partial_a L_1$$

がなりたつ。ここに $\delta(L_1)$ は

$$\delta(L_1) = \begin{cases} \{\lambda\} & (\lambda \in L_1 \text{ のとき}), \\ \phi & (\lambda \notin L_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義される集合である。したがって，

$$L_1 = a_1\partial_{a_1}L_1 + (\delta(L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_1}} a\partial_a L_1)$$

である。このとき，

$$\partial_{a_1}(\delta(L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_1}} a\partial_a L_1) = \phi$$

であるから $\delta(L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_1}} a\partial_a L_1$ は $Ker(\partial_{a_1})$ に入る。 $Ker(\partial_{a_1}) \subset Ker(\partial_u)$ であるから， $\delta(L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_1}} a\partial_a L_1$ は $Ker(\partial_u)$ に入る。

さて，ふたたび，

$$\partial_{a_1}L_1 = \delta(\partial_{a_1}L_1) + \sum_{a \in X} a\partial_a(\partial_{a_1}L_1)$$

であるから

$$\partial_{a_1}L_1 = a_2\partial_{a_2}(\partial_{a_1}L_1) + (\delta(\partial_{a_1}L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_2}} a\partial_a(\partial_{a_1}L_1))$$

$$= a_2\partial_{a_1a_2}L_1 + (\delta(\partial_{a_1}L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_2}} a\partial_{a_1a}L_1)$$

である。これを前式に代入して

$$L_1 = a_1(a_2\partial_{a_1a_2}L_1 + (\delta(\partial_{a_1}L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_2}} a\partial_{a_1a}L_1))$$

$$+\ (\delta(L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_1}} a\partial_a L_1)$$

$$= a_1a_2\partial_{a_1a_2}L_1 + a_1(\delta(\partial_{a_1}L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_2}} a\partial_{a_1a}L_1)$$

$$+\ (\delta(L_1) + \sum_{\substack{a \in X \\ a \neq a_1}} a\partial_a L_1)$$

これをつづけて，

$$\begin{aligned} L_1 = a_1a_2\cdots a_m\partial_{a_1a_2\cdots a_m}L_1 & \\ + \sum_{k=0}^{m-1} a_1a_2\cdots a_k(\delta(\partial_{a_1a_2\cdots a_k}L_1) & \\ + \sum_{\substack{a\in X\\ a\neq a_{k+1}}} a\partial_{a_1a_2\cdots a_ka}L_1) & \end{aligned}$$

を得る。ここに $k=0$ のとき $\partial_{a_1a_2\cdots a_k}L_1\equiv L_1$ とする。

各言語 $\delta(\partial_{a_1a_2\cdots a_k}L_1)+\sum_{\substack{a\in X\\ a\neq a_{k+1}}} a\partial_{a_1a_2\cdots a_ka}L_1$ は $Ker(\partial_{a_{k+1}})$ に入る。したがって，

$$a_1a_2\cdots a_k(\delta(\partial_{a_1a_2\cdots a_k}L_1)+\sum_{\substack{a\in X\\ a\neq a_{k+1}}} a\partial_{a_1a_2\cdots a_ka}L_1)$$

は $Ker(\partial_{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}})$ に入る。この核 $Ker(\partial_{a_1a_2\cdots a_{k+1}})$ は $Ker(\partial_u)$ に入るから，$k=0,1,2,\cdots,m-1$ までの各集合の和

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_1a_2\cdots a_k(\delta(\partial_{a_1a_2\cdots a_k}L_1)+\sum_{\substack{a\in X\\ a\neq a_{k+1}}} a\partial_{a_1a_2\cdots a_ka}L_1)$$

は $Ker(\partial_u)$ に入る言語である。よって，この集合を C とすると

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1a_2\cdots a_m\partial_{a_1a_2\cdots a_m}L_1+C \\ &= u\partial_uL_1+C \end{aligned}$$

となる。ところが $\partial_uL_1=L_2$ であるから，

$$L_1 = uL_2+C$$

である。　(証終)

核の定義の注により各 L_2 に対して **Lang** (L_1, L_2) が空でないような L_1 のとり方は無限にあることがわかる。

参考文献

[1] 藤野精一： 言語のカテゴリと構造図について，昭和 51 年度日本数学会秋季総合分科会，応用数学講演予稿集，172-177.

[2] 藤野精一，富樫　昭： 言語の構造図の一応用について，鹿児島大学理学部紀要 No. 8 (1975)，1-16.