

立体投影の天文教育への応用

高橋 秀夫*

(1988年10月7日 受理)

Application of Stereographic Projection to Astronomical Teaching

Hidewo TAKAHASHI

1. 序 言

本論文は鹿児島県地学会誌に掲載された「立体投影の天文への応用」の続編ともいべきものである。筆者はこのコピーを地学実験Ⅱの手引きとして利用してきたのであるが、受講学生に説明しているうちに2, 3の誤りとさらに有効な応用例があることに気がついた。これらをまとめて本論文として発表する。

この論文では立体投影とウルフのネットの使用法については、その基本的事項についてのみ記す。これらは「天文への応用」に詳述されているが、本論文だけで立体投影の知識を間にあわせてい読者もいると思うので、それらの人々のためにごく簡単に再述した。立体投影の数学的基礎については適当な数学書（例えば高木貞一著「代数学講義」）を参考にされたい。

2. 立体投影

立体投影とは、例えば地球表面上の点を、その点と南極を結ぶ直線が赤道面と交わる点で表わすような投影法である。この場合、南極は投影中心といわれ、赤道面は投影面といわれる。赤道は円に投影され、北半球の点は円内に、南半球の点は円外に投影される。立体投影の最大の特徴は球面上の円は、投影面上で円になることである。ただし、球面上の円の中心は、投影面上の円の中心になるとは限らない。円は直径の両端が与えられれば描ける。したがって立体投影では、球面上の円の直径の両端が投影面上で決定できれば、その円の投影が得られる。

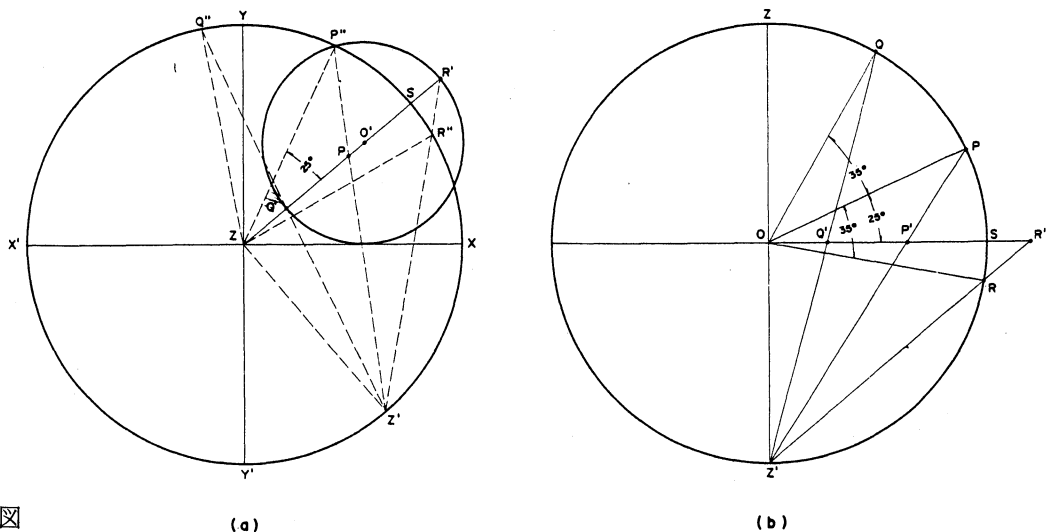
立体投影の基本操作の一つ、「半径1の球面上一点Pを中心とした半径 ρ° の円を描くこと」を次に示す。

* 鹿児島大学教育学部地学教室

まず、位置の記述法を次のように約束する。座標は極座標で表わすが、地球や天球の表記に合わせて、方位角 (ϕ) と高度 (λ) を用いる。方位角は反時計周りに測る。球面上の点はローマ字の大文字で表わす。投影中心は $\lambda = -90^\circ$, $\phi = 0^\circ$ の点とし、 Z' で表わす。その対蹠点は Z で表わす。 $\lambda = 0^\circ$ で、 $\phi = 0^\circ$, 180° の点は X と X' で、 $\phi = 90^\circ$, 270° の点は Y と Y' で表わす。

点 P の座標が $\phi = 40^\circ$, $\lambda = 25^\circ$ であるとき、 P を中心とする半径 35° の円の投影を求めてみよう。球の半径は 1 とする。まず、半径 1 の円を描き、その中に点 P を投影しよう。第 1 図 (a) において、球面上の点で、点 P と円の中心 Z と結ぶ直線が球面と交わる点を S とする。角 SZP は 40° である。点 P は ZS 上に投影される。この点 P の位置を求めるために、 ZS がのる大円を第 1 図 (b) に移してみる。点 P は S から 25° の所にある。点 P を中心とする半径 35° の円の直径はこの大円上にある。そこで、点 P から $\pm 35^\circ$ 離れた Q と R の投影、すなわち直線 OQ , OR と OS との交点、 Q' と R' を求めれば円の直径の両端が得られる。

立体投影では、一枚の図で P' , Q' , R' の 3 点を求めるのが普通である。その方法は、(a) 図上に、(b) 図を回転して、 OS と ZS を重ねて置き、(b) 図を (a) 図に写すのと同様である。



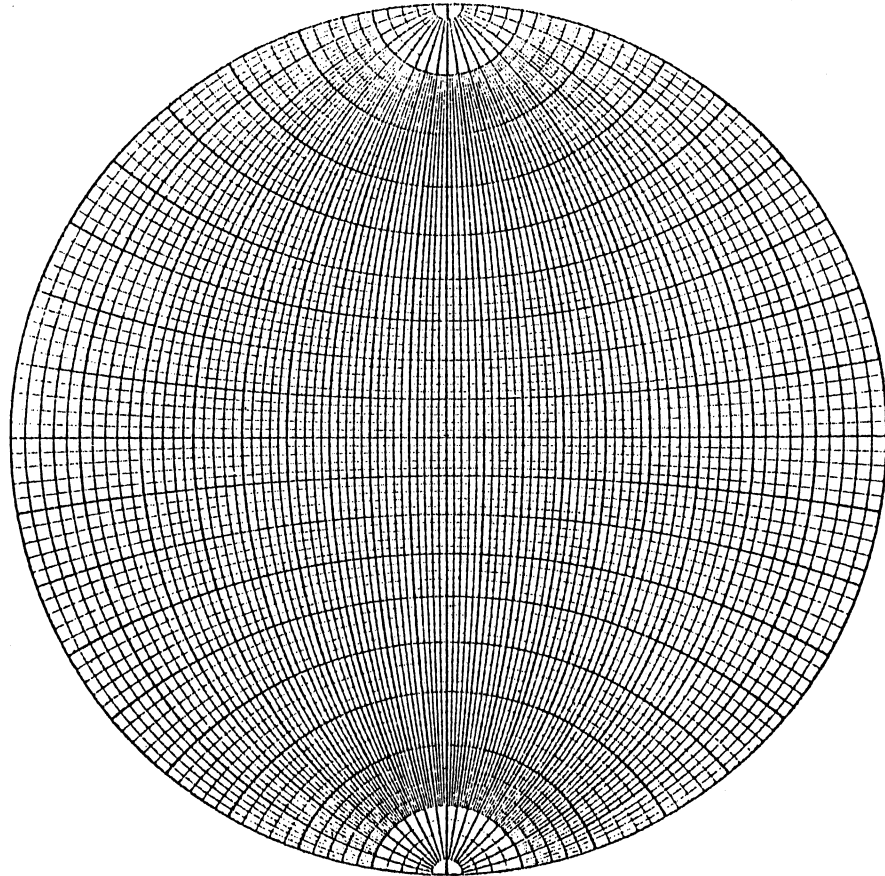
第1図

(a) 方位角 $= 40^\circ$, 高度 $= 25^\circ$ の P を中心に半径 $= 35^\circ$ の円の投影。点 O' は投影された円の中心。

点線は (b) 図を回転して重ねたもの。

(b) 大円 ZPS を取りだして平面に描いたもの。

立体投影では投影面を境にして、投影中心側の球面上の点は球と投影面との交線である円の外側に投影される。この場合には、投影中心を他の極に移して、円内部に投影するのが普通である。ある大円に 1 点 (ϕ, λ) がのれば、その対蹠点 ($\phi + \pi, -\lambda$) もその大円にのる。このことを利用して、異なる側の半球にある 2 点ののる大円や角距離を求めることができる。



第2図

ウルフの網

3. ウルフの網

立体投影するためには前節の投影法を知っていれば十分であるが、より簡便に投影でき、測角できるようにウルフの網が考案されている。ウルフの網とは、いわば球面に 2° づつ経・緯度線を描き、北・南極を前節のYとY'と赤道上の経度 0° と 180° の点をXとX'と一致するように球面を回転して、投影中心を赤道面上、経度 270° の点として、経・緯度線を立体投影したものである。ウルフの網を第2図に示す。

立体投影は、このウルフの網の上に、トレーシング・ペーパーをおき、ウルフの網の外側の円と同じ半径の円をトレーシング・ペーパー上に描き、ウルフの網の中心とトレーシング・ペーパー上の円の中心を一致させ、中心がずれないように針で固定して、トレーシング・ペーパーを回転しながら行なう。

ウルフの網の基本的利用法は

- (1) 極座標が与えられた点の投影
- (2) 2点のがのる大円の決定
- (3) 大円上の2点間の角距離の測定

の3つである。

これらの作業は、球面上の点間の角距離の測定のために、半径が同じで、透明な、別の球面上に、経・緯度線を 2° づつ描きいれた球を用意して、これを球面に重ね、適当に回転しながら、角測定することに対応する。球面上の2点間の距離はそれらがのる大円上において最短(長)となる。したがって、(3)が2点間の角距離の測定である。(3)のためには、透明球を回転して、2点を同じ経度線にのせ、その経度線上の緯度の差を読み取れば、それが2点間の角距離であり、トレーシング・ペーパーを回転して2点が同時にのる経度線のウルフの網上の投影を求めれば、その2点の緯度の差が2点の角距離になる。

4. 天文教育への応用

(1) 赤道儀の据付方法

赤道儀はその極軸の方向が地軸の方向と正しく平行になるように据付なければならない。このためには、まず大体、極軸の方向が北極星に向くように据え付け、次に方向角と傾斜角を修正する必要がある。この修正方法は、こうするのだと覚えてしまえばよいのであるが、なぜそのようにするのかと説明しようとするとは立体的に説明しなければならないので、学生たちに理解させるのがなかなか難しい。この説明が立体投影を用いると極めてわかりやすくなる。

(i) 方向角の修正

方向角の修正には、十字線アイピースを用いて、子午線になるべく近い南天の明るい星を視

野にいて、星の動きに十字線を合わせてから、星を十字線の中央にもってきて、しばらく望遠鏡の追尾をしないでおく。星が視野から外れそうになったとき、微動ハンドルを回して、星を元の中央に戻してみる。このとき、星が十字線の中央より上にずれていれば、極軸は東側に偏っている。その反対なら、西側に偏っている。方向角の偏りは、架台を少しずつ動かして修正する。

以上が方向角の修正法のあらましである。この方法を立体投影を用いて検討してみる。投影面は地平面で、投影中心は天底である。観測地の緯度は 30° と仮定する。まず、天の北極と天の赤道の位置をトレーシング・ペーパー上に投影する。これらは第3図の点Pと曲線Eになる。偶然、赤緯が -20° の星が子午線上、これは北極と天頂が同時にのる直線である、Qにあったと仮定する。星と天の北極のなす角は 110° である。この星の日周運動の軌跡は次のようにして描ける。トレーシング・ペーパーを回転して、ウルフの網の緯度 $\pm 90^\circ$ の点から 110° 離れた小円上にPをのせ、緯度 $\pm 90^\circ$ の点をトレーシング・ペーパーに写して、Rとする。同様にして、Rと子午線について対称な点Sをトレーシング・ペーパー上にプロットする。円弧QRSがこの星の日周運動の軌跡になる。この円弧の曲率半径は大きいので、Qの付近ではほぼ直線とみなせるようになる。

次の極軸の方向に誤りがあり、極軸の方向がTであったと仮定する。QとTのなす角もほぼ 110° である。この望遠鏡で、Qにある星に十字線を合わせた後、極軸の周りに鏡筒を回転すると、光軸の方向の軌跡はTと約 110° 離れた円弧になる。星の日周運動の軌跡の場合と同様に、この軌跡を求めれば円弧UQVになる。

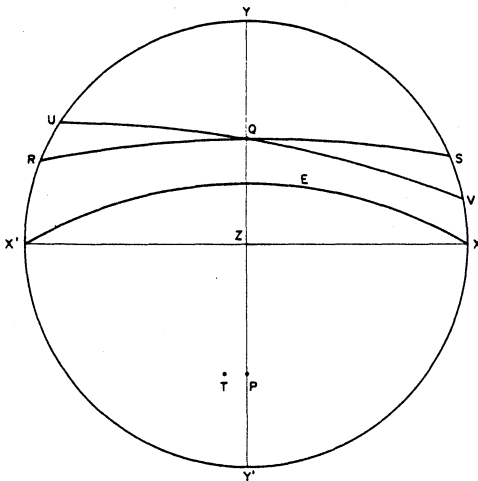
星がQにあったとき、十字線の中央と星が一致しており、望遠鏡をその位置に固定しておき、しばらくしてから、極軸の周りに回転すれば、光軸の方向は曲線UQVに沿って移動する。第3図のように極軸が東側に偏っていれば、星は十字線の中央より下に（天体望遠鏡は倒立だから上に）見えるようになる。

第3図を見ながら、方向角の修正法を極軸方向の偏りが星の運行と平行な方向の角成分を持つとき、光軸の軌跡と星の日周運動の軌跡が斜交し、その角成分については修正できる、もしTが直線PQ上にあれば、曲線UQVはQの近くで曲線RQSとほぼ平行になり、星の十字線からのずれは観測できないと説明すると、受講生が理解しやすいようである。

(ii) 傾斜角の修正

この場合の修正には、東北または西北の天の星が利用される。方法は方向角の修正とほぼ同じである。東北の星が上（南）にずれれば極軸の傾きが不足である。下にずれれば傾きが大きすぎる。

今度は、光軸の方向が子午線上にあってPより 10° ほど低いTであり、星はQにあると仮定する。星の日周運動の軌跡RQSと望遠鏡の光軸の軌跡UQVをトレーシング・ペーパー上に投影すると、第4図のようになる。今度は前のようにUQVはRQSを角PQTだけ回転した



第3図

円弧 RQS は赤緯 -20° の星の日周運動の軌跡の投影。

円弧 UQV は極軸の方向が T である時、光軸が Q を通る場合の光軸の軌跡の投影。

第4図

円弧 RQS は星の位置の投影が Q である時、星の日周運動の軌跡の投影。

円弧 UQV は極軸の方向が T である時、光軸が Q を通る場合の光軸の軌跡の投影。

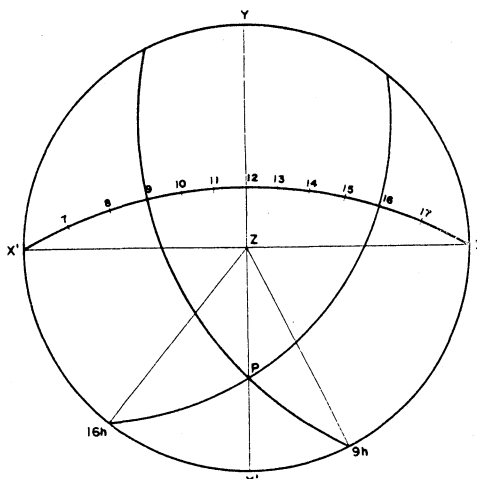
ものとはいえないが、Q の近くでそれに近いものとみなせる。この場合も、説明方法は方向角の修正と同じである。

(2) 水平型日時計

普通に見かける日時計は、一辺が地軸と平行な三角の立ち板の影の位置により時間を測るもので、水平型日時計といわれるものである。日時計の製作にはパス・コンを利用すれば、影の方向はその設置地の緯度さえ入力すれば簡単に計算できる。しかしパス・コンでは計算結果の出力ばかりで、日時計を用いて、我々が教育したい天文の基礎的事項が見失われる。日時計の製作それ自身はさほど意味あることではない。時計をみればより正確な時刻を知ることができる。

立体投影を用いて、日時計を製作するためには、次の事項の説明が必要になる。

- (i) 時圏は天体と天の北・南極を通る大円であり、天体と天の北・南極ののる平面 π と天球の交線である。
- (ii) 時角は子午線と時圏のなす角である。
- (iii) 時角は天の赤道上で測り、1時間 $= 15^\circ$ である。
- (iv) 太陽時は太陽の時角 $+ 12$ 時である。
- (v) 太陽の天球上の位置は季節により変わるが、同じ時角に対応する太陽の時圏は季節によって変わらず、太陽は常にこの時圏のどこかにある。
- (vi) 時圏は地軸を軸として回転する。
- (vii) 地軸と平行な直線の太陽による影は平面 π 上にある。
- (viii) 立体投影では、平面 π と投影面（地平面）との交線は時圏と、球面と地平面との交線である



第5図

直線 YY' を南北方向に一致させ、 Z に日時計設置地の緯度を一角とする直角三角形板の先端をつけ、直線 ZY' に垂直に三角形板を立てれば、直線 $Z-9h$ は9時の三角形板の影になる。

円との交線である。

日時計製作の準備作業として、各時における、地軸と平行な直線の地平面上の日影を求める。まずトレーシング・ペーパーにウルフの網の外周円と同じ半径の円を描き、設置地の緯度にしたがい、天の北極と赤道を投影する。子午線と、円の中心を通り子午線に垂直な直線を描いておく。天の赤道の投影と子午線の投影との交点を原点として、赤道に左右に 15° づつ時点をプロットする。時点と天の北極を通る大円をもとめ、その大円と円の交点の両端を結ぶ直線を引く。この北極側の半分が、太陽の時角が時点の値である時の、地軸に平行な直線の影である。このような、日影直線を7時から17時まで描けば、立体投影の作業は終わりである。第5図に9時と16時の求め方を示す。

適当な大きさ（一辺が30cmぐらい）のほぼ方形の厚紙と、底辺が10cmぐらいで1つの角がその地の緯度に等しい直角三角形の薄手で、曲がりにくい紙を用意する。厚紙上にT字形に線を引き、先に作ったトレーシング・ペーパー上の日影直線を厚紙に写し、三角形板を立て、きれいに仕上げれば日時計の製作終了である。

(3) 「天文への応用」の記載事項の略述

鹿児島県地学雑誌に記載されている立体投影の天文への応用例を本論文に興味をもってくださる読者のために略述しておく。

(i) 方位角と高度が与えられた天体の赤緯と時角を求めること。

投影中心を天底とする。天の北極 P と赤道 E をまず投影しておく。天体を投影し、その位置を Q とする。2点 P と Q がのる大円、天体の時圏である、と E との交点を R とする。子午線、 P を通る直線、と E との交点を S とする。角 RQ が赤緯であり、角 SR が時角である。

(ii) 方位角と高度が与えられた天体の日周運動の軌跡を知ること。

これについては本論文に記述されている。

- (iii) 天体の地平面上の位置を知って、赤緯、時角、日周運動の軌跡を知ること。

これは(i)と(ii)の応用例である。

- (iv) ある時刻における地球上の日の出、日の入りの曲線を求めること。

この場合には、投影中心を南極に取る。経度 0° の地点を適当に定めておく。時間は真太陽時である。

まず、太陽が北半球上にあるときについて扱う。太陽の位置を投影する。この位置をSとする。太陽光線は平行光線であるから、地球上で太陽に照らされている面は、Sを極とする大円の内部である。太陽を中心として、大円の西側は日の出、東側は日の入りの曲線になる。

太陽が南半球上にあるときには、太陽の位置の対蹠点を投影する。これは暗黒の太陽ともいうべきもので、これを極とする大円の内部が夜である。日の出と日の入りの曲線は、太陽が北半球にある場合と逆転する。

- (v) 歳差運動による天の北極の移動の軌跡を求めること。

「天体への応用」のこの個所には、2, 3の訂正が必要である。まず、投影中心は黄道の南極の方がよい。次に春分点の位置を真西にとる。このことが記述から脱落していた。このように投影法をきめると、春分点は、黄道を表すウルフの網の円周上を移動する。天の北極の移動の軌跡はこの円の中心を中心とする半径 23.4° の円になる。この投影においては、星の位置は春分点が移動しても動かない。

5. 後 記

立体投影は角度計算の精度は極めて悪く、半定性的なものである。しかし、球面上の点を平面に投影することから、球面上の点の位置関係を視覚的に知るために極めて便利である。このことは我々の立体図形についての認識の弱さを補ってくれる。立体投影の最大の利点は、ウルフの網一枚で手軽に球面の回転と同等な作業ができることである。現在は、パソコンの普及により3次元図形もかなり視覚的に把握しやすくなってきている。しかし、教育現場にはさほど普及しておらず、また普及したとしても球面上の点を自由に回転してディスプレイ上に表示するのはかなりの技術、ソフトの開発、が必要である。まだ立体投影が利用される余地はだいぶ残されていると思う。

立体投影は元来、結晶学研究手段として開発されてきた。この学習は鉱物学実験の必修課題である。しかし、立体投影は測角の測定精度があまりよくないので、ある面がどの晶帯に属するのかというようなことを調べて、ごく大まかに大体の傾向を知るための補助手段として使われていた。このような利用法は、天文教育の際にも有効である。例えば、日の出時刻の緯度による相違等について、簡単に知ることができ、さらに季節によって日の出曲線がどう違うかも簡単にわかる。生徒に立体投影を直接に教える必要はないが、教師が授業の前に自分でも分かりにくい問題について、立体投影を利用して調べ、自らの授業に準備するのに適していると考えられる。

球面幾何学は、日本の高校、大学の教養の数学では一般には扱われていない。したがって、学生達は、球面が問題になると、何か難しい、自分等には関係ない問題だと思い込み、「子午線とは・・・」、「時圏とは・・・」と単なる記憶の問題にしてしまう。立体投影はその説明の過程を通じて、受講生があいまいに理解していた、大円、小円、極等について、より正確に理解させ、かつ球面上の位置関係を極めて粗い精度ではあるが、測定により、明らかにしてくれる。それに、なんといっても数式がまったく必要ない。この点は教える側と教わる側の両方にとって、極めて好ましいことである。

筆者の学部学生時代の経験では、立体投影の実習には、かなりの時間が割かれていたと記憶している。教育学部では、そんなのんびりとしたことはできない。筆者の経験によれば、本論文に紹介してある、立体投影方法と、ウルフの網の使用法だけで、基本事項の説明は十分で、あとは、応用例の説明のなかで、より詳しく説明すればよい。こうすることで、極めて短時間に立体投影を教授できる。

文 献

鹿児島県地学会誌，昭和46年6月 No.38, p 9-22