

## 一様な温度変化を受ける積層円板中の円形はく離\*

戸谷 眞之<sup>\*1</sup>, Lalak INDIYONO<sup>\*2</sup>  
有 富 正 男<sup>\*1</sup>, 小田 美紀男<sup>\*1</sup>A Disc-Shaped Interface Crack in a Laminated Plate Subject  
to a Uniform Temperature ChangeMasayuki TOYA<sup>\*3</sup>, Lalak INDIYONO,  
Masao ARITOMI and Mikio ODA<sup>\*3</sup>Kagoshima University, Dept. of Mechanical Engineering,  
1-21-40, Korimoto, Kagoshima, 890-0065 Japan

Symmetrical bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped delamination subjected to uniform temperature change is analyzed on the basis of the theory of small deflection of plates. Radial inplane forces induced by bending in the parts of the plate above and below the delamination are determined by regarding the cracked part as two lapped discs hinged at both edges. For small temperature change, the plate deflects retaining mutual contact of crack faces, and in this case energy release rate is identically zero. For temperature change that is larger than some critical value, local delamination buckling occurs and the energy release rate is no longer zero. It is shown that, when the critical energy release rate concept of Griffith is adopted, the disc-shaped delamination grows unstably under constant temperature condition.

**Key Words:** Fracture Mechanics, Delamination, Laminated Construction, Disc-Shaped Interface Crack, Energy Release Rate, Buckling, Thermal Stress

## 1. 緒 言

近年、耐熱材料または耐摩耗材料として、金属板にセラミックをコーティングした積層材料が注目されている。このような異種材を組合わせて作られる材料では、接合残留応力や熱応力に起因する接着面(界面)のはく離が、材料の信頼性にかかわる重要な問題となる。破壊力学の観点からは、積層層材を使用するにあたっては、あらかじめはく離の存在を想定し、それがいかなる条件のもとで進展するかを把握しておくことが不可欠である。このことを反映して、積層材料の界面はく離の熱負荷による進展に関し、多くの理論および実験的研究がなされてきた<sup>(1)(2)</sup>。

著者らは、材端に初期はく離を有する異種材積層層が、一様な温度変化を受ける場合のエネルギー解放率を、材料力学のはり理論に基づいて計算し、簡単な公式を得、これが有限要素法による数値解とよく一致することを確かめた<sup>(3)</sup>。HutchinsonおよびLu<sup>(4)</sup>は、積層層の内部はく離が温度こう配のもとに置かれると

きのエネルギー解放率を導いている。同じく温度こう配下における材端はく離の進展の研究は、最近著者らによりなされた<sup>(5)</sup>。Saitohら<sup>(6)</sup>は実際のLSIパッケージの温度サイクル下におけるはく離について、数種類の初期界面はく離を仮定し、その進展プロセスを有限要素法により解析した。

以上の研究ははりを対象にしている。実用上重要な積層板中のはく離の研究は、円形はく離が面内圧縮力により座屈を起す現象を解析した例は多いものの<sup>(7)</sup>、これらを除いては十分とはいえない。特に、はく離を含む積層板の熱応力による曲げの解析は、著者らの知る限りではまだなされていない。そこで、本論文では、円形はく離(界面クラック)を有する積層円板が、一様な温度変化を受ける場合を想定し、微小たわみの板理論に基づき熱応力による板の変形、およびはく離のエネルギー解放率を解析する。温度変化が小さい間は、はく離面は互いに接触しつつたわみ、このときには、はく離進展は起こらないが、ある温度変化以上では、はく離部分は座屈し、これによりはく離進展が可能になることが示される。

\* 原稿受付 1999年3月19日。

<sup>\*1</sup> 正員、鹿児島大学工学部(〒890-0065 鹿児島市郡元1-21-40)。<sup>\*2</sup> 鹿児島大学大学院。

E-mail: toyamasa@mech.kagoshima-u.ac.jp

2. はく離部分が接触をしている場合の積層円板のたわみ

図1に示すような中央に円形はく離を有する、材質の異なった2枚の弾性円板をはりあわせて作られた積層円板を考える(図1では、3章で扱うはく離部分が座屈を起こしている場合を描いている)。

等方弾性体を仮定し、ヤング率、ポアソン比、熱膨張係数、板厚を上板については  $E_1, \nu_1, \alpha_1, h_1$ , 下の板については  $E_2, \nu_2, \alpha_2, h_2$  とする。また、円板の半径を  $a$ , 円形はく離の半径を  $b$  とする。一様な温度変化  $\Delta T$  を受けるときの熱応力によるたわみを解析する。仮に  $\alpha_1 < \alpha_2$  とすると温度上昇 ( $\Delta T > 0$ ) により、下向きに凸となるような軸対称のたわみが生じるであろう。このたわみを以下の二段階の仮想的ないわゆるカットアンドペースト操作<sup>(9)</sup>により解析する。この手順は最初 Timoshenko<sup>(9)</sup>によりバイメタル(異種材積層はり)の等温変化によるたわみに対して適用された。まず、基準温度(熱応力が零の状態)で2枚の円板が独立して存在すると仮定する。このとき2枚の円板の半径は互いに等しい。温度上昇により各円板は平面状態を保ったまま膨張し、半径が異なった状態になる。第一段階として上の円板の縁に板縁の単位長さ当たり半径方向外向きに力  $f$  を加えて引張り、また下の円板には半径方向中心に向かって  $-f$  を加え圧縮し、上下の円板の半径を等しくする。この状態で2枚の円板を円環領域  $b < r < a$  において接着する。次に第二段階として加えていた力 ( $\pm f$ ) を取り除く。この操作は、積層円板の縁にモーメント  $M_o = hf/2$  (ここで  $h = h_1 + h_2$ ) を作用させることと同等であり、円板はこのモ

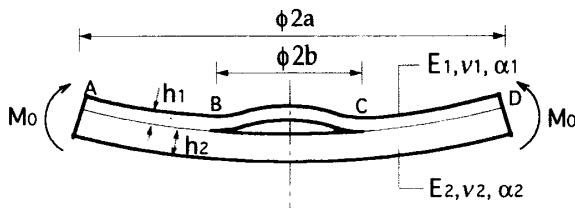


Fig. 1 Bending of a circular laminated plate containing a disc-shaped crack

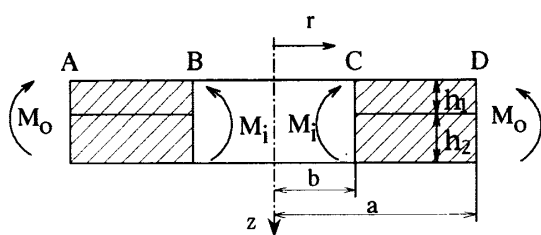


Fig. 2 Free-body diagram of the bonded part

ーメントによりたわむことになる。

まず  $M_o$  を求めよう。  $f$  を付加することによるひずみは上下の板に対し以下ようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \alpha_1 \Delta T + f(1 - \nu_1) / (E_1 h_1) \\ \epsilon_2 &= \alpha_2 \Delta T - f(1 - \nu_2) / (E_2 h_2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

条件  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  より  $f$  が求められ、これより

$$M_o = h(\alpha_1 - \alpha_2) D_o \Delta T / 2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで

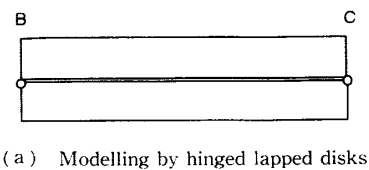
$$D_o = \left( \frac{1 - \nu_1}{E_1 h_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2 h_2} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

このようにして熱応力によるたわみを求める問題は円板の縁に一樣に付加されたモーメント  $M_o$  によるたわみを求める問題(図1)と等価になる。この章では、はく離部分が全面接触をしつつたわむ状況を想定し、この場合のたわみ曲線を求める。前報のはりの解析<sup>(10)(11)</sup>と同様に図1の円板を  $r = b$  で仮想的に分離し、図2に示す円環状の接着部分と図3(a)に示す円周でヒンジ止めされた重ね板の部分(はく離部分)に分ける。

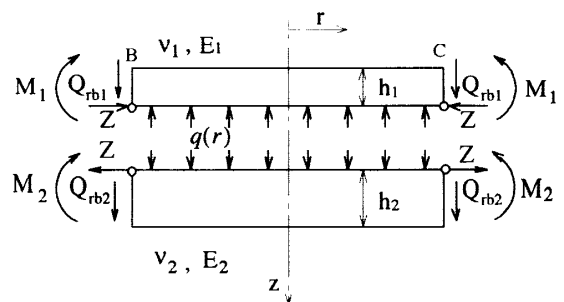
まず円環部分のたわみ曲線  $w_A$  を考える。図2に示すように外縁 ( $r = a$ ) には既知のモーメント  $M_o$  が作用しており、内縁には図の矢印の向きに  $M_i$  (今のところ未知) が作用している。一樣モーメントによる軸対称曲げにおいては、曲げの基礎方程式は等方均質な板の微小たわみの方程式と定数を除いては全く同じになる<sup>(12)</sup>。以下の解析において必要となる基礎方程式は付録Aにまとめてある。たわみの一般解は付録の式(44)より

$$w_A(r) = C_{1A} + C_{2A} \ln(r/a) + C_{3A} r^2 + C_{4A} r^2 \ln r \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。ここで  $C_{1A} \sim C_{4A}$  は未定数である。円



(a) Modelling by hinged lapped disks



(b) Free-body diagram

Fig. 3 Model of the delaminated part

環内においてせん断力は作用していないから、付録の式(43)より  $C_{4A}=0$  となる。  $w_A(a)=0$  とすると、式(4)より

$$C_{1A} = -C_{3A}a^2 \dots\dots\dots(5)$$

円環の外縁および内縁にモーメント  $M_o, M_i$  が作用しているという条件は、式(4), (5), および付録の式(41)を使って以下のように表される。

$$C_{2A} = a^2\{M_o + 2C_{3A}(D_I + D_{II})\}/(D_I - D_{II}) \dots\dots\dots(6)$$

$$C_{3A} = (M_i - \lambda M_o)/\{2(D_I + D_{II})(\lambda - 1)\}, \lambda = a^2/b^2 \dots\dots\dots(7)$$

上式で  $D_I, D_{II}$  は付録、式(42)で与えられる積層板の定数であり、均質板に対しては以下ようになる。

$$D_I = Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}, D_{II} = \nu D_I \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 $E, \nu$  は均質板のヤング率、ポアソン比である。このように  $M_i$  が求められれば式(5)~(7)により未定数  $C_{1A} \sim C_{3A}$  が決まる。

次に、はく離部分 [図3(a)に示す円周縁でヒンジ止めされた重ね板の部分] のたわみ曲線  $w_B$  を求める。ヒンジの作用は上の円板に対して円板の下縁部に中心に向かって水平方向に作用する圧縮力(単位長さ当たり  $Z$  とする)、下の円板に対して円板上縁部に作用する引張力 ( $-Z$ ) に置き換えることができる。以下  $Z$  を断面力と呼ぶ。上下の円板は互いに接していて未知の分布荷重  $q(r)$  が作用しているものとする。自由体線図は図3(b)に示されるものとなる。上下の円板の縁に作用するモーメントを  $M_1, M_2$  とする。これらも今のところ未知であるが、以下の連続条件が成り立つ。

$$M_i = M_1 + M_2 \dots\dots\dots(9)$$

上下の板のたわみを両方等しく  $w_B$  とする。任意の半径で切り出した円板の垂直方向の力の釣合いを考えることにより、 $r =$ 一定の面の単位長さ当たりに作用するせん断力は上の板に対し

$$Q_1(r) = Z \frac{dw_B}{dr} + \frac{1}{r} \int_0^r r q(r) dr \dots\dots\dots(10)$$

図3(b)では  $Q_1(b) = Q_{rb1}$  としてある。したがって、付録の式(43)より

$$-D_1 \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w_B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_B}{dr} \right) = Z \frac{dw_B}{dr} + \frac{1}{r} \int_0^r r q(r) dr \dots\dots\dots(11)$$

同様に下の円板に対し

$$-D_2 \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w_B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_B}{dr} \right) = -Z \frac{dw_B}{dr} - \frac{1}{r} \int_0^r r q(r) dr \dots\dots\dots(12)$$

を得る。ここで  $D_1, D_2$  はそれぞれ上下の板の曲げ剛性で

$$D_j = E_j h_j^3 / \{12(1-\nu_j^2)\}, (j=1, 2)$$

なお、 $Q_{rb1} + Q_{rb2} = 0$  であるから、接着部分のたわみを解析する際には  $r = b$  でせん断力は作用しないものとして良い(図2)。

式(11)と(12)を足し合わせて積分して

$$w_B = C_{1B} + C_{2B} \ln r + C_{3B} r^2 \dots\dots\dots(13)$$

$w_B(0)$  は有界という条件よりただちに  $C_{2B} = 0$  を得る。 $r = b$  に作用しているモーメントは上の板に対しては、 $M_1 - h_1 Z/2$ 、下の板に対しては、 $M_2 - h_2 Z/2$  であるから式(13)および付録の式(41)より

$$\begin{aligned} -2D_1(1+\nu_1)C_{3B} &= M_1 - h_1 Z/2 \\ -2D_2(1+\nu_2)C_{3B} &= M_2 - h_2 Z/2 \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

式(14)を辺々足し合わせ条件(9)を代入すると

$$C_{3B} = (Zh - 2M_i)/(4D'') \dots\dots\dots(15)$$

が得られる。ここで  $D''$  は、付録の式(46)により定義されている。また  $r = b$  における変位と傾きの連続条件より

$$C_{3A} + C_{2A}/(2b^2) = C_{3B} \dots\dots\dots(16)$$

$$C_{1B} = C_{1A} + C_{2A} \ln \left( \frac{b}{a} \right) + (C_{3A} - C_{3B})b^2 \dots\dots\dots(17)$$

断面力  $Z$  は上下の円板の互いに接している面の半径方向の伸びは等しいという条件から決定される。すなわち

$$\int_0^b \varepsilon_1 dr - \frac{(1-\nu_1)Zb}{E_1 h_1} = \int_0^b \varepsilon_2 dr + \frac{(1-\nu_2)Zb}{E_2 h_2} \dots\dots\dots(18)$$

ここで  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は上下の円板のはく離面における曲げによるひずみで

$$\varepsilon_1 = -(h_1/2)d^2 w_B(r)/dr^2 = -h_1 C_{3B}, \varepsilon_2 = h_2 C_{3B} \dots\dots\dots(19)$$

式(18), (19)より

$$Z = -h C_{3B} D_0 \dots\dots\dots(20)$$

が得られる。式(20)を式(14)に代入し、付録の関係式(45)を用いると

$$C_{3B} = -M_i/\{2(D_I + D_{II})\} \dots\dots\dots(21)$$

が得られる。ついで式(21)を式(16)に代入し、さらに式(6), (7)を用いることにより  $M_i = M_o$  となる。このようにして、式(5)~(7), (16), (17)より未定数は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} C_{1A} = C_{1B} &= M_o a^2 / \{2(D_I + D_{II})\}, C_{2A} = 0 \\ C_{3A} = C_{3B} &= -M_o / \{2(D_I + D_{II})\}, M_i = M_o \end{aligned} \dots\dots\dots(22)$$

結局

$$w_A(r) = w_B(r) = M_o(a^2 - r^2) / \{2(D_I + D_{II})\} \dots\dots\dots (23)$$

すなわち、たわみ面は球面であり、はく離半径  $b$  には無関係である。なお分布荷重  $q(r)$  は式(11)、(12)、(23)より

$$q(r) = -4C_{3B}Z = M_o^2 h D_o / (D_I + D_{II})^2 \dots\dots\dots (24)$$

となる。すなわち  $q(r)$  は座標  $r$  に依存しない正の一定値で、 $M_o$  (すなわち温度差) の二乗に比例して増大する。

3. はく離部分が座屈を起こす場合の積層円板のたわみ

全面接触をしつたわむ場合は、たわみ曲線ははく離半径  $b$  に無関係であり、したがって板のひずみエネルギーもはく離半径に依存しない。言い換えると円形はく離のエネルギー解放率は恒等的に零であり、一様な温度変化によるはく離進展は起きないということになる。しかし曲げを受ける積層はりの内部はく離について確かめられているように<sup>(1)</sup>、円形はく離においても、ある臨界モーメント(温度差)に対し、円形はく離部分が図1に示すような局所座屈を起こし、これに伴いエネルギー解放率はもはや零ではなくなる、という状況が考えられる。以下、局所座屈の起きる条件、および座屈後の板のたわみを解析しよう。

局所座屈が起る場合のはく離上下の板のたわみをそれぞれ  $w_{B1}$ ,  $w_{B2}$  とする。式(11)、(12)で  $q(r)=0$  とおき、積分することにより以下の方程式を得る。

$$\frac{d^2 w_{B1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B1}}{dr} + \frac{Z}{D_I} w_{B1} = K_{B1} \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{d^2 w_{B2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{B2}}{dr} - \frac{Z}{D_2} w_{B2} = K_{B2} \dots\dots\dots (26)$$

$K_{B1}$ ,  $K_{B2}$  は未定数である。それぞれの完全解は以下のように書ける。

$$w_{B1} = B_1 J_0(k_1 r) + K_{B1} / k_1^2, k_1 = \sqrt{Z/D_I} \dots\dots\dots (27)$$

$$w_{B2} = B_2 I_0(k_2 r) - K_{B2} / k_2^2, k_2 = \sqrt{Z/D_2} \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 $B_1$ ,  $B_2$  は未定数、 $J_0$ ,  $I_0$  はそれぞれ零次の第一種および第二種のベッセル関数である。式(27)、(28)より、上下の円板の縁におけるモーメントは次式で与えられる。

$$M_1 = \frac{h_1 Z}{2} - D_I \left( \frac{d^2 w_{B1}}{dr^2} + \frac{\nu_1}{r} \frac{dw_{B1}}{dr} \right) \Big|_{r=b} = h_1 Z / 2 - B_1 Z \{ (1 - \nu_1) J_1(k_1 b) / (k_1 b) - J_0(k_1 b) \} \dots\dots\dots (29)$$

$$M_2 = h_2 Z / 2$$

$$+ B_2 Z \{ (1 - \nu_2) I_1(k_2 b) / (k_2 b) - I_0(k_2 b) \} \dots\dots (30)$$

ここで、 $J_1$ ,  $I_1$  はそれぞれ一次の第一種および第二種のベッセル関数である。

一方、接着部分のたわみ  $w_A$  は2章と同様に式(4)で  $C_{4A}=0$  とおいて得られる。円環縁におけるモーメントに関する境界条件も2章と同様であるから、式(6)、(7)はそのまま成立する。また式(5)も変わらない。

2章と同様にして、境界  $r=b$  におけるたわみおよびたわみ角の連続条件から

$$B_1 = -\frac{C_{2A} + 2b^2 C_{3A}}{b k_1 J_1(k_1 b)}, B_2 = -\frac{C_{2A} + 2b^2 C_{3A}}{b k_2 I_1(k_2 b)}$$

$$K_{B1} = \frac{Z}{D_I} \left\{ (b^2 - a^2) C_{3A} + C_{2A} \ln \frac{b}{a} - B_1 J_0(k_1 b) \right\}$$

$$K_{B2} = \frac{Z}{D_2} \left\{ B_2 I_0(k_2 b) - (b^2 - a^2) C_{3A} - C_{2A} \ln \frac{b}{a} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

式(9)に式(29)、(30)を代入し、式(6)、(7)、(31)を用いると、 $M_i$  は以下のように決定される。

$$M_i = \frac{1}{F_0} \left\{ \frac{hZ}{2} - \frac{2a^2 b^2 D_I M_o F_3}{(a^2 - b^2)(D_I^2 - D_{II}^2)} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで

$$F_0 = 1 - \frac{b^2 F_3 F_4}{(a^2 - b^2)(D_I^2 - D_{II}^2)}$$

$$F_1 = (1 - \nu_1) J_1(k_1 b) / (k_1 b) - J_0(k_1 b)$$

$$F_2 = (1 - \nu_2) I_1(k_2 b) / (k_2 b) - I_0(k_2 b) \dots\dots\dots (33)$$

$$F_3 = Z \left\{ \frac{F_1}{k_1 b J_1(k_1 b)} + \frac{F_2}{k_2 b I_1(k_2 b)} \right\}$$

$$F_4 = a^2 (D_I + D_{II}) + b^2 (D_I - D_{II})$$

以下、2章と同じ手順で未知定数はすべて断面力  $Z$  で表される。

最後に断面力  $Z$  を決定しよう。ヒンジ止めされた部分の縁は、座屈後もはく離部分の上下の円板の各々の中立面と直角を保つという条件により、以下の式を得る。

$$-\frac{1}{2} \int_0^b \left( \frac{dw_{B1}}{dr} \right)^2 dr - \frac{(1 - \nu_1) Z b}{E_1 h_1} = -\frac{1}{2} \int_0^b \left( \frac{dw_{B2}}{dr} \right)^2 dr + \frac{(1 - \nu_2) Z b}{E_2 h_2} + \frac{h}{2} \frac{dw_{B1}}{dr} \Big|_{r=b}$$

すなわち、

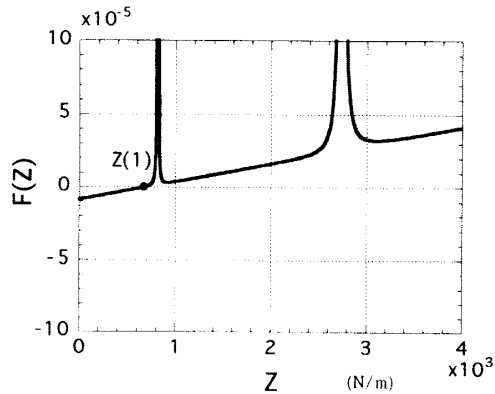
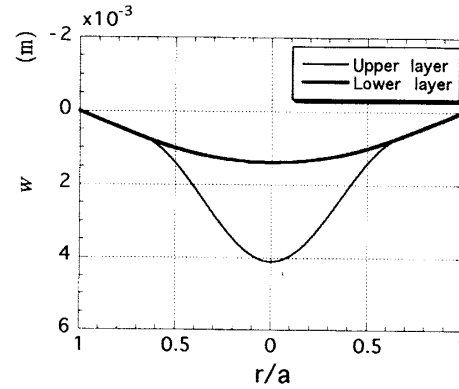
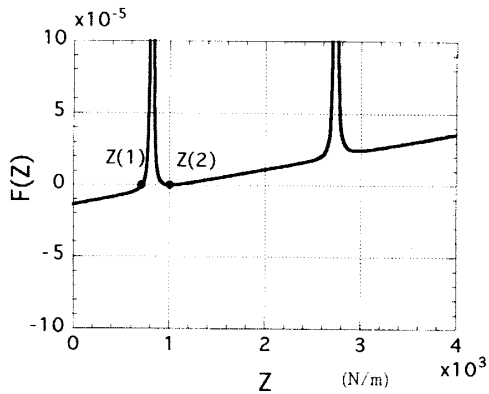
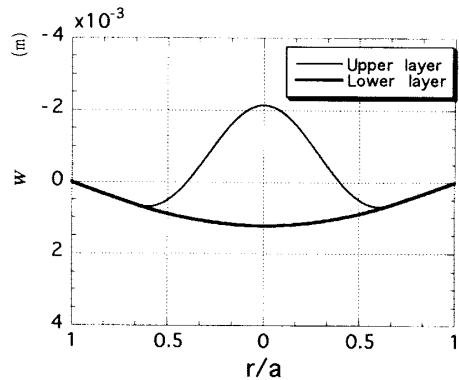
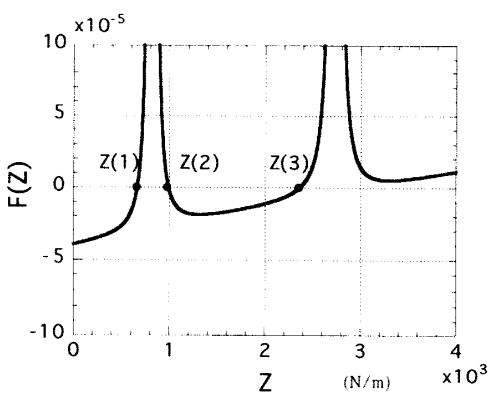
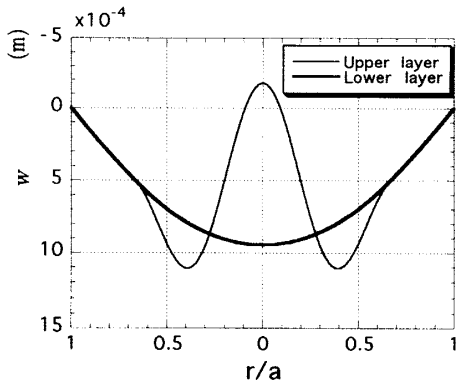
$$\frac{b Z B_1^2}{2 D_I} \int_0^1 \{ J_1(k_1 b \rho) \}^2 d\rho + \frac{(1 - \nu_1) Z b}{E_1 h_1} = \frac{b Z B_2^2}{2 D_2} \int_0^1 \{ I_1(k_2 b \rho) \}^2 d\rho - \frac{(1 - \nu_2) Z b}{E_2 h_2} - \frac{h B_1}{2} k_1 J_1(k_1 b) \dots\dots\dots (34)$$

式(34)は  $Z$  に対する非線形方程式であり、数値的に

解く必要がある。ここで例として、上層が厚さ  $h_1=0.5$  mm の SUS 304 材 ( $E_1=195.02$  GPa,  $\nu_1=0.29$ ), 下層に  $h_2=10$  mm のアクリル材 ( $E_2=2.94$  GPa,  $\nu_2=0.34$ ) を用いたモデル板について、式(34)の解を調べる。円板の半径は  $a=300$  mm, はく離半径は  $b=200$  mm とし、モーメント  $M_o$  を変化させる。

解くべき方程式(34)を  $F(Z)=0$  とおいて、解の挙動を調べるために  $F(Z)$  を  $Z$  に対してプロットする。図4(a)~(c)に、 $M_o$  がそれぞれ  $5.5$  N,  $8.7$  N,  $25$

N の場合に対する  $F(Z)$  のプロットを示す。モーメントが小さいときには、解は一つのみ存在し、モーメントが増加するにつれ、解の数は二つまたはそれ以上に増加することがわかる。図4(c)の三つの解  $Z(1)$ ,  $Z(2)$ ,  $Z(3)$  に対応する上下の円板のたわみ曲線をそれぞれ図5(a)~(c)に示す。図5(a)および(c)では、二層がオーバーラップしているの、解  $Z(1)$  と  $Z(3)$  は不適切であることがわかる。一方、図5(b)のたわみ曲線は矛盾を含まない。したがって、 $Z(2)$  が、

(a)  $M_o=5.5$  N(a) Deflection curves corresponding to  $Z(1)$ (b)  $M_o=8.7$  N(b) Deflection curves corresponding to  $Z(2)$ (c)  $M_o=25$  N(c) Deflection curves corresponding to  $Z(3)$ Fig. 4 Plot of the function  $F(Z)$ Fig. 5 Deflection curves corresponding to the solutions of  $F(Z)=0$

我々の求めている座屈に対応する解であることがわかる。同様なことは、図4(a), (b)の解についても確かめられた。このようにして、2番めの解Z(2)が始めて現れるモーメント(温度差)が、座屈を起こす臨界モーメント  $M_{cr}$  となる。

Z(2)が求められると、たわみ曲線が決定され、円板の縁におけるたわみ角は、 $\theta = C_{2A}/a + 2C_{3A}a$  より計算される。臨界モーメント  $M_{cr}$  より小さなモーメントに対しては式(23)より、 $\theta = M_o a / (D_I + D_{II})$  となり  $b$  には無関係な一定値となる。はく離半径が  $b = 100$  mm, 150 mm, 200 mm の場合に対して、このようにして得られたモーメントとたわみ角の関係を図6に示す。予想どおり、はく離半径が大きいほど臨界モーメントは小さくなることがわかる。座屈後は円板はたわみやすくなっているが、この傾向は特にはく離半径が大きいほど著しい。グラフはほぼ bilinear であり、この結果は、積層はりにおける結果<sup>(11)</sup>と同じである。

なお、最初の等温変化の問題に立ち返ると、モデル材料の熱膨張係数を SUS 304 に対し  $\alpha_1 = 17.1 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ 、アクリル材については  $\alpha_2 = 70.0 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  とすると、 $M_o = 1$  N は、温度変化、 $0.10^\circ\text{C}$  に相当することがわかる。我々のモデル材料は、実用のものとは無関係に任意に選んだものであるが、それにしても熱膨張係数の違いによって割合小さな温度変化によって座屈が起きることがわかる。

4. 座屈する場合のエネルギー解放率

Suo と Hutchinson<sup>(8)</sup> は、図7に示すような一般の負荷を受けている単位幅の積層はりのはく離のエネルギー解放率を与える公式を二次元弾性論に基づいて導いた。エネルギー解放率を  $G$  とすると、平面ひずみ条件に対し彼等の式は以下のように与えられる。

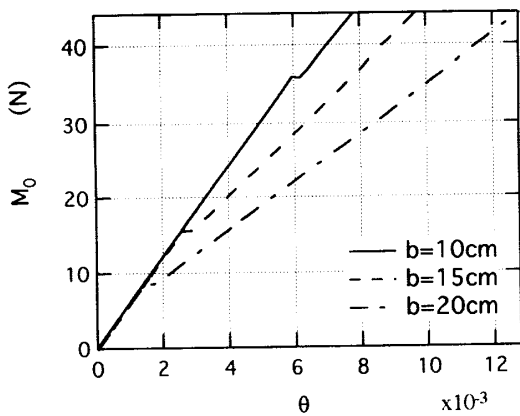


Fig. 6 Relation between  $M_o$  and  $\theta$

$$G = \frac{c_1}{16} \left( \frac{P_o^2}{A_o h_1} + \frac{M_o^{*2}}{I_o h_1^3} + \frac{2P_o M_o^*}{\sqrt{A_o I_o h_1^2}} \sqrt{\frac{(D_o - D) D_I}{(D_o - D_I) D}} \right) \dots\dots\dots (35)$$

ここで、

$$P_o = P_1 - C_1 P_3 - C_2 M_3 / h_1 \dots\dots\dots (36)$$

$$M_o^* = M_1^* - C_3 M_3 \dots\dots\dots (37)$$

定数  $A_o, I_o, c_1, D, C_1 \sim C_3, D_o$  等は付録Bに与えられている。Hutchinson と Suo<sup>(11)</sup> は式(35)を面内等方圧縮力により座屈している円形はく離に適用した。ただし、積層板と積層はりの場合とでは、一般には中立面の位置が異なっているので、たとえ軸対称問題であっても、その結果を式(35)に適用して得られる  $G$  は近似的なものとなる。どちらか一方の板の伸び剛性が他方のそれより十分大きいとき、例えば  $E_1 h_1 \ll E_2 h_2$  のとき、または二層のポアソン比が等しいときには、積層板と積層はりの中立面の座標が一致するので<sup>(12)</sup>、この場合には式(35)は正確なものとなる。図7を参照すると、

$$P_1 = Z, P_3 = 0, M_3 = M_i, M_1^* = M_1 - h_1 Z / 2$$

とおけるから

$$P_o = Z - C_2 M_i / h_1 \dots\dots\dots (38)$$

$$M_o^* = M_1 - h_1 Z / 2 - C_3 M_i \dots\dots\dots (39)$$

となる。ここで、ポアソン比を等しいとすると、全面接触に対する解を代入し、また付録の式(51)で  $\nu_1 = \nu_2$  とおいた  $C_1, C_3, D_o$  等を適用することにより、 $P_o, M_o^*$  ともに恒等的に零となる。したがって、式(35)からエ

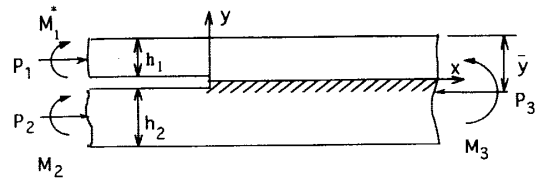


Fig. 7 Split-beam element under general loading condition

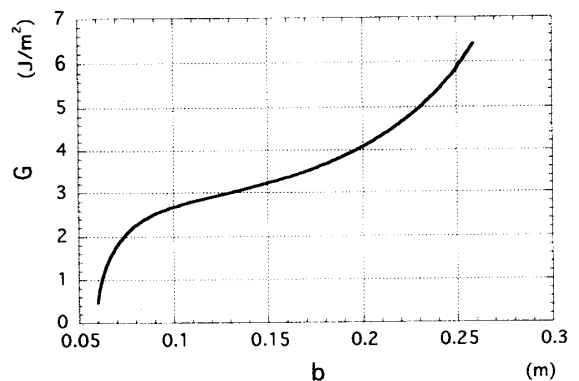


Fig. 8 Variation of the energy release rate with crack radius

エネルギー解放率も零であることが導かれる。

3章で扱ったモデル材では、SUS 304 のポアソン比は 0.29 で、アクリルのそれは 0.35 であったから、両者の違いは小さい。それゆえ、3章で得られた  $Z$ ,  $M_i$ ,  $M_1$  を式(38), (39)に用いることにより、座屈する場合の  $G$  が計算される。3章のモデル材料において、初期はく離半径を 60 mm とすると、 $M_{cr}=100.6$  N となる。外部モーメントをこの値に固定し、はく離半径を 260 mm まで増大させたときのエネルギー解放率の変化の様子を調べた結果を図 8 に示す。エネルギー解放率は、はく離半径の増大とともに増大すること、したがって、はく離進展条件が  $G=G_c$  (界面の破壊靱性値) によって与えられるものとする、座屈によるはく離進展は不安定であることがわかる。

## 5. 結 言

積層板に拡張した、微小たわみの板曲げ理論を基礎に、一様な温度変化による円板の中心に位置する円形はく離の進展の座屈解析を行った。この問題は円板縁が一様な曲げモーメントを受ける問題と等価である。最初にはく離面が相互に接触しつつたわむモデルを解析した。はく離部分を、円形の縁に沿ってヒンジ止めされた重ね板でモデル化し、はく離部上下の面内に作用する断面力を簡単な形で得た。たわみ曲線は、はく離半径に依存せず、したがって、接触しつつたわむ場合は、はく離進展は生じない。次に、はく離部分が局所座屈を起こす場合の解析を行った。解は未知の断面力に対する非線形方程式の解を求める問題に帰着される。解に対応するたわみ曲線を調べることにより、始めて 2 番目の断面力の解が現れるモーメントが、座屈を起こすモーメントとなることがわかった。予想どおり、限界モーメントは、はく離半径が大きくなるにつれ減少する。ついで、はく離の進展挙動を調べるために、エネルギー解放率を計算した。一定外部モーメント(温度変化)のもとでは、エネルギー解放率は、はく離半径とともに増大すること、すなわち、座屈によるはく離は不安定に進行することがわかった。

最後に、本研究は文部省科学研究費補助金 [基盤研究 C(2)09650110] の援助を受けて実施されたことを付記し、謝意を表す。また、計算および図の作製を手伝っていただいた前田義和技官、4 年生立迫恵一郎君に謝意を表す。

## 付 録 A

異種材二層板の軸対称変形に関する基礎式をまとめておく。

板の上面から中立面までの距離は

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E_1 h_1^2}{1-\nu_1} + \frac{E_2 (h^2 - h_1^2)}{1-\nu_2} \right\} / \left( \frac{E_1 h_1}{1-\nu_1} + \frac{E_2 h_2}{1-\nu_2} \right) \quad \dots\dots\dots (40)$$

で与えられる<sup>(12)</sup>。この式は、1章で扱ったような一様な曲げモーメントによりたわむ場合か、どちらか一方の板の伸び剛性が他方のそれより十分大きいとき、例えば  $E_1 h_1 \ll E_2 h_2$  のとき、または上下の材料のポアソン比が等しいときに限り正確なものとなる<sup>(12)</sup>。式(40)が成り立つ場合、 $r$  軸の曲げを生じさせるモーメント  $M_r$  は以下ようになる。

$$M_r = -D_1 \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{II}}{r} \frac{dw}{dr} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ここで  $w$  は板のたわみであり、 $z$  軸方向を正とする。また、

$$D_1 = \frac{E_1 c}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 d}{1-\nu_2^2}, \quad D_{II} = \frac{E_1 \nu_1 c}{1-\nu_1^2} + \frac{E_2 \nu_2 d}{1-\nu_2^2} \\ c = \frac{h_1^3}{12} + h_1 \left( \bar{z} - \frac{h_1}{2} \right)^2, \quad d = \frac{h_2^3}{12} + h_2 \left( \frac{h+h_1}{2} - \bar{z} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (42)$$

上下の層が同一材料である場合は、 $D_1$  は本文式(8)に与えられる均質板の曲げ剛性に帰着し、式(41)も周知の式となる。 $r$  軸に垂直な面に作用するせん断力は、軸対称変形においては、以下のように与えられる。

$$Q_r = -D_1 \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad \dots\dots\dots (43)$$

板上に分布力が作用しない場合には、平衡微分方程式は均質板に対するものと同じく

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

となり、本文式(4)の一般解を持つ。

なお、式(42)より以下の関係式が成り立つ。

$$D_1 + D_{II} = D'' + h^2 D_0 / 4 \quad \dots\dots\dots (45)$$

ここで

$$D'' = (1+\nu_1)D_1 + (1+\nu_2)D_2 \quad \dots\dots\dots (46)$$

$D_0$  は本文式(3)で定義されている。 $D_1, D_2$  はそれぞれ上下の板の曲げ剛性である。

## 付 録 B

式(35)~(37)の定数は、以下のように定義される。

$$c_1 = 8(1-\nu_1^2)/E_1 \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$D'_0 = D + D_{I1}(\bar{y} - h_1/2)^2 + D_{I2}(h + h_2/2 - \bar{y})^2 \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$D_{0b} = (1/D_{I1} + 1/D_{I2})^{-1} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$A_0 = \frac{D_{0b} D_2}{D_{I1}(D'_0 - D_1)}, \quad I_0 = \frac{D_2}{12D} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$$C_1 = D_{0b}/D_{I2}, \quad C_2 = h h_1 D_{0b}/(2D'_0), \quad C_3 = D_1/D'_0 \quad \dots\dots\dots (51)$$

ここで,

$$D = D_1 + D_2 \dots\dots\dots (52)$$

$$D_{t1} = E_1 h_1 / (1 - \nu_1^2), D_{t2} = E_2 h_2 / (1 - \nu_2^2) \dots (53)$$

また,  $\bar{y}$  は, はり上面から中立軸までの距離で, 式 (40) において  $\nu_1 = \nu_2$  とおいた式で与えられる.

### 文 献

- (1) Hutchinson, J. W. and Suo, Z., *Advances in Applied Mechanics*, **29**(1992), 63-191.
- (2) 結城良治編, 界面の力学, (1993), 3章, 培風館.
- (3) Toya, M., Miyawaki, T. and Kirioka, K. (Hashiguchi, T. 編), *Proc. 18th Int. Symp. on Space Tech. and Sci.*, (1992), 527-534.
- (4) Hutchinson, J. W. and Lu, T. J., *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **117**(1995), 386-390.
- (5) 戸谷真之・ほか3名, M & M '98 材料力学部門講演会論文集, No. 98-5, B(1998-11), 143-144.
- (6) Saitoh, T., Matsuyama, H. and Toya, M., *IEEE, Trans. on CPMT, Part B*, **21**(1998), 422-427.
- (7) 例えば, Madenci, E. and Westmann, R. A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **60**(1993), 895-902.
- (8) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., *Int. J. Fract.*, **43**(1990), 1-18.
- (9) 例えば, Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd. ed., (1961), 311, McGraw-Hill Kogakusha, LTD.
- (10) Toya, M., Aritomi, M. and Chosa, A., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **64**(1997), 375-382.
- (11) 戸谷真之・ほか3名, *機論*, **62**-602, A(1996), 2242-2249.
- (12) 戸谷真之・ほか3名, *機論*, **65**-635, A(1999), 1593-1599.