

すべり面により降伏しているクラック先端近傍の特異応力場*

戸谷 眞之*¹, 矢富 盟祥*², 桐岡 健*¹

Singular Stress Field near a Crack Tip Yielding by Inclined Slip Planes

Masayuki TOYA, Chikayoshi YATOMI, and Ken KIRIOKA

This paper is concerned with singular stress distribution near a crack tip yielding by two inclined slip planes. Based on the method of eigenvalue expansions of Williams, the mode I near crack tip singular stress field is obtained in the form with an undetermined constant similar to the stress intensity factor. It is found that unbounded stresses occur near the crack tip with the strength of the singularity being somewhat weaker than for the case without slip planes. Finally, in the case of mode III crack, the results from the closed form solution are compared with the present study.

Key Words: Fracture, Singular Stress Field, Crack Tip, Slip Planes, Eigenvalue Expansions

1. 緒 言

弾塑性クラックの変形様式は二つの種類に大別されよう。一つは塑性域がクラック先端付近に平面的に広がる様式であり、巨視的な塑性力学によって比較的良好に表され、有限要素法などの数値解析が数多く行われている。(本論文が対象とする)もう一つの様式は単結晶材料や比較的方位の良くそろった多結晶材料に見られるもので、この場合塑性変形はクラック先端から発する幅のせまい帯状の領域(すべり帯)に集中する⁽¹⁾⁽²⁾。このタイプの塑性変形様式は静止クラックばかりでなく安定成長するクラック⁽²⁾や疲労クラック⁽³⁾においても共通し、転位論の立場から Bilby ら⁽⁴⁾以来多くの研究者により解析されてきた⁽⁵⁾⁻⁽⁶⁾。後者のタイプの弾塑性クラックに対する従来の研究の興味は主としてき裂開口変位の大きさやすべり線の長さを外部応力の関数として表すことに向けられ、破壊力学の観点から重要なクラック近傍での応力場の解析はなされていない。この理由は主としてこの種の問題の数学的難解性のためと思われる。従来の解析⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾においては

すべり帯は一つのすべり面上に連続分布する転位群でモデル化され、問題は未知の転位分布密度に関する積分方程式を解くことに帰着される。しかし閉じた形で解を得ることは難しく数値解に頼ることになる。例えば、Vitek⁽⁵⁾は連続分布している転位をバーガースベクトルの大きさが各点で未知の離散的に配列する有限個の転位でおきかえることにより近似的な分布密度を得ている。しかしこのような離散化はクラック先端近傍での解を不正確にし信頼できる応力分布は計算できない。

Williams⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾は一般に弾性クラックのエアリ応力関数はクラック先端に原点をとった極座標のある関数(固有関数)の級数として表すことができ、クラック先端近傍での応力分布は、この級数展開の第1項(特異項)によって特徴づけられることを示した。彼のこの「固有関数展開法」はクラック先端近傍での応力場の解析に有力であり、Rice-Sih⁽¹¹⁾⁽¹²⁾により曲げおよび面内引張りを受ける界面クラックの解析に応用された。また Ricc ら⁽¹³⁾および Hutchinson⁽¹⁴⁾は、この手法により巨視的な塑性論に基づき弾塑性クラック先端の特異場の解析を行った。

本論文では、Williamsの手法を2本のすべり線によって降伏しているモードI形クラックに適用し、ク

* 昭和62年10月25日 九州・中国四国支部熊本地方講演会において講演、原稿受付 昭和62年4月30日。

¹ 正員、鹿児島大学工学部 (〒890 鹿児島市郡元1-21-40)。

² 正員、京都大学工学部 (〒606 京都市左京区吉田本町)。

クラック先端近傍の応力場の特異性および応力分布の理論的解析を行う。その結果クラック先端近傍において応力は一般に $r^{\lambda-1}$ の特異性を持つことが示される(2章)。ここで r は、クラック先端からの距離で、 λ はすべり線の傾き角に依存する 0.5 と 1 の間の実数である。またクラック先端近傍での応力の角方向の分布はクラックの長さや外部応力の大きさに依存しない固有の分布を持つことが示される(3章)。最後に4章においてモードIII形クラックの解析を行い、厳密解⁽¹⁵⁾と比較し、Williamsの方法の問題点を検討する。

2. 応力場の特異性

モデルを図1に示す。無限に広がった物体中の半無限長のクラックを想定する。原点がクラックの先端に一致するデカルト座標 (x, y) 、あるいは極座標 (r, θ) を用いる。クラック面は、 $\theta = \pm\pi$ であり、クラック先端は z 軸(紙面に垂直)と一致するとする。変形は x 軸に対称に起こるとし、遠方での面内引張応力のもとでクラック先端から $\theta = \pm\alpha$ の角度をなす二つのすべり面上で降伏(相対すべり)が起こっているものとする。クラック先端近傍での特異場の解析においてはクラックの長さと同様にすべり線(すべり面と紙面の交線)の長さも問題とならないから半無限長と仮定する。両すべり線には含まれる扇形領域 ($|\theta| < \alpha$) を領域Iとし、 $\pi > |\theta| > \alpha$ の部分の領域IIと呼ぶ。各領域における変位の r 方向成分、 θ 方向成分をそれぞれ、 $u_r^{(i)}, u_\theta^{(i)}$ ($i = I, II$) とする。同様に上付添字 I, IIにより図示の各応力成分を領域 I, IIに対応させる。

すべり面上においては、 r 方向の相対的なすべりが生じているから $u_r^{(I)} \neq u_r^{(II)}$ であるが、すべり面上で空げきは生じないという条件から $u_\theta^{(I)} = u_\theta^{(II)}$ である。転位論の見地からは、すべり面はクラック先端から放出された z 軸に平行な刃状転位が連続的に分布している面とみなすことができ、転位に対する抵抗応力を τ_0 とするとすべり面上で $\tau_{\theta\theta}^{(I)} = \tau_{\theta\theta}^{(II)} = \tau_0$ となる。トレスカの条件にしたがう理想塑性体を考えると τ_0 は巨視的な降伏せん断応力に等しいとみなされる。しかし以下の解析では τ_0 の大きさは問題にならず、ただせん断応力が有界であるという条件のみが意義を持つことがわかる。

ここで原点近傍の変位、 $u^{(i)}$ ($= u_r^{(i)}$ または $u_\theta^{(i)}$) は次のように書けるとする。

$$u^{(i)} = u_0^{(i)} + r^\lambda f^{(i)}(\theta) + \dots \quad (i = I, II) \quad \dots(1)$$

$u_0^{(i)}$ は定数項であり、き裂開口変位に対応する。クラック端で変位は有界でなければならず $\lambda > 0$ となる。なお一般に第3項以下は r の一次以上のべき乗の項

が続くことが後の解析で示される。応力成分 σ ($= \sigma_r, \sigma_\theta$ または $\tau_{r\theta}$) は、式(1)より一般に次のように書ける。

$$\sigma^{(i)} = r^{\lambda-1} g^{(i)}(\theta) + \dots \quad \dots(2)$$

$\lambda < 1$ なら応力はクラック先端において特異となる。以下 $0 < \lambda < 1$ なる λ の存在を仮定し式(2)で表される特異項のみを解析の対象とし、 λ の値と関数 $g(\theta)$ を決定する。

変形が x 軸に対称の場合を考えるので、上半面 ($0 \leq \theta \leq \pi$) のみを考える。図1の境界条件は以下のようになる。

$\theta = 0$ が変形の対称面である条件より

$$u_\theta^{(I)} = 0 \quad (\theta = 0) \quad \dots(3)$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = 0 \quad (\theta = 0) \quad \dots(4)$$

すべり面上で u_θ と σ_θ は連続であるから

$$u_\theta^{(I)} = u_\theta^{(II)} \quad (\theta = \alpha) \quad \dots(5)$$

$$\sigma_\theta^{(I)} = \sigma_\theta^{(II)} \quad (\theta = \alpha) \quad \dots(6)$$

すべり面上でせん断応力は τ_0 、すなわち有界であるが、このことは式(2)の第1項は、すべり面上では零に等しいことを意味する。したがって特異項の解析においては、この条件は以下と同等である。

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = 0 \quad (\theta = \alpha) \quad \dots(7)$$

$$\tau_{r\theta}^{(II)} = 0 \quad (\theta = \alpha) \quad \dots(8)$$

最後にクラック面上で応力ベクトルは零(または有界)であるから

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = 0 \quad (\theta = \pi) \quad \dots(9)$$

$$\sigma_\theta^{(I)} = 0 \quad (\theta = \pi) \quad \dots(10)$$

さて上述の条件を満足するエアリ応力関数 $U^{(i)}$ ($i = I, II$) を決定しよう。ここで $U^{(i)}$ は、重調和関数であり

$$\nabla^4 U^{(i)}(r, \theta) = 0 \quad \dots(11)$$

応力成分は $U^{(i)}$ により以下のように表せる。

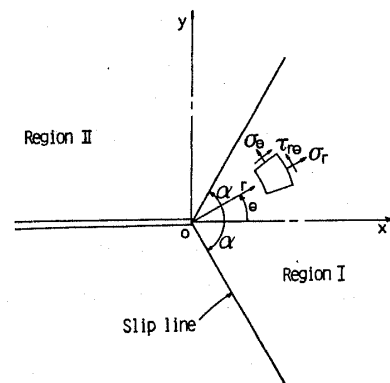


図1 2本のすべり線により降伏しているモードI形クラック

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial r} \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta}^{(i)} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $U^{(i)}$ として次の形の変数分離形の解

$$U^{(i)} = r^{\lambda_i+1} F_i(\lambda_i, \theta) \dots\dots\dots (13)$$

を仮定する。このとき F_i は次式で与えられる。

$$F_i(\lambda_i, \theta) = b_1^{(i)} \sin(\lambda_i+1)\theta + b_2^{(i)} \cos(\lambda_i+1)\theta + b_3^{(i)} \sin(\lambda_i-1)\theta + b_4^{(i)} \cos(\lambda_i-1)\theta \dots (14)$$

応力は式(12)より以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= r^{\lambda_i-1} \{F_i'' + (\lambda_i+1)F_i'\} \\ \sigma_\theta^{(i)} &= r^{\lambda_i-1} \lambda_i(\lambda_i+1)F_i \\ \tau_{r\theta}^{(i)} &= -r^{\lambda_i-1} \lambda_i F_i' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここでダッシュは θ に関する微分を意味する。

文献(9)によれば、 r, θ 方向の変位成分は以下のよ
うに表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u_r^{(i)} &= r^{\lambda_i} \{- (\lambda_i+1)F_i + (1-\delta)G_i'\} \\ 2\mu u_\theta^{(i)} &= r^{\lambda_i} \{- F_i' + (1-\delta)(\lambda_i-1)G_i\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

ここで

$$G_i = \frac{4}{\lambda_i-1} \{- b_3^{(i)} \cos(\lambda_i-1)\theta + b_4^{(i)} \sin(\lambda_i-1)\theta\}$$

$$\delta = \begin{cases} \nu & \text{(平面ひずみ)} \\ \nu/(1+\nu) & \text{(平面応力)} \end{cases}$$

ν はポアソン比、 μ は剛性率である。式(15)、(16)を式(3)~(10)に代入する。まず式(5)(6)から $\lambda_i = \lambda_{ii}$ がすぐに得られる。(もし $\lambda_i \neq \lambda_{ii}$ とすると式(5)、(6)は $\theta = \alpha$ で $u_\theta^{(i)} = u_\theta^{(ii)} = 0, \sigma_\theta^{(i)} = \sigma_\theta^{(ii)} = 0$, という元の条件とは異なった境界条件になり結果として $F_i(\lambda_i, \theta) = 0$ となる。) そこで以下 $\lambda_i = \lambda_{ii} = \lambda$ とおき、さらに表記の簡単化のため $b_j^{(i)}$ ($j=1\sim 4$) の上付添字は省略し単に b_j と記した $b_j^{(ii)}$ を \bar{b}_j とする。結局8個の未知数 b_j, \bar{b}_j ($j=1\sim 4$) に対し、以下の方程式系を得る。

$$nb_1 + (c+m)b_3 = 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$nb_1 + mb_3 = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$-(b_3 - \bar{b}_3) \cos m\alpha + (b_4 - \bar{b}_4) \sin m\alpha = 0 \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned} (b_1 - \bar{b}_1) \sin n\alpha + (b_2 - \bar{b}_2) \cos n\alpha \\ + (b_3 - \bar{b}_3) \sin m\alpha + (b_4 - \bar{b}_4) \cos m\alpha = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} b_1 n \cos n\alpha - b_2 n \sin n\alpha + b_3 m \cos m\alpha \\ - b_4 m \sin m\alpha = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 n \cos n\alpha - \bar{b}_2 n \sin n\alpha + \bar{b}_3 m \cos m\alpha \\ - \bar{b}_4 m \sin m\alpha = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 n \cos n\pi - \bar{b}_2 n \sin n\pi + \bar{b}_3 m \cos m\pi \\ - \bar{b}_4 m \sin m\pi = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 \sin n\pi + \bar{b}_2 \cos n\pi + \bar{b}_3 \sin m\pi \\ + \bar{b}_4 \cos m\pi = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (24)$$

ここで $n = \lambda + 1, m = \lambda - 1, c = 4(1 - \delta)$

上式は、8個の未知数 b_j, \bar{b}_j ($j=1\sim 4$) の同次方程式であり、非自明解を持つためには、それらの8行8列の係数行列式の値が零であることより λ の固有方程式が得られる。しかしここでは後の議論の便宜を考えて以下のように考える。まず $n \neq 0, c \neq 0$ より式(17)、(18)から $b_1 = b_3 = 0$ が得られる。他の未知数は以下 b_2 で表す。まず式(21)から

$$b_4 = -\frac{n \sin n\alpha}{m \sin m\alpha} b_2 \dots\dots\dots (25)$$

式(25)を式(19)および式(22)~(24)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_1 &= A \{n \sin n\alpha - \lambda \sin m\alpha - \sin(2\pi\lambda - m\alpha)\} / k \\ \bar{b}_2 &= A \{n \cos n\alpha - \lambda \cos m\alpha - \cos(2\pi\lambda - m\alpha)\} / k \\ \bar{b}_3 &= \frac{An}{m} \{m \sin m\alpha - \lambda \sin n\alpha + \sin(2\pi\lambda - n\alpha)\} / k \\ \bar{b}_4 &= \frac{An}{m} \{m \cos m\alpha - \lambda \cos n\alpha + \cos(2\pi\lambda - n\alpha)\} / k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 $k = \sin 2\lambda(\pi - \alpha) - \lambda \sin 2\alpha$

$$A = b_2 \sin n\alpha$$

以上の未知数はさらに式(20)を満足する必要がある、このとき、 $b_2 \neq 0$ より、固有値 λ を決定する超越方程式を得る。すなわち

$$\begin{aligned} \{\sin 2\lambda(\pi - \alpha) - \lambda \sin 2\alpha\} \{\sin 2\alpha\lambda + \lambda \sin 2\alpha\} \\ + \{\lambda^2 - 1 - \lambda^2 \cos 2\alpha + \cos 2\lambda(\pi - \alpha)\} \\ \times \{\cos 2\alpha - \cos 2\alpha\lambda\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (27)$$

式(27)の左辺を λ の関数として、パラメータ α のいくつかの値に対してプロットすることにより $0 < \lambda < 1$ の間の λ はただ一つであることが確かめられた。有効数字4けたをとった式(27)の解 λ を表1の左欄に示す。 λ の値は0.5と1の間にあり式(15)からわかるように $\alpha = 90^\circ$ の場合を除いて各応力成分はクラック先端近傍で無限大となることがわかる。表1の右欄は「応力の特異性」、 $1 - \lambda$ [式(15)を参照]を示したもので、0.5より小さな値となっている。すべり線のない弾性クラックの特異性は良く知られているように0.5 ($r^{-1/2}$ の特異性)である。したがって、すべり線により降伏しているクラックの特異性は弾性クラックのそれよりいくぶん弱いことがわかる。図2に表1をプ

ロットしたグラフを示す。

特に $\alpha < 90^\circ$ の場合、クラック先端近傍の応力が無限大になったことは、類似の問題である分岐クラックの分岐点近傍の応力は有界であることを考えると興味深い結果である。本問題ではすべり線上で $u^{(I)} = u^{(II)}$ なる制限が課せられていることが、応力を無限大ならしめた要因であろう。この結果は $\alpha < 90^\circ$ の場合でも扇形頂点近傍より再びクラックないすべり面が生成される可能性があることを示している。この件に関しては3章で詳しく考察する。

3. 応力分布

この章では、クラック先端近傍での特異応力場の分布を調べる。式(25)、(26)を式(14)に代入するとエアリ応力関数が以下のように決定される。

$$U^{(I)} = b_2 r^{\lambda+1} \left(\cos n\theta - \frac{N}{M} \cos m\theta \right) \dots\dots\dots(28)$$

$$U^{(II)} = \frac{b_2 r^{\lambda+1}}{k} \sin n\alpha \left(B + \frac{n}{m} C \right) \dots\dots\dots(29)$$

ここで以下

$$N = n \sin n\alpha, \quad M = m \sin m\alpha,$$

表 1 固有値 λ と応力の特異性

α Degree	λ	$1-\lambda$
0		
10	0.5371	0.4629
20	0.5686	0.4314
30	0.5985	0.4015
40	0.6299	0.3701
50	0.6657	0.3343
60	0.7096	0.2904
70	0.7680	0.2320
80	0.8525	0.1475
90	1.0000	0.0000
100	0.8170	0.1830
110	0.6916	0.3084
120	0.6080	0.3920
130	0.5557	0.4443
140	0.5255	0.4745
150	0.5098	0.4902
160	0.5027	0.4973
170	0.5003	0.4997
180		

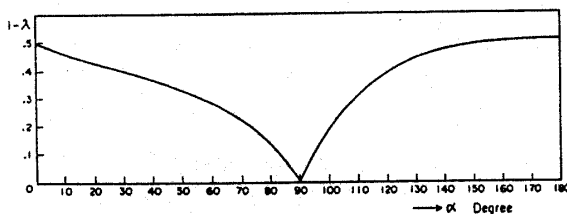


図 2 すべり線の角度と応力の特異性との関係

$$B = n \cos n(\alpha - \theta) - \lambda \cos (m\alpha - n\theta) - \cos (2\pi\lambda - m\alpha - n\theta),$$

$$C = m \cos m(\alpha - \theta) - \lambda \cos (n\alpha - m\theta) + \cos (2\pi\lambda - n\alpha - m\theta)$$

とおく。

式(28)、(29)の定数 b_2 は外部応力やクラック長さなどの「遠方」の境界条件により決まる定数(実数でなければならない)である。したがって遠方の境界条件によりクラック先端近傍での応力、変位の「大きさ」は変化するが、その「 θ 方向の分布」はすべてのクラックに対して同一となる。この事情はすべり線のない弾性クラックの場合と同様であり、 b_2 はいわゆる応力拡大係数と類似の役割を果たす量である。式(28)、(29)を式(12)に代入すると応力成分は以下のように得られる。

領域 I において

$$\sigma_\theta^{(I)} = b_2 r^{\lambda-1} \lambda n (M \cos n\theta - N \cos m\theta) / M \dots\dots\dots(30)$$

$$\sigma_r^{(I)} = b_2 r^{\lambda-1} \lambda n \left\{ -M \cos n\theta + (\lambda - 3) \frac{N}{n} \cos m\theta \right\} / M$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = b_2 r^{\lambda-1} \lambda n \left(\frac{M}{m} \sin n\theta - \frac{N}{n} \sin m\theta \right) / M$$

領域 II において

$$\sigma_\theta^{(II)} = b_2 r^{\lambda-1} \lambda \frac{N}{k} \left(B - \frac{n}{m} C \right)$$

$$\sigma_r^{(II)} = b_2 r^{\lambda-1} \lambda \frac{N}{k} \left(B - \frac{3-\lambda}{m} C \right)$$

$$\tau_{r\theta}^{(II)} = -b_2 r^{\lambda-1} \lambda \frac{N}{k} (D + E)$$

ここで

$$D = n \sin n(\alpha - \theta) - \lambda \sin (m\alpha - n\theta) - \sin (2\pi\lambda - m\alpha - n\theta)$$

$$E = m \sin m(\alpha - \theta) - \lambda \sin (n\alpha - m\theta) + \sin (2\pi\lambda - n\alpha - m\theta)$$

クラック先端近傍の $\theta = 0$ 面上における「へき開応力」は式(30)より

$$\sigma_0 = \sigma_\theta^{(I)} = b_2 r^{\lambda-1} \lambda n (1 - N/M)$$

となる。この σ_0 で、上で得られた応力を無次元化し θ に対してプロットしたグラフを図3(a)~(c)に示す。(σ_0 は正とする。またたて軸の尺度が図3(a)~(c)で異なっていることに注意。)報告されているすべり線の角度は $50 \sim 70^\circ$ 程度(理論的⁽⁸⁾には 72° 、また例えば Evans の実験⁽²⁾では 55°)であるので、ここでは α の値としては $40, 60, 80^\circ$ の3とおりを選んだ。

図3(a)からへき開応力 σ_0 はすべり線にかこまれる扇形領域においてほぼ一定($\approx \sigma_0$)であることがわ

かる。一方、 σ_r [図3(b)]も σ_0 と同様扇形領域において変動は少ない。その値は σ_0 よりいくぶん大きくなっている。また $\tau_{\theta z}$ [図3(c)]は扇形領域内では σ_0 にくらべるときわめて小さい。これらのことより、すべり線にはさまれた扇形領域では主応力はほぼ一定の値 σ_r, σ_θ で与えられ、主方向は $\theta = \text{const.}$ の線に一致することがわかる。また α が増大すると、 σ_r は σ_0 に近くなり[図3(b)]応力場は静水引張状態に近づき、したがって主せん断応力も小さくなる。しかし一般の α に対しては $\theta = \text{const.}$ の線に対し 45° 傾いた面に最大のせん断応力が働くことになり、このような面上で第2のすべりが生じる可能性がある。

4. モードIII形クラックの解析

この章では Williams の方法を、図1の系がたてせん断変形を受けている場合に対して適用し、モードIII形クラック先端近傍での応力の特異性を解析する。たてせん断変形に対しては図1における変位成分は z 軸方向(紙面に垂直な方向)の成分、 w のみがあり、応力成分は次式で与えられる二つの成分のみが零でない。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

図1におけるすべり線上では w の跳びがある。この変位の不連続はバーガースベクトルが z 軸に平行ならせん転位群の連続分布と等価であり、すべり面上でのせん断応力はらせん転位に対する抵抗応力 τ_0 に等しい。すなわち $\tau_{\theta z} = \tau_0$ (有界)となっている。平衡式、

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

に式(31)を代入すると w は二次元のラプラスの方程式を満たす。極座標系ではラプラスの方程式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots (32)$$

と書かれ、また応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial r} \\ \tau_{\theta z} &= \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

と表される。

ここで式(32)の解として、変数分離形の解を仮定すると w は以下のように与えられる。

$$w = r^\lambda \{ b_1 \sin(\lambda\theta) + b_2 \cos(\lambda\theta) \} \dots\dots\dots (34)$$

2章と同様、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分を考える。また領域Iおよび領域IIに対応する量の区別の仕方も2章と同様とする。境界条件は以下ようになる。

$\theta = 0$ が変形の対称面である条件は

$$w^{(1)} = 0 \quad (\theta = 0) \dots\dots\dots (35)$$

(この条件は $\theta = 0$ で $\tau_{rz} = 0$ という条件と等価である。)

すべり面上で応力は有界であるから

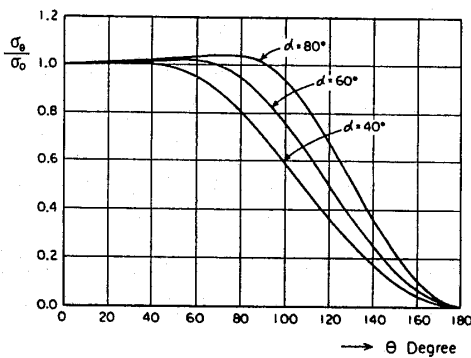
$$\tau_{\theta z}^{(1)} = 0 \quad (\theta = \alpha) \dots\dots\dots (36)$$

$$\tau_{\theta z}^{(11)} = 0 \quad (\theta = \alpha) \dots\dots\dots (37)$$

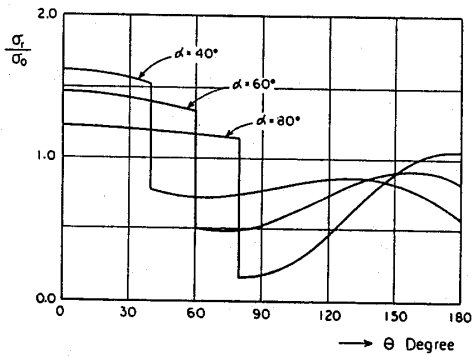
クラック面上で応力は零(または有界)の条件は

$$\tau_{\theta z}^{(11)} = 0 \quad (\theta = \pi) \dots\dots\dots (38)$$

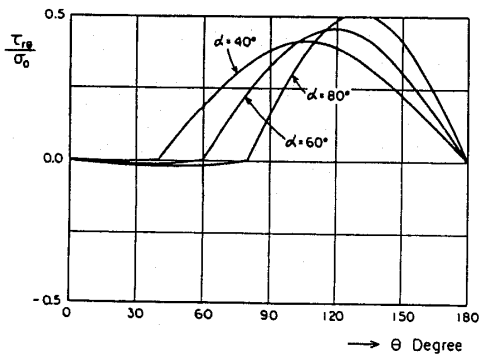
式(35)~(38)に式(33)、(34)を用い以下の式を得る。式(33)および式(36)より



(a)



(b)



(c)

図3 クラック先端近傍での応力分布

$$b_2=0 \text{ および } \cos(\lambda_1\alpha)=0 \quad \dots\dots\dots(39)$$

式(37)および式(38)より, それぞれ

$$\tan(\lambda_{11}\alpha)=\bar{b}_1/\bar{b}_2 \quad \dots\dots\dots(40)$$

$$\tan(\lambda_{11}\pi)=\bar{b}_1/\bar{b}_2 \quad \dots\dots\dots(41)$$

式(39)および式(40)に見られるように, モードIII形の場合においては領域Iと領域IIに独立した二つの方程式となる. 式(40), (41)より $\lambda_{11}=\pi/(\pi-\alpha)$ が得られる. すなわち $\lambda_{11}>1$ であり, 領域IIにおいて応力は常に有界である. 一方式(39)を満たす λ_1 のうち $\lambda_1>0$ という条件を満たす最小の λ_1 (このような λ_1 が応力の特異性を決定する.) は

$$\lambda_1=\pi/2\alpha$$

で与えられる. したがって領域Iでの応力の特異性は $\alpha>\pi/2$ のとき $1-\pi/2\alpha$ であり $\alpha\leq\pi/2$ のときはモードIの場合と異なり特異性は消失し有界となる. 著者の一人⁽¹⁵⁾は, 以前遠方での応力条件やクラックとすべり線の長さを考慮にいれ, 2本のすべり線により降伏しているモードIII形クラックの厳密な解析を行った. 全体の境界値問題は閉じた形で解くことができ, すべり線の長さとき裂開口変位は外部応力の簡単な関数によって表された. またクラック先端近傍の応力場も解析された. その結果 x 軸上での漸近応力は以下のように得られた.

$\alpha<\pi/2$ の場合

$$\tau_{yz}\sim\tau_0/\cos\alpha \quad (\text{有界})$$

$\alpha=\pi/2$ の場合

$$\tau_{yz}\sim\ln(l/x) \quad (l \text{ はある特性長})$$

$\alpha>\pi/2$ の場合

$$\tau_{yz}\sim\tau_0(x/l)^{\pi/2\alpha-1}$$

ここで, 両方の結果を比較すると, $\alpha>\pi/2$ と $\alpha<\pi/2$ での結果は同じであるが, ただ, $\alpha=\pi/2$ の場合の対数形の特異性は本論文の方法では出せなかったことになる. この理由としては, 式(32)の解を変数分離形の解に限定したということが考えられる.

2章での結果は, モードI形の場合においても $\alpha=90^\circ$ のときは特異性はないということであった(表1参照). しかしこの章での結果から考えると, モードI形の $\alpha=90^\circ$ の場合においても応力是对数形の特異性を持つ可能性がある. また $\alpha=90^\circ$ の場合以外においても式(2)の展開の第2項以下に(べき乗形の特異性よりさらに弱い特異性として) $\ln r$ を含む形の特異項

があらわれる可能性はある. しかし $\alpha=90^\circ$ の場合以外にはクラック先端近傍での応力場は3章の結果である最も強い特異応力場により代表される.

5. 結 論

Williamsの固有関数法を2本のすべり線によって降伏しているモードI形クラックに適用し, その結果クラック先端近傍における応力は, 一般に $r^{\lambda-1}$ の特異性を持ち無限大になることが示された. ここで λ は0.5と1の間にあり, すべり線のない弾性クラックのそれよりいくぶん小さいことがわかった. クラック先端近傍での応力の角方向の分布は, クラック長さや外部応力などの遠方での境界条件には依存しない固有の分布を持ち, 特に2本のすべり線には含まれるクラック前方の領域ではへき開応力 σ_θ および動径方向の応力 σ_r は, ほぼ一定であること, また $\tau_{\theta r}$ は σ_θ に比べて非常に小さいことがわかった.

一方, モードIII形では, 応力の特異性のオーダーは $1-\pi/2\alpha$ であり, したがって, $\alpha<\pi/2$ の場合, クラック先端近傍の応力は有界であった. また本論文の方法では, 理論解より得られた $\alpha=\pi/2$ の場合の対数形の特異性は得られなかった.

文 献

- (1) Leonov, M. Ya., Vitvitskii, P. M. and Yarema, S. Ya., *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 148 (1963), 541.
- (2) Evans, J. T., *J. Mech. Phys. Solids*, 28 (1980), 95.
- (3) 菊川・城野・安達, 材料, 27 (昭53), 853.
- (4) Bilby, B. A. and Swinden, K. H., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 285 (1965), 22.
- (5) Vitek, V., *J. Mech. Phys. Solids*, 24 (1976), 263.
- (6) Riedel, H., *J. Mech. Phys. Solids.*, 24 (1976), 277.
- (7) Cherepanov, G. P., *PMM*, 40 (1976), 720.
- (8) Lo, K. K., *Int. J. Fract.*, 15 (1979), 583.
- (9) Williams, M. L., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 19 (1952), 526.
- (10) Williams, M. L., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24 (1957), 109.
- (11) Sih, G. C. and Rice, J. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 31 (1964), 447.
- (12) Rice, J. R. and Sih, G. C., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 32 (1965), 418.
- (13) Rice, J. R. and Rosengren, G. F., *J. Mech. Phys. Solids*, 16 (1968), 1.
- (14) Hutchinson, J. W., *J. Mech. Phys. Solids.*, 16 (1968), 13.
- (15) 戸谷, 材料, 31 (昭57), 541.