

だ円柱状剛体介在物に対するらせん転位群の堆積*

戸 谷 眞 之**

Piling Up of Screw Dislocations at an Elliptic Cylindrical Rigid Inclusion

by

Masayuki TOYA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

An array of continuously distributed screw dislocations piled up against an elliptic cylindrical rigid inclusion was analyzed. Both uniformly applied shearing load at infinity and internal stress opposing the movement of dislocations were taken into account. Based on the analogy between continuously distributed dislocations and a crack, the stress function of the pile-up problem was determined by the complex variable method in the theory of elastic cracks. The pile-up tip was assumed to be away from the matrix-inclusion interface, its distance from the interface being determined by the condition that the stress should be finite everywhere in the solid. The stresses on the interface and on the slip-plane were then calculated and some typical stress distributions were graphically shown. The condition for initial debonding of the interface was also discussed. The critical debonding load was expressed by the sum of two terms, one the friction stress and the other inversely proportional to the square-root of the slip-line length.

(Received July 22, 1980)

キー・ワード：だ円柱介在物，らせん転位群，はく離，応力集中係数

1 緒 言

一つのすべり面上に平行に並んだ転位群については Eshelby らの¹⁾解析以来，多くの研究がなされてきた。初期の研究は均質な材料を扱ったが，ぜい性クラックの発生，ポイドの生成等に関連して，非均質材料中の転位群が扱われるようになった。

Barnett らは^{2,3)}円柱状剛体介在物，ならびに円柱状弾性体介在物に堆積するらせん転位群を研究した。Smith は彼等の基礎積分方程式に誤りがあることを指摘し，正しい解を与えた。しかし，彼の解は，すべり面上の転位はすべて同符号でなければならないという要請を満たさない。⁴⁾筆者は先端の転位が母材と介在物の界面から離れているとすれば，矛盾を取り除くことができることを円柱状剛体介在物について示した。先端部の界面からの距離は先端部で応力は有界であるという条件から決定された。

本論文においては前報の解析を一般化し，だ円柱状剛体介在物に堆積するらせん転位群を扱う。らせん転位群のモデルは，刃状転位群のそれに比較すると，応用面において制約がある。特に垂直応力成分がないの

で，転位によるへき開の発生を論ずることはできない。他方，解析が比較的容易であり，応力集中係数や堆積した転位の個数等の，すべり線の長さや介在物の大きさ等に対する依存性を見通し良く計算できるという利点がある。これら応力集中係数等の諸量に関しては刃状転位群によるものと大きな違いはないと考えられる。このことはモードⅡならびにモードⅢクラックの応力拡大係数が本質的に同じであるということと，クラックおよび転位群による応力場の類似性⁶⁾とから類推される。

2 らせん転位群の堆積モデルとその応力関数

モデルを Fig.1 に示す。半長軸の長さが a ，半短軸の長さが b のだ円柱状剛体介在物が，剛性率が μ の無限弾性体中にうめこまれている。だ円柱の中心軸を z 軸にとり，短軸および長軸方向にそれぞれ x ， y 軸をとる。母材と介在物は接着されている。無負荷のときは応力は至るところ 0，すなわち内部応力はないものとする。無限遠方で加えられた縦せん断応力 $\sigma_{yz} = \tau_A$ のもとで，それぞれ n 個の正負の， z 軸に平行ならせん転位が転位源 F から放出される。 F 点は母材と介在物の界面から $h+L$ だけ離れている。転位には抵抗力 τ_I が働く。 τ_A は τ_I より大とする。さて， n

* 原稿受理 昭和55年7月22日

** 正会員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

個の正の転位はすべり面 ($y=0$) 上に沿って無限遠 $x=\infty$ に押しやられる. n 個の負の転位は介在物に向かって押しやられるが, 動きを阻止され堆積する. したがって $y=0$ に沿う変位の跳びは $x \geq b+h+L$ では $n\lambda$ (λ はバーガースベクトルの大きさ) であり, $b+h \leq x \leq b+h+L$ では先端に近づくにつれ 0 に減少する. 堆積の先頭の転位は荷重 τ_A と他の転位の反発力の双方により介在物の方向に押されている. しかし, この力は介在物のすぐ近くでは有効に働かない. なぜなら, D点では介在物により変形が完全に拘束され, したがって転位を押しやる原因となる応力 σ_{yz} が 0 であるからである. 一方, 抵抗力 τ_I は物質により決まった応力であり, すべり面上どこでも有効に働いている. このようにして先頭の転位はこれら押しやる力と抵抗力がつりあう点 E で止まる. E の介在物からの距離 h は今のところ未定で後に上述の平衡条件から決められる. 以下転位が分布している x 軸の区間 $b+h \leq x \leq b+h+L$ をすべり線と呼ぶ.

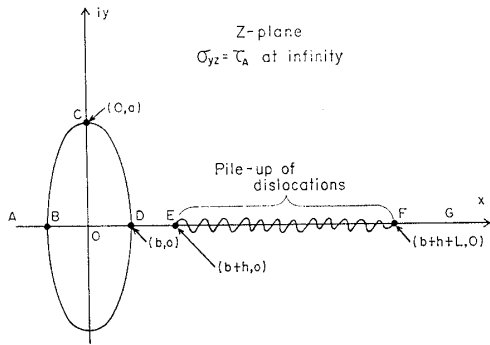


Fig. 1. Model of a pile-up of screw dislocations at an elliptic cylindrical rigid inclusion.

系は縦せん断変形を受けているので変位の成分としては xy -面に垂直な w , 応力成分としては σ_{xz} , σ_{yz} のみがある. 平衡方程式はしたがって 2次元のラプラスの方程式 $\Delta w=0$ となる. この解が複素関数 $g(z)$ の実数部 $\Re g(z)$ として表せるとしよう. ただし $z = x+iy$ である. このとき応力は

$$\sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \mu dg/dz = \mu(\partial w/\partial x) - i\mu(\partial w/\partial y) \quad (1)$$

となる. 以下, Fig.1 のモデルの境界条件を満たす $g(z)$ を見出す.

すべり線に含まれている転位の数が多ければ, 個別に存在する転位をならして, 連続的に分布しているものとして良い. このときは変位の跳びは座標 x の連続関数となり, また, 応力成分 σ_{yz} はすべり線上で一定値の τ_I となる. 連続分布転位群は, 数学的には表面に沿って面力 $\tau_{yz} = \tau_I$ を受けているクラックと同等である. 結局転位の堆積の問題は以下の境界条件のもとにあるクラックの問題に帰着される.

$$\left. \begin{aligned} |z| \rightarrow \infty \text{ で } \sigma_{yz} &= \tau_A \\ \text{だ円 } x^2/b^2 + y^2/a^2 &= 1 \text{ の周上で } \\ w &= 0 \\ b+h \leq x \leq b+h+L \text{ で } \sigma_{yz} &= \tau_I \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

さらに転位分布の一方の端 F において転位密度は 0 という条件が満たされなければならない. すなわち $x=b+h+L$ で $\partial w/\partial x=0$ (3) $g(z)$ を求めるために z 面を写像関数

$$\zeta = l(f(z) - e)/(c^2\psi), \quad \zeta = t+iu \quad (4)$$

により ζ 面に移す. ここで

$$f(z) = a(z^2 + c^2)^{1/2} - bz \quad (5)$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad (6)$$

$$e = f(b+h) \quad (7)$$

$$c^2\psi = f(b+h+L) - f(b+h) \quad (8)$$

$f(z)$ は $(x=0, -ic \leq y \leq ic)$ に切れ目を入れた全平面で定義されている. 無限遠方 $|z| \rightarrow \infty$ で $f(z) \rightarrow (a-b)z$ になるような分枝を取る. (4)式により z 面におけるだ円の外側の領域は実軸の区間, $-q^{-1}(c^2+e) \leq t \leq q^{-1}(c^2-e)$ に沿って切れ目を入れた ζ 面に移される. ただし, $q = c^2\psi/l$. また, すべり線 $b+h \leq x \leq b+h+L$ は $0 \leq t \leq l$ に移される. Fig.2 に Fig.1 に対応する点をダッシュを付けて表す. 逆に ζ 面を z 面

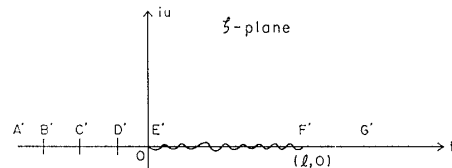


Fig. 2. The $\zeta(=t+iu)$ -plane obtained from the $z(=x+iy)$ -plane of Fig.1 by the conformal transformation (4).

に移すには

$$z = c^{-2}[b(q\zeta + e) + a\{(q\zeta + e)^2 - c^4\}^{1/2}] \quad (9)$$

を用いる. ただし, $|\zeta| \rightarrow \infty$ で $\{(q\zeta + e)^2 - c^4\}^{1/2} \rightarrow q\zeta$ の分枝を使う. (9)を微分して

$$dz/d\zeta = qc^{-2}[b + a(q\zeta + e)\{(q\zeta + e)^2 - c^4\}^{-1/2}] \quad (10)$$

さて, 次の関係式,

$$\mu \frac{dg}{d\zeta} = \mu \frac{dg}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \sigma_{tN} - i\sigma_{uN} = \mu \frac{\partial w}{\partial t} - i\mu \frac{\partial w}{\partial u} \quad (11)$$

(N は ζ 面に垂直な方向を意味する) に(10)を代入すると元の境界条件(2)式は

$$\left. \begin{aligned} |\zeta| \rightarrow \infty \text{ で } \sigma_{uN} &= \tau_A(a+b)/l \equiv \sigma_{uN}(\infty) \\ -q^{-1}(c^2+e) \leq t \leq q^{-1}(c^2-e) \text{ で } \\ w &= 0 \\ 0 \leq t \leq l \text{ で } \sigma_{uN}(t) &= \tau_I qc^{-2}[b + a(qt + e)\{(qt + e)^2 - c^4\}^{-1/2}] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる. 応力 σ_{tN} , σ_{uN} は $u=0$ 面に関して対称で

あるから (12₂) 式は二つの面 ($u = \pm 0, -q^{-1}(c^2+e) \leq t \leq q^{-1}(c^2-e)$) が互いに接着されているということと同等である。したがって (12) 式は無遠で $\sigma_{uN} = \sigma_{uN}(\infty)$, 表面力が (12₃) 式で与えられる長さ l のクラックの問題と同等になる。任意の面力分布のもとにあるクラックの一般解はすでに知られている。⁶⁾ 条件 (3) 式を考慮すると解は次式で与えられる。

$$g'(\zeta) = -\frac{x(\zeta)}{\pi\mu} \int_0^l \frac{\sigma_{uN}(t) dt}{(t-\zeta)x^+(t)} - i\sigma_{uN}(\infty)x(\zeta)/\mu \quad (13)$$

ここで, (3) 式を満足させるために, $x(\zeta)$ として

$$x(\zeta) = \{\zeta - l\}/\zeta^{1/2} \quad (14)$$

とおく。(13) 式の第一項は表面力によるものであり第二項は, 表面で応力が 0, 無限遠で応力 $\sigma_{uN}(\infty)$ が加えられているときの解である。なお, $x^+(t)$ は関数 $x(\zeta)$ の $u = +0$ 上での値を意味する。(13) 式の積分は ζ が実数のときは比較的簡単に実行できる。(1) 式に係数式, $g'(z) = g'(\zeta)/(dz/d\zeta)$ を用いてすべり面上の応力が求められる。また, 界面に働く応力は

$$\sigma_{nz} - i\sigma_{sz} = i\mu g'(\zeta)/|dz/d\zeta| \quad (15)$$

から計算される。ここで σ_{nz}, σ_{sz} はそれぞれ界面およびそれに垂直な面に働く z 軸方向のせん断応力である。^{*1} なお (10) 式から次式がすぐに得られる。

$$\left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{q}{c} \left\{ \frac{b^2c^2 + (qt+e)^2}{c^4 - (qt+e)^2} \right\}^{1/2} \quad (16)$$

3 堆積の先端と界面の距離および転位の個数

堆積の先端と界面の距離 h (Fig. 1 を参照) を決定する。考えている系は平衡状態にあるから, 堆積の先端の仮想変位に対して解放されるエネルギーは 0 でなければならない。クラックの問題においては, その先端付近での応力は一般に $\sigma = K_0 r^{-1/2}$ (r はクラック先端からの距離) と表され, 仮想進展に際し解放されるエネルギーは良く知られているように K_0^2 に比例する。クラックと連続分布転位群の類似性から転位の堆積の平衡条件は応力がその先端で有界 ($K_0 = 0$) という条件に等しいことがわかる。 $g'(\zeta)$ は次式で与えられる $r^{-1/2}$ の特異性をもつ。

$$g'(\zeta) \cong -(\sqrt{l} g_0/\pi\mu)\zeta^{-1/2}, \quad (17)$$

ここで

$$g_0 = \int_0^l \frac{\sigma_{uN}(t) dt}{\{t(l-t)\}^{1/2}} - \pi\sigma_{uN}(\infty), \quad (18)$$

ただし, $\sigma_{uN}(t), \sigma_{uN}(\infty)$ は (12₃) 式および (12₁) 式で与えられる。結局, $K_0 = 0$, すなわち, (17) 式の $\zeta^{-1/2}$ の係数が 0 となる要請から, 平衡条件は $g_0 = 0$ となる。最初に h はすべり線の長さ L に比較して非常に小

*1 界面の垂線が x 軸となす角を α とすると応力成分間の関係式, $\sigma_{nz} - i\sigma_{sz} = e^{i\alpha}(\sigma_{xz} - i\sigma_{yz})$ が成り立つ, 界面に垂直な方向に dz を取る。 ζ -面では, この dz に対応して $d\zeta = i du$ が対応する。 $dz = m'(\zeta)d\zeta$ を用いて $e^{i\alpha} = dz/|dz| = im'(\zeta)/m'(\zeta)$ となる。これを上の関係式に入れると (15) 式が導かれる。

さいとする。このとき (8) 式は

$$e - c^2 = \frac{1}{2} c^2 h^2 / a^2 \quad (19)$$

と近似できる。(19) 式を (12₃) に代入する。これをさらに (18) 式に入れると積分はただ円積分で表される。結局 $g_0 = 0$ の条件は以下のようなになる。

$$\tau_I \left[b\pi + a \{-(l-c')d'\}^{-1/2} \left\{ 2(l-d') \Pi \left(\frac{1}{2} \pi, \alpha_0^2, k_0^2 \right) + d' \mathbf{K}(k_0) \right\} \right] - \pi \tau_A (a+b) = 0 \quad (20)$$

ここで \mathbf{K} と Π はそれぞれ第一種, 第三種の完全だ円積分である。また,

$$\left. \begin{aligned} c' &= -\frac{1}{2} c^2 h^2 / (a^2 q), & d' &= -2c^2 / q \\ \alpha_0^2 &= l/d', & k_0^2 &= 1 + c'(d'-l)/(ld') \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

k_0 の値は 1 に非常に近いので, \mathbf{K}, Π は次のように近似できる。

$$\mathbf{K}(k_0) \cong \ln [4 \{ -c'(d'-l)/(ld') \}^{-1/2}] \quad (22)$$

$$\Pi \left(\frac{1}{2} \pi, \alpha_0^2, k_0^2 \right) \cong d' \left[\ln [4 \{ -c'(d'-l)/(ld') \}^{-1/2}] + (-l/d')^{1/2} \arctan(-l/d')^{1/2} / (d'-l) \right] \quad (23)$$

(20) 式に (22) 式と (23) 式を代入し c' と d' を (21_{1,2}) 式でおきかえると

$$\frac{h}{a} = 8 \left(\frac{\psi}{2+\psi} \right)^{1/2} \exp \left(- \left(\frac{\psi}{2} \right)^{1/2} \left[\pi \{ Y + K(Y-1) \} - 2 \arcsin \left(\frac{\psi}{2+\psi} \right)^{1/2} \right] \right) \quad (24)$$

ただし

$$K = b/a, \quad Y = \tau_A / \tau_I \quad (25)$$

$$\psi = \{ (1 + 2KS + S^2)^{1/2} - (1 + KS) \} / (1 - K^2) \quad (26)$$

$$S = L/a \quad (27)$$

距離 h はすべり線の長さの主軸の長さに対する比 S , 荷重と抵抗力の比 Y , 短軸と長軸の比 K の関数として表される。予期されたように h は荷重 Y あるいは堆積区間 S が増大すれば減少する。堆積の先端は抵抗力 τ_I が 0 のときのみ界面に一致する。抵抗力は 0 と仮定する一方, 先端を界面から離れているとした Smith

Table I. Values of h/a for various combinations of applied load (Y) and slip-line length (S).

		Y			
		2	3	5	10
S=1	K=0.1	2.55 × 10 ⁻¹	5.57 × 10 ⁻²	2.66 × 10 ⁻³	1.33 × 10 ⁻⁴
	K=1	2.12 × 10 ⁻¹	1.32 × 10 ⁻²	1.55 × 10 ⁻⁴	2.33 × 10 ⁻⁶
S=2	K=0.1	8.84 × 10 ⁻²	6.54 × 10 ⁻³	3.58 × 10 ⁻⁵	7.96 × 10 ⁻¹¹
	K=1	3.18 × 10 ⁻²	8.46 × 10 ⁻⁴	5.96 × 10 ⁻⁷	7.91 × 10 ⁻¹⁵
S=10	K=0.1	1.01 × 10 ⁻³	9.11 × 10 ⁻⁷	7.41 × 10 ⁻¹³	4.43 × 10 ⁻²⁸
	K=1	8.78 × 10 ⁻⁵	6.76 × 10 ⁻⁹	4.00 × 10 ⁻¹⁷	1.08 × 10 ⁻³⁷

のモデル⁹⁾はしたがって不適当といえる。

扁平な介在物 ($K=0.1$) と円形介在物 ($K=1$) の二つの場合に対する h の値を Table I に示す. ($Y=2, S=1$), ($Y=2, S=2$) 等の場合を除いて, h の値は実際非常に小さいことがわかる. 一方, バーガースベクトルの大きさより小さい距離も連続分布近似において無意味である. したがって, 例えば a が $1(\mu\text{m})$ の介在物に対しては 10^{-4} 以下の値は物理的な意味をもたない. 表からわかるように扁平な介在物に対する h の値は, 円形介在物のそれより大きい. いいかえると, 扁平であるほど, 転位に対し大きな反発力が働くといえる.

つぎにすべり線に含まれている転位の個数を計算する. 無限体に n 個の転位が含まれているときには $g'(\xi)$ の級数展開の内, z^{-1} の項の係数は $-n\lambda/(2\pi i)$ である. 容易に証明できるが, 同じ結果が ζ 面の $g'(\xi)$ に対しても成り立つ. したがって (13) 式を展開し, ξ^{-1} の係数を計算し, これを $-n\lambda/(2\pi i)$ とおくと

$$\frac{n\lambda\mu}{2\pi} = -\frac{1}{\pi} \int_0^l \sigma_{uN}(t) \left(\frac{t}{l-t}\right)^{1/2} dt + \frac{1}{2} \tau_A (a+b)\psi \quad (28)$$

堆積の先端が界面に近いときは (12₃) 式の e を c^2 とおき

$$\sigma_{uN}(t) = 4\tau_I [b+a(t+l/\psi)] \{t(t+2l/\psi)\}^{-1/2} / l \quad (29)$$

(29) 式を (28) 式に代入して積分を実行すると

$$\frac{n\lambda\mu}{2L\tau_I} = \frac{\pi\psi}{2S} (1+K)(Y-1) - \frac{\psi}{S} \left\{ \left(\frac{2}{\psi}\right)^{1/2} - \arctan\left(\frac{2}{\psi}\right)^{1/2} \right\} \quad (30)$$

一方, τ_A が τ_I に近いときは, L は a より非常に小となり, 詳細は略すが, $n\lambda\mu/(2L\tau_I)$ は L のオーダーとなる. Fig. 3 に転位の平均密度の荷重 $Y(=\tau_A/\tau_I)$ による変化を示す. 実線は (30) 式を示し破線は上記のオーダー評価による推定を示す. 二つの直線 ($K=$

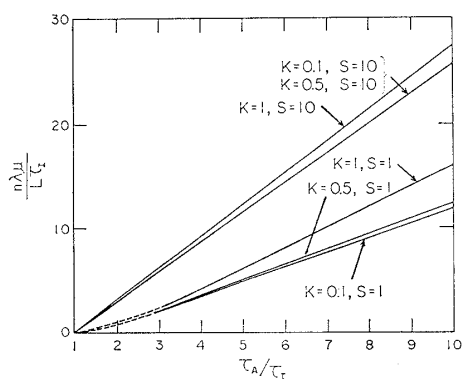


Fig. 3. Number of dislocations contained in the slip-line.

0.1, $S=10$) および ($K=0.5, S=10$) はほとんど重なり合っている. すなわち, 転位の平均密度は介在物の形状には依存しなく, 主に Y および S にのみ依存する. また, グラフからわかるように, $S=10$ に対して $n\lambda\mu/L \doteq 2.5\tau_A$, $S=1$ に対して $n\lambda\mu/L \doteq 1.2\tau_A$ である. 一方 Eshelby¹⁾ の均質材に対する解は $n\lambda\mu/L = \pi\tau_A$ である. すなわち, 介在物の存在により平均密度は均質材に比較して減少する.

4 界面上の応力分布

この節では σ_{nz} を計算し, ボイドの生成に及ぼす介在物の形状 ($K \equiv b/a$), および転位源と介在物間の距離 ($S \equiv L/a$), 荷重の大きさ ($Y \equiv \tau_A/\tau_I$) の効果について考える. 界面応力 σ_{nz} は先端がわずかに動いたとしても, Fig. 1 の点 D 付近を除いた界面上の他の点ではあまり変化しないと考えられる. したがって τ_A が大きく h が小の場合は, 応力関数は σ_{uN} に (29) 式を用いた (13) 式でより与えられる. $-2c^2 q^{-1} \leq t \leq 0$ なる t に対し (13) 式の積分を実行し (15) 式および

$$qt+e = (c^2/b)x = (c^2/a)(a^2-y^2)^{1/2} \quad (31)$$

を用いて

$$\sigma_{nz}/\tau_A = \{-I_0/(\pi Y) + 1 + K\} \{1 - (y/a)^2 (1-K^2)\}^{-1/2} x(y')y/a \quad (32)$$

を得る. ただし

$$y' = \{1 - (y/a)^2\}^{1/2} \quad (33)$$

$$x(y') = \{(\psi+1-y')/(1-y')\}^{1/2} \quad (34)$$

$$I_0 = \left(\frac{1}{2} + K\right) \pi + \arcsin \frac{\psi-2}{\psi+2} - \pi K \left(\frac{1-y'}{1+\psi-y'}\right)^{1/2} + \frac{y'}{\{(1+y')(1+\psi-y')\}^{1/2}} \ln \frac{\sqrt{2}(1+\psi-y')^{1/2} + \{\psi(1+y')\}^{1/2}}{\sqrt{2}(1+\psi-y')^{1/2} - \{\psi(1+y')\}^{1/2}} \quad (35)$$

扁平な介在物界面上の応力分布を表す際の便宜上, 独立変数として y を選んだ. (32) 式は界面の $x \geq 0$ の部分に適用される. $x \leq 0$ の部分に対しては, y' を $-y'$ でおきかえる. また, y が小のとき, Fig. 1 の D 点の近くでは $\sigma_{nz} = 2\tau_I y/(\pi h)$ となる. h は小さいから, σ_{nz} は $y=0$ 付近で急激に増大する. (32) 式を長短 2 種, $S=1$ および $S=10$ のすべり線に対して計算した. 各 S の値に対し, 円 ($K=1$) および 3 種のだ円 ($K=0.8, 0.5, 0.1$) を選んだ. 応力分布が荷重の増大とともに変化する様子を調べるために, $Y=2$ および $Y=20$ の 2 とおりの場合を計算した. 結果を Fig. 4 (a)~(d) に示す. 円の場合は $\sigma_{nz} = \sigma_{rz}$ となるので Fig. 4 (a) のたて軸は σ_{rz} を用いた. $S=1$ の場合, Fig. 4 (a)~(d) から次のことがわかる. ($S=1, Y=2$) のとき, 四つのグラフはともに $y=1$ 軸に対してほぼ対称である. いいかえると, 転位の効果は小さく, σ_{nz} は主に

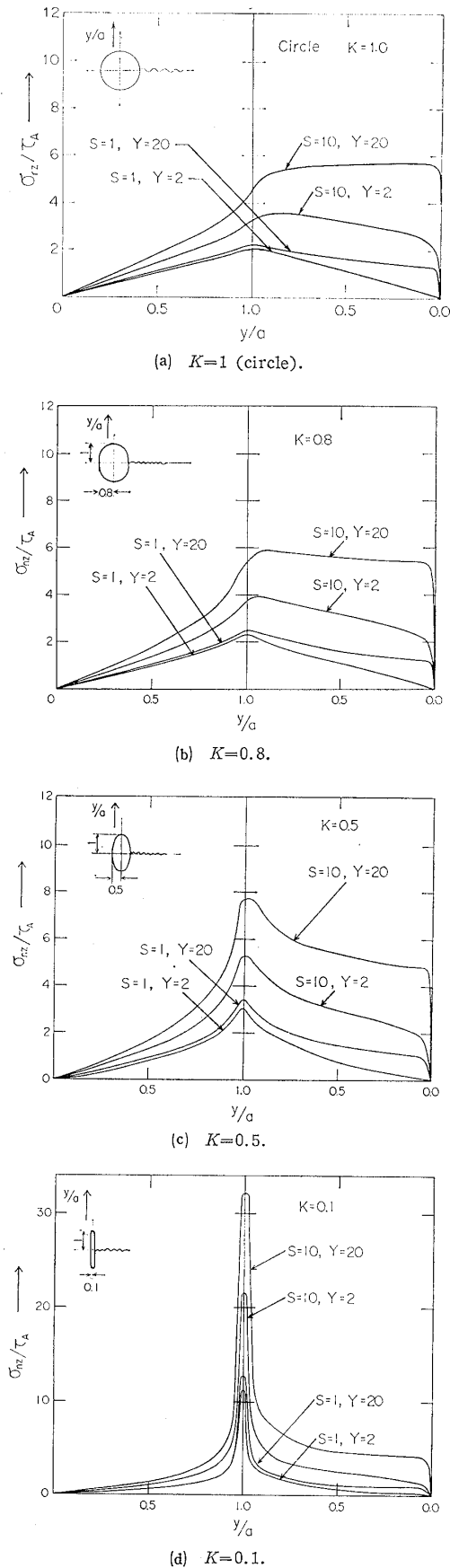


Fig. 4. Variation of the interfacial stress σ_{nz}/τ_A with y for several values of Y and S , where Y denotes the loading parameter τ_A/τ_I and S the dimensionless slip-line length L/a . In (a), σ_{nz}/τ_A instead of σ_{nz}/τ_A is used for the ordinate.

母材と介在物の弾性相互作用によって決まる。弾性論の計算から、応力集中係数 m^* は $m^*=1+a/b$ で与えられる。 $K=1, 0.8, 0.5, 0.1$ の各値に対し $m^*=2, 2.25, 3, 11$ となる。一方 Fig. 4 (a)~(d)からわかるように最大の σ_{nz} は弾性論での結果と同様にだ円の頂点で起り、 m^* は 2.1, 2.3, 3.1, 11.4 である。これらの値は実際弾性変形の場合とかなり近い。荷重が $Y=20$ に増大した時でも、 m^* の値は $Y=2$ の場合に比較してわずかに大きくなるくらいでほとんど差はない。要約すると、介在物の大きさ程度のすべり線は、応力集中に対しては大きな効果を及ぼさない。

$S=10$ の比較的長いすべり線に対しては、界面上の応力分布に対する転位群の影響は大きい。応力分布は、もはや $x=0$ に関して対称ではなく、各グラフの右方、すなわち堆積が起る側の界面での応力の大きさは左方に比較してかなり大きい。さらに全体的に応力レベルは $S=1$ の場合よりかなり大となっている。例えば $Y=2$ のときは、 $S=10$ に対する最大応力は $S=1$ のその1.7倍 ((a)~(c)) から1.9倍 ((d)) である。また Y の増大に対しても応力集中係数はかなり増大することがわかる。さらに、 $K=1, 0.8$ の場合には、 σ_{nz} が最大となる y の値 y_m は、 Y の増大とともに小さくなる。 $Y \rightarrow \infty$ に対して $y_m \rightarrow 0$ である。云いかえると、介在物が円に近いときは Y の増大に伴って転位は堆積の先端近くに特につめ込まれるようになる。前報での円型介在物に対する解析によれば、この現象は S が4程度より大きいときに起る。

$Y \rightarrow \infty$ のとき、 $y=a$ での応力集中係数は(2)式で $y'=0$ とおいて得られる。

$$m^* = (1+K^{-1})(1+\phi)^{1/2} \quad (36)$$

$(1+K^{-1})$ は弾性相互作用による応力集中係数であり、すべり線による m^* の増大は $(1+\phi)^{1/2}$ により表される。 $S \gg 1$ のとき(36)式はさらに簡単になり $m^* = (1+K^{-1})\sqrt{S}$ となる。すなわち m^* はすべり線の長さの平方根に比例する。

界面のはく離は、 σ_{nz} の最大値が界面の接着強度 τ_B に到達したときに起る。 K が0.5より小さい場合は、最大値はだ円の頂点付近で起るから、このときは(2)式で $y=a$, $\sigma_{nz} = \tau_B$ とおくことによりはく離の開始条件が求められる。すなわち

$$\tau_B = (1+\phi)^{1/2} \left[\tau_I \left\{ K(1+\phi)^{-1/2} - \frac{1}{2} - K - \pi^{-1} \arcsin \left\{ \frac{(\phi-2)}{(\phi+2)} \right\} \right\} + (1+K)\tau_A^V \right] K^{-1} \quad (37)$$

τ_A^V はボイド発生荷重である。 $S \gg 1$ であれば、上式は

$$\tau_A^V = \tau_I + KS^{-1/2}\tau_B \quad (38)$$

と近似できる。一方 $K \approx 1$ で、 S が充分大きければ ($K=1$ のときは $S \geq 4$)、 σ_{nz} の最大値は $y=0$ 付近で起る。試みに $y=a/10$ で最大値を取ると仮定すると (38) 式の数項は他の項と比較して無視できる。結局次式を得る。

$$\tau_A^y = \tau_I + \frac{1}{2} S^{-1/2} \tau_B \quad S \gg 1 \quad (39)$$

(38), (39) 式をまとめて

$$\tau_A^y = \tau_I + \alpha' S^{-1/2} \tau_B \quad S \gg 1 \quad (40)$$

と書ける。 α' は形状パラメータであり、介在物が円から直線状に移るに従い $1/2$ から 0 に変化する。(40) 式はよく知られている Petch の式と類似している。Petch の式の結晶粒径のかわりに、堆積の長さ L を用いた式が (40) 式になっている。

5 すべり面上の応力 σ_{yz}

この節においては、介在物に対して転位の堆積とは反対側のすべり面 ($y=0, x \leq -b$) に働くせん断応力 σ_{yz} を計算する。すべり面の区間 $b \leq x \leq b+h$ に働く応力 σ_{yz} に関しては、最大値は堆積の先端で起り、その値は τ_I である。したがって、この区間では応力集中は起らない。すべり面 ($y=0, x \leq -b$) 上の応力は (1) 式に係数 $dg/dz = g'(\zeta)/(dz/d\zeta)$ および (10) 式を用い、 ζ のかわりに実数 $t (\leq -2c^2q^{-1})$ を入れて得られる。 σ_{yz} に (29) 式を用い、(13) 式の積分を実行して次式を得る。

$$\sigma_{yz}/\tau_A = x(t) \{1 + K - (I_1/\pi) \tau_I/\tau_A\} / H \quad (41)$$

ここで

$$\begin{aligned} I_1 = & \pi \left(K + \frac{1}{2} \right) - K\pi \left(\frac{-\phi t/l}{\phi - \phi t/l} \right)^{1/2} \\ & - \arcsin \frac{2-\phi}{2+\phi} \\ & + \frac{2(\phi t/l+1)}{\{(-\phi t/l-2)(\phi - \phi t/l)\}^{1/2}} \left[\frac{1}{2} \pi \right. \\ & \left. - \arctan \left\{ \frac{2(\phi - \phi t/l)}{\phi(-2-\phi t/l)} \right\}^{1/2} \right] \quad (42) \end{aligned}$$

$$H = \frac{l}{\phi a} \frac{dz}{d\zeta} \Big|_{\zeta=t} = K - \frac{t\phi/l+1}{\{t\phi/l+1\}^2 - 1}^{1/2} \quad (43)$$

$s = x/a$ とおいて $q/c^2 = \phi/l$ および $e = c^2$ を (5) 式に用いると

$$-t\phi/l = \{(S^2 + 1 - K^2)^{1/2} + Ks + 1 - K^2\} / (1 - K^2) \quad (44)$$

を得る。これを (42), (43) 式に代入して、 σ_{yz} が s の関数として求められる。扁平な介在物 ($K=0.1$) に対し ($S=10, Y=20$) および ($S=1, Y=20$) の二つの場合について σ_{yz}/τ_A を Fig. 5 に示す。横軸の座標 x' は介在物からの距離である。すなわち $x' = -(s + K) = (-x + b)/a$

一方、均質材中の転位堆積のモデルに対しては

$$\sigma_{yz}/\tau_A = Y^{-1} + \{(K + S - s)/(K - s)\}^{1/2} (1 - Y^{-1})$$

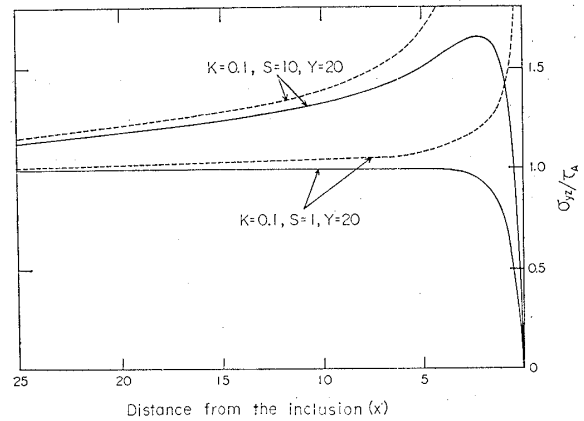


Fig. 5. Shear stress σ_{yz}/τ_A on the slip-plane $y=0, x \leq -b$.

$$s < K \quad (45)$$

ただし、すべり線は $b \leq x \leq b+L$ にあるものとする。(45) 式を Fig. 5 に破線で示す。Fig. 5 から、 $S=1$ のときは介在物が存在すれば応力集中は起らない事がわかる。この場合は、前節で述べたように応力は主として母材と介在物の弾性相互作用によって決まり転位群の存在は σ_{yz} にはほとんど影響しない。 $S=10$ の長いすべり線に対しては、応力集中が起り、グラフは均質材のそれに近づく。しかし、応力集中係数はなお小さく値は 1.7 である。円形介在物について計算したところでは、その値は 1.44 であった。したがって、応力 σ_{yz} は剛体介在物により効果的に遮蔽されることがわかる。結論として、介在物をへだてた側でのすべり面上では、2 次すべりないし破壊は非常に起りにくいといえる。

6 結 論

転位群の先端は、介在物からある距離だけ離れているという仮定のもとに、らせん転位群のだ円柱状剛体介在物に対する堆積を解析した。その結果次のことがわかった。

(1) 加えられた荷重が大きいほど、またすべり線が長いほど、堆積の先端は介在物に近づく。介在物の大きさの 10 倍程度の長さのすべり線に対しては、荷重が転位に対する抵抗力の 2 倍以上であれば、その先端は実質的に界面に一致するとして良い。

(2) 同じ大きさの荷重、およびすべり線の長さに対し、転位の個数は介在物の存在により均質な材料の場合に比べて減少する。介在物によるこの効果は、介在物が扁平になるほど大きくなる。これは扁平な介在物により応力がより効果的に遮蔽されるからである。

(3) 界面に働く応力は、すべり線の長さが介在物と同程度以下である場合は、荷重と介在物の弾性相互作用によるものとあまり違わない。すべり線の長さが介在物の大きさの 10 倍程度になると、弾性相互作用による応力集中にさらに転位群の効果が加わり、応力集中

係数は顕著に増大する。応力集中係数はまた荷重の増大に伴って増大する。

(4) 界面上の最大の応力は一般にはだ円の頂点付近で起きる。しかし、介在物が円に近く、すべり線が長く(円に対しては $S \geq 4$), $\tau_A \gg \tau_r$ ならば, 最大の応力は転位群の先端に近い界面上の点で起きる。

(5) 界面のはく離の十分条件は, すべり線が充分長いとき ($S \gg 1$) には Petch の式と類似した(4)式で与えられる。

(6) すべり面 ($y=0, x \leq -b$) 上の応力は, 介在物により遮蔽され応力集中係数は小さい。二次すべりを考える際には, むしろ介在物の頂点近くの転位源からの転位の発生が重要となろう。

参 考 文 献

- 1) Eshelby, J. D., F. C. Frank, and F. R. N. Nabarro, *Phil. Mag.*, **42**, 351 (1951).
- 2) Barnett, D. M., and A. S. Tetelman, *J. Mech. Phys. Solids*, **14**, 329 (1966).
- 3) Barnett, D. M., and A. S. Tetelman, *Can. J. Phys.*, **45**, 841 (1967).
- 4) Smith, E., *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 163 (1968).
- 5) Toya, M., *ibid.*, **24**, 1 (1976).
- 6) Bilby, B. A., and J. D. Eshelby, "Fracture" (ed. by H. Liebowitz), **1**, Ch. 2 (1968) Academic Press, New York
- 7) Smith, E., *Int. J. Eng. Sci.*, **6**, 129 (1968).
- 8) Byrd, P. F., and M. D. Freidman, "Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists" (second edition) (1971) Springer-Verlag, Berlin
- 9) Smith, E., *Int. J. Eng. Sci.*, **6**, 145 (1968).
- 10) Petch, N. J., *J. Iron and Steel Inst.*, **174**, 25 (1953).

書 評

“ハーゼン金属強度の物理学”

P. Haasen (著)

岸 輝雄, 伊藤邦雄 共訳
大塚正久, 栗林一彦

(1981年, アグネ発刊, A 5 版, 330ページ, ¥4 000)

本書は, 結晶強度学の分野で世界的に著名な P. Haasen 教授の執筆になる “Physikalische Metallkunde” が訳出されたものである。原題と訳題がかなり異っているのは, 本書に取扱われている題材のほとんどが金属の力学的性質を理解するための基礎として記述された色彩が強いので, 訳者がこの点を勘案したためと考えられる。原著者も述べているように固体物理学が取扱っている対象の多くは完全な結晶であるのに対し, 金属材料学の対象のほとんどは合金でかつ種々の内部構造を含んだ系であるため, その論理的な理解のためには本書のような橋渡しをする書物が必要である。特に材料の力学的強度は微視的な内部構造に極めて敏感な性質の一つの代表であり, 完全結晶・内部構造・材料の性質を関連づける橋渡しの書物の最も適した題材と言えらる。

本書の内容は15章からなっており, 概要に続く2章では物理的な実験手段について, 3章以降ではそれぞれ, 結晶粒界と異相境界, 融液の凝固, 合金の熱力学, 金属相の構造と理論, 規則性, 拡散, 析出過程, 点欠陥, 転位, 加工硬化と破壊, マルテンサイト変態, 合金硬化, 再結晶などの問題を手際よく記述している。内容的には, 取扱っている題材が多いことや頁数の制限のために固体物理の入門書にあるような基礎的知識は特別の説明なしに用いられている反面, かなり高いレベルの問題にまで言及しているのが特徴である。ただし, 原書が1974年に書かれたこともあって, 結晶強度学の分野におけるここ十数年間の進歩にはあまりふれられておらず, Review Work としての性格はそれほど持っていない。

本書のもつ最大の特長は, 含まれている問題が極めて多岐にわたっているにもかかわらず, 金属組織学的な題材と結晶強度との関連を物理学的視点でとらえ, その全体像が把握できるように統一的, かつ体系的に記述されている点にある。近年, 材料科学の分野においても個々の専門が細分化され, 研究者が材料特性の本質的な全体像をなおざりにして先端の仕事に専念する兆候がみられる。本書は, これらの情況に一石を投じて個々の研究の土台を増強するのに役立つであろう。さらに, これから結晶強度学を学ぼうとする学生・研究者にとっても, その論理的記述のゆえに理解しやすいと考えられ, この書を読んでこの分野に興味をもたれる方が多くなることを期待している。

(京都大学工学部 成田舒孝)