

面外せん断クラックの先端から進展するすべり帯*

戸 谷 眞 之**

Development of Slip-Bands from the Tip of a Crack under
Anti-Plane Shear Deformation

by

Masayuki TOYA

(Faculty of Engineering, Kyoto University, Kyoto)

The initial development of anti-plane strain yielding from a crack in an infinite elastic body was represented by a continuous distribution of screw dislocations on two planes inclined at angles $\pm\beta\pi$ to the crack plane. The relevant stress function of the system was obtained in a closed form by the complex variable method. The slip line length and the crack tip opening displacement were obtained as functions of the applied stress and β . A comparison with the corresponding plane strain model gave similar results for $\beta\pi\approx 70^\circ$. The stress field near the crack tip was also discussed. When $\beta\pi<90^\circ$, the shearing stress acting ahead of the crack tip was bounded. In particular, for $\beta\pi\approx 70^\circ$, τ_{yz} was about $3\tau_0$, where τ_0 is the yield stress in shear, in agreement with the result from continuum plasticity.

(Received July 13, 1981)

キー・ワード：面外せん断クラック，すべり帯，き裂開口変位，応力の特異性

1 はじめに

近年，有限要素法による弾塑性クラックのくわしい解析例が多く発表されるようになった。しかし破壊の本質を理解するには，例えその結果が定性的なものであるにせよ，クラックのモデルはできるだけ解析しやすい単純なものが望ましい。このような意味において¹⁾Dugdale および²⁾Bilby, Cottrell and Swinden による弾塑性クラックのモデル（以下 DBCS クラック）はその単純な描像，解析の容易さのゆえに現在でもなお破壊の研究において重要な地位を占めている。例をあげると，疲労クラックの進展速度³⁾，安定成長⁴⁾，クリープクラックの成長⁵⁾などがこのモデルを用いて解析されている。

DBCS モデルでは塑性域はクラックの先端からクラックと同一の方向に伸びている一本のすべり線で表現される。このような塑性域の形状は実際に薄板に対し¹⁾観察されている。しかし，一般には，特に平面ひずみ状態のときは，塑性域は無視しえない幅を持ち，軟鋼や単結晶においては二本のすべり線がクラックの先端からある角度をなして発生することが観察^{6,7)}されている。このような事実を取り入れるべく⁸⁾Bilby らはクラック面に 45° の角度をなす 2 本の対称なすべり線の平面ひ

ずみモデルについて解析した。Rice⁹⁾は小規模降伏の条件の下で，任意の角度の場合の近似解を求めた。より正確な数値解は，¹⁰⁾Vitek と¹¹⁾Riedel により求められた。¹²⁾Cherepanov は小規模降伏の場合の厳密解を出したが，¹³⁾Lo の計算によると得られた解の正解さには疑問がある。ともあれ，Cherepanov の解は厳密解ではあるが非常にこみ入ったものであり，とてもそれをもとにして種々のクラックの挙動を扱うようなものではない。

このように見てくると，むしろ面外せん断（モード III 型）クラックを扱うのが得策であると考えられる。現実性は多少犠牲になるが，解析は比較的簡単である。弾性クラックの応力の特異性は係数 $(1-\nu)$ （ ν はポアソン比）を除いては完全に一致していること¹⁴⁾などを考えると，2 本のすべり線モデルにおいても面外せん断モデルは平面ひずみの場合の良い近似になることが期待できる。最近¹⁵⁾Kalishaloo が面外せん断モデルの解析を行ったが，すべり線を一個の巨大転位（super dislocation）でおきかえるという近似を使っている。そのために，クラック先端付近での応力に関しては信頼できる解析はできない。¹⁶⁾Smith は一本のすべり線がクラックと任意の角度をなしている場合の厳密解を求めた。

本論文においては複素関数論を基礎とした弾性論を用いてモード III 型の 2 本のすべり線モデルを解析する。

* 原稿受理 昭和56年7月13日

** 正会員 京都大学工学部 京都市左京区吉田本町

小規模降伏の仮定のもとで、すべり線の長さ、き裂開口変位を外部応力の閉じた形の関数として表す。最後に、クラック近傍における応力の特異性について解析する。

2 応力関数

モデルを Fig. 1 に示す。無限体のなかに長さ $2c$ のクラックがある。原点がクラックの先端に一致する x, y 座標系を用いる。クラック面は $-2c \leq x \leq 0, y = \pm 0$ で、一端は z 軸（紙面に垂直）と一致する。表面で面力は 0、すなわち $\tau_{yz} = 0$ である。無限遠での外部応力 $\tau_{yz} = \tau^\infty$ のもとで系は面外せん断変形をし、クラック先端からバーガースベクトルが z 軸に平行ならせん転位群が放出される。放出された転位は同一すべり面上に平行に並んでいる。すべり面と $z = 0$ 面の交線を以下すべり線と呼ぶ。図のように、2本の長さ L

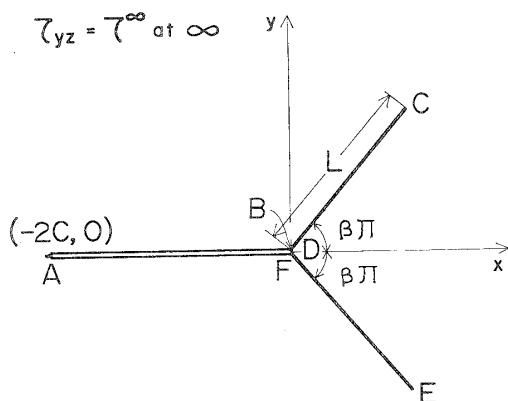


Fig. 1. Schematic picture of the crack and inclined slip-planes. The crack extends over $-2c < x < 0$, $-\infty < z < +\infty$.

のすべり線が x 軸に対称に $\beta\pi$ の角度で出ているとする。転位は連続的に分布していると仮定し、また転位に対する抵抗力を τ_0 とする。 τ_0 はマクロな塑性論におけるせん断降伏応力と同一と見なすことができる。座標系を反時計方向に $\beta\pi$ だけ回転させ、すべり線と x' 軸が一致するような x', y' 軸を取り、この座標系での応力成分を $\tau_{x'z'}$, $\tau_{y'z'}$ としよう。このとき、上の条件はすべり線上で $\tau_{y'z'} = \tau_0$ となる。同様に下のすべり線に沿って x'' 軸をとると $\tau_{y'z''} = \tau_0$ 。

変位の成分としては x 方向の成分 w のみがある。すべり線の上で w は不連続であり、 w の跳びはすべり線の先端で 0 でクラック先端で最大となる。2 本のすべり線によるクラック先端での変位の跳びの合計をき裂開口変位 (COD) と呼ぶ。クラックはそのうえで変位の跳びがある面として定義されるから、この意味ではすべり線は「内圧」 $\tau_{y'z'} = \tau_0$, $\tau_{y''z''} = \tau_0$ を受けるクラックに等しい。結局 Fig.1 のモデルは、部分的に内圧を受ける枝分れクラックと見ることができる。境界条件をまとめると

$$\left. \begin{aligned} & \text{無限遠方で } \tau_{yz} = \tau^\infty \\ & 0 \leq x' \leq L, \quad y' = \pm 0 \quad \text{で} \quad \tau_{y'z'} = \tau_0 \\ & 0 \leq x'' \leq L, \quad y'' = \pm 0 \quad \text{で} \quad \tau_{y''z''} = \tau_0 \\ & -2c < x < 0, \quad y = \pm 0 \quad \text{で} \quad \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

さらにすべり線の先端で応力は有界という条件を課す。この条件により、すべり線の長さ L が外部応力と関連づけられる。

なお、実際にはすべり線はクラックの左端にも生じているわけであるが、ここでは小規模降伏の場合のみを考える。このときは左端のすべり線は右端の場には影響を及ぼさないものと考え、無視しても良い。

さて、面外せん断変形の基礎式は2次元のラプラスの方程式 $\Delta w = 0$ である。したがって、応力関数 $\varphi(z)$ (ただし、 $z = x + iy$)^{*1} を用いると、変位は $\varphi(z)$ の実数部、 $w = \text{Re}\varphi(z)$ と書ける。応力成分は

$$\tau_{xz} - i\tau_{yz} = \mu \frac{d\varphi(z)}{dz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} - i\mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

ここで μ は剛性率を表す. また, (x', y') 座標系における応力成分は

$$e^{-i\beta\pi}(\tau_{x'z'} - i\tau_{y'z'}) = \mu \frac{d\varphi(z)}{dz} \quad (3)$$

問題は境界条件(1)を満足する応力関数を見い出すことに帰着される。以下に等角写像法を用いて $\varphi(z)$ を求める。

さて、Fig.1 のクラックとすべり線からなる Y 字形の切れ目を σ 面内の単位円の円周に移す写像関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} z = m(\zeta) &= l\zeta^{-1}(\zeta-1)^{2\beta}(\zeta-e^{i\alpha})^{1-\beta}(\zeta-e^{-i\alpha})^{1-\beta}, \\ \zeta &= t+iu \end{aligned} \quad (4)$$

実際 $\zeta = e^{i\theta}$ において(4)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} z &= 4lf(\theta)e^{i\beta\pi} & 0 < \theta < \alpha \\ z &= 4lf(\theta)e^{i\pi} & \alpha < \theta < 2\pi - \alpha \\ z &= 4lf(\theta)e^{-i\beta\pi} & 2\pi - \alpha < \theta < 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし

$$f(\theta) = \left| \sin \frac{1}{2} \theta \right|^{2\beta} \left| \sin \frac{1}{2} (\alpha - \theta) \right|^{1-\beta} \left| \sin \frac{1}{2} (\theta + \alpha) \right|^{1-\beta} \quad (6)$$

となり、 θ が0から 2π まで変化するに伴い、 z はFig. 1のY字型を描くことが確かめられる。すべり線の先端Cに対応する偏角 θ_0 は(51)式を θ で微分して0とおいて得られる。すなわち

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta_0 = \beta \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \quad (7)$$

また、クラックの長さ $2c$ ，すべり線の長さ L は α ， β により以下のように表される。

$$2c = 2^{1+\beta} l (1 + \cos \alpha)^{1-\beta} \quad (8)$$

$$L=4l\beta^{\beta}(1-\beta)^{1-\beta}\sin^2\frac{1}{2}\alpha \quad (9)$$

*1 混同の恐れがないので, τ_{xz} 等の z と同じ記号を用いる.

ζ 面内の円柱座標系 (r, θ) に関する応力成分を $p_{rN}, p_{\theta N}$ としよう. 添字 N は ζ 面に垂直な方向を意味する. (3)式を参照すると ζ 面において

$$\mu d\varphi/d\zeta = \mu\varphi'(\zeta) = (p_{rN} - ip_{\theta N})e^{-i\theta} \quad (10)$$

(3), (10)式を関係式

$$\mu\varphi'(z) = \mu\varphi'(\zeta)/m'(\zeta) \quad (11)$$

に代入すると

$$p_{rN} - ip_{\theta N} = e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)(\tau_{x'z'} - i\tau_{y'z'}) \quad (12)$$

が得られる. 上のすべり線に対応する ζ に関しては

$$\arg m'(\zeta) = \arg dz - \arg d\zeta = \beta\pi - \theta - \frac{1}{2}\pi$$

であるから $e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)$ は純虚数となる. したがって (12)式から

$$p_{rN} = -ie^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta)\tau_{y'z'} = -i\tau_0 e^{-i\beta\pi}\zeta m'(\zeta) \quad (13_1)$$

下のすべり線に対しても同様に

$$p_{rN} = -i\tau_0 e^{i\beta\pi}\zeta m'(\zeta) \quad (13_2)$$

$|z| \rightarrow \infty$ で, (4)式は $z = l\zeta$ となり, したがって $\tau_{yz} = \tau^\infty$ という条件は $p_{uN}^\infty = l\tau^\infty$ となる.

このようにして, 境界条件(1)は無限遠で外部応力 $p_{uN}^\infty = l\tau^\infty$ が働き, 単位円の周上の一部 ($0 \leq \theta \leq \alpha$, $-\alpha \leq \theta \leq 0$) で応力 p_{rN} がそれぞれ (13₁) および (13₂) で与えられ, 残りの部分では $p_{rN} = 0$ の円孔の問題に移される. Fig. 2 に ζ 面を示す. z 面に対応する点をダッシュをつけて示してある.

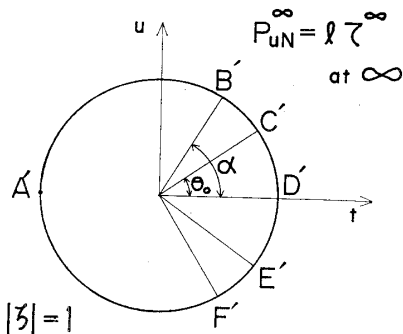


Fig. 2. The $\zeta (=t+iu)$ -plane obtained from the $z (=x+iy)$ -plane of Fig. 1 by the conformal transformation (4).

さて円周上で

$$p_{rN} = \mu \operatorname{Re}(\zeta\varphi'(\zeta)) = \frac{1}{2}\mu(\zeta\varphi'(\zeta) + \overline{\zeta\varphi'(\zeta)}) \quad (14)$$

(バーは共役複素数を意味する.) $\varphi'(\zeta)$ は $|\zeta|=1$ の外部で定義されているが, 定義域を次式により $|\zeta|=1$ の内部に拡張する.

$$\zeta\varphi'(\zeta) = -\frac{1}{\zeta}\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \quad |\zeta| < 1 \quad (15)$$

(15)式を(14)式に代入して

$$p_{rN} = \frac{1}{2}\mu\left(\zeta\varphi'(\zeta) - \frac{1}{\zeta}\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\right). \quad (16)$$

ζ を円の内部から円周に近づけたときの $\varphi'(\zeta)$ の極限

値を $\varphi'^R(\zeta)$, 外側から近づけたときのそれを $\varphi'^L(\zeta)$ とすると

$$p_{rN} = \frac{1}{2}\mu\zeta(\varphi'^L(\zeta) - \varphi'^R(\zeta)) \quad (17)$$

最初に円周上で $p_{rN} = 0$, 無限遠で $p_{uN} = p_{uN}^\infty$ という条件を満たす解を見つけよう. この場合, $\varphi'(\zeta)$ は円周上ではなんら特異性を持たないから多項式となる. この多項式は, 変位の多価性があるとはならないという条件から $1/\zeta$ の項は含まない. このことと (15)式から

$$\varphi_1'(\zeta) = -\frac{ip_{uN}^\infty}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (18)$$

が得られる. つぎに条件 $|\zeta| \rightarrow \infty$ で $\varphi'(\zeta) \rightarrow O(1/\zeta^2)$, 円周上で (17)式を満たす解は Plemelj の公式を使って

$$\varphi_2'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i \mu \zeta} \int_{e^{i\alpha}}^{e^{-i\alpha}} \frac{2p_{rN}(\zeta') d\zeta'}{\zeta' - \zeta} \quad (19)$$

となる. ただし, $p_{rN}(\zeta')$ は (13_{1,2}) 式で与えられる. 積分は時計回りに円周に沿って行く. 完全な解は (18)式と (19)式を足し合わせて得られる. $p_{rN}(1/\zeta) = -p_{rN}(\zeta)$ なる関係を用いて (19)式を変形して次式を得る.

$$\begin{aligned} \zeta\varphi'(\zeta) &= \zeta(\varphi_1'(\zeta) + \varphi_2'(\zeta)) \\ &= -\frac{1}{\pi i \mu} \int_{e^{i\alpha}}^{e^{-i\alpha}} \frac{p_{rN}(\zeta')(1 - \zeta'^2) d\zeta'}{\zeta'(\zeta' - \zeta)(\zeta' - 1/\zeta)} \\ &\quad - \frac{ip_{uN}^\infty}{\mu} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

3 すべり線の長さとき裂開口変位

すべり線の先端付近の点, $z = (L + \delta R)e^{i\pi\beta}$ を考えよう. この点に対応する ζ 面内の点を ζ_R とすると

$$m'(\zeta_R) = \frac{1}{\tan \frac{1}{2}\theta_0} \sqrt{\frac{2\beta L \delta R}{1-\beta}} e^{-i\theta_0} e^{i\pi\beta} \quad (21)$$

したがって, (2), (11)式より明らかなように, すべり線の先端付近で τ_{xz} , τ_{yz} は一般には $(\delta R)^{-1/2}$ の特異性を持つ. すべり線の長さを決めるために応力は有界という条件を課そう. この条件は

$$\varphi'(\zeta_0) = 0, \quad \text{ただし } \zeta_0 = e^{i\theta_0}$$

となる. さて

$$\begin{aligned} m'(\zeta) &= l(1+\zeta)(\zeta-1)^{2\beta-1}(\zeta-e^{i\alpha})^{-\beta}(\zeta-e^{-i\alpha})^{-\beta} \\ &\quad \times (\zeta-e^{i\theta_0})(\zeta-e^{-i\theta_0})/\zeta^2 \end{aligned} \quad (22)$$

を (13₁)式に代入し, その結果を (20)式に用いると応力有界の条件は次式のようになる.

$$-4l\tau_0 \int_0^\alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta - \cos \alpha} \right\}^\beta d\theta + p_{uN}^\infty = 0 \quad (23)$$

ここで小規模降伏を仮定し, α は 0 に近いとすると

$$\frac{\tau_0 \alpha}{\sin \beta \pi} \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \tau^\infty \quad (24)$$

Γ はガンマ関数である. 一方 $\alpha \cong 0$ のとき, (8), (9)式は

$$c = 2l \quad L/c = \frac{1}{2}\beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta} \alpha^2 \quad (25)$$

となる。(25)式の α に(24)式を代入して、すべり線の長さが応力拡大係数 $K(=\tau_0\sqrt{\pi c})$ と角度 $\beta\pi$ の関数として以下のように求められる。

$$L = \frac{\beta^2(1-\beta)^{1-\beta}\sin^2\beta\pi\Gamma^2(\beta)}{8\Gamma^2\left(\beta+\frac{1}{2}\right)} \frac{K^2}{\tau_0^2} \quad (26)$$

L は K^2 に比例し、その比例定数は β の関数となる。Fig. 3に $L/(K^2/\tau_0^2)$ を示す。 $\beta=0$ のときは $\Gamma(\beta)\sin\beta\pi \rightarrow \pi$ を用いて、 $L/(K^2/\tau_0^2) = \pi/8$ となりDBCSモデルと一致する。このことはまた、すべりを一本のすべり線で表しても($\beta=0$)、非常に近接した2本のすべり線で表しても($\beta \approx 0$)、ほぼ同一の結果になることを示している。(すべり帯を1本のすべり線でおきかえることの正当さの例証となっている。) Rice はホドグラフ変換法を用いて $\beta=0.25$ 、および0.5の特別な場合の解析を行った。彼の結果は $\beta=0.25$ に対し $L/(K^2/\tau_0^2)=0.322$ 、 $\beta=0.5$ に対し0.196である。一方(26)式から計算した値はそれぞれ0.312、0.196となり両者はよく一致する。

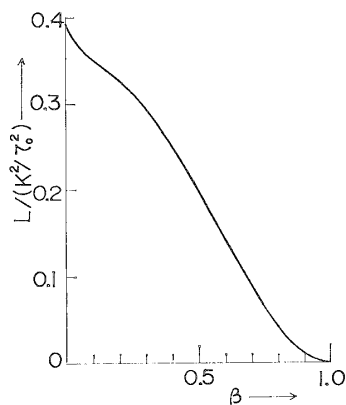


Fig. 3. Variation of the slip-line length L with β .

平面ひずみのモードⅠ型の場合には最大の L はほぼ $\beta\pi=72^\circ$ のときに起る。^{9)11)~13)}一方、現モデルでは $\beta=0$ のときに L が最大となる。それゆえ残念ではあるが、モードⅢ型のモデルとモードⅠ型のモデルは同等であると結論するわけにはいかない。しかし、数値的にはLo¹³⁾の結果では $L_{\max}=0.232(K/\sigma_y)^2(\sigma_y$ は引張降伏応力)であり、現モデルは $\beta\pi \approx 70^\circ$ に対し、 $L \approx 0.248(K/\tau_0)^2$ となり、大きな違いはない。

つぎにき裂開口変位を計算しよう。(20)式を変形して

$$\mu\varphi'(\zeta) = \frac{\tau_0 e^{-i\beta\pi}}{\pi} \frac{d}{d\zeta} \int_{e^{i\alpha}}^1 m(\zeta') \left(\frac{1}{\zeta - \zeta'} + \frac{1}{\zeta' - 1/\zeta} \right) d\zeta' - ip_{uN}^\infty (1 + 1/\zeta^2) \quad (27)$$

$\zeta=1$ で変位は0という条件を考慮すると

$$\mu\varphi(\zeta) = \frac{\tau_0 e^{-i\beta\pi}}{\pi} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \int_1^{e^{i\alpha}} \frac{m(\zeta') d\zeta'}{(\zeta' - \zeta)(\zeta' - 1/\zeta)} - ip_{uN}^\infty \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \quad (28)$$

α が充分小さいという小規模降伏の近似のもとでは積分は

$$\frac{i\alpha\pi e^{i\beta\pi}\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\beta\pi\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \quad (29)$$

となる。また、条件(24)式を(28)式に代入すると $\varphi(\zeta)$ は β と K だけの関数となる。(28)、(29)式より明らかのように $\varphi(\zeta)$ は実数であり、変位そのものを表す。き裂開口変位 $\bar{\phi}$ は $2\varphi(e^{i\alpha})$ で定義され、次式を得る。

$$\bar{\phi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\beta)} \cdot \frac{r_0 K^2}{\tau_0^2} \quad (30)$$

ここで r_0 は降伏ひずみ、 τ_0/μ である。

Fig. 4に $\bar{\phi}/(r_0 K^2/\tau_0^2)$ と β の関係を示す。 $\beta=0$ のときは $\bar{\phi}=(1/2)r_0 K^2/\tau_0^2$ となりDBCSモデルと一致する。 $\bar{\phi}$ は $\beta=0.25$ で最大値 $0.59r_0 K^2/\tau_0^2$ に達し、 $\beta=0.5$ ではDBCSモデルと同じ値になる。これらの値はRice²⁰⁾の計算値と完全に一致する。また、Lo¹³⁾のモードⅠ型モデルの解析では $\beta\pi=72^\circ.3'$ で $\bar{\phi}=0.56(1-\nu^2)(\sigma_y/E)(K/\sigma_y)^2$ であり(E はヤング率)、一方Fig. 4での値は $\bar{\phi}=0.567r_0(K/\tau_0)^2$ である。したがって $(1-\nu^2)\sigma_y/E \approx r_0$ とおくと両方のモデルは形式的に一致する。

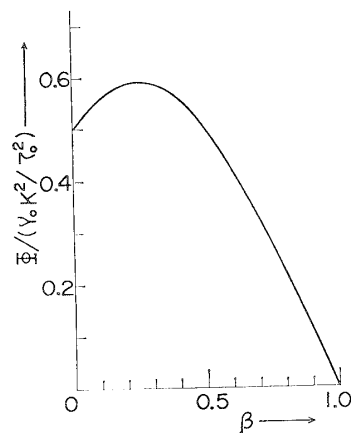


Fig. 4. Variation of the crack opening displacement with β .

4 クラック先端の応力

モードⅢ型のモデルの利点は、応力場の計算が比較的簡単にできるということである。この節ではクラック先端近傍での応力場の特異性について調べる。

さて、 x 軸上の点($x>0$)を考える。対応する ζ はやはり実軸上にあって($\zeta>1$)、 $\alpha \ll 1$ の条件のもとで(20)式は次のように書ける。

$$\varphi'(\zeta) = -\frac{1}{\pi i \mu} \int_0^\alpha \frac{2\theta p_{rz}(\theta) d\theta}{(\zeta-1)^2 + \zeta\theta^2} - \frac{ip_{uN}^\infty}{\mu} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (31)$$

(5₁)、および(6)、(13₁)式から $p_{rz}(\theta)$ を計算し(31)式に代入し、さらに $\alpha \ll 1$ と近似した(23)式を適用する。結局

(2), (11)式より

$$\tau_{yz} = 4l\tau_0\{(\zeta-1)^2\zeta^{-1} + \beta\alpha^2\}I(\zeta)/\pi\zeta m'(\zeta) \\ + 2l\tau_0\left\{\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) - \cos\theta_0\right\}/\zeta m'(\zeta) \quad (32)$$

ただし

$$I(\zeta) = \int_0^\alpha \frac{\zeta\theta^{2\beta}(\alpha^2 - \theta^2)^{-\beta}}{(\zeta-1)^2 + \zeta\theta^2} d\theta \quad (33)$$

容易に確かめられるように、 $\zeta \rightarrow \infty$ で $\tau_{yz} = \tau_\infty$ となる。以後はクラック先端のごく近くのみを考える。このとき、 $\zeta - 1 \ll \alpha$ の条件のもとで

$$1/m'(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta-1)^{1-2\beta}\alpha^{2(\beta-1)}/\beta l \quad (34)$$

$\beta > 1/2$ のときは(32)式の第1項は $\alpha/m'(\zeta)$ のオーダーであり、第2項は $\alpha\theta_0^2/m'(\zeta)$ のオーダーである。したがって第2項は無視できる。 $\beta < 1/2$ のときは積分は $\zeta \rightarrow 1$ のとき発散するから、この場合も第1項が主要な項である。結局(32)式の第2項は無視できる。以下 β の3とおりの場合について(32)式を調べる。

(i) $\beta > 1/2$ の場合、被積分関数の ζ を1とおき積分を実行する。

$$\zeta - 1 \cong (x/l)^{1/2\beta}\alpha^{-(1-\beta)/\beta} \quad (35)$$

を用いて

$$\tau_{yz} = \tau_0\pi^{-3/2}\alpha^{(2\beta-1)/\beta}\Gamma(\beta-1/2)\Gamma(1-\beta)(x/l)^{(1-2\beta)/2\beta} \quad (36)$$

を得る。 x/l のべき、 $(1-2\beta)/2\beta$ は $1/2 < \beta < 1$ に対し負である。すなわち τ_{yz} はべき $(1-2\beta)/2\beta$ の特異性をもつ。 $\beta=1$ の極限では弾性クラックの特異性 $x^{-1/2}$ になる。

(ii) $\beta=1/2$ の場合、 $I(\zeta)$ は簡単に積分できて

$$I(\zeta) = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2 + (\zeta-1)^2}\zeta^{-2}} \\ \times \ln \left| \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + (\zeta-1)^2}\zeta^{-1}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + (\zeta-1)^2}\zeta^{-1}} \right| \quad (37)$$

$0 < \zeta - 1 \ll \alpha$ の近似を施し、(34)式で $\beta=1/2$ とした結果を用いて

$$\tau_{yz} = 2\tau_0\pi^{-1}\ln(l/x) \quad (38)$$

対数関数の特異性は、従来の研究では進展する背後に残留ひずみを伴うクラックの安定成長の解にあらわれた。(38)式は対数関数の特異性は安定成長にのみ特長的なわけではなく、静止クラックにも可能であることを示している。

(iii) $\beta < 1/2$ の場合。このときが最も現実に近いモデルとなるだろう。変換、 $\theta^2 = \alpha^2 t$ により

$$I(\zeta) = \frac{1}{2\alpha} \int_0^1 \frac{t^{\beta-1/2}(1-t)^{-\beta} dt}{(\zeta-1)^2 + \zeta\alpha^2 t} \quad (39)$$

コーシー型の積分で引数が積分区間の端に近いときの振舞は、Muskhelishvili²¹⁾によってくわしく調べられている。その結果を(39)式に適用すると

$$I(\zeta) \cong \frac{\pi}{\cos\beta\pi} \left\{ \frac{\zeta\alpha^2}{(\zeta-1)^2} \right\}^{1/2-\beta}$$

$$+ \{\zeta=1 \text{ で有界な項}\} \quad (40)$$

結局

$$\tau_{yz} \cong \tau_0/\cos\beta\pi \quad (41)$$

を得る。クラック先端で応力は有界となり、また、クラックの長さや外部応力には依存しない。すなわち、クラックの先端は Broberg²²⁾ のいうところの 'autonomous' な領域となっている。予期されるように $\beta=0$ のときは $\tau_{yz} = \tau_0$ であり、 $\beta\pi$ の増大とともに τ_{yz} は大となる。平面ひずみの場合に得られている $\beta\pi \cong 70^\circ$ なる値に対して $\tau_{yz} \cong 2.9\tau_0$ となる。

DBCS モデルにおいては、応力は降伏応力 τ_0 (モード I 型に対しては引張降伏応力 σ_y) を越えない。一方 Rice²³⁾ らによる解析では、理想塑性体であってもクラック先端での応力の3軸性により最大の応力は $3\sigma_y$ 程度になり得る。この最大応力の評価のくい違いが DBCS モデルの最も大きな欠陥といえよう。2本のすべり線モデルは、改良された DBCS モデルとして研究されるようになったわけであるが、従来の興味は主として COD 値とすべり線の長さに向けられ、クラック近傍での応力状態についてのくわしい解析はなかった。ただ、Vitek¹⁰⁾ および Riedel¹¹⁾ は応力を計算しているが、いずれもクラック先端を除いた部分に対してのものである。例えば Vitek¹⁰⁾ の方法ではすべり線を有限個の転位でおきかえるのでクラック先端近くでは計算は不正確となる。なお、両者の計算において x 軸上の垂直応力 σ_{yy} をクラックの端点に外挿すると無限大に発散するように見える。

これに対し、面外せん断モデルにおいては、 τ_{yz} は閉じた形で(32)式によって与えられる。しかも $\beta\pi=70^\circ$ に対し、Rice²³⁾ らの平面ひずみに対する結果に近い値を与える。このことから(32)式は適当な β の値をとり τ_{yz}/τ_0 を σ_{yy}/σ_y で置きかえれば平面ひずみの場合の σ_{yy} の良好な近似を与えることが期待される。

5 結 論

先端に、2本の対称なすべり線を伴うモード III 型クラックを解析した。小規模降伏の仮定のもとで、すべり線がクラックと任意の角度 $\beta\pi$ をなしている場合について、すべり線の長さとき裂開口変位を外部応力の閉じた関数として表した。これら諸量の β に対する依存性は、モード I 型モデルにおける結果と異っている。しかし、応用上重要な $\beta\pi \approx 70^\circ$ の場合に対しては、モード I 型の結果とよく一致した。つぎにクラックの先端付近における応力について調べた。従来のモード I 型モデルでは、 σ_{yy} はクラック先端で無限大となるのに対し、モード III 型モデルでは、 $\beta\pi \approx 70^\circ$ に対し $\tau_{yz} \approx 3\tau_0$ となった。この結果は理想塑性体に対するマクロな塑性力学による結論、 $\sigma_{yy} \approx 3\sigma_y$ とよく一致している。したがって、現モデルは τ_{yz}/τ_0 を σ_{yy}/σ_y

と読み換えることにより、平面ひずみの弾塑性クラック先端の応力 σ_{yy} の良好な近似を与えることが期待される。

参 考 文 献

- 1) Dugdale, D. S., J. Mech. Phys. Solids, **8**, 100 (1960).
- 2) Bilby, B. A., A. H. Cottrell, and K. H. Swinden, Proc. Roy. Soc., **A272**, 304 (1963) London
- 3) Weertman, J., Int. Journ. Fract. Mech., **2**, 460 (1966).
- 4) Wnuk, M. P., Int. Journ. Fracture, **15**, 553 (1979).
- 5) Vitek, V., *ibid.*, **13**, 39 (1977).
- 6) Neumann, P., Acta Met., **22**, 1155 (1974).
- 7) Leonov, M. Ia., P. M. Vitvitskii, and S. Ia. Iarema, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., **148**, 541 (1963).
- 8) Bilby, B. A., and K. H. Swinden, Proc. Roy. Soc., **A285**, 22 (1965) London
- 9) Rice, J. R., J. Mech. Phys. Solids, **22**, 17 (1974).
- 10) Vitek, V., *ibid.*, **24**, 263 (1976).
- 11) Riedel, H., *ibid.*, **24**, 277 (1976).
- 12) Cherepanov, G. P., PMM, **40**, 720 (1976).
- 13) Lo, K. K., Int. Journ. Fracture, **15**, 583 (1979).
- 14) 例えば, Sih, G. C., J. Appl. Mech., **32**, 51 (1965).
- 15) Kalihaloo, B. L., Arch. Mech., **31**, 649 (1979).
- 16) Smith, E., *ibid.*, **32**, 307 (1980).
- 17) Darwin, C., Phil. Mag. Ser. 7, **41**, 1 (1950).
- 18) Smith, E., J. Mech. Phys. Solids, **16**, 329 (1968).
- 19) Tamate, O., and Y. Yamada, Technology Reports, Tohoku Univ., **34**, 161 (1969).
- 20) Rice, J. R., ASTM STP, No. 415, 247 (1966).
- 21) Muskhelishvili, N. I., "Singular Integral Equations", (J. M. Radok, Trans.), Ch. 4 (1953) Noordhoff, Groningen
- 22) Broberg, K. B., J. Mech. Phys. Solids, **19**, 407 (1971).
- 23) Rice, J. R., and M. A. Johnson, "Inelastic Behaviour of Solids" (Ed. by M. F. Kanninen, *et al.*), 641 (1970) McGraw-Hill, New York

書 評

“Mechanics of Aerospace Materials”

Nica, A. (著)

(1981年, Elsevier Scientific Publishing Co. 発刊, 175×245mm, 346ページ, Dfl.160)

著者の Alexandru Nica はルーマニア Bucharest 工科大学を卒業し、現在 Bucharest-Băneasa の Aeronautical Institute に所属し、Scientific Research Board の教授であり Head である。

この本の内容は

1. Operating conditions and stresses imposed on aerospace materials (12ページ)
2. Structure and properties of materials (48ページ)
Structural imperfections など5節からなる。
3. Stress and strains; rheological behaviour (44ページ)
Plastic flow laws など3節からなる。
4. Tribological behaviour (38ページ)
Internal friction, wear, Stress corrosion など6節からなる。
5. Creep (56ページ)
Creep under various loading conditions, Creep of rotating disc の節には数値例をも示し、8節からなる。
6. Fracture (56ページ)
Modes of fracture, Physical-mathematical models of fracture, Fracture design of structures など8節からなる。
7. Fatigue (48ページ)
Influence of environment on fatigue life, Fatigue-failure criteria など6節からなる。
8. Reliability of aerospace constructions (26ページ)
Life prediction の節には数値例による説明が加えられ、4節からなる。

の8章からなっている。第4章に出て来る tribology という言葉は、friction の意味のギリシャ語を語源とする術語である。(577ページに続く。)