

温度こう配下における異種材積層はり中のはく離<sup>†</sup>深川和良\* 有富正男\*\*  
小田美紀男\*\*\* 戸谷真之\*\*\*

## An Interface Crack in a Laminated Beam Subject to Thermal Gradient

by

Kazuyoshi FUKAGAWA\*, Masao ARITOMI\*\*, Mikio ODA\*\*\* and Masayuki TOYA\*\*\*

A laminated beam containing an interface crack subject to thermal gradient is analyzed on the basis of the classical beam theory. The axial forces are induced in the parts of the constituent beams above and below the interface crack. For the case where crack faces are open, a nonlinear equation for determining the in-plane forces is derived by modeling the cracked part as two lapped beams hinged at both ends, and by imposing the compatibility condition of the deformations of the two beams. Numerical solutions are obtained for some model beams. It is shown that the relative displacement at the center of the crack increases gradually with the increase in temperature gradient. However, at a critical temperature gradient, the relative displacement begins to increase very rapidly, i.e., local delamination buckling occurs. Energy release rate is small for temperature gradient below the critical value, but it takes a large value when the temperature gradient is increased beyond the critical value. The model where the two crack faces are contacting one another is also analyzed. In this case it is shown that the energy release rate is identically zero if the temperature gap between the crack faces is zero.

**Key words:** Fracture mechanics, Delamination, Laminated beam, Interface crack, Energy release rate, Thermal stress

## 1 緒 言

近年、耐熱材料または耐摩耗材料として、金属板にセラミックをコーティングした積層材料が注目されている。このような異種材料を組み合わせで作られる材料では、接合残留応力や熱応力に起因する接着面(界面)のはく離が、材料の信頼性に関する重要な問題となる。破壊力学の観点からは、積層材料を使用するにあたっては、あらかじめはく離(界面クラック)の存在を想定し、それがいかなる条件のもとで進展するかを把握しておくことが不可欠である。このことを反映して積層材料の界面はく離の進展に関し多くの理論および実験的研究がなされてきた<sup>1),2)</sup>

著者らは、材端に初期はく離を有する異種材積層はりが一様な温度変化を受ける場合のエネルギー解放率を、材料力学のはり理論に基づいて計算し、簡単な公式を得、これが有限要素法による数値解と良く一致することを確かめた<sup>3)</sup>Hutchinson および Lu<sup>4)</sup>は、均質直交異方性積層はりの内部はく離が温度こう配のもとに置かれるときのエネルギー解放率を導いている。同じく温度こう配下における材端はく離の進展の研究は、最近著者らによりなされた<sup>5)</sup>Saitoh ら<sup>6)</sup>は実際の LSI パッケージの温度サイクル下におけるはく離について、数種類の初期界面はく離を仮定し、その進展プロセスを有限要素法により解析した。

本研究では、中央にはく離を有する異種材積層はりを想定し、はく離面が開口する場合とはく離面が全面接合する場合の解析を、微小たわみ理論に基づき、熱応力によるはりの変形、およびはく離のエネルギー解放率を計算した。

## 2 たわみの解析

## 2・1 解析モデル

Fig. 1 に示すような中央部に中心対称なはく離(界面き裂)を有する異種材はりを接着して作られた積層はりが温度こう配下に置かれた場合の熱応力によるはく離進展の解析を行う。等方弾性体を仮定し、厚さ、ヤング率、熱膨張係数、熱伝導率、ポアソン比を上のはりについてはそれぞれ  $h_1$ ,  $E_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\nu_1$  とし、下のはりについてはそれぞれ  $h_2$ ,  $E_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_2$ ,  $\nu_2$  とする。はりの全長は  $L$ ,

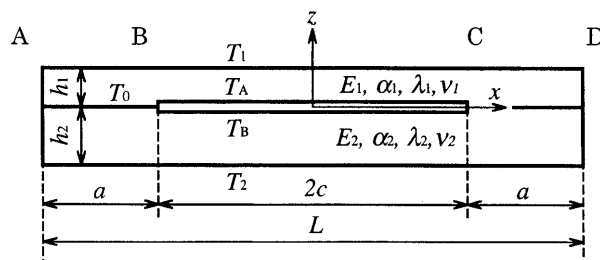


Fig. 1. A laminated beam containing an interface crack.

† 原稿受理 平成 15 年 8 月 1 日 Received Aug. 1, 2003

\* 学生会員 鹿児島大学大学院 〒890-0065 鹿児島市郡元, Graduate Student, Kagoshima Univ., Korimoto, Kagoshima, 890-0065

\*\* 鹿児島大学工学部機械工学科 〒890-0065 鹿児島市郡元, Dept. of Mech. Eng., Faculty of Eng., Kagoshima Univ., Korimoto, Kagoshima, 890-0065

\*\*\* 正会員 鹿児島大学工学部機械工学科 〒890-0065 鹿児島市郡元, Dept. of Mech. Eng., Faculty of Eng., Kagoshima Univ., Korimoto, Kagoshima, 890-0065

はく離長さは  $2c$ 、幅はともに  $b$  とする。上のはりの上面は  $T_1$ 、下のはりの下面は温度  $T_2$  に保たれているものとする ( $T_1 = T_2 = 0$  ではり中の応力は 0 であるとする)。また、はく離部分において、上下層が互いに接触しない場合は特に、き裂部分に空隙が生じることに起因するき裂の上面と下面の温度ギャップが生じるであろう。簡単のため、き裂の上面温度を場所にはよらない一定値  $T_A$ 、き裂の下面温度を  $T_B$  と置く。<sup>4)</sup> 実際には温度は場所により変動するはずであるが、文献 4) に従って、 $T_A$ 、 $T_B$  をはく離上下面の平均温度と解釈することができる。最初にこれらの温度を求める。上のはりにおける  $z$  方向に単位時間、単位面積当たりに流れる熱量を  $q_1$  とすると

$$q_1 = -\lambda_1 (T_1 - T_A) / h_1 \quad (1)$$

同様に、下のはりにおける  $z$  方向に流れる熱量  $q_2$  は

$$q_2 = -\lambda_2 (T_B - T_2) / h_2 \quad (2)$$

となる。また、クラック界面の空気層を伝わる熱量を  $q_c$  として、 $h_c$  をクラック界面を横切る熱伝達率とすると次のようになる。<sup>4)</sup>

$$q_c = h_c (T_B - T_A) \quad (3)$$

ここで、 $q_1 = q_2 = q_c$  とすると、 $T_A$ 、 $T_B$  が以下のように得られる。

$$T_A = \frac{T_1(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)} \quad (4)$$

$$T_B = \frac{T_2(1+\eta) + B_c(T_1 + \eta T_2)}{(1+B_c)(1+\eta)} \quad (5)$$

ただし、

$$\eta = \lambda_2 h_1 / \lambda_1 h_2, \quad B_c = (\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1) / \lambda_1 \lambda_2 \quad (6)$$

式 (4)、(5) に見るように、温度ギャップはき裂表面の熱の流れを支配する無次元数  $B_c$  (ピオ数) によって表すことができる。 $B_c = 0$  はき裂が完全に熱的に絶縁された状態に対応し、このとき  $T_A = T_1$ 、 $T_B = T_2$  となる。また  $B_c = \infty$  は空気層による熱の流れの妨害がない状態に対応し、 $T_A = T_B = T_0$  (接着板の界面温度) となる。

はく離部分上下のはりの各中立軸を  $z$  軸の原点としたときの温度分布は、それぞれ以下ようになる。

$$T = (T_1 - T_A)z/h_1 + (T_1 + T_A)/2 \quad (7)$$

$$T = (T_B - T_2)z/h_2 + (T_B + T_2)/2 \quad (8)$$

界面温度  $T_0$  は、 $B_c = \infty$  と置いて、

$$T_0 = (T_1 + \eta T_2) / (1 + \eta) \quad (9)$$

となる。したがって、接着部分の温度分布は、界面を  $z = 0$  と設定すると、上下のはりに対してそれぞれ以下のように与えられる。

$$T = z(T_1 - T_0) / h_1 + T_0 \quad (10)$$

$$T = z(T_0 - T_2) / h_2 + T_0 \quad (11)$$

以上の温度分布下における Fig. 1 に示すはりのたわみを考える。はりには一切外部モーメントや集中力などが作用しないで、熱応力によってのみ変形する状態を想定する。はりを Fig. 1 の点 B、C で仮想的に分離し、それぞれの自由体線図を考える。はり端部 A 点、D 点においては外力は作用していないので、接着部分の力の釣り合いの条件から、はく離部分と接着部分の境界面 B、C に

作用する合モーメント、軸方向合力およびせん断力は 0 であることが導かれる。接着部分 AB、CD のたわみの解析は Timoshenko<sup>7)</sup> によりなされた等温変化を受けるパイメタルのたわみ解析の手法を拡張すればよい。たわみの基礎式はすでに文献<sup>5)</sup> に導かれており、解は簡単に求めることができる (後出)。

## 2.2 非接触解

次にはく離部分 BC のたわみ曲線について解析する。最初にはく離面は互いに接触していない場合を考える。前述のように、この重ねはりの両端では合モーメントおよび軸方向合力は 0 である。この部分は Fig. 2 (a) のようにヒンジで止められた重ねはりとみなすことができる。仮に  $T_1 > T_2$  でさらに  $\alpha_1 > \alpha_2$  の場合を考えると、はく離部は上に凸にたわみ、またはく離の上側のはりには圧縮力が誘起されている。この場合ヒンジの作用は上のはりに対しては、はりの両下すみ部に作用する水平方向の集中圧縮軸力  $P$ 、下のはりに対しては、はりの両上すみ部に作用する水平方向の集中引っ張り軸力  $P$  に置き換えることができる。自由体線図と座標系を Fig. 2 (b) に示す。また、 $M_1' + M_2' = 0$  が成り立つ。上下のはりの伸び  $u_i$  は、

$$u_i = u_{0i} - z dw_i / dx \quad (12)$$

と表すことができる。ここで、添字は、 $i = 1, 2$  はそれぞれ上下のはりを表す。 $u_{0i}$  は中立軸上の  $x$  方向の伸び、 $w_i$  ははりのたわみである。幅の広い板を考えると、上下それぞれのはりのひずみは、

$$\varepsilon_{xi} = du_{0i} / dx - z d^2 w_i / dx^2 \quad (13)$$

また、応力に関するひずみは平面ひずみ条件 ( $\varepsilon_y = 0$ ) を仮定すると

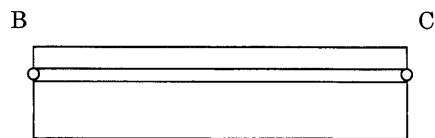
$$\varepsilon'_{xi} = \varepsilon_{xi} - \alpha_i T, \quad \varepsilon'_{yi} = -\alpha_i T \quad (14)$$

である。したがって、フックの法則より

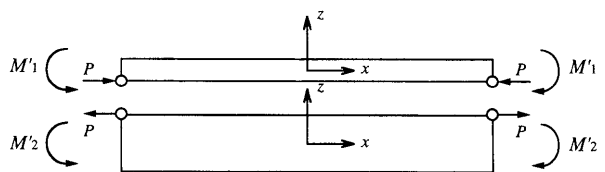
$$\sigma_{xi} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \left( \frac{du_{0i}}{dx} - z \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_i T \quad (15)$$

したがって単位幅当たりのモーメントおよび軸力は、上のはりについて

$$M_{x1} = -D_1 \frac{d^2 w_1}{dx^2} - \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2}{12} (T_1 - T_A) \quad (16)$$



(a) Modeling by hinged lapped beams



(b) Free-body diagram of the delaminated part

Fig. 2. Forces and moments in the interval BC.

$$N_{x1} = \bar{E}_1 h_1 \frac{du_{01}}{dx} - \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1}{2} (T_1 + T_A) \quad (17)$$

下のほりについては,

$$M_{x2} = -D_2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2}{12} (T_B - T_2) \quad (18)$$

$$N_{x2} = \bar{E}_2 h_2 \frac{du_{02}}{dx} - \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2}{2} (T_B + T_2) \quad (19)$$

ただし,

$$\bar{E}_i = E_i / (1 - \nu_i^2), \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i (1 + \nu_i) \quad (i=1, 2) \quad (20)$$

また  $D_1, D_2$  ははりの曲げ剛性で次式で与えられる.

$$D_i = E_i h_i^3 / 12 (1 - \nu_i^2) \quad (i=1, 2) \quad (21)$$

ここで Fig. 2 (b) の力の状態を力学的に等価な材端モーメント,  $M_1 (=M_1' + Ph_1/2)$ ,  $M_2 (=M_2' + Ph_2/2)$  と上下各はりの中立軸に作用する軸力の組み合わせ (上層に圧縮力  $P$ , 下層に引張力  $P$ ) に置き換える.  $M_1, M_2$  は今のところ未知ではあるが全体の釣り合いを満足するために以下の関係式が成り立っていないなければならない.

$$M_1 + M_2 - P(h_1 + h_2)/2 = 0 \quad (22)$$

ここで, たわみを上下それぞれのはりの中立軸から上向きにとり, はりの両端  $x = \pm c$  で  $w(\pm c) = 0$  とするとき, はりの任意点における曲げモーメント  $M_{x1}, M_{x2}$  は上向きに凸に曲げるように作用するときを正とすると以下のようになる.

$$M_{x1} = M_1 + Pw_1(x) \quad (23)$$

$$M_{x2} = M_2 - Pw_2(x) \quad (24)$$

式 (16) と (23), (18) と (24) を組み合わせ, 整理すると, 上下のほりに関するたわみの微分方程式はそれぞれ以下のようになる.

$$\begin{aligned} & d^2 w_1 / dx^2 + Pw_1(x) / D_1 \\ & = -\frac{1}{D_1} \left\{ M_1 + \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2}{12} \frac{B_C \eta (T_1 - T_2)}{(1 + B_C)(1 + \eta)} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d^2 w_2 / dx^2 - Pw_2(x) / D_2 \\ & = -\frac{1}{D_2} \left\{ M_2 + \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2}{12} \frac{B_C (T_1 - T_2)}{(1 + B_C)(1 + \eta)} \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

$P$  の正負によって, たわみ曲線の解の形は異なってくる. 以下では,  $P$  が正の場合についてのみ記す. (解析手順は  $P$  を負として取り扱うだけで  $P$  が正の場合と同じである. したがって, 現解析は  $T_1, T_2$ , および  $\alpha_1, \alpha_2$  の大小関係の如何にかかわらず任意の組み合わせに対して適用できる.)  $P$  が正の場合, はく離端で上下のほりのたわみが 0 であるという条件を課すとこの場合のたわみ曲線は以下の式となる.

$$w_1 = (M_1 + F_1) \{ (\cos k_1 x / \cos k_1 c) - 1 \} / P \quad (27)$$

$$w_2 = (M_2 + F_2) \{ -(\cosh k_2 x / \cosh k_2 c) + 1 \} / P \quad (28)$$

ここで,

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{P}{D_1}}, \quad F_1 = \frac{\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2 B_C \eta (T_1 - T_2)}{12(1 + B_C)(1 + \eta)} \\ k_2 &= \sqrt{\frac{P}{D_2}}, \quad F_2 = \frac{\bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2 B_C (T_1 - T_2)}{12(1 + B_C)(1 + \eta)} \quad (29) \end{aligned}$$

また, 材端モーメント  $M_1, M_2$  は, はく離端での上下の

はりの傾きが等しいという境界条件から決定され, 次のようになる.

$$M_1 = \frac{(F_2 + Ph/2) k_2 \tanh k_2 c - F_1 k_1 \tan k_1 c}{k_1 \tan k_1 c + k_2 \tanh k_2 c} \quad (30)$$

$$M_2 = \frac{(F_1 + Ph/2) k_1 \tan k_1 c - F_2 k_2 \tanh k_2 c}{k_1 \tan k_1 c + k_2 \tanh k_2 c} \quad (31)$$

ここで,  $h = h_1 + h_2$ .

次に上下のほりにおける変位の適合条件より, 軸力  $P$  に関する方程式を求める.  $x = c$  における上下のほりの伸びは, 式 (17), (19) より,

$$u_{01}(c) = -\frac{Pc}{\bar{E}_1 h_1} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_1 c (T_1 + T_A) \quad (32)$$

$$u_{02}(c) = \frac{Pc}{\bar{E}_2 h_2} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_2 c (T_B + T_2) \quad (33)$$

変形前に中立軸に垂直であった断面は変形後も垂直関係を保つという条件より以下の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} u_1(c) - u_2(c) - \frac{1}{2} \left[ \int_0^c \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx - \int_0^c \left( \frac{dw_2}{dx} \right)^2 dx \right] \\ = -\frac{h}{2} \frac{dw_1}{dx} \Big|_{x=c} \quad (34) \end{aligned}$$

積分は容易に実行できる. 式 (34) は未知数  $P$  に対する非線形方程式であり, 解は数値的に求める必要がある. 具体的な解析は次節で行う.

### 2・3 接触解

次に, はく離面上下のほりは互いに接触しており, したがって上下のほりのたわみは等しいと仮定した場合を考える. Fig. 2 (b) のモデルにおいてははく離部分の上下のほりに相互接触力  $q(x)$  が働くと仮定し, また  $w_1 = w_2 = w$  という条件を課す. 式 (23), (24) に分布接触力による項を付け加えると式 (16), (18) より

$$\begin{aligned} M_1 + Pw(x) + (x+c)Q - \int_c^x q(x')(x'-x)dx' \\ = -D_1 \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{\bar{E}_1 \alpha_1 h_1^2}{12} (T_1 - T_A) \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 - Pw(x) - (x+c)Q + \int_c^x q(x')(x'-x)dx' \\ = -D_2 \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{\bar{E}_2 \alpha_2 h_2^2}{12} (T_B - T_2) \quad (36) \end{aligned}$$

ここで  $Q$  は Fig. 2 (b) における左端に作用するせん断力である.

式 (35), (36) を足し合わせ, 式 (22) を用いることにより

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{6Ph + \bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2 (T_1 - T_A) + \bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2 (T_B - T_2)}{12D} \quad (37)$$

ここで  $D = D_1 + D_2$  である.

以上の結果を用いて軸力  $P$  を求める. はく離面上下のひずみは等しいという条件と, 式 (13) より

$$\frac{h}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{du_{02}}{dx} - \frac{du_{01}}{dx} \quad (38)$$

さらに, 式 (17), (19) より

$$\frac{du_{01}}{dx} = -\frac{P}{\bar{E}_1 h_1} - \frac{\bar{\alpha}_1}{2} (T_1 + T_A) \quad (39)$$

$$\frac{du_{02}}{dx} = \frac{P}{\bar{E}_2 h_2} + \frac{\bar{\alpha}_2}{2} (T_B + T_2) \quad (40)$$

式 (37), (39), (40) を式 (38) に代入することで軸力  $P$  は以下のように求められる。

$$P = - \frac{[\bar{\alpha}_2(T_B + T_2) - \bar{\alpha}_1(T_1 + T_A) + h\bar{M}/D]}{2(1/\bar{E}_1 h_1 + 1/\bar{E}_2 h_2 + h/4D)} \quad (41)$$

ここで

$$\bar{M} = [\bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2 (T_1 - T_A) + \bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2 (T_B - T_2)] / 12 \quad (42)$$

はく離部分中央ではたわみ角が 0, はく離端でたわみは 0 という条件を課すと, たわみは,

$$w(x) = - \frac{x^2 - c^2}{2D} \left( \frac{Ph}{2} + \bar{M} \right) \quad (43)$$

また, 式 (35), (36) に式 (37), (41), (43) を代入するとモーメントは以下のように求められる。

$$M_1 = \frac{D_1}{D} \left( \frac{Ph}{2} + \bar{M} \right) - \bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1^2 (T_1 - T_A) / 12 \quad (44)$$

$$M_2 = \frac{D_2}{D} \left( \frac{Ph}{2} + \bar{M} \right) - \bar{E}_2 \bar{\alpha}_2 h_2^2 (T_B - T_2) / 12 \quad (45)$$

接触力分布  $q(x)$  は式 (35) より以下のように得られる。

$$q(x) = - \frac{P}{D} \left( \frac{Ph}{2} + \bar{M} \right) \quad (46)$$

$q(x)$  は一定値となるが, その符号は  $P$  の大きさによって変化する。一方, 相互接触に対しては  $q > 0$  が成り立っていないといけない。式 (46) よりこの条件を満足させる  $P$  の範囲, 言い換えれば接触モデルが妥当である  $P$  の範囲が導かれる。なお, 等温変化の場合 ( $T_1 = T_2 = T_A = T_B$ ) は  $\bar{M} = 0$  となり,  $P$  の符号にかかわらず  $q$  は常に負である。このことから, 一般的にはく離面の非接触を仮定した解析が必要であることがわかる。

なお, 文献 5) において示されているように, 接着部分のたわみの方程式は以下のように与えられている。

$$D' \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_3 \quad (47)$$

ここで,  $D'$  は接着部分の曲げ剛性であり, 構成する上下各はりの曲げ剛性と以下の関係がある。

$$D' = D_1 + D_2 + h^2 D_0 / 4 \quad (48)$$

ここで

$$D_0 = \left( 1/(\bar{E}_1 h_1) + 1/(\bar{E}_2 h_2) \right)^{-1} \quad (49)$$

$M_3$  の定義は次節の式 (60) および (62) ~ (64) に与えられている。

式 (48) を利用することにより, はく離面間に温度ギャップがない場合は式 (37) と式 (47) は一致すること, すなわちはく離部分と接着部分のそれぞれのたわみ曲線の曲率半径は同一であり, たわみ曲線ははく離長さによらないことを確かめることができる。この場合, はりのひずみエネルギーははく離進展によらず一定となり, エネルギー解放率は 0, すなわち温度こう配によるはく離進展は生じない, という結論が導かれる。より正確な証明は 4 節に与えられる。

### 3 数値解析例

Fig. 1 に示すモデルにおいて, はりの長さを  $L = 200$  mm, はく離長さを  $2c = 100$  mm, 上のはりの厚さ  $h_1 = 1.0$  mm, 下のはりの厚さ  $h_2 = 10.0$  mm, 幅  $b = 1 \times 10^3$

mm とする。材料として上層にジルコニア ( $ZrO_2$ ) を想定しヤング率を  $E_1 = 168.58$  GPa, 熱膨張係数を  $\alpha_1 = 11.50 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , 熱伝導率  $\lambda_1 = 0.017$  W/(m · K), ポアソン比  $\nu_1 = 0.32$  とした。また下層に SUS304 を想定しヤング率を  $E_2 = 196.13$  GPa, 熱膨張係数を  $\alpha_2 = 17.10 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , 熱伝導率  $\lambda_2 = 16.0$  W/(m · K), ポアソン比  $\nu_2 = 0.29$  とした。方程式 (34) は変形すると以下のように書ける。

$$F(P) = - \frac{1}{2} \left[ \int_0^c \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2 dx - \int_0^c \left( \frac{dw_2}{dx} \right)^2 dx \right] + u_1(c) - u_2(c) + \frac{H}{2} \left. \frac{dw_1}{dx} \right|_{x=c} = 0 \quad (50)$$

ここで, 横軸に  $P$ , 縦軸に  $F(P)$  をとりプロットすると, 横軸と  $F(P)$  の交点が  $P$  の数値解となる。

Fig. 3 に, ビオ数  $Bc = 0$ ,  $T_1 = 200^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$  の場合に対する  $F(P)$  のプロットを示す。この例では三つの解が存在していることがわかる。 $P$  の小さい方から順に  $P_{(1)}$ ,  $P_{(2)}$ ,  $P_{(3)}$  とする。次に真の解を求めるため, それぞれの解に対応するはく離部分のたわみ曲線を求めた。解  $P_{(2)}$ ,  $P_{(3)}$  に対応するたわみ曲線は上層と下層の位置関係が逆転しそれぞれ不適切な解であることがわかった。一方, 解  $P_{(1)}$  に対応するたわみ曲線は前述のような矛盾を含まない, すなわち  $F(P) = 0$  の最小の解が我々の求めているたわみ曲線に対応する解であることがわかる。Fig. 4 に  $P_{(1)}$  に対応するたわみ曲線を示す。(この図において上層は座屈を起こしていることがわかる。)

このようにして得られる軸力  $P$ , およびこれから計算

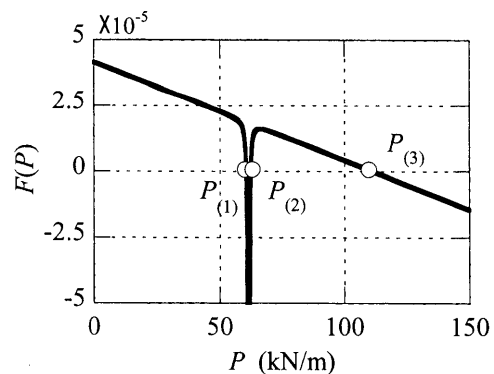


Fig. 3. Plot of the function  $F(P)$ . ( $Bc = 0$ ,  $T_1 = 200^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$ )

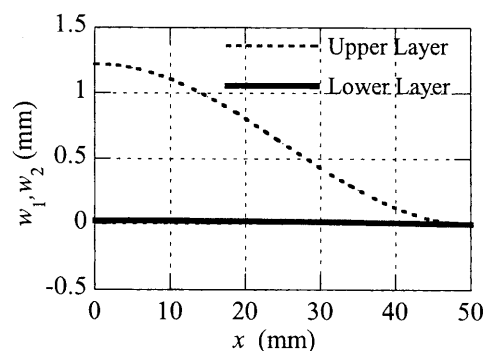


Fig. 4. Deflection curves corresponding to  $P_{(1)}$ . ( $Bc = 0$ ,  $T_1 = 200^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$ )

された上層と下層の中心におけるたわみの差  $dw$  ( $= w_1 - w_2, x = 0$ ) と上層上面の温度  $T_1$  の関係を Fig. 5 に示す。

この図では軸力  $P$  に関しては  $Bc = 0$  に対応している場合を, たわみの差  $dw$  に関しては  $Bc = 0, 2, 8$  に対応している場合をプロットしている。  $Bc = 0$  の場合に着目してみると, 軸力  $P$  は上層上面温度  $T_1$  がある温度になるまではほぼ直線的に増加していくが, それ以上の温度になるとほぼ一定の値となるのがわかる。 またこの場合のたわみの差  $dw$  は上面温度  $T_1$  が  $P$  が一定となる温度以下では小さいが,  $T_1$  がそれ以上の温度になると急激に大きくなるのがわかる。 すなわち上層の座屈が生じていることがわかる。

次に  $Bc$  の影響を調べるため, たわみの差についてみると,  $Bc$  が大きいほど座屈が生じる上面温度  $T_1$  が大きくなっていることがわかる。 言い換えると同じ温度条件に対し  $Bc$  が小さくなるほど上層と下層の温度ギャップが大きくなり, これに伴って軸力  $P$  も増大し座屈しやすくなっていることがわかる。

次に Fig. 6 に, 接触モデルによるはく離部分における相互接触力  $q$  (式 (46)), 接触時, 非接触時の軸力  $P$  と上層上面温度  $T_1$  の関係の計算例を示す。 モデル材は非接触モデルと同じとし,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$  とする。 はく離部分が接触している場合は  $T_A = T_B$  と考えていいので  $Bc$  を無限大 (実際の計算では  $Bc = 10000$ ) とする。 Fig. 6 (a) に示すように, モデル材については,  $q > 0$  となるのは  $183^\circ\text{C} < T_1 < 194^\circ\text{C}$  の小さな領域のみで (この領域で  $P$  は負の小さな値となる), それ以外では  $q \leq 0$ , すなわち接触が生じないことを意味している。  $P$  については, Fig. 6 (a), (b) から座屈が生じない範囲では接触モデルと非接触モデルの値は非常に近いことがわかる。 すなわち, 座屈する場合を除けば, 式 (41) は開口モデルについての  $P$  の良好な近似値を与える。

次に Fig. 6 で得られた  $P$  の値を用いて求めたたわみを Fig. 7 に示す。 図では,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$  と固定し,  $T_1 = -100^\circ\text{C}$ ,  $193^\circ\text{C}$  ( $P = 0$  に対応),  $300^\circ\text{C}$  の 3 通りの場合についてははく離部分 ( $0 \leq x \leq 50$  (mm)) および接着部分 ( $50 \leq x \leq 100$  (mm)) のたわみを計算した。 予想されるように,  $P = 0$  となる温度条件ではりのたわみは 0 になっている。 また,  $T_1 = -100^\circ\text{C}$  に対しては, 下に凸の曲げにはなっ

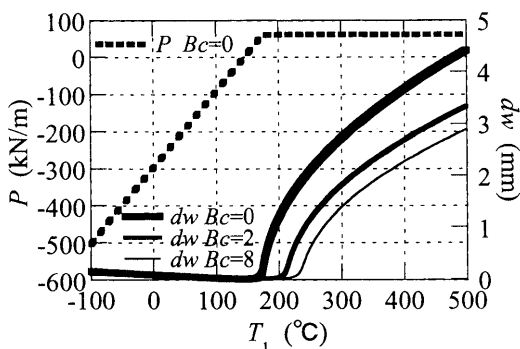
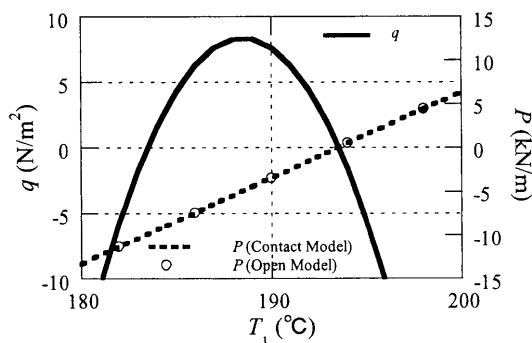
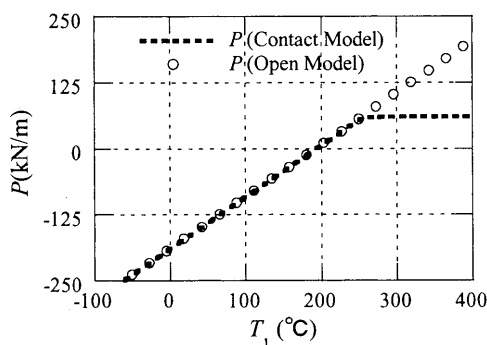


Fig. 5. Variations of  $P$  and  $dw$  with  $T_1$ . ( $Bc = 0, T_2 = 100^\circ\text{C}$ )



(a)  $q$  and  $P$



(b)  $P$

Fig. 6. Variations of  $q$  and  $P$  with  $T_1$ . ( $Bc = 10000, T_2 = 100^\circ\text{C}$ )

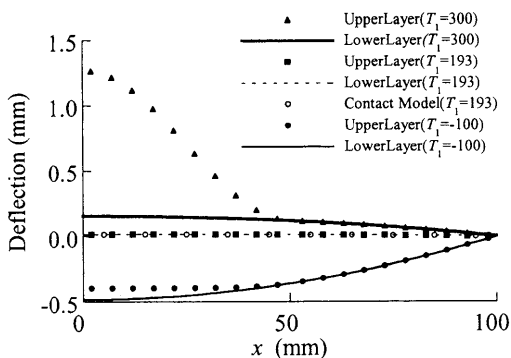


Fig. 7. Deflection curves. (open and contact model) ( $Bc = 10000, T_2 = 100^\circ\text{C}$ )

ているが, 下のはりの曲げ剛性が上のはりのそれよりずっと大きいことを反映して, 座屈は生じていない。

#### 4 エネルギー解放率

Suo および Hutchinson<sup>8)</sup> は Fig. 8 に示す一般の負荷を受ける単位幅の積層はり中の界面クラックについて, 2次元弾性論に基づく解析を行った。クラック端近傍での特異応力分布を特徴づけるモード I, およびモード II 応力拡大係数は以下のように与えられる。

$$K_{\text{I}} = \frac{\dot{p}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{P_0}{\sqrt{A_0 h_0}} \cos \omega + \frac{M_0}{\sqrt{I h_1^3}} \sin(\omega + \gamma) \right] \quad (51)$$

$$K_{\text{II}} = \frac{\dot{p}}{\sqrt{2}} \left[ \frac{P_0}{\sqrt{A_0 h_1}} \sin \omega - \frac{M_0}{\sqrt{I h_1^3}} \cos(\omega + \gamma) \right] \quad (52)$$

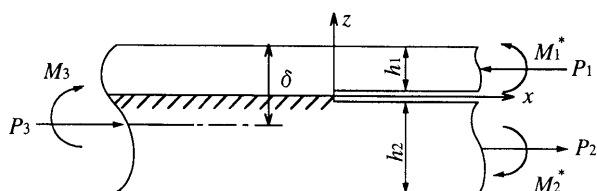


Fig. 8. Split-beam element under general loading condition.

ここで,

$$P_0 = P_1 - C_1 P_3 - C_2 M_3 / h_1 \quad (53)$$

$$M_0 = M_1 - C_3 M_3 \quad (54)$$

また, 定数  $p$ ,  $A_0$ ,  $I$ ,  $\gamma$  および  $C_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) は本論文の記号を用いると以下のように定義される.<sup>9)</sup>

$$P = \sqrt{\frac{1-\alpha^*}{1-\beta^{*2}}}$$

$$A_0 = \frac{D_0 D_2}{E_1 h_1 (D' - D_1)}, \quad I = \frac{D_2}{12D}, \quad \gamma = \sin^{-1} \sqrt{\frac{(D' - D) D_1}{(D' - D_1) D}} \quad (55)$$

ここで

$$\alpha^* = \frac{\Gamma(\kappa_2 + 1) - (\kappa_1 + 1)}{\Gamma(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)}, \quad \beta^* = \frac{\Gamma(\kappa_2 - 1) - (\kappa_1 - 1)}{\Gamma(\kappa_2 + 1) + (\kappa_1 + 1)} \quad (56)$$

$$C_1 = \frac{D_0}{E_2 h_2}, \quad C_2 = \frac{h_1 h D_0}{2D'}, \quad C_3 = \frac{D_1}{D'} \quad (57)$$

ただし

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad \Gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \kappa_i = 3 - 4\nu_i \quad (\text{平面ひずみ}) \quad (58)$$

また  $\omega$  は比  $\eta^* = h_1/h_2$  および Dundurs のパラメータ  $\alpha^*$  および  $\beta^*$  のみ依存する角度であり, 文献 8) に与えられている.

ただし, 接着部分には外部荷重が一切作用していなくても内部応力が発生していて, はく離端部近傍は特異応力場となっており, き裂進展によりエネルギーは解放されることを考慮する必要がある. そこで最初に外力が作用しない状態における接着部分を Fig. 8 に示す力学系に置き換えておかななくてはならない. 端部にはく離を有する積層はりが, 本論文と同じ温度条件のもとにおかれるときの等価な力の系を求める手順 (カットアンドペースト法<sup>7)</sup>) は文献 5) に詳述されている. 等価な力の系は Fig. 8 において,

$$M_1^* = -\bar{\alpha}_1 \bar{E}_1 h_1^2 (T_1 - T_0) / 12 \quad (59)$$

$$M_3 = -\frac{1}{12(1+\eta)S} \{ R(T_1 - T_2) + 3\bar{E}_1 \bar{E}_2 h_1 h_2 [(Ah_1 + Ch_2)T_1 - (Bh_1 + \eta Dh_2)T_2] \} \quad (60)$$

$$P_1 = -h_1 [\bar{\alpha}_1 \bar{E}_1 (T_1 - T_0) - 2E_U] / 2, \quad P_3 = 0 \quad (61)$$

ここで,

$$R = \eta \bar{\alpha}_1 \bar{E}_1^2 h_1^3 + 4\eta \bar{\alpha}_1 \bar{E}_1 \bar{E}_2 h_1^2 h_2 + 4\bar{\alpha}_2 \bar{E}_1 \bar{E}_2 h_1 h_2^2 + \bar{\alpha}_2 \bar{E}_2^2 h_2^3 \quad (62)$$

$$S = \bar{E}_1 h_1 + \bar{E}_2 h_2 \quad (63)$$

$$A = 2\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2, \quad B = -2\eta \bar{\alpha}_1 + (1 + 2\eta) \bar{\alpha}_2 \quad (64)$$

$$C = (2 + \eta) \bar{\alpha}_1 - 2\bar{\alpha}_2, \quad D = 2\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1$$

$$E_U = \frac{\bar{E}_1}{2(\bar{E}_1 h_1 + \bar{E}_2 h_2)} [(T_1 - T_0) \bar{E}_1 \bar{\alpha}_1 h_1 - (T_0 \bar{\alpha}_1 - T_2 \bar{\alpha}_2) \bar{E}_2 h_2 - (\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2) T_0 \bar{E}_2 h_2] \quad (65)$$

(ただし, この力の系はビオ数が無限大のときにのみ正確であって, 温度ギャップがある場合には近似的なものとなる.<sup>5)</sup>) 以上より, 現モデルに対しては, Fig. 8 に示される諸量は以下のように与えられる. ( $M_3$  は式 (60) の  $M_3$  の符号を変えたもので与えられる.)

$$P_1 = P - h_1 [\bar{\alpha}_1 \bar{E}_1 (T_1 - T_0) - 2E_U] / 2, \quad P_3 = 0 \quad (66)$$

$$M_1^* = -M_1 - \bar{\alpha}_1 \bar{E}_1 h_1^2 (T_1 - T_0) / 12 \quad (67)$$

ここで, 非接触モデルについては, 式 (66) の  $P$  は前節で求めた軸力  $P$  の数値解を意味し, また式 (67) の  $M_1$  は, 前節で求めた  $M_1$  (式 (30)) を意味する.

クラックの微小進展距離  $\Delta a$  に際し解放されるエネルギーは Toya<sup>10)</sup> により計算された. モード I とモード II の各成分は以下のように与えられる.

$$G_I^A = (G/2) [1 + F(\varepsilon) \cos(2\varepsilon a' + \varphi(\varepsilon) + \theta_0)] \Delta a \quad (68)$$

$$G_{II}^A = (G/2) [1 - F(\varepsilon) \cos(2\varepsilon a' + \varphi(\varepsilon) + \theta_0)] \Delta a \quad (69)$$

ここで

$$F(\varepsilon) = \left[ \frac{\sinh(2\pi\varepsilon)}{2\pi\varepsilon(1+4\varepsilon^2)} \right]^{1/2} \quad (70)$$

$$a' = \ln[\Delta a / 2h_1] \quad (71)$$

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{1+n} - \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}+n} \right) \quad (72)$$

$$\theta_0 = \cos^{-1} \frac{1 - k^2 + 4\varepsilon k}{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2(1 + k^2)}} \quad (73)$$

$$k = K_{II} / K_I \quad (74)$$

$\omega$  の値はすでに計算されて表にまとめられており,  $|\varepsilon| < 0.05$  の範囲では以下の式が使用できる.

$$\varphi(\varepsilon) = -2\varepsilon \ln 2 = -1.3863\varepsilon \quad (75)$$

また, 全エネルギー解放率は

$$G = \left( \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right) (\kappa_I^2 + \kappa_{II}^2) / [16 \cosh^2(\pi\varepsilon)] \quad (76)$$

である. 従来のエネルギー解放率の定義  $\lim_{\Delta a \rightarrow \infty} G_I^A / \Delta a$  等に従って界面クラックのエネルギー解放率の成分を定義しようとしても, 極限值が存在しないので不可能である. それゆえ, 界面クラックのエネルギー解放率の各成分は有限な進展距離  $\Delta a$  に対して

$$G_I \equiv G_I^A / \Delta a, \quad G_{II} \equiv G_{II}^A / \Delta a \quad (77)$$

として定義する必要がある.

まず, はく離部分が接触している場合を考える. 式 (41), (44) からエネルギー解放率ははく離長さ  $c$  に依存しないことがわかる. また  $Bc$  数を無限大すなわち  $T_A =$

$T_B = T_0$ として式(41)を式(66)に代入し, この結果を式(53)に代入することで $P_0 = 0$ が得られる. また式(44)を式(67)に用い, この結果を式(54)に代入することで $M_0 = 0$ が得られる. 結局式(51), (52)よりはく離部分が接触して, 接触面間に温度ギャップがない場合にはエネルギー解放率は常に零であることが示される.

次にはく離部分が非接触の場合を考える. はりの材質, 寸法は同じものを用い, 温度条件を $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ とする. またクラックの微小進展距離を $\Delta a = 0.1\text{mm}$ とする. 式(51), (52), (69), (70), (76)を用いてエネルギー解放率とその成分 $G$ ,  $G_I$ ,  $G_{II}$ を計算した. Fig. 9に $Bc = 8$ におけるエネルギー解放率およびたわみの差 $dw$ とき裂長さ $c$ の関係を示す. この図からき裂長さ $c$ が小さいとき $G$ はほぼ0であるが, 座屈が生じると $G$ が急激に増大することがわかる. Fig. 10はFig. 9と同様であるが $G$ に対する $G_I$ ,  $G_{II}$ の比とき裂長さ $c$ との関係の詳細を示したものである. この図は, 座屈が生じるまでは, き裂長さが小さいときは $G$ に対する $G_{II}$ の比率は大きい, き裂が長くなるにつれ $G_I$ の比率が増大し( $G_{II}$ の比率は減少), 座屈が生じる瞬間では開口成分のみになることを示している. しかし座屈後はクラック長さの増大に伴い,  $G_I$ の比率が減少し, 逆に $G_{II}$ の比率は増大してせん断成分が支配的になっている.

最後にビオ数 $Bc$ の影響をみるためFig. 11に $Bc = 1, 2, 4, 8$ に対応するエネルギー解放率 $G$ とき裂長さ $c$ の関係を示す. 座屈が生じる前では $G$ は $c$ によらずほぼ一定であるが, その値は $Bc$ が小さいほど大きい. この傾

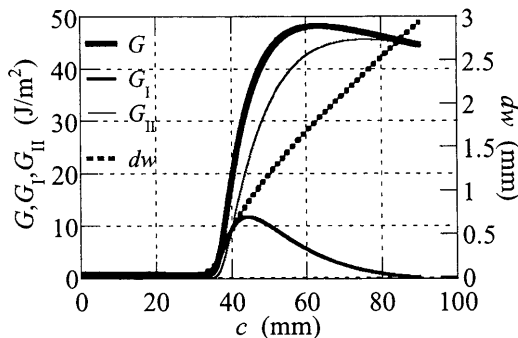


Fig. 9. Variation of the energy release rate with crack length. ( $B_c = 8$ ,  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ )

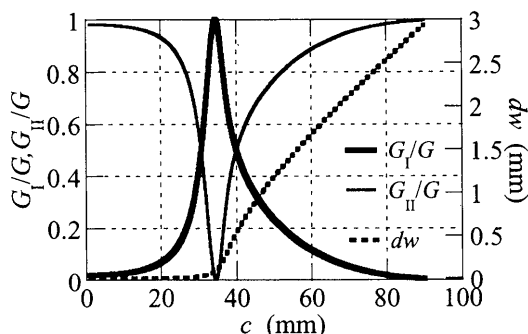


Fig. 10. Variation of  $G_I/G$ ,  $G_{II}/G$  and  $dw$  with  $c$ . ( $B_c = 8$ ,  $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ )

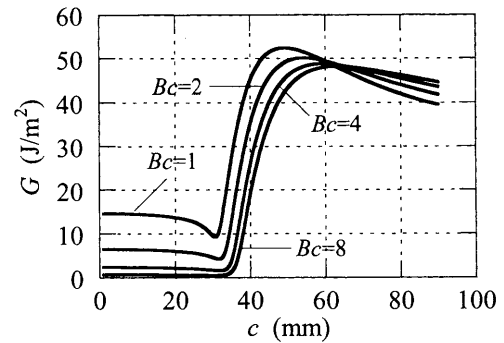


Fig. 11. Variation of  $G$  with  $c$  corresponding to  $Bc = 1, 2, 4, 8$ . ( $T_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ )

向は均質積層はりに対する Hutchinson らの結果<sup>4)</sup>と一致している. それぞれの $Bc$ に対して座屈後はき裂長さ $c$ の増大に伴って $G$ は増大し, 極大値を取った後減少に転じている. また $Bc$ が大きくなるにつれ座屈が生じる $c$ の値が大きくなっていることも確認できる. これはFig. 6における現象と同様,  $Bc$ が大きくなるにつれ温度ギャップが小さくなり, 上層に誘起される圧縮軸力が小さくなるからである. なお, エネルギー解放率が極大値を持つということは直感的には理解しがたい. ただし, 極大値をとる領域以上の $c$ に対しては, 温度条件が臨界座屈条件からかなりはなれており, この領域では本来はりの大変形理論をもとに計算すべきであると考えられる.

元々, 等価な力の系, 式(59)~(61)は $Bc > 8$ 程度の範囲でのみ近似的に正確(誤差が15%程度以内)であるという制約がある<sup>5)</sup>ので, Fig. 9, 10, 11の結果は定量的に正確なものではない. また, 前述したように座屈後のはりの変形挙動は, はりのたわみ理論に基づいて解析するのが正統的である. このような課題は残るものの, 本研究により熱負荷を受ける積層はりのはく離進展の全体像はある程度明らかになったと云えよう.

## 5 結 言

微小たわみはり理論を基礎に, 中央にはく離を有する積層はりの温度こう配による変形の解析を行った.

はく離部分を非接触と仮定したモデルの解析は未知の軸力に対する非線形方程式の解を求める問題に帰着される. たわみの解析により温度変化が大きくなるとはく離部分は座屈を起こすことがわかった. 一方はく離部分が接触すると仮定したモデルでは, 軸力は解析的に求められる. しかしながら軸力が負の小さな値を取る場合のみはく離部分が接触するという条件を満足することがわかった. 言い換えると, はりのたわみが極めて小さな場合を除いて, 常にはく離面は開口していることがわかった. ついでにはく離の進展挙動を調べるためにエネルギー解放率を計算した. はく離部分が接触し, はく離面間で温度が連続のときはエネルギー解放率は温度条件, はく離長さによらず常に0であることがわかった. 一方はく離部分が非接触であると仮定した場合, エネルギー解放率は, 温度条件を一定に保つとき, あるき裂長さまではく離面間で座屈

を起こし、エネルギー解放率はき裂長さとともに増大する。したがって、ある温度条件の下ではく離が進展を開始するとき、界面の破壊靱性値が一定であれば、それは座屈が生じることによって不安定に進展することが予想される。

最後に、本研究は文部科学省科学研究費補助金 [基盤研究 (C) (2) 14550083] の援助を受けて実施されたことを付記し、謝意を表す。また、計算および図の作製を手伝っていただいた前田義和技官に謝意を表す。

#### 参 考 文 献

- 1) J. W. Hutchinson and Z. Suo, *Advances in Applied Mechanics*, **29**, 63 (1992).
- 2) 結城良治編, “界面の力学”, 3 章 (1993) 培風館.
- 3) M. Toya, T. Miyawaki and K. Kirioka (T. Hashiguchi 編), *Proc. 18th Int. Symp. on Space Tech. and Sci.*, 527 (1992).
- 4) J. W. Hutchinson and T. J. Lu, *Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol.*, **117**, 386 (1995).
- 5) 戸谷眞之, 小田美紀男, ララック・インディオノ, 有富正男, *日本機械学会論文集*, **A-66**, 1362 (2000).
- 6) T. Saitoh, H. Matsuyama and M. Toya, *IEEE, Trans. on CPMT, Part B*, **21**, 422 (1998).
- 7) たとえば, 須藤 一著, “残留応力とゆがみ”, p.165 (1988) 内田老鶴園.
- 8) Z. Suo and J.W. Hutchinson, *Int. J. Frac.*, **43**, 1 (1990).
- 9) M. Toya, M. Aritomi and A. Chosa, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **64**, 375 (1997).
- 10) M. Toya, *Int. J. Frac.*, **56**, 345 (1992).