

# 電圧形 PWM インバータ駆動永久磁石同期電動機の定常解析

篠原勝次・山本吉朗・実成義孝・入佐俊幸  
(受理 昭和63年5月31日)

## STEADY STATE ANALYSIS OF AN INTERIOR PERMANENT-MAGNET SYNCHRONOUS MOTOR DRIVEN BY A PWM VOLTAGE SOURCE INVERTER

Katsuji SHINOHARA, Kichiro YAMAMOTO, Yoshitaka MINARI  
and Toshiyuki IRISA

Interior Permanent-Magnet motors fed from inverters are becoming increasingly attractive in a wide variety of speed control applications of low and medium power range.

In this paper, steady state analysis is computed by the state-variable method. Consequently, the following results were found:

- (1) Alternating-current components of d and q stator axes correspond to alternating components of d and q stator voltages which are changed by the PWM pattern.
- (2) Directions of d and q dumper currents are opposite those of d and q stator currents.

### 1. まえがき

近年、半導体素子の発達に伴い AC 可変速システムの高性能化が進んでおり、誘導電動機、同期電動機共にベクトル制御を始めとする様々な高速応答制御が行われている<sup>(1)(2)</sup>。またトルクリプルや騒音の低減の為に PWM 方式を用い、より高速なスイッチングによりその電流波形を正弦波に近づけようとする試みがなされている。このような状況にあって永久磁石同期電動機は可変速駆動に用いた場合、誘導機と比べ一般にかなり効率がよく、磁性材料の高性能化とあいまって今後その応用は一層拡大されると思われる。

筆者らは先に PWM インバータを用いて永久磁石同期電動機のベクトル制御システムを試作し、その実験結果とシミュレーション結果についての比較を行った<sup>(3)</sup>。解析において、電流は PWM 時のリップルを含んだ波形ではなくその基本波成分についてのみ考慮した。今回はこの実験回路における同期電動機の定常時の電流波形についてより厳密にその解析を行った。本稿では、まずこの実験回路の回路動作の説明を行った後、解析に用いた状態方程式を導出し、さらに数値計算結果について検討を行う。

### 2. 回路動作

図1に実験回路の構成図を示す。このシステムは、(1)式で示されるように速度指令値  $\omega_r^*$  とインクリメンタルエンコーダ (600パルス/回転) によって検出される実速度  $\omega_r$  との偏差を P 増幅してトルク指令  $T^*$  とし、さらに(2)式により電流指令  $i^*$  を決定している。

$$T^* = K_p(\omega_r^* - \omega_r) \dots\dots\dots (1)$$

$$i^* = \frac{T^*}{K_T} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $K_p$ : 比例ゲイン  
 $K_T$ : トルク定数

この  $i^*$  に回転子位置に同期した 3 相正弦波を乗じて各相の電流指令  $i_u^*$ ,  $i_v^*$ ,  $i_w^*$  を得る。正弦波はアブソリュートエンコーダ (8ビット) を用い、回転子の磁極位置と対応した EP-ROM のアドレスより正弦波データを読み出し、これを DA 変換して作られる。 $i_u^*$ ,  $i_v^*$ ,  $i_w^*$  は回転子速度と同じ周波数を持ち、回転子上の d 軸と常に一定の位相関係を保った信号となるため、必要とされるトルクに応じて  $i^*$  つまり相電流指令の振幅のみを制御すればよい。次段の電流制御回路では、電流指令  $i_u^*$ ,  $i_v^*$ ,  $i_w^*$  と絶縁アンプを



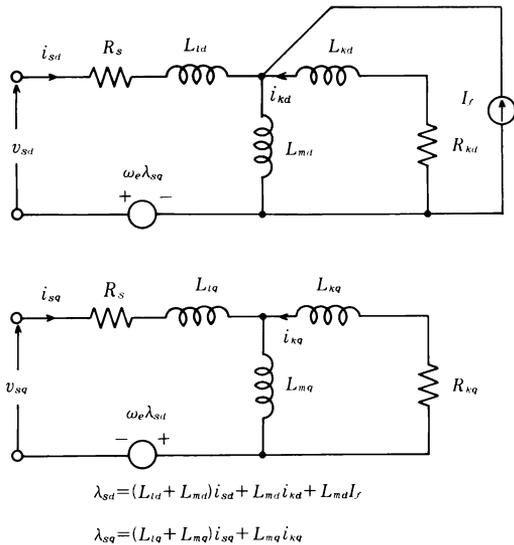


図2 回転座標系における永久磁石同期電動機の等価回路

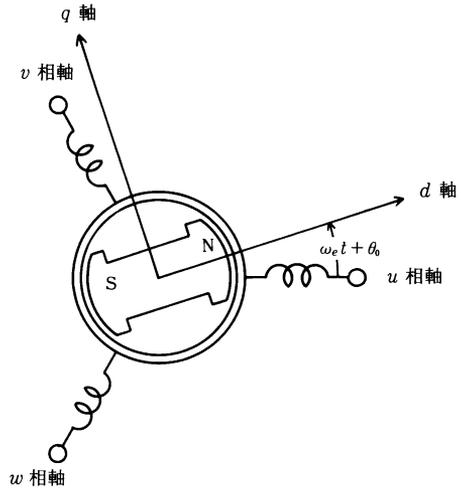


図3 u, v, w 相軸と d-q 軸との関係

が ON, v 相の下側アームの FET が ON, w 相の上側アームの FET が ON, つまり  $v_u = \frac{E_D}{2}$ ,  $v_v = -\frac{E_D}{2}$ ,  $v_w = \frac{E_D}{2}$  の状態を示している。この電気角  $0^\circ \sim 60^\circ$  の期間においてはインバータは  $V_7, V_6, V_5, V_1, V_0$  のモードをとり, このときの  $v_{sd}, v_{sq}$  は次のようになる。

$V_7, V_0$  モードのとき

$$\begin{cases} v_{sd} = 0 \\ v_{sq} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

$V_6$  モードのとき

$$\begin{cases} v_{sd} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_D \sin(\omega_e t - 90^\circ) \\ v_{sq} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_D \cos(\omega_e t - 90^\circ) \end{cases} \dots\dots\dots (5)$$

$V_5$  モードのとき

$$\begin{cases} v_{sd} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_D \sin(\omega_e t + 30^\circ) \\ v_{sq} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_D \cos(\omega_e t + 30^\circ) \end{cases} \dots\dots\dots (6)$$

$V_1$  モードのとき

$$\begin{cases} v_{sd} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_D \sin(\omega_e t - 30^\circ) \\ v_{sq} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_D \cos(\omega_e t - 30^\circ) \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

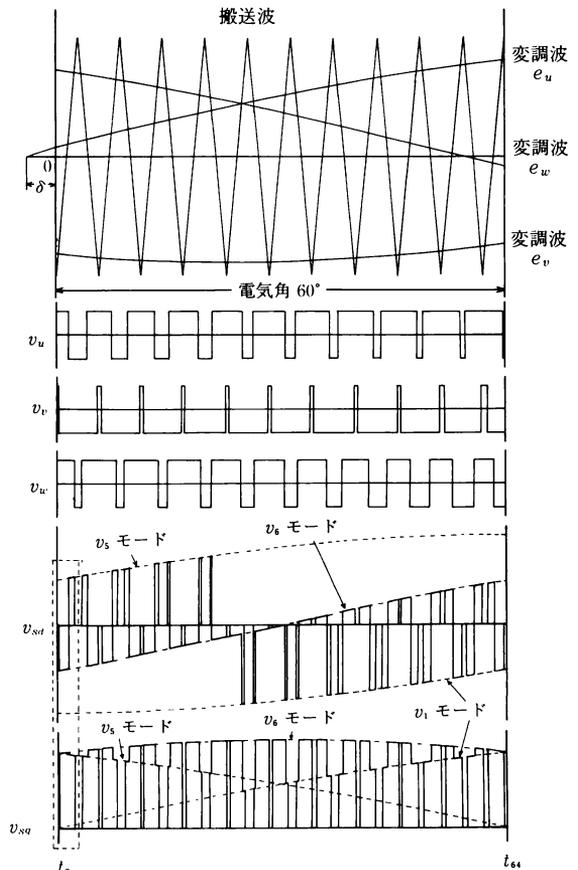


図4 パルス幅制御電圧の d-q 変換 ( $\delta = 5.2^\circ$ )

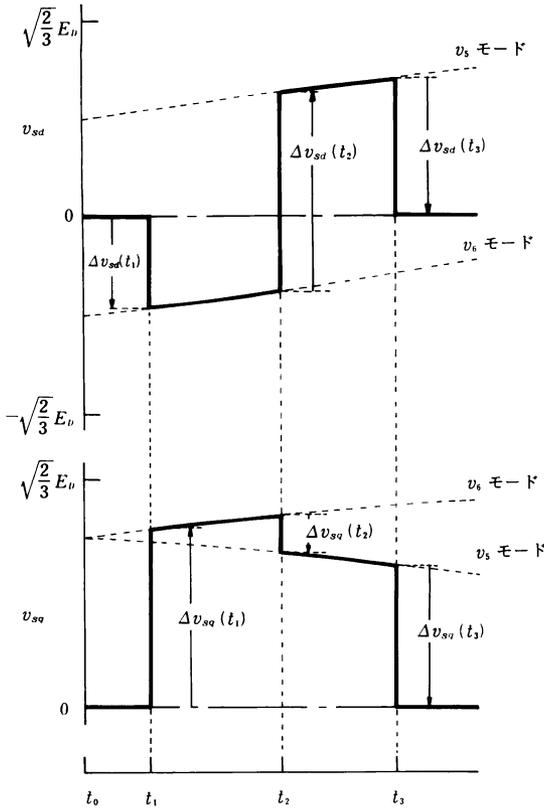


図5  $v_{sa}, v_{sq}$  の変化

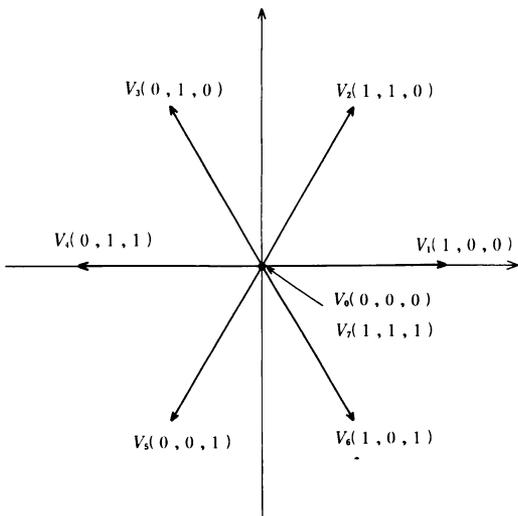


図6 電圧ベクトル

$v_{sa}, v_{sq}$  は上式からわかるように  $V_7, V_0$  のモード以外は、どのモードでも次のような形をとる。

$$\begin{cases} v_{sa} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_b \sin(\omega_e t + \varphi) \\ v_{sq} = \sqrt{\frac{2}{3}} E_b \cos(\omega_e t + \varphi) \end{cases}$$

これより  $V_7, V_0$  モード以外については微分演算子を  $p$  とすると以下のような関係が成立する。

$$\begin{cases} p v_{sa} = \omega_e v_{sq} \\ p v_{sq} = -\omega_e v_{sa} \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

変調波が 10(Hz), 三角波が 630(Hz) のときには  $v_{sa}, v_{sq}$  のモード変化は電気角  $60^\circ$  の区間で 63 回存在する。ここで、

$$x = [v_{sa}, v_{sq}, I_f, i_{sd}, i_{sq}, i_{kd}, i_{kq}]^T \dots (9)$$

次式で  $\Delta x_n$  を定義する。

$$\begin{aligned} \Delta x_n = & (v_{sa}(t_{n+}) - v_{sa}(t_n-), v_{sq}(t_{n+}) - v_{sq}(t_n-), 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ & \dots\dots\dots (10) \\ & n = 1, 2, 3, \dots, 63 \end{aligned}$$

### 3.3 状態方程式の導出

図2の等価回路より、永久磁石同期電動機の基本方程式は次のように表せる<sup>(7)</sup>。

$$\begin{pmatrix} v_{sa} \\ v_{sq} \\ v_{kd} \\ v_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s + p(L_{ld} + L_{md}) & -\omega_e(L_{lq} + L_{mq}) & pL_{md} \\ \omega_e(L_{ld} + L_{md}) & R_s + p(L_{lq} + L_{mq}) & \omega_e L_{md} \\ pL_{md} & 0 & R_{kd} + p(L_{kd} + L_{nd}) \\ 0 & pL_{mq} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_e L_{md} I_f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots (11)$$

かご形巻線は短絡されているので  $v_{kd} = v_{kq} = 0$  となる。(11)式を変形すると次式が得られる。

$$p \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_s(L_{kd} + L_{md})/\Delta_a & \omega_e(L_{kd} + L_{md})(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_a \\ -\omega_e(L_{ld} + L_{md})(L_{kq} + L_{nq})/\Delta_q & -R_s(L_{kq} + L_{nq})/\Delta_q \\ R_s L_{md}/\Delta_a & -\omega_e L_{md}(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_a \\ \omega_e L_{mq}(L_{ld} + L_{md})/\Delta_q & R_s L_{mq}/\Delta_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_e L_{md} L_{mq}/\Delta_q \\ -R_{kd}(L_{ld} + L_{md})/\Delta_a \\ -R_{kq}(L_{lq} + L_{md})/\Delta_q \end{pmatrix} \dots\dots (12)$$

$$\ast \begin{pmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (L_{kd} + L_{md})v_{sd}/\Delta_d \\ (L_{kq} + L_{mq})(v_{sq} - \omega_e L_{md} I_f)/\Delta_q \\ -L_{md}v_{sd}/\Delta_d \\ -L_{mq}(v_{sq} - \omega_e L_{md} I_f)/\Delta_q \end{pmatrix} \dots (12)$$

ただし,  $\Delta_d = L_{ld}L_{kd} + L_{kd}L_{md} + L_{md}L_{ld}$ ,

$$\Delta_q = L_{lq}L_{kq} + L_{kq}L_{mq} + L_{mq}L_{lq}$$

である。さらに (12) 式を変形して以下の状態方程式を作る。このとき,  $v_{sd}$ ,  $v_{sq}$  を考慮すれば  $V_7$ ,  $V_0$  以外のモードに対して, 次のようになる。

$$p \begin{pmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ I_f \\ i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_e & 0 & & & & \\ -\omega_e & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ (L_{kd} + L_{md})/\Delta_d & 0 & 0 & & & & \\ 0 & (L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & -\omega_e L_{md}(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & & & & \\ -L_{md}/\Delta_d & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -L_{mq}/\Delta_q & \omega_e L_{md}L_{mq}/\Delta_q & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \\ 0 & & 0 & & & & \end{pmatrix} \ast$$

$$\ast \begin{pmatrix} -R_s(L_{kd} + L_{md})/\Delta_d & \omega_e(L_{kd} + L_{md})(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_d & & & & & \\ -\omega_e(L_{ld} + L_{md})(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & -R_s(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & & & & & \\ R_sL_{md}/\Delta_d & -\omega_e L_{md}(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_d & & & & & \\ \omega_e L_{mq}(L_{ld} + L_{md})/\Delta_q & R_sL_{mq}/\Delta_q & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ R_{kd}L_{md}/\Delta_d & \omega_e L_{mq}(L_{kd} + L_{md})/\Delta_d & & & & & \\ -\omega_e L_{md}(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & R_{kq}L_{mq}/\Delta_q & & & & & \\ -R_{kd}(L_{ld} + L_{md})/\Delta_d & -\omega_e L_{md}L_{mq}/\Delta_d & & & & & \\ \omega_e L_{md}L_{mq}/\Delta_q & -R_{kq}(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_q & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ I_f \\ i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} \quad (13)$$

また  $V_7$ ,  $V_0$  モードに対して

$$p \begin{pmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ I_f \\ i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ (L_{kd} + L_{md})/\Delta_d & 0 & 0 & & & & \\ 0 & (L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & -\omega_e L_{md}(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & & & & \\ -L_{md}/\Delta_d & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -L_{mq}/\Delta_q & \omega_e L_{md}L_{mq}/\Delta_q & & & & \end{pmatrix} \ast$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -R_s(L_{kd} + L_{md})/\Delta_d & \omega_e(L_{kd} + L_{md})(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_d \\ -\omega_e(L_{ld} + L_{md})(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & -R_s(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q \\ R_sL_{md}/\Delta_d & -\omega_e L_{md}(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_d \\ \omega_e L_{mq}(L_{ld} + L_{md})/\Delta_q & R_sL_{mq}/\Delta_q \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_{kd}L_{md}/\Delta_d & \omega_e L_{mq}(L_{kd} + L_{md})/\Delta_d \\ -\omega_e L_{md}(L_{kq} + L_{mq})/\Delta_q & R_{kq}L_{mq}/\Delta_q \\ -R_{kd}(L_{ld} + L_{md})/\Delta_d & -\omega_e L_{md}L_{mq}/\Delta_d \\ \omega_e L_{md}L_{mq}/\Delta_q & -R_{kq}(L_{lq} + L_{mq})/\Delta_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{sd} \\ v_{sq} \\ I_f \\ i_{sd} \\ i_{sq} \\ i_{kd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} \quad (14)$$

(13), (14) 式はそれぞれ次の状態方程式を表している。

$$p\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} \quad (V_1, V_5, V_6 \text{ モードのとき}) \dots (15)$$

$$p\mathbf{x} = \mathbf{A}_2\mathbf{x} \quad (V_7, V_0 \text{ モードのとき}) \dots (16)$$

### 3.4 初期値の決定

(15) 式および (16) 式により状態推移行列を

$$\Phi_{A_1}(\Delta t_n) = \exp\{\mathbf{A}_1(\Delta t_n)\}$$

$$\Phi_{A_2}(\Delta t_n) = \exp\{\mathbf{A}_2(\Delta t_n)\}$$

と定義する。ただし  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  ( $n=1, 2, \dots$ , 64)

この状態推移行列を用いると

$t_0 \leq t < t_1$  のとき

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_{A_1}(t)\mathbf{x}(0_+) = \Phi_{A_1}\mathbf{x}(0_-) \quad [\because \mathbf{x}(0_+) = \mathbf{x}(0_-)]$$

$t = t_1$  のとき

$$\mathbf{x}(t_1) = \Delta\mathbf{x}_1 + \Phi_{A_2}(\Delta t_1)\mathbf{x}(0_-)$$

$t_1 \leq t < t_2$  のとき

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_{A_1}(t - t_1)[\Delta\mathbf{x}_1 + \Phi_{A_2}(\Delta t_1)\mathbf{x}(0_-)]$$

$t = t_2$  のとき

$$\mathbf{x}(t_2) = \Delta\mathbf{x}_2 + \Phi_{A_1}(\Delta t_2)[\Delta\mathbf{x}_1 + \Phi_{A_2}(\Delta t_1)\mathbf{x}(0_-)]$$

$\vdots$

$t = t_{64-}$  のとき

$$\mathbf{x}(t_{64-}) = \Phi_{A_2}(\Delta t_{64})[\Delta\mathbf{x}_{63} + \Phi_{A_1}(\Delta t_{63})[\dots \dots \dots [\Delta\mathbf{x}_1 + \Phi_{A_2}(\Delta t_1)\mathbf{x}(0_-)]] \dots \dots \dots]$$

$t = t_{64-}$  のときの式を変形する。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{64-}) &= \Phi_{A_2}(\Delta t_{64})\Delta\mathbf{x}_{63} \\ &+ \Phi_{A_2}(\Delta t_{64})\Phi_{A_1}(\Delta t_{63})\Delta\mathbf{x}_{62} \\ &\vdots \\ &+ \Phi_{A_2}(\Delta t_{64})\Phi_{A_1}(\Delta t_{63})\dots\Phi_{A_1}(\Delta t_2)\Delta\mathbf{x}_1 \\ &+ \Phi_{A_2}(\Delta t_{64})\Phi_{A_1}(\Delta t_{63})\dots\Phi_{A_1}(\Delta t_1)\Delta\mathbf{x}(0_-) \dots (19) \end{aligned}$$

この連立方程式(19)をガウスの消去法により解き  $x(0_-)$  を求める。

### 3.5 数値計算結果

上で求めた初期値を用い, (15), (16)式の連立微分方程式をルンゲクッタ法により解き, 数値解析を行った。この数値解析の結果を図7~9に示す。これらは, 同期速度  $20\pi(\text{rad/s})$  (電気角), インバータ入力直流電圧  $E_D=70(\text{V})$  の場合の解析結果である。図7は回転座標系における固定子電流  $i_{sd}$ ,  $i_{sq}$  の波形である。図8は, ダンパ巻線電流  $i_{kd}$ ,  $i_{kq}$  の波形であり, 図9は回転子座標系上にある  $i_{sd}$ ,  $i_{sq}$  に回転→静止変換を行い, 2相3相変換によって求めた  $u$  相電流の波形である。図4において  $v_{sd}$ ,  $v_{sq}$  は3相電圧のモードパターンによって激しく変化したが, この変化に対する各電流の変化の様子が厳密にシミュレートされている。ダンパ電流は, 正弦波駆動の場合であれば定常運転時には零となるが PWM 駆動の場合, 電圧の瞬時変化に対して過渡的に逆向きの電流が流れている。即ち  $v_{sd}$ ,  $v_{sq}$  の変化による空隙磁束の変化を抑制する方向に流れる。

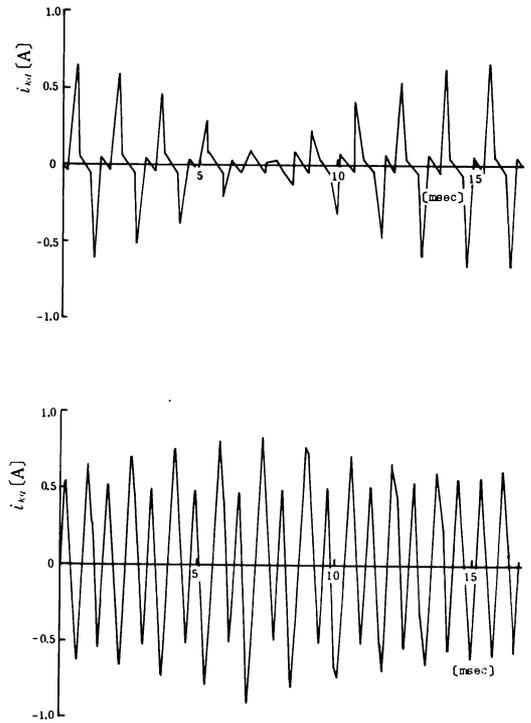


図8 ダンパ巻線電流波形

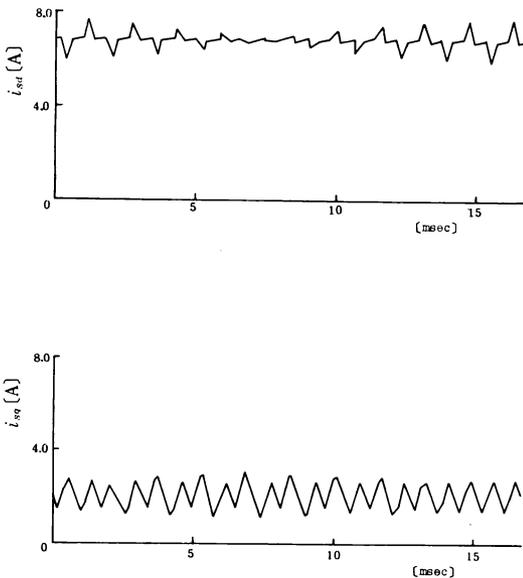


図7 固定子電流波形

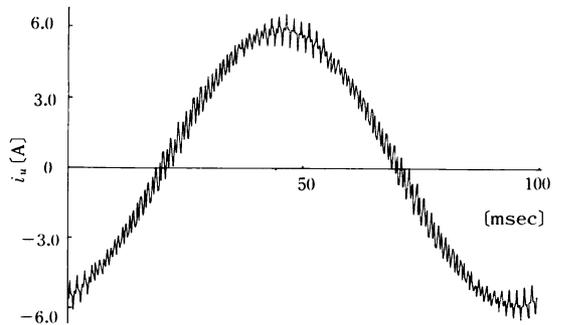


図9  $u$  相電流波形

#### 4. 結 論

本稿では、回転座標系における等価回路から、永久磁石同期電動機の基本方程式、状態方程式を導出し、PWM パターンを考慮に入れて、回転座標系でその定常特性の解析を行った。その結果、次の事が明らかになった。

- (1) 固定子の  $d \cdot q$  軸電流の交流分は PWM 変調された  $d \cdot q$  軸電圧の交流分に応答して流れている。
- (2) 回転子の  $d \cdot q$  軸ダンパ電流の変化は固定子  $d \cdot q$  軸電流の変化と逆方向である。

#### 5. 文 献

- 1) Thomas M. Jahns: "Flux-Weakening Regime Operation of an Interior Permanent-Magnet Synchronous Motor Drive", *IEEE Trans. Industr. Applic.*, **IA-23**, 681 (1987)
- 2) S. Ogasawara, M. Nishimura, H. Akagi, A. Nabae, Y. Nakanishi: "A High Performance AC Servo System with Permanent Magnet Synchronous Motors", *IEEE Trans. Industr. Electronics Control Instrum.*, **IE-33**, 87 (1986)
- 3) 篠原・山本・実成・入佐:「永久磁石同期電動機のベクトル制御とそのシミュレーション」昭63電気学会全国大会 No.1511
- 4) Thomas M Jahns, Gerald B. Klimann, Thomas W. Neumann: "Interior Permanent-Magnet Synchronous Motor for Adjustable-Speed drives", *IEEE Trans. Industr. Applic.*, **IA-22**, 681 (1986)
- 5) 篠原・実成・入佐・崎山:「誘導電動機のベクトル制御とそのシミュレーション」, 電気学会研究会半導体電力変換研究会資料 SPC-88-24 (昭63)
- 6) 半導体電力変換回路, P137, 電気学会
- 7) 電気機器学, P141, 電気学会