

高速水平軸風車の渦理論

花 岡 達 郎

(受理 昭和56年5月26日)

Vortex Theory of a High-Speed Horizontal-Axis Windmill

Tatsuro HANAOKA

The purpose of the present paper is to give a fundamental theory of hydrodynamics concerning a high-speed horizontal-axis windmill on the status of vortex theory. The theory is developed along similar lines to the non-linear propeller theory based on constant hydrodynamic pitch.

ま え が き

風車理論は、Glauert¹⁾以来あまり進展を見せていない。社会的要望の然らしむる処と思われるが、状況そのものは現在でも大差ない。しかし、近來の、風車に対する関心の高まりはかなりのものであるから、利用度の現実とはともあれ、この際、風車理論を整備しておくのは無益ではないだろう。

本研究は、外形が螺旋推進器（以下ではプロペラという）と類似する高速水平軸風車を対象とするが、その最適翼端速度比は、概略 $X_{opt} = 4$ である。風車とプロペラでは、それぞれの作動状態を示すパラメタが互いに逆数、つまり前者の翼端速度比 X と後者の前進常数 J との関係は、 $X = \pi/J$ であるから、それを使って、上記の X_{opt} を J に換算すると、 $J = \pi/4 \approx 0.8$ となる。一般的船用プロペラの最適作動状態の J も、ほぼこれに近い値をとるので、高速風車は、外形ばかりでなく、作動状態もプロペラの場合に近い。作動状態によって、翼に随伴する螺旋状自由渦のピッチが定まるので、それが等しいということは、流場もよく類似することを意味している。プロペラ理論は、すでに実績の認められた学問である。したがって、それを風車の流場解析に適用することは充分意義のあることと思う。

本文は、筆者が以前執筆した、プロペラの基礎理論²⁾³⁾⁴⁾を骨子として、水平軸風車の流場を渦理論でまとめたものである。

- 2 螺旋座標と Green 関数
 - 3 速度ポテンシャル
 - 4 守屋の定理と螺旋渦のピッチ
 - 5 エネルギー定理
 - 6 Munk の定理（変位定理）
 - 7 三つの境界値問題
 - 8 エネルギー損失極小の条件
 - 9 最適設計の理論
 - 10 境界条件と揚力面の積分方程式
 - 11 揚力線の積分方程式
 - 12 揚力線の束縛渦
- あ と が き

記 号

x, r, θ	任意点の座標（円柱座標）
x', r', θ'	渦面上の点の座標
ρ	流体密度
p	流体圧力
w	吹上げ
V	風車への流入速度（ x 軸の正の方向に流れる）
Ω	風車の回転角速度（ x 軸を軸にして負の向きに回転する）
r_0	翼端の半径
r_b	翼根の半径
l	翼数
s	螺旋渦に沿って測った長さ
$X = \Omega r_0 / V$	翼端速度比
w_1	翼の位置における揚力線の吹上げ
$2\pi h$	螺旋渦のピッチ
$w_a = w_1 \cos \varepsilon_1$	
$w_t = -w_1 \sin \varepsilon_1$	
\bar{w}_a	w_a の半径方向の平均値
\bar{w}_t/r	w_t/r の半径方向の平均値
$h = (V + \bar{w}_a) / (\Omega + \bar{w}_t/r)$	

内 容

記 号	
1 序	論

$$\begin{aligned}
 r/h &= \mu, \quad r'/h = \mu' \\
 \sin \varepsilon_1 &= 1/\sqrt{1+\mu^2}, \quad \cos \varepsilon_1 = \mu/\sqrt{1+\mu^2}, \\
 \tan \varepsilon_1 &= 1/\mu \\
 W &= \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2} \\
 V^* &= V + \bar{w}_a, \quad \Omega^* = \Omega + \bar{w}_i/r \\
 W^* &= V^* \sqrt{1+\mu^2}, \quad W'^* = V'^* \sqrt{1+\mu'^2} \\
 x &= f(\theta, r) \quad \text{風車翼の平均矢高面の方程式} \\
 \sigma &= \theta - x/h, \quad \tau = \theta + x/h \\
 \sigma' &= \theta' - x'/h, \quad \tau' = \theta' + x'/h
 \end{aligned}$$

1 序 論

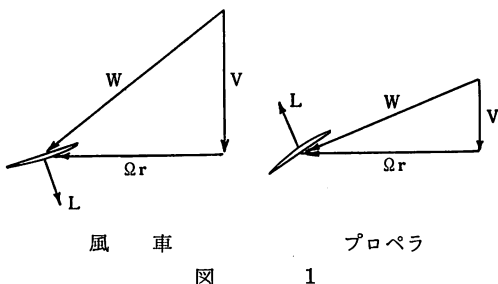
プロペラと風車の違いは、ポンプと水車の関係と同じで、前者が軸トルクを介して、流体に運動エネルギーを与えるのに対し、後者は、逆に流体の運動エネルギーを吸収して、それを軸トルクに変換する役目を果たす、ところにある。これは極く常識的なことであるが、流体運動および流体力の表わし方にそのまま現われるので、後の説明を容易にするため、相違を列挙しておく。

図1は翼に対する相対流入方向を示したものであるが、相対速度 W に対する翼素の迎角は、プロペラと風車では、正負反対、つまり揚力 L の方向が互いに逆になる。したがって、自由渦の誘導速度の向きも、プロペラと風車では反対になる。

プロペラの軸トルクを Q_p 、推力を T 、風車の軸トルクを Q_w 、空気抵抗を D とすると、 ΩQ_p はプロペラが流体に与えた馬力、 VT はプロペラが流体から回収した馬力であるが、一方 ΩQ_w は風車が流体より吸収する馬力、 VD は風車が流体から受ける馬力である。したがって、プロペラ、風車それぞれの効率を η_p 、 η_w とすると

$$\left. \begin{aligned} \eta_p &= VT/(\Omega Q_p) \\ \eta_w &= \Omega Q_w/(VD) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

である。すなわち、 η_p と η_w は互いに逆の形である。



作動状態を表わすパラメタにしても、プロペラでは、一回転の間にそれが進む距離と直径との比を意味する前進常数 $J=V/(nD)=\pi V/(\Omega r_0)$ を用いるが、風車では翼端速度比 $\Omega r_0/V$ をとる。

以上示したように、性能を表わす特性係数が互いに逆になるのは、その作動原理に由来するわけで、当然のことである。しかし、自由渦の形その他、流場はほぼ相似であるから、風車理論の大部分は、プロペラ理論の転用で、構成することができる。

本文では、一様流が回転軸に平行に流入する場合を取扱うので、流場は定常状態である。したがって、理論の対象は性能計算と最適設計にある。風車翼によって作られる自由渦は、プロペラと同様に、螺旋状であるから、その誘導速度は大きい。さらに、風車では翼素迎角が大きく、時には失速状態で作動することもあるので、非線型性が著しいが、それを非線型翼理論⁵⁾と同様な考えで流場を解析することは、繁雑過ぎて、実用に適さない。ここで採用する流体モデルは、プロペラの定ピッチ非線型理論と同じ、簡略化したもので、自由渦と束縛渦を、半径方向にも螺旋方向にもピッチが一定の螺旋面上に分布させている。つまり、常螺旋渦面の流場を扱うわけである。

2 螺旋座標と Green 関数

風車の流場を数値計算する場合には、速度ポテンシャルは原型のままの方が計算しやすいし、また、座標系は、円柱座標でも螺旋座標でも、計算の手数に変わりはない。しかし、流場の特性を解析的に調べる場合には、それを螺旋座標と Green 関数によって表わす方が、原型のままで計算するよりも遙かに解析が容易になる。後の解析の便宜のため、本節で、螺旋座標と Green 関数に関する事項をまとめて記載する。

曲線 C が一定角速度で回転しながら、定直線 x の方向へ進むとき作る曲面を螺旋面という。その曲線 C の方程式を $x=f(y)$ 、螺旋面のピッチを $2\pi h$ とすると、この曲面を表わす方程式は

$$\left. \begin{aligned} x &= f(r) + h\theta, \quad h = \text{const.} \\ y &= r \cos \theta \\ z &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

である。特に、 C が直線で、それが x 軸と直交しているときできる曲面($f(r)=0$)を常螺旋面という。常螺旋面は極小曲面、したがって平均曲率は常に0である。

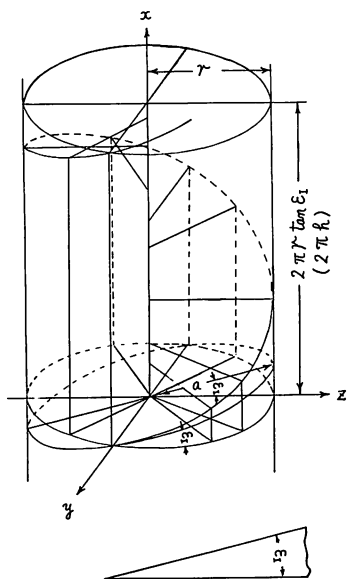


図2 常螺旋面

(2.1) で $r = \text{const.}$ としたときできる曲線を常螺旋線 (helix) という。円柱上の測地線は常螺旋線になる。動径 r は常螺旋線の主法線であるから、常螺旋線の接線と、その接点を通る動径を含む面は、常螺旋線の接触平面である。一つの角が ε_1 に等しい直角三角形を半径 r の直円柱に巻きつけ、角 ε_1 の頂点を xyz 座標の点 $(0, r, 0)$ にとり (図2参照)、 ε_1 をはさむ斜辺でない一辺が yz 面上にある半径 r の円に重なるようにするとき、斜辺の描く曲線は、方程式

$$x = \theta r \tan \varepsilon_1, \quad y = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta$$

を満たすので、それは、ピッチが $2\pi r \tan \varepsilon_1$ の常螺旋線となる。

常螺旋線の接触平面が、螺旋線のまきつく円柱を切る断面は楕円であり、その接点は、楕円の周の短軸上の点であるから、常螺旋線の曲率は、この楕円の短軸上の曲率に等しい。楕円の長半径を a 、短半径を r としたときの短軸上の曲率半径 ρ は

$$\rho = a^2 / r \quad (2.2)$$

である。図2を見ると明らかなように

$$a = r \sec \varepsilon_1 \quad (2.3)$$

であるから、これを (2.2) に代入すると

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 \varepsilon_1} = \frac{r(1 + \mu^2)}{\mu^2} = \frac{h^2 + r^2}{r} \quad (2.4)$$

となる。

図3の点線は、 O を回転軸とする風車翼輪郭の正面投影図である。 A, C と B をそれぞれ翼輪郭および縦軸と半径 r の円との交点とする。横軸上、 O より h の距離にある点を P 、さらに P を通り BP に直交する直線が縦軸と交わる点を Q とすると

$$r \times \overline{BQ} = \overline{BP}^2 = h^2 + r^2$$

であるから、(2.4) により、 $\overline{BQ} = \rho$ となる。したがって、 B 点近傍の常螺旋線は、 Q を中心とし、 \overline{BQ} を半径とする円で近似的に表わされる。 A, C より引いた横軸に平行な線と、この常螺旋線との交点をそれぞれ A', C' とすると、曲線 $A'BC'$ は、翼素 AC の常螺旋線への投影線で、この線の法線は、風車の回転軸と直交する。この A', C' に該当する点を、翼根より翼端にわたって求め、それを結んだものが、翼輪郭の、定ピッチ螺旋面への投影面、すなわち揚力面理論の場合の基準面 (圧力差を分布させる面) に該当する。流場解析に揚力面理論を使う場合、或いはまた、風車翼実際に製作する場合などには、以上述べた螺旋面の図形幾何の知識が必要になる。

円柱座標 x, r, θ と

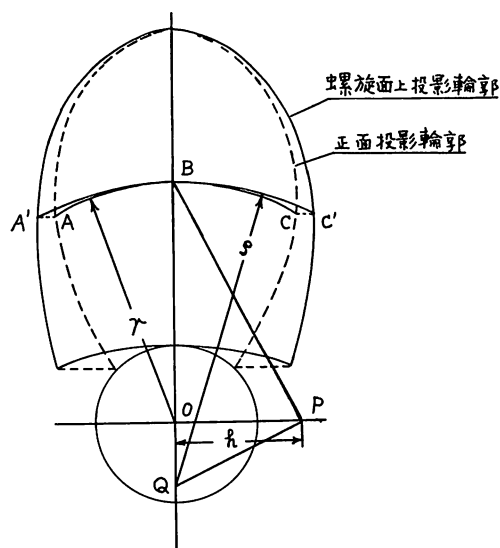


図3 風車翼の螺旋面上への投影図

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \theta + x/h \\ \sigma &= \theta - x/h \\ \mu &= r/h \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

の関係にある τ, σ, μ をパラメタとして, 3組の曲面が与えられる. $\tau = \text{const.}$ および $\sigma = \text{const.}$ は互いに逆にねじれた, ピッチが $2\pi h$ の螺旋面であり, この二つの螺旋面の交線は一つの動径となる. $\mu = \text{const.}$ は x 軸を中心とする円柱面であるから, τ, σ, μ を与えれば, これから, 3個の曲面の交点として一点が定まる. これは, ある種の曲線座標とみなすことができるので, 螺旋座標と呼ぶ (図4参照). ただし, この曲線座標は直交座標でないから, 演算に際しては, 注意が必要である.

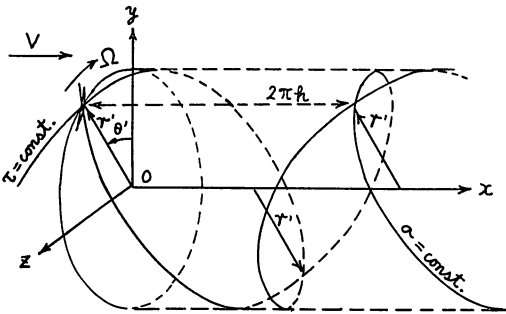


図4 螺旋座標

x, θ と τ, σ とは

$$\left. \begin{aligned} x &= h(\tau - \sigma)/2 \\ \theta &= (\tau + \sigma)/2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} &= -\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

または

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{1}{h\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

の関係がある.

$\sigma = \text{const.}$ の面に対する法線方向の微分は, 次のようにして行う. 法線と x 軸に平行な線とのなす角を ϵ_1 とすると (図5参照)

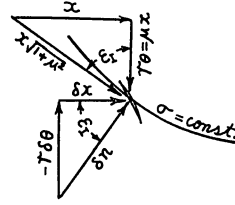


図 5

$$\left. \begin{aligned} -\frac{r\partial\theta}{\partial n} &= \sin \epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \\ \frac{\partial x}{\partial n} &= \cos \epsilon_1 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \tan \epsilon_1 = \frac{1}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

である. 法線方向の微分演算は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{r\partial\theta}{\partial n} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \cos \epsilon_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \sin \epsilon_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

であるから, (2.8), (2.9) を使うと

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{1}{h\sqrt{1+\mu^2}} \left\{ \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \right\} \quad (2.11)$$

が得られる. この式は, $\sigma = \text{const.}$ の螺旋面の法線方向微分演算を σ, τ を介して行うときに用いる.

次に, $\mu = \text{const.}, \sigma = \text{const.}$ の螺旋線の線素片 ds と $d\tau$ との関係を調べてみる. 図6を参照すると

$$\begin{aligned} ds &= dx \operatorname{cosec} \epsilon_1 = dx \sqrt{1+\mu^2} \\ &= r d\theta \sec \epsilon_1 = r d\theta \sqrt{1+\mu^2} / \mu \end{aligned}$$

である. 上式右辺の1行目, 2行目の相加平均をとると

$$ds = \frac{h}{2} \sqrt{1+\mu^2} \left(d\theta + \frac{dx}{h} \right) = \frac{h}{2} \sqrt{1+\mu^2} d\tau \quad (2.12)$$

となる.

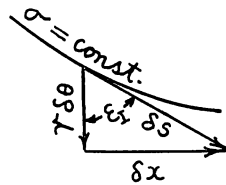


図 6

また、螺旋に沿う微分演算は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{r \partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{r \partial \theta} \\ &= \sin \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varepsilon_1 \frac{\partial}{r \partial \theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

となるので、(2. 7) により

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-x') + i\pi(\theta - \theta' - 2m\pi/l)} I_n(|\lambda|r) K_n(|\lambda|r') d\lambda, \quad r' > r\end{aligned}\quad (2. 14)$$

がある⁶⁾。ただし、 I_n , K_n は変形 Bessel 関数である。(2. 6) によって、これを螺旋座標に変換すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{h\sqrt{(\tau - \tau' - \sigma + \sigma')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos\{(\tau - \tau' + \sigma - \sigma')/2 - 2m\pi/l\}}} \\ &= \frac{1}{\pi h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda + n)(\tau - \tau')/2 - i(\lambda - n)(\sigma - \sigma')/2 - i2\pi m\pi/l} I_n(|\lambda|\mu) K_n(|\lambda|\mu') d\lambda, \quad \mu' > \mu\end{aligned}\quad (2. 15)$$

である。

対称な l 枚の螺旋面の間の場が相似である場合の Green 関数は (2. 15) の m について、0 より $l-1$ まで総和したもので表わされる。

$$\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2\pi m\pi/l} = \begin{cases} 0, & n \neq kl \\ l, & n = kl \end{cases}, \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2. 16)$$

の公式があるから、

$$\sum_{m=0}^{l-1} \frac{1}{R} = \frac{l}{\pi h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda + lk)(\tau - \tau')/2 - i(\lambda - lk)(\sigma - \sigma')/2} I_{lk}(|\lambda|\mu) K_{lk}(|\lambda|\mu') d\lambda, \quad \mu' > \mu \quad (2. 17)$$

となる。この式の k, λ の代りに $-k, -\lambda$ とおくと、指数関数の変数の符号が変わるだけで、他は全く同形の式が得られる。それと上式との相加平均をとると

$$\sum_{m=0}^{l-1} \frac{1}{R} = \frac{l}{\pi h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{1}{2} \{(\lambda + lk)(\tau - \tau') - (\lambda - lk)(\sigma - \sigma')\} I_{lk}(|\lambda|\mu) K_{lk}(|\lambda|\mu') d\lambda, \quad \mu' > \mu \quad (2. 18)$$

が得られる。(2. 17), (2. 18) は対称螺旋の場における Green 関数である。ただし、それは対称螺旋の場に使いやすい、という意味で、場が螺旋状にねじれたものという意味ではない。

3 速度ポテンシャル

風車の回転軸を x 軸とする。一様流が、 x 軸の正の方向に、速度 V で流れ、風車は x 軸の負の向きに、一定角速度 Ω で回転しているものとする。

翼厚を無視すると、翼は渦面だけで表わすことができる。これを束縛渦という。序論に述べたように、束縛渦と、これに随伴する自由渦とを、一定ピッチ ($2\pi h$) の同一の螺旋面上におくことにし、その循環密度を γ とすると、速度場は、この螺旋面上に $\int_{s_1}^s \gamma ds$ のポテンシャル飛躍がある外は、至る処連続である。風車翼とともに回転する

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{2}{h\sqrt{1+\mu^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2. 13)$$

である。

螺旋の場を、 x 軸を中心として、 $2m\pi/l$ の角度だけ回転しても、もとの場と全く変わらないとき、それを対称螺旋の場という。この対称螺旋の場における Green 関数を求めてみる。無限領域の Green 関数を円柱座標で表わしたものの一つに

座標系では、流場は定常であるから、その速度ポテンシャル Φ は

$$\Phi(x, r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n''} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)}} ds' \int_{s_1}^{s'} \gamma ds'' \quad (3.1)$$

のように表わされる⁷⁾。ただし、 (x, r, θ) は任意点の座標、 (x', r', θ') は渦面上の点の座標である。風車翼は対称で、 l は翼数、 r_0, r_b はそれぞれ、翼端および翼根の半径を意味する。 s は螺旋に沿ってはかった長さ、 s_1 は翼前縁の s 座標、 $\partial/\partial n''$ は螺旋面に対する法線微分である。渦の上下面については、翼の負圧側を上面、正圧側を下面と呼ぶことにし、法線 n'' は、渦面の下より上に向う方向を正とする。これは、揚力面理論の慣習に従っているわけで、正常作動状態における揚力の方向を、 n'' の正の方向と定める。

$\int_{s_1}^s \gamma ds$ は s 点の循環であるから

$$\int_{s_1}^s \gamma ds = \Phi_u - \Phi_l = \Gamma(s, r) \quad (3.2)$$

である。ただし、 Φ_u, Φ_l は渦面の上下における速度ポテンシャルとする。この式より、

$$\gamma = \frac{\partial \Phi_u}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_l}{\partial s} \quad (3.3)$$

である。束縛渦の外では、(3.3) の右辺は零であるから、 γ は翼面の外では0になる。

(3.1) の s', s'' の積分順序を交換し、 γ が翼面の外で0になることを考慮すると、

$$\Phi(x, r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \int_{s'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n''} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)}} ds'' \quad (3.4)$$

となる。ここで、円柱座標を螺旋座標に変えると

$$\Phi(\tau, \sigma, \mu) = \frac{h}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1 + \mu'^2} ds' \int_{\tau'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n''} \frac{1}{R} dT' \quad (3.5)$$

となる。ただし、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h\sqrt{(\tau - T' - \sigma + \sigma')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos\{(\tau - T' + \sigma - \sigma')/2 - 2m\pi/l\}}} \quad (3.6)$$

である。(3.5) の $\partial/\partial n''$ は (2.11) の $\partial/\partial \tau, \partial/\partial \sigma$ をそれぞれ $\partial/\partial T', \partial/\partial \sigma'$ で置き換え、 μ を μ' とした演算を意味し、また s_2 は翼後縁の s 座標である。

さらに、積分変数 T' を $T - \tau' = \tau - T'$ によって T に変えると

$$\Phi(\tau, \sigma, \mu) = \frac{h}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1 + \mu'^2} ds' \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial n''} \frac{1}{R} dT \quad (3.7)$$

となる。この式の $\partial/\partial n''$ は $\partial/\partial n''$ の中の $\partial/\partial T'$ を $\partial/\partial \tau'$ で置き換えた演算を意味する。

(3.7) の $\sum_{m=0}^{l-1} \frac{1}{R}$ に Green 関数 (2.18) を適用し、 T に関する積分を行なうと

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{II} + \Phi_I \\ \Phi_{II} &= -\frac{l}{4\pi^2 h} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - lk/\mu'}{\lambda + lk} \cos \frac{1}{2} \{(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\ &\quad - (\lambda - lk)(\sigma - \sigma')\} I_{lk}(|\lambda| \mu_{<}) K_{lk}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\Phi_I = -\frac{l^2}{2\pi h} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=1}^{\infty} k(\mu' + 1/\mu') I_{lk}(lk\mu_{<}) K_{lk}(lk\mu_{>}) \sin lk(\sigma - \sigma') \quad (3.9)$$

となる。ただし、 $\mu_{>}, \mu_{<}$ はそれぞれ μ, μ' のうち、大なる方および小なる方を意味する。

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iT(\lambda+n)/2}}{\lambda+n} f(\lambda) d\lambda = i\pi f(-n)$$

の公式を用いて、 $\tau - \tau' \rightarrow +\infty$ における Φ_{Π} を求めると、それは Φ_I に等しくなる。したがって、無限後方の速度ポテンシャル Φ_{∞} は、

$$\Phi_{\infty} = \lim_{\tau - \tau' \rightarrow +\infty} \Phi_{\Pi} + \Phi_I = 2\Phi_I \quad (3.10)$$

となる。

4 守屋の定理⁸⁾ と螺旋渦のピッチ

(3.7) に (2.13) の演算を行って、螺旋線方向の誘導速度 $\partial\Phi/\partial s$ を求めると、渦面上では

$$\lim_{\sigma = \sigma' \rightarrow \pm 0} \frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} ds' \mp \frac{\gamma}{2} \quad (4.1)$$

である。 $\sigma = \sigma'$ に γ の大きさの飛躍があることは、ポテンシャル論で知られる通りである。 $\partial\Phi/\partial s$ のこの性質は、(3.3) に示したように、束縛渦に基づくものである。螺旋線方向流速の、渦上下面平均値 \bar{u} は、(4.1) の右辺第1項に等しく、

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} ds' \quad (4.2)$$

で与えられる。(3.9) の Φ_I には τ が含まれないから、 \bar{u} に寄与するのは Φ_{Π} だけである。 Φ_{Π} を s で微分して \bar{u} を求めると

$$\bar{u} = \frac{-l}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu'\lambda - lk/\mu') \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') I_{lk}(|\lambda| \mu_{<}) K_{lk}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \quad (4.3)$$

となる。この式は、(4.2) の $1/R$ に (2.18) の Green 関数を代入しても得られる。

揚力線理論の流体モデルは、 $\sigma = \sigma'$ の面上に分布する束縛渦を一つの動径上に集め、これを一本の渦糸で表わしたものである（風車全体では l 本となる）。その渦糸の位置を τ' とすると、

$$\bar{u}|_{\tau=\tau'} = 0 \quad (4.4)$$

である。

次に、螺旋面上の法線方向の誘導速度（吹上げという）を求めると、

$$w = \partial\Phi/\partial n|_{\sigma=\sigma'} = w_{\Pi} + w_I \quad (4.5)$$

$$w_{\Pi} = \frac{\partial\Phi_{\Pi}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{l}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk/\mu')(\mu\lambda - lk/\mu')}{\lambda + lk} \\ \times \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') I_{lk}(|\lambda| \mu_{<}) K_{lk}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \quad (4.6)$$

$$w_I = \frac{\partial\Phi_I}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{l^3}{2\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) I_{lk}(lk\mu_{<}) K_{lk}(lk\mu_{>}) \quad (4.7)$$

である。

揚力線の場合には、(4.6) より

$$w_{\Pi}|_{\tau=\tau'} = 0 \quad (4.8)$$

であるから、(3.10) を参照すると

$$w|_{\tau=\tau'} = w_I = \frac{1}{2} \frac{\partial\Phi_{\infty}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} \quad (4.9)$$

となる。

したがって、(4.9) は後述の Munk の定理Ⅲを表わし、また (4.4) はプロペラ理論の守屋に定理に対

応ずる。守屋の定理を具体的に述べると

「対称風車の場合、揚力線の束縛渦の位置における、自由渦の誘導速度には、螺旋線に沿う方向の成分は存在しない。」

この定理は、Munk の定理⁹⁾ とともに、揚力線理論および定ピッチ非線型理論の根幹となる重要定理である。

非線型翼理論は、自由渦がその誘導速度によって変形を受けることの効果を計算に入れるものであるが、これを正確に計算することは繁雑である。定ピッチ非線型理論は、要点だけを取り上げて、最も単純化を行ったもので、揚力線の束縛渦の位置における誘導速度の、半径方向平均値をもって、自由渦の流される量とする。

Munk の定理Ⅲと、守屋の定理によると、揚力線の束縛渦の位置における、軸方向流速 w_a 、回転方向流速 w_t は

$$\left. \begin{aligned} w_a &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{\sigma=\sigma'} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \phi_\infty}{\partial x} \Big|_{\sigma=\sigma}, \\ w_t &= \frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_\infty}{r \partial \theta} \Big|_{\sigma=\sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

で与えられる。この w_a 、 w_t/r の半径方向の平均値を \bar{w}_a 、 \bar{w}_t/r で表わし、

$$h = \frac{V + \bar{w}_a}{\Omega + \bar{w}_t/r} \quad (4.11)$$

の 2π 倍をもって、螺旋渦のピッチと定める。これが定ピッチ非線型理論の根本仮定である。

図7より

$$\left. \begin{aligned} W^* &= \sqrt{(V + \bar{w}_a)^2 + r^2 (\Omega + \bar{w}_t/r)^2} \\ &= (V + \bar{w}_a) \sqrt{1 + \mu^2} \\ W &= \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

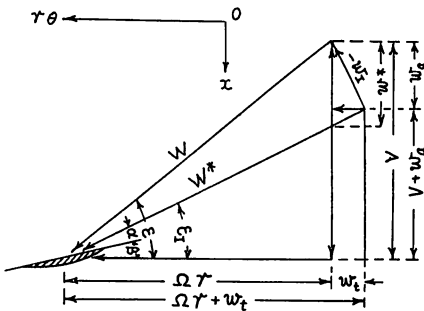


図 7

である。定ピッチ非線型理論では、風車の翼素への流入速度は W^* であると仮定する。守屋の定理によると、 w_a と w_t の合成流速は w_t で、それは W^* と直交するから、

$$W^* = W \cos(\varepsilon - \varepsilon_t) \quad (4.13)$$

の関係がある。

5 エネルギー定理

風車翼が単位時間に流体に与える仕事と、単位時間に後方に流れ去る流体の運動エネルギー、つまり損失エネルギーとは等しい、という一般的定理を、速度ポテンシャルの表示式を使って示してみる。この运算結果は、次節に述べる Munk の定理とともに、風車の最適設計理論の基礎になるものである。

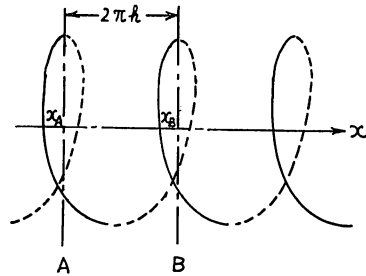


図 8

損失エネルギーは、風車の後方、遠く離れたところの二つの平行な平面 A および B (図8参照) の間の流体の運動エネルギーを計算すれば、求められる。A、B 面の間隔を、螺旋面のピッチ $2\pi h$ にとり、この間の全領域の運動エネルギーを ΔE とする。仮に、A、B 面が空間に固定しているとして、螺旋渦が、A より B に移るまでの時間を Δt とすると、 $\Delta E/\Delta t$ は、単位時間に後方に流れ去るエネルギー、つまり損失エネルギーに該当する。 $V^* = V + \bar{w}_a$ 、 $\Omega^* = \Omega + \bar{w}_t/r$ と書くと、A 面上にある螺旋渦が、B 面の位置に移るまでの時間は

$$2\pi h/V^* = 2\pi/\Omega^* \quad (5.1)$$

である。したがって、損失エネルギー E' は

$$E' = \frac{\Omega^*}{2\pi} \cdot \Delta E \quad (5.2)$$

である。

面 A , B 間の運動エネルギーは

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\frac{\rho}{2} \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dV \\ &= -\frac{\rho}{2} \iint \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS\end{aligned}\quad (5.3)$$

である。この場合の面積分の領域は、 A 面、 B 面の全体と、ポテンシャルの不連続となる面、つまり自由渦の分布する螺旋面の両側にわたる。 n はその境界面における外向き法線である。 A 面と B 面の対応する点では、 Φ は等しいが、 $\partial \Phi / \partial n$ は絶対値が等しく、反符号となるので、互いに消し合って 0 となり、結局、螺旋面の両側の積分だけが残る。よって

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\frac{\rho}{2} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{sA}^{sB} \Phi_{\infty u} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial n_u} ds \\ &\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{sA}^{sB} \Phi_{\infty l} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial n_l} ds\end{aligned}\quad (5.4)$$

で与えられる。ただし、 n_u , n_l は螺旋渦の上下面における、流体領域の外向き法線である。これは第 3 節で定義した渦面の法線 n と

$$-\partial \Phi_{\infty} / \partial n_u = \partial \Phi_{\infty} / \partial n_l = \partial \Phi_{\infty} / \partial n \quad (5.5)$$

の関係にある。また、 $\Phi_{\infty u}$, $\Phi_{\infty l}$ は、(3.2) より

$$\Phi_{\infty u} = -\Phi_{\infty l} = -\frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \gamma \, ds = -\frac{1}{2} \Gamma(r) \quad (5.6)$$

$$E' = -\frac{\rho l^4 V^*}{2\pi h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma(s, r) ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma(s', r') ds' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) I_{lk}(lk\mu_{<}) K_{lk}(lk\mu_{>}) \quad (5.8)$$

のように表わされる。

ところで、翼の上下面の圧力差を Δp とすると、風車翼が、単位時間に、流体に与える仕事 P は

$$P = -\sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \Delta p \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} ds \quad (5.9)$$

である。Kutta-Joukowski の定理によると

$$\Delta p = \rho W^* \gamma = \rho \gamma V^* \sqrt{1 + \mu^2} \quad (5.10)$$

であるから、(4.5) の記法を使うと

$$P = -\rho V^* \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} \sqrt{1 + \mu^2} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma (w_{\parallel} + w_1) ds \quad (5.11)$$

と書かれる。これに (4.6) を代入すると

$$P_{\parallel} = -\rho V^* \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} \sqrt{1 + \mu^2} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma w_{\parallel} ds$$

である。これらを (5.4) に使う。対称螺旋の場合であるから、(5.4) は、一つの螺旋面上の積分を l 倍したもので表わすことができる。したがって

$$\Delta E = -\frac{\rho l}{2} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma(r) dr \int_{sA}^{sB} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} ds$$

と書かれる。(2.12) によって、 ds の積分を $d\tau$ の積分に変えると

$$\Delta E = -\frac{\rho l h}{4} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma(r) \sqrt{1 + \mu^2} dr \int_{\tau_A}^{\tau_B} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} d\tau$$

となる。(4.7) と (4.9) を参照すると、 $\partial \Phi_{\infty} / \partial n|_{\sigma=\sigma'}$ は r だけの関数となっているので、 τ の積分は、そのまま行うことができ、 $\tau_B - \tau_A$ となる。 τ_A , τ_B は $\sigma=0$ の螺旋上の点であるから、それらは x と、 $\tau=2x/h$ の関係にある。よって

$$\tau_B - \tau_A = \frac{2}{h} (x_B - x_A) = 4\pi$$

である。したがって、損失エネルギー E' は

$$\begin{aligned}E' &= -\frac{\rho l h \Omega^*}{2} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma(r) \sqrt{1 + \mu^2} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} dr \\ &= -\rho l V^* \int_{r_b}^{r_0} \int_{s_1}^{s_2} \gamma(s, r) ds \sqrt{1 + \mu^2} w_1 dr\end{aligned}\quad (5.7)$$

となる。(4.7) を使うと

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho l^3 V^*}{16\pi^2} \int_{r_b}^{r_0} \sqrt{1+\mu^2} dr \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau \int_{r_b}^{r_0} \sqrt{1+\mu'^2} dr' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau' \\
&\quad \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk/\mu')(\mu\lambda - lk/\mu)}{\lambda + lk} \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') I_{lk}(|\lambda| \mu_{<}) K_{lk}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda
\end{aligned} \quad (5.12)$$

と書かれる。この式で、 τ, r と τ', r' の積分順序を交換し、また、 τ, r と τ', r' の記号を交換すると、全く同形で、符号のみが異なる式となるから、

$$P_{II} = 0 \quad (5.13)$$

でなければならない。上の計算の途中、 r' の積分は、 $r'=r$ を境として、 $r'<r$ と $r'>r$ の積分区間で、 I_{lk} と K_{lk} が入れ代る。したがって、 r と r' の積分順序の交換に際しては、Dirichlet 変換を利用する必要がある。結局、(5.11) は

$$P = -\rho l V^* \int_{r_b}^{r_0} \sqrt{1+\mu^2} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma w_1 ds \quad (5.14)$$

となる。(4.7) を代入すると

$$P = -\frac{\rho l^4 V^*}{2\pi h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) I_{lk}(lk\mu_{<}) K_{lk}(lk\mu_{>}) \quad (5.15)$$

となる。(5.14) は (5.7) と、また (5.15) は (5.8) と一致する。よって

$$E' = P \quad (5.16)$$

が確かめられた。

Euler の運動方程式から、直接エネルギー一定定理を導くと、検査面に対して、流体が単位時間になす仕事

$$\iint_{s_A} q_n p dS$$

が、別に加わってくる。上記の証明で、これが落ちている理由は、流体モデルが、力学的条件を完全に満足していない処にあり、問題しとて残るわけであるが、他の項が、攪乱流の 2 次の order であるのに対し、これは 3 次であるから、線型理論では省略される¹⁰⁾。

このように、定ピッチ非線型理論では、概して、線型理論に近い操作が行われることは、理解しておく必要がある。

6 Munk の定理⁹⁾ (変位定理)

Munk の三つの定理は、直進定常翼に関するもので、

$$E' = -\frac{\rho l^4 V^*}{2\pi h^2} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma(r) dr \int_{r_b}^{r_0} \Gamma(r') dr' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) I_{lk}(lk\mu_{<}) K_{lk}(lk\mu_{>}) \quad (6.1)$$

と書かれる。したがって、損失エネルギーは、翼素の全循環 $\Gamma(r)$ のみに依存し、揚力要素の螺旋に沿う

翼の損失エネルギーと関連のある無限後方の流れを、揚力線位置の流れと関係づけるのが、その内容である。これを変位定理と呼ぶが、それは無限後方の流れを、翼位置の流れに移して考えることができるという意味で、船用プロペラでは、最適設計理論の基礎となる重要定理である。風車の場合も同様で、この定理は、最適設計理論に欠かせない。この三つの定理を、風車の場合に当てはめて、記述すると、

定理 I 風車の損失エネルギーは、揚力要素を前後に移動しても変わらない。

定理 II 2 点の束縛渦が互いに影響してひ起こす損失エネルギーは、互いに打消す。

定理 III 対称風車の場合、揚力要素を螺旋に沿って前後に移動して、回転軸と直交する一平面上に集めて、揚力線を作ったとき、揚力線上の吹き上げは、無限後方の螺旋面上の吹き上げの 1/2 に等しい。

である。

(5.6) を使うと、(5.8) の損失エネルギーの表示式は

分布状態には関係しない。つまり、定理 I は、(6.1) を言葉で表わしたものである。

(5.16) によると、損失エネルギーは、風車が、単位時間に流体から受ける仕事 P に等しい。その P の原型は (5.11) で、二つの部分に分けてあるが、その中で、局所的攪乱の含まれる項は、(5.12) に示す P_{II} である。したがって、束縛渦のような、及ぶ範囲が局所的なものの影響は P_{II} の中にだけ存在する。その項が 0 になるという (5.13) で、定理 II は証明されたことになる。

翼が対称でない場合でも、(5.12) から (5.13) を導いたのに近い方法で、 $P_{II}=0$ を証明することができる。要するに、定理 I と定理 II は、損失エネルギーに関することであるから、風車が対称でない場合でも成立つ。

定理 III の証明は、すでに第 4 節に記載した。(4.8), (4.9) がそれである。定理 I および II は直進翼のものと、内容に変わりはないが、定理 III は、直進翼のものに比べると、かなりの制約が附加されている。しかし、実際問題では、風車翼を非対称にすることは少いし、また、理論として必要なものは、ほとんど渦面上の吹き上げに限られるから、直進翼の定理 III と同じように利用することができる。

7 三つの境界値問題

筆者は、かつてプロペラの単独性能を考察する際、課題を、Prandtl の「翼理論における三つの境界値問題」¹⁰⁾に沿って分類するのがよい、という提案をしたが²⁾、風車の場合にも同じことが云える。その三つの問題を、風車について述べると

第一の問題：ある作動状態において、与えられた循環分布を得るためには、風車翼の展開面形状および取付角の分布をいかにすべきか。

第二の問題：風車の半径、翼数、作動状態および吸収馬力が与えられた場合、抵抗馬力が極小になる循環分布を見出すこと。

第三の問題：風車翼の展開面形状、取付角分布および作動状態が与えられたとき、循環分布（揚力面理論では、循環密度）を見出すこと。

である。

第一、第二の問題は、最適設計理論そのものであり、第三の問題は、性能計算法の開発につながる。もともと、この三つの問題は、揚力線理論を前提にしているようなものであるから、船用プロペラのように、展開

面形の縦横比が小さく、揚力面理論でない、十分な精度の得られないものに対しては、問題の分類法が、すでに時代に合わない処がある。船用プロペラでは、揚力面理論による性能計算法が進展し、そのために作られた計算プログラムで、最適設計をしてしまおうという兆が見える。その理由は、計算技術が発達したということだけではない。最近のプロペラ設計では、最良効率だけが命題ではなく、キャビテーション、振動、騒音の防止といった、環境保護につながる事項が設計条件に附加され、問題を複雑にしていることも、一つの要因だろう。船用プロペラのこうした問題の多くは、経験によって得られた知識に基づくものであるから、製作、設置のまだ少い風車では、将来への見通しの参考にする程度にとどめて、当分は、上記三つで、問題の処理を心掛けるのがよいだろう。それに、高速風車で、効率のよいものは、展開面形の縦横比が大きいので、概して、揚力線理論の計算で、充分の精度が得られるはずである。

次節以下は、三つの境界値問題に沿って解析を行ったもので、第 8 節が第二の問題、第 9 節が第二と、第一の問題、第 10 節と第 11 節が第三の問題、に対する解答である。

8 エネルギー損失極小の条件

これまでの記述とのつながりの上からは、(5.9) を使って、解析を始めるのが本筋と思われるが、本節では、Munk の定理を出発点として、エネルギー損失極小の条件を導く。多分、Munk の定理の意義を知る助けとなるだろう。

D , Q をそれぞれ、風車の抵抗およびトルクとすると、 VD は風車が単位時間に流体に与える仕事（抵抗馬力）、 ΩQ は風車が単位時間に流体より吸収する仕事（吸収馬力）であるから、損失エネルギーは、その差

$$E' = VD - \Omega Q \quad (8.1)$$

で与えられる。Munk の定理 I, II によると、損失エネルギーは、翼素の全循環、すなわち揚力線を使って計算することができる。具体的には、Kutta-Jukowski の定理を使って、翼素の抵抗成分および接線力成分を、それぞれ $\rho \Gamma(r)(\Omega r + w_t)$, $\rho \Gamma(r)(V + w_a)$ のように表わしてよい、ということである。したがって、(8.1) は

$$E' = \rho l V \int_{r_0}^r \Gamma(r) (\Omega r + w_t) dr - \rho l \Omega \int_{r_0}^r \Gamma(r) (V + w_a) r dr \quad (8.2)$$

のように表わされる。この式は、定理IIを使うと、(5.11)からも導くことができる⁹⁾。計算過程はその方が明快である。

ここで、「第二の問題」を考えてみる。それは、(8.2)の右辺第2項を一定に保ちながら、エネルギー損失 E' を極小にすることであるから、変分問題の解法を使うと、 E' を極小にする条件は、(8.2)により

$$\rho l \int_{r_0}^r \{V(\Omega r + w_t) - k \Omega r (V + w_a)\} \delta \Gamma dr = 0 \quad (8.3)$$

から導かれる。ただし、 k は Lagrange の常数である。 $\delta \Gamma$ は任意にとることができるから、(8.3)の $\delta \Gamma$ の係数関数は0でなければならない。したがって、常数 k は

$$k = \frac{V(\Omega r + w_t)}{\Omega r (V + w_a)} = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_1} \quad (8.4)$$

となる。図7を参照すると

$$\frac{V + w_a}{\Omega r + w_t} = \frac{V - w^*}{\Omega r} \quad \text{または} \quad \frac{V + w_a}{\Omega + w_t/r} = \frac{V - w^*}{\Omega} \quad (8.5)$$

であるから、これを(8.4)に適用すると

$$k = V/(V - w^*) \quad \text{または} \quad w^* = V(k - 1)/k \quad (8.6)$$

が得られる。 k は常数であるから、 w^* 、すなわち $(V - w^*)/\Omega$ は一定である。定ピッチ非線型理論では、 w_a および w_t/r の半径方向の平均値を作って、 $2\pi(V + \bar{w}_a)/(\Omega + \bar{w}_t/r)$ を螺旋渦のピッチとしたが、エネルギー損失極小のときは、そのような操作をしなくても、螺旋渦は、自然に定ピッチ螺旋面、すなわち常螺旋面になることを、(8.5)は示している。第2節で述べた様に、常螺旋面は極小曲面であるから、次のように云うことができる。「自由渦螺旋面が極小曲面になるとき、エネルギー損失も極小になる。」

図7より

$$\left. \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n} \right|_{\sigma=\sigma'} = 2w_1 = -2w^* \cos \epsilon_1 = -\frac{2(k-1)}{k} V \cos \epsilon_1 \quad (8.7)$$

であるから、Betz の条件¹¹⁾と同じで、「一定ピッチの自由渦の全螺旋面が、剛体のように、 x 軸の負の方向に、一定速度 w^* で、進行するとき生じる、面に垂直な分速度に相当して、吹き上げが分布される場合、エネルギー損失は極小となる。」前記のものが幾何学的条件、それに対し、これは運動学的条件である。

渦の進行方向が、プロペラとは逆になるが、自由渦の回転の向きも逆になるので、流場としては、両者全く相似と考えることができる。したがって、エネルギー損失極小の循環分布には、Goldstein¹²⁾の解が使える。

9 最適設計の理論

最適設計の理論には二つの段階がある。第一の段階は、「第二の問題」に対する解を得ること、第二の段階は、その解を満たすように、「第一の問題」を解くことである。

先づ、「第二の問題」であるが、プロペラ理論では直接、解を計算することはしない。予じめ、Goldsteinの分布関数を、螺旋渦のピッチ比をパラメタにして、図表化しておき^{13) 註)}、それを使って、ある設計条件に適合する、エネルギー損失極小の循環分布を求める、という方法をとる。以下では、この線に沿った、問題の解き方を説明する。

先づ、無限翼数のときのエネルギー損失極小の循環分布を求めておく。無限翼数のとき、 w_a 、 w_t は

$$w_a = -\frac{l\Gamma_\infty}{4\pi h}, \quad w_t = \frac{l\Gamma_\infty}{4\pi r} \quad (9.1)$$

である¹⁴⁾。これを(8.5)の w_a と w_t に代入すると

$$\frac{V - l\Gamma_\infty/(4\pi h)}{\Omega r + l\Gamma_\infty/(4\pi r)} = \frac{V - w^*}{\Omega r}$$

である。この式の Γ_∞ は、エネルギー損失極小における、無限翼数の循環を意味する。図7と(2.9)を参考にして、上式より Γ_∞ を求めると

$$\frac{l\Gamma_\infty}{Vr_0} = \frac{4\pi w^*}{V\mu_0} \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \quad (9.2)$$

である。これはプロペラの場合と全く同じ分布形であ

注) 文献13)には、 $l = 3, 4, 5, 6$, $1/\lambda_{0i} = 1.5 \sim 6.0$ における Goldstein function が図示されている。 $l = 2$ の場合は文献12)にある。

る。

ここで、有限翼数にもどって、解析を続ける。(8.7)の左辺の $\partial/\partial n$ の演算に (2.11) を適用し、 Φ_∞ が σ だけの関数であることを考慮すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= -\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{h\mu} \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma'} \\ &= -2w^* \cos \varepsilon_1 = -\frac{2w^*\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\end{aligned}$$

と書かれる。 $2w^*h=1$ と置いて、整理すると

$$\frac{\partial \Phi_\infty}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \quad (9.3)$$

となる。無限後方の流場 Φ_∞ は、螺旋方向には変化がないので、 μ , σ だけの関数で表わされる。変数を μ , σ だけにして、Laplace の方程式を書くと

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 \Phi_\infty + (1+\mu^2) \frac{\partial^2 \Phi_\infty}{\partial \sigma^2} = 0 \quad (9.4)$$

であるが、 Φ_∞ はこの方程式を満足するはずである。したがって、(9.3) を境界条件とする、微分方程式 (9.4) の、 $\sigma=\sigma'$ における解を求めると、それが、エネルギー損失極小の循環分布の1/2に対応する ((5.6) 参照)。境界条件 (9.3) は、プロペラの場合と全く同形で、符号だけが逆になっている。しばしば述べてきたように、プロペラと風車の作動が、互いに逆の関係にあるためである。したがって、循環分布は、絶対値等しく、互いに反符号となる。

プロペラ理論では、エネルギー損失極小の場合の循環分布で、有限翼数のものと、無限翼数のものとを比

$$\kappa = \Gamma_i / \Gamma_{i\infty} \quad (9.5)$$

によって定義される κ の図表を作り、Goldstein function と呼んで、最適設計に利用する。上記の解析により、それらは、そのまま風車の最適設計にも利用できることは明らかである。

Goldstein function は螺旋渦のピッチ比をパラメタとするものであるが、最適設計に当たって、最初、そのピッチ比は未知量である。プロペラでは、それを求めるのに便利な図表が、Kramer¹⁵⁾ によって作られている。それと同じことを、風車の場合で、考えてみる。

(8.4) より

$$k\Omega r(V+w_a)\Gamma_i = V(\Omega r + w_i)\Gamma_i$$

である。この両辺を、 r で r_b より r_0 まで積分す

ると

$$k\Omega Q_i = V D_i \quad (9.6)$$

であるから、 $1/k$ はエネルギー損失極小の風車の効率 η_i を意味する。ただし、 Q_i , D_i は、最良効率における風車のトルクおよび抵抗である。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= V/(\Omega r) = \tan \varepsilon, \quad \lambda_i = \tan \varepsilon_i = 1/\mu \\ \lambda_0 &= \lambda r/r_0 = 1/X, \quad \lambda_{0i} = \lambda_i r/r_0 = 1/\mu_0 \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

と書くと、(8.4) より

$$1/\eta_i = \lambda/\lambda_i = \lambda_0/\lambda_{0i} \quad (9.8)$$

である。

ここで、風車の、最良効率のときの抵抗係数 C_{wi} 、パワー係数 C_{pi} を、それぞれ

$$C_{wi} = \frac{8D_i}{\pi \rho V^2 (2\gamma_0)^2}, \quad C_{pi} = \frac{8\Omega Q_i}{\pi \rho V^3 (2r_0)^2} \quad (9.9)$$

のように定義すると、 C_{wi} , C_{pi} は λ_0 と λ_{0i} の関数であるが、(9.8) により、 λ_0 と η_i の関数と考えてもよい。したがって、Goldstein の解を使うと、 $C_{wi}-\eta_i-\lambda_0$, $C_{pi}-\eta_i-\lambda_0$ の関係を図表に表わすことができる。プロペラの場合のそれが、Kramer の図表である。

風車の吸収馬力および作動状態が与えられたとすると、Kramer 相当図より η_i が求められ、それを使うと、(9.8) により、螺旋渦のピッチ比に対応する λ_{0i} が、また (8.6) より w^* が定まる。Goldstein function κ は λ_{0i} をパラメタとして図表にされているので、直ちに κ を読みとることができる。また、 λ_{0i} , w^* がわかっているのので、(9.2) により、 $\Gamma_{i\infty}$ が求められ、 $\kappa \Gamma_{i\infty} = \Gamma_i$ によって、 Γ_i が算出される。以上が第一の段階である。

次が、第二の段階で、「第一の問題」を解くことである。翼弦長が $2c$ の翼素に、Kutta-Joukowski の定理を適用すると、零揚力角から測った迎角 α^* に対し

$$\rho W^* \Gamma_i = 2\pi \alpha^* \rho W^* c$$

である。(4.13) により、 $W^* \equiv W$ としても大差ない。 $W = \Omega r \sqrt{1+\lambda^2}$ であるから、

$$\frac{2c\alpha^*}{r_0} = \frac{\Gamma_i}{\pi r_0 \Omega \sqrt{1+\lambda^2}} \quad (9.10)$$

と書かれる。この式によって、翼素の迎角と翼弦長の積が定まる。揚抗比が最大になる迎角を、翼素の迎角

に選ぶと、翼弦長 $2c$ が決まる。

回転面に対する翼の取付角を β 、エネルギー損失極小のときの ε_1 を ε_i と書くと、

$$\beta = \varepsilon_i - \alpha^* \quad (9.11)$$

である (図7参照)。(9.7)により、 $\varepsilon_i = \tan^{-1} \lambda_i$ 、 λ_i はすでに求められているので、迎角が定まれば、取付角も決まる。これで、「第一の問題」が解かれた。

プロペラと風車では、 w_a 、 w_t の方向が互いに逆であるから、プロペラの推力係数、パワー係数と、風車の抵抗係数、パワー係数とは、表示式も数値も異なる。したがって、Kramer 相当図は、風車用のものを作製する必要がある。また、Goldstein function で、すでに図表にされているもの以外の値が必要なとき、 Γ_i の算出法としては、Goldstein の方法より、第11節の (11.13) と (9.3) とより、積分方程式を作り、それを計算する方が有利だろう。

10 境界条件と揚力面の積分方程式

半径位置 r の翼素の平均矢高面形状が、 x 、 θ の関数として

$$x = f(\theta, r) \quad (10.1)$$

で与えられるものとする、翼面の境界条件は

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{V + \partial \Phi / \partial x}{\Omega r + \partial \Phi / (r \partial \theta)} \quad (10.2)$$

である。この Φ を、第3節に示した Φ_1 と Φ_2 に分けると

$$(\Omega r + w_t) \frac{\partial f}{\partial \theta} - (V + w_a) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \quad (10.3)$$

と書かれる。平均矢高線の接線が、回転面となす角を ε_0 とすると (図9参照)、

$$\partial f / (r \partial \theta) = \tan \varepsilon_0 \quad (10.4)$$

である。これを使うと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_0} &= \cos \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} - \sin \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &= \cos \varepsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (10.5)$$

であるから (図9参照)、(10.3) の右辺は

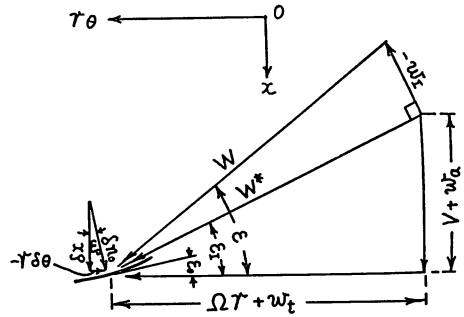


図 9

$$(\Omega r + w_t) \frac{\partial f}{\partial \theta} - (V + w_a) = \frac{1}{\cos \varepsilon_0} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_0} \quad (10.6)$$

となる。

$$\cos \varepsilon_1 = (\Omega r + w_t) / W^*, \quad \sin \varepsilon_1 = (V + w_a) / W^* \quad (10.7)$$

であるから、(10.6) の両辺に $\cos \varepsilon_0 / W^*$ を乗じ、(10.4) を使って、整理すると

$$\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) = -\frac{1}{W^*} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_0} \quad (10.8)$$

が得られる。一般に、 $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ 、 $\varepsilon - \varepsilon_1$ は小さいので、2次以上の項を省略しても大差ない。そのときは

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 &= -\frac{1}{W^*} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1} \\ \varepsilon - \varepsilon_1 &= -\frac{w_t}{W^*} = -\frac{1}{W^*} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} \end{aligned}$$

とよいから、この二式を辺々加えると

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = -\frac{1}{W^*} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} \right]_{\sigma=\sigma'} \quad (10.9)$$

が得られる。これが風車翼面上における境界条件である。ただし、この式の n_1 は、ピッチが $2\pi h$ の螺旋面の法線で、 W^* と直交する。

(10.9) 右辺の大括弧内を具体的に書いたのが、(4.6)、(4.7) である。(2.12) を使って、翼面に沿う積分を、 μ' 、 τ' の積分で表わすと

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} dr' \int_{s_1}^{s_2} ds' = \frac{h^2}{2} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \sqrt{1 + \mu'^2} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' \quad (10.10)$$

である。ただし、 τ_1 、 τ_2 は、翼の前後縁の τ 座標と

する。これを使うと、(4.6), (4.7) は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{l}{8\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk/\mu')(\mu\lambda - lk/\mu)}{\lambda + lk} \\ &\quad \times \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') I_{lk}(|\lambda| \mu_{<}) K_{lk}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{l^3}{4\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) I_{lk}(lk \mu_{<}) K_{lk}(lk \mu_{>}) \quad (10.12)$$

と書かれる。

これらを (10.9) に代入すると

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{1}{W^*} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma K\left(\frac{\tau - \tau'}{2}; \mu, \mu'\right) d\tau' \quad (10.13)$$

の形の $\gamma(\mu, \tau)$ に関する積分方程式が得られる。この核関数 K は

$$\begin{aligned} K(v; \mu, \mu') &= -\frac{l\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk/\mu')(\mu\lambda - lk/\mu)}{\lambda + lk} \sin(\lambda + lk) v I_{lk}(|\lambda| \mu_{<}) K_{lk}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \\ &\quad - \frac{l^3 \sqrt{1+\mu'^2}}{4\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) I_{lk}(lk \mu_{<}) K_{lk}(lk \mu_{>}) \end{aligned} \quad (10.14)$$

であって、 $(1+\mu^2)K$ は、 μ, μ' に関して対称となる。この核関数は、プロペラの場合と全く同形である。風車では、プロペラの場合に対し、 $\partial/\partial n'$, $\partial/\partial n$ ともに逆符号、この二つがかかって、正号となるからである。

核関数 (10.14) は、そのままの形では、数値計算がむづかしいので、実際の計算には、速度ポテンシャル (3.7) を法線方向に微分して求めた吹き上げ w を使うのがよい。プロペラの場合と全く同形なので³⁾、結果だけ記すと

$$\begin{aligned} K(v; \mu, \mu') &= -\frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\mu \mu' v + \sin(v - 2m\pi/l)}{\{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu \mu' \cos(v - 2m\pi/l)\}^{3/2}} \\ &\quad - \frac{3\sqrt{1+\mu'^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{-\infty}^v \frac{t \sin(t - 2m\pi/l)}{\{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu \mu' \cos(t - 2m\pi/l)\}^{5/2}} dt \end{aligned} \quad (10.15)$$

である。この関数には、 $\mu = \mu'$ に 2 位の極があるので、(10.13) は発散積分となるが、揚力面理論でよく知られているように、有限部分をとる。積分方程式 (10.13) は、すでに数値的に解かれていて¹⁶⁾、計算プログラムで、公表されたものもあるから、それを利用すれば、 γ の分布形を求めることは容易である。その結果を積分すれば、風車の抵抗係数、パワー係数を算出することができる。

11 揚力線の積分方程式

Munk の定理Ⅲを使うと、揚力線の積分方程式は、いとも簡単に導かれる。その呆気無さは、第 9 節の後半でも見ることができる。(9.11) には、Munk の定理が、暗黙のうちに、使われているわけである。しかし、本節では、それをしないで、揚力面理論から揚力

線の方程式を導くことを、少し丹念に行ってみる。これにはそれなりの理由がある。船用プロペラの最適設計の揚力線理論では、(9.11) に対し、揚力面補正項を添えたものが一般化している。その理論を理解し、また翼の縦横比の大きい風車への対応策を考えておく意味もあって、以下のような、複雑な計算を記載するわけである。

先づ、揚力面の積分方程式の核関数 (10.15) の形を変えることから始める。

$$\left. \begin{aligned} B(v, \mu') &= v^2 + \mu'^2 \sin^2 \varphi, \\ R(v; \mu, \mu') &= \sqrt{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu \mu' \cos \varphi} \\ &\text{と置くと} \\ (\mu - \mu' \cos \varphi)^2 &= R^2 - B(v, \mu') \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

である。そして

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu\mu'v + \sin\varphi}{R^3} &= \frac{\partial}{\partial\mu} \left[\frac{-\mu'vB(v, \mu') + (\mu'^2v \cos\varphi + \sin\varphi)(\mu - \mu' \cos\varphi)}{B(v, \mu') \cdot R} \right] \\ \frac{3}{R^3} &= \frac{\partial}{\partial\mu} \left[\frac{\mu - \mu' \cos\varphi}{B(v, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(v, \mu')} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (11. 2)$$

であるから, (10. 15) は

$$\begin{aligned} K(v; \mu, \mu') &= -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial\mu} \left[\frac{-\mu'vB(v, \mu') + (\mu'^2v \cos v_m + \sin v_m)(\mu - \mu' \cos v_m)}{B(v, \mu') \cdot R} \right] \\ &\quad - \frac{\sqrt{1+\mu'^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial\mu} \int_{-\infty}^v t \sin t_m \left[\frac{\mu - \mu' \cos t_m}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{B(t, \mu')} \right\} \right] dt \end{aligned} \quad (11. 3)$$

と書かれる. ただし, $v_m = v - 2m\pi/l$, $t_m = t - 2m\pi/l$ である.

v, t の小さな値に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\mu'^2v \cos v + \sin v)(\mu - \mu' \cos v)}{B(v, \mu') \cdot R} &\sim \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{v} \\ \frac{2t \sin t \cdot (\mu - \mu' \cos t)}{B^2 \cdot R} &\sim \frac{2\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (11. 4)$$

であるから, (11. 3) を,

$$\begin{aligned} K(v; \mu, \mu') &= -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{\partial}{\partial\mu} \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{v} - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{\partial}{\partial\mu} \int_{\varepsilon \operatorname{sgn} v}^v \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{t^2} dt \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{\partial}{\partial\mu} \left\{ \sum_{m=0}^{l-1} \frac{-\mu'vB(v, \mu') + (\mu'^2v \cos v_m + \sin v_m)(\mu - \mu' \cos v_m)}{B(v, \mu') \cdot R} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{v} \right\} - \frac{\sqrt{1+\mu'^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial\mu} \int_{\varepsilon \operatorname{sgn} v}^v \left[\sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m \cdot (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{B(t, \mu')} \right\} - \frac{2\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2} \right] dt - \frac{\sqrt{1+\mu'^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial\mu} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m \cdot (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{B(t, \mu')} \right\} dt \end{aligned} \quad (11. 5)$$

と書くと, K の $v=0$ における特異性は, (11. 5) の右辺第1項, 第2項に取り出され, 第3項以下には, それがない. ε は正の小さい数で, これを有限にとったのは, 積分方程式 (10. 13) で, 発散積分の有限部分をとることと同等である.

揚力面の積分方程式 (10. 13) の核関数として, (11. 5) の形を採用すると, それは

$$\tilde{\alpha}_\eta = \frac{1}{2\pi W^*} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\gamma}{\tau - \tau'} d\tau' + \alpha_i + u \quad (11. 6)$$

ただし,

$$\alpha_i = -\frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{W^*} \frac{\partial}{\partial\mu} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma (1+\mu'^2)^{3/2} d\tau' \int_{-\infty}^{\varepsilon} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m \cdot (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(t, \mu')} \right\} dt \quad (11. 7)$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{W^*} \frac{\partial}{\partial\mu} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \\ &\quad \times \left[\frac{1}{1+\mu^2} \left\{ \sum_{m=0}^{l-1} \frac{-\mu'vB(v, \mu') + (\mu'^2v \cos v_m + \sin v_m)(\mu - \mu' \cos v_m)}{B(v, \mu') \cdot R} - \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{v} \right\} \right. \\ &\quad \left. + (1+\mu^2) \int_{\varepsilon \operatorname{sgn} v}^v \sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m \cdot (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(t, \mu')} \right) - \frac{2\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2} \right] dt \end{aligned} \quad (11. 8)$$

のように表わされる。ここに、 $\bar{\alpha}_g = \varepsilon - \varepsilon_0$ である。

風車翼の縦横比が大きいときは、 u は他に比べて小さい量となる。

無次元量

$$\xi = (\tau - \tau_0) / \bar{\tau}, \quad \bar{\tau} = (\tau_2 - \tau_1) / 2, \quad \tau_0 = (\tau_1 + \tau_2) / 2 \quad (11.9)$$

を用いると、(11.6) は

$$\bar{\alpha}_g - \alpha_i - u = \frac{1}{2\pi W^*} \oint_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' \quad (11.10)$$

と書かれる。これより γ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{W^*} = & -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{\bar{\alpha}_g - u}{\xi - \xi'} d\xi' \\ & - 2\alpha_i \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \end{aligned} \quad (11.11)$$

となる。この式の両辺を、 s で s_1 より s_2 まで積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{W^*} = & \frac{1}{W^*} \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds = \frac{h\sqrt{1+\mu^2}}{2W^*} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau \\ = & \frac{\bar{\tau}h\sqrt{1+\mu^2}}{2W^*} \int_{-1}^1 \gamma d\xi \end{aligned}$$

であるから、 $2c = \bar{\tau}h\sqrt{1+\mu^2}$ と置くと

$$\frac{\Gamma}{W^*} = 2c \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} (\bar{\alpha}_g - u) d\xi' - 2\pi c \alpha_i \quad (11.12)$$

となる。(2.12) より、 $2c$ は翼素の翼弦長に該当することがわかる。

Munk の定理 III より

$$\alpha_i = -\frac{w_{l_1}}{W^*} \bigg|_{\sigma=\sigma'} = -\frac{1}{W^*} \frac{\partial \phi_{l_1}}{\partial n} \bigg|_{\sigma=\sigma'} \quad (11.13)$$

であるから、(4.7) または、(10.15) より

$$\begin{aligned} \alpha_i = & -\frac{l^3 \sqrt{1+\mu^2}}{2\pi W^* h \mu} \int_{\mu_b}^{\mu_0} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) d\mu' \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} k^2 I_{lk}(lk\mu_<) K_{lk}(lk\mu_>) \end{aligned} \quad (11.14)$$

または、

$$\begin{aligned} \alpha_i = & -\frac{3\sqrt{1+\mu^2}}{4\pi W^* h} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\mu_b}^{\mu_0} \Gamma(\mu') (1+\mu'^2) d\mu' \\ & \times \int_{-\infty}^0 \frac{t \sin t_m}{\{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos t_m\}^{3/2}} dt \end{aligned} \quad (11.15)$$

のように表わされる。これらの式は、(11.7) から直接導くこともできる。

(11.12) と (11.14)、または (11.15) を組み合わせたものが、風車揚力線の積分方程式である。(11.8) の u は、揚力線に対する揚力面補正を意味する項で、翼の縦横比が大きいときは、省略してよい。

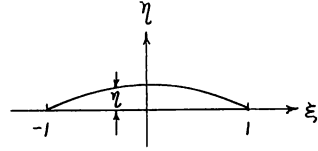


図 10

翼素の平均矢高線の高さ \hat{z} を翼弦長 $2c$ で割ったものを $\eta = \hat{z}/(2c)$ とする。矢高線形状が放物線型で、その最大値を η_{max} 、基準線に対する迎角を α_g とすると、

$$\bar{\alpha}_g = \alpha_g + 2\eta_{max}\xi \quad (11.16)$$

である。 η_{max} と零揚力角 α_0 の関係は

$$2\eta_{max} = -\alpha_0 \quad (11.17)$$

であるから、これらを、(11.12) に代入して、 ξ' の積分を行うと

$$\Gamma/W^* = 2\pi c (\alpha_g - \alpha_0 - \alpha_i) \quad (11.18)$$

が得られる。これは、直進翼の Prandtl 揚力線の積分方程式と同じ形である。河田¹⁷⁾、守屋¹⁸⁾、近藤¹⁹⁾のプロベラ理論は、最終的には、この方程式の数値解法を研究したものであった。

ところで、風車では、翼の一部が失速状態にあるものを計算する場合がある²⁰⁾。Prandtl 揚力線は、そのような場合にも使えるので²¹⁾、それを風車に利用してみる。

翼素の揚力に、Kutta-Joukowski の定理を適用すると、

$$\rho W^* \Gamma = \rho W^* c C_l \quad (11.19)$$

となる。 C_l は揚力係数であるが、それに対し、2次元薄翼理論によるものを使って

$$C_l = 2\pi (\alpha_g - \alpha_0 - \alpha_i)$$

としたのが (11.18) である。直進翼の Prandtl 揚力

線の理論では、実験係数 k を入れて、 $C_l = 2\pi k(\alpha_0 - \alpha_i)$ としている。それをさらに拡張し、(11.19) の C_l として、翼型の実験結果を、失速後まで、そのまま使う。 C_l を迎角 α の関数とみなし、 $C_l(\alpha)$ で表わすと、(11.18) は

$$\Gamma/W^* = cC_l(\alpha_0 - \alpha_i) \quad (11.20)$$

と書くことができる。この式の α_0 は、翼型の基準線（風車では、翼弦を通る e_0 の方向）に対する迎角で、それに対して、 C_l の実験値が示されているものとする。(11.20) の具体的計算法は、(11.15) によって α_i を計算し、 $\alpha_0 - \alpha_i$ の迎角における C_l を、翼型実験の資料から読みとり、それを (11.20) に代入して、 Γ を求める。 α_i および、螺旋面のピッチ $2\pi h$ に含まれる w_a, w_i は Γ の関数であるから、計算は逐次近似の行方。

12 揚力線の束縛渦

揚力線理論の場合、自由渦はよいとして、束縛渦に関する限り、他の翼の誘導速度は考慮しないことになっている。Munk の定理Ⅲに準拠しているわけであるが、その点について、もう少し立ち入った考察を行ってみる。

先づ、対称に配置された、揚力線の束縛渦の誘導速度を求める。Biot-Savart の法則によれば、強さ Γ の渦糸の微小部分 ds による誘導速度 dv は

$$dv = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[ds \times r]}{R^3} \quad (12.1)$$

で与えられる。ただし、 $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ 、 r は R をベクトルとして表わしたものである。また、点 (x', y', z') は ds の位置、 (x, y, z) は任意点の座標とする。 ds が $x=x'$ の面の動径上にあるとして、(12.1) を円柱座標の成分に分けて書くと

$$\left. \begin{aligned} dv_x &= -\frac{\Gamma dr'}{4\pi R^3} r \sin(\theta - \theta') \\ dv_t &= \frac{\Gamma dr'}{4\pi R^3} (x-x') \cos(\theta - \theta') \\ dv_r &= \frac{\Gamma dr'}{4\pi R^3} (x-x') \sin(\theta - \theta') \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

である。

束縛渦が、図11のように対称に並んだ場合を考える。(12.2) を半径方向に積分し、 $\theta' = 2m\pi/l$ として、各翼のものを加え合すると

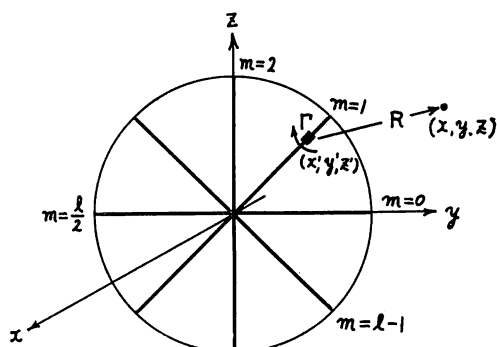


図 11

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, r, \theta) &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma' \cdot \frac{r \sin(\theta - 2m\pi/l)}{R^3} dr' \\ v_t(x, r, \theta) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma' \cdot \frac{(x-x') \cos(\theta - 2m\pi/l)}{R^3} dr' \\ v_r(x, r, \theta) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma' \cdot \frac{(x-x') \sin(\theta - 2m\pi/l)}{R^3} dr' \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

となる。これが、束縛渦の誘導速度である。ただし、

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - 2m\pi/l)}$$

である。

v_x で、 $\theta=0$ とすると

$$v_x(x, r, 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{l/2-1} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma' \cdot \frac{r \sin 2m\pi/l}{R^3} dr' + \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{l/2-1} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma' \cdot \frac{r \sin(\pi + 2m\pi/l)}{R^3} dr' = 0 \quad (12.4)$$

となる。同様に

$$v_r(x, r, 0) = 0 \quad (12.5)$$

である。また、(12.3) より

$$v_t(x, r, \theta)|_{x=x'} = 0 \quad (12.6)$$

となる。つまり、揚力線の束縛渦の誘導速度は、翼の位置では、各翼のそれらが消し合って0になる。結局、束縛渦に関する限り、一つの翼の上では、それ自身の誘導速度だけを取り上げればよい。これが、前節の揚

力線理論成立の根底にあるわけである。

揚力線の束縛渦の誘導速度を計算したので、もう一度、第3節、第4節の解析について考えてみる。 Φ_I は、当然、自由渦だけで構成されるものであるが、 Φ_{II} には、束縛渦と自由渦の両方が含まれる。その、吹き上げとしての表われ方である(4.8)は、束縛渦の性質そのものである。一方、(3.8)、(3.9)より、半径方向誘導速度を求めると

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial r} \Big|_{r=r'} = \frac{l}{4\pi^2 h^2} \int_{r_0}^{r_0} \Gamma dr' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - lk/\mu'}{\lambda + lk} \frac{\partial}{\partial \mu} [I_{lk}(|\lambda|/\mu_<) K_{lk}(|\lambda|/\mu_>)] d\lambda = 0 \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial r} \Big|_{r=r'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial r} \Big|_{r=r'} = 0 \quad (12.8)$$

となる。(12.5)によると、束縛渦の誘導速度の v_r は0になるので、(12.7)は束縛渦のものではなく、自由渦の誘導速度、特に、(12.8)を参照すると、自由渦の始点の影響を表わしていることがわかる。したがって、揚力線の、回転面における、自由渦の速度場は、 Φ_I だけで表わされるものではない。第6節のMunkの定理Ⅲが、吹き上げに限定しているのは、上記の事実に基づいている。

考察を再び(12.3)にもどす。 v_x が翼面の処で0になること、 v_t が翼の前と後で反対称になることは、食い違い角が0の翼列の流場に似ている。翼数が非常に軸流圧縮機等では、羽根車の2次元翼特性に、翼列の資料を使うのは、こうした流場の性質を考慮してのことである。しかし、プロペラや風車のように、翼数の少ないものでは、翼間干渉よりも、一つの翼の揚力面としての3次元効果の方が、吹き上げに及ぼす影響は大きい。船用プロペラの最適設計理論で、揚力面補正を行っていることは、すでに述べたが、その理論では、shock free entryが条件になるので、揚力面補正項の計算がやり易い。しかし、現在では、揚力面理論による、性能計算用のプログラムが完備してきているので、それを使って、試行錯誤的に最適設計を行う方が、応用範囲を広げることができて、よいように思う。風車についても同じことが云えるわけで、翼の縦横比が大きいとき、または、翼に効率向上のための附加物を付けるような場合、その設計および性能計算には、揚力面理論を使うとよい。

あ と が き

筆者の「プロペラの基礎理論」3編は、解説としての要素が含まれ、しかも10年間にわたり、逐次書き継がれたものであるから、重複や論理の不統一があった。この風車理論では、上記プロペラ理論を転用した部分は多いが、全編を統一して、研究論文の形に書き表わした。揚力線理論の思想で貫ぬかれているのは、風車の性格からみて、当然のなりゆきだろう。線型理論の枠内で解析を行うと、理論は極めて明快なものになるが、計算と実験の食い違いが目立つのが欠点である。定ピッチ非線型理論は、線型理論の明快さを保ちながら、実用上でも、よい成果を得ている。実際の流体運動に近付けるため、流体モデルに、さらに改変を加えたら、おそらく、統一的理論を構成することが、むづかしくなるだろう。そういう意味で、本編は、一つの寄りどころとしての役割を果たすものと思う。

風車理論とプロペラ理論は、ほとんど同じようなものと考えてよい。重要事項を列記すると、

1. 翼表面の圧力分布を求める揚力面の積分方程式は、風車とプロペラで、全く同形である。
2. エネルギー損失極小の循環分布は、風車とプロペラで全く同じ、Goldsteinの解が使える。
3. 最適プロペラの設計に使われるKramer図表を、風車に転用することはできない。

である。

本編で扱った、標準的作動状態でなく、例えば、流れが斜めに流入する場合は、どう考えるか、といった問題がある。その場合、性能は当然落ちることになる

が、傾斜角の2次のorderでしか効かないので、それは問題としなくてよい。むしろ、斜めの流入は、風車翼または回転軸に生じる起振力が、問題とされる可能性がある。この種の課題に対して、船用プロペラの非定常理論が、そのまま使えることは、本文の解析を見れば明らかである。

参 考 文 献

- 1) Glauert, H., "Airplane Propellers", Durand, W. F., Aerodynamic Theory, Vol. IV, Springer, Berlin, 1935.
- 2) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論 (特に Munk の定理と揚力線理論について)", 船研報告, 第5巻, 第6号, 昭和43年.
- 3) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論—II (定ピンチ非線型理論)", 船研報, 第8巻, 第1号, 昭和46年.
- 4) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論—III (discrete loading function によるプロペラ揚力面の二つの解法)", 船研報告, 第14巻, 第6号, 昭和52年.
- 5) Gersten, K., "Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis", Ingenieur-Archiv, Bd. 30, 1961.
- 6) Gray, A. and Mathews, G. B., "A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics", 1922.
- 7) Lamb, H., "Hydrodynamics," 6th edition, 1932.
- 8) 守屋富次郎, "プロペラ翼における Biot-Savart の法則の積分に就いて", 日本航空学会誌, 第9巻, 第89号, 昭和17年.
- 9) Durand, W. F., "Aerodynamic Theory" Vol. II pp. 132, Springer, Berlin, 1935.
- 10) プラントル, ティチェンス, "航空流体力学", 生産技術センター, 昭和50年.
- 11) Betz, A., "Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust", Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927.
- 12) Goldstein, S., "On the Vortex Theory of Screw Propellers", Proc. of Roy. Soci. (London), Series A, Vol. 63, 1929.
- 13) Eckhardt, M. K. and Morgan, W. B., "A Propeller Design Method", Transaction of the Naval Architects and Marine Engineers, 1955.
- 14) Kawada, S., "The Vortex Theory of Air-screw and Some of its Applications", 造船協会会報, 第40号, 昭和2年.
- 15) Kramer, K. N., "Induzierte Wirkungsgrade von Best-Luftschrauben endlicher Blattzahl", Luftfahrtforschung, Bd. 15, 1938.
Kramer, K. N., "Weiterführung von Goldsteins Lösung des Optimalproblems für Schraubenpropeller", Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, 1941.
- 16) Koyama, K., "On Application of the Lifting Surface Theory to Marine Propellers", 13th Symposium on Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research, 1980.
- 17) Kawada, S., "Calculation of Induced Velocity by Helical Vortices and Its Application to Propeller Theory", Rep. of Aero. Res. Inst. Tokyo Imperial University, Vol. XIV, 1939.
- 18) Moriya, T., "On the Induced Velocity and Characteristics of a Propeller", J. of the Faculty of Engineering, Tokyo Imperial University, Vol. XX, No. 7, 1933.
- 19) Kondo, K., "The Potential-theoretical Fundamentals of Aerodynamics concerning the Screw Propeller", the Memo of Faculty of Eng. Kyushu Imperial University, Vol. IX, No. 3, 1942.
- 20) 森山安久, 今井行範, 上ノ町浩司, "風車の空力特性に関する研究 (I)", 鹿児島大学工学部, 機械工学科, 昭和55年度卒論.
- 21) Multhopp, H., "Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln", Luftfahrtforschung, Bd. 15, 1938.