複素解析関数の値分布を与える境界値

柊　原　健　明

(受理　昭和53年5月31日)

A BOUNDARY VALUE AS THE VALUE DISTRIBUTION FOR THE ANALITIC FUNCTION

Kenmei KUKIHARA

A theory is given on a method for finding zeros of any polinomial and finding zeros and poles of transcendental functions.

1. 序

任意次数の代数方程式及び，超越方程式の複素根を求める解法の理論を与える．複素解析関数 $f(z)$ は，ある領域での値が他の領域での値まで決定する筈であるから，$f(z)$ の小領域での振舞から遠方の領域での $f(z)$ の極の位置や，$f(z)=a$ なる a 点の位置を，直接知ることが出来れば，理論的にも応用面でも重要な価値を持つであろう．その手段を探すとなると，しかしながら，２つの決定的な困難に出会う．その１つは解析接続が一般には困難に導くことである。級数展開には扱い易い係数が現れるとは限らない．例えば，積分表示等の関数表示は関数の振舞を知るのを困難にしてしまうのが普通である．鏡像の原理は特殊な場合でしか実用的でない．これは逆関数を求めるという本質的な困難さからくる．$f(z)$ の実部，虚部を数値的に解析的延長させることは，ラプラス方程式の不適切境界値問題であるという障害がある．

第２の困難は，次の様なものである．$f(z)$ が，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

の形に与えられているとする．

$$f(z)=0,\ \text{又は}\ a,\ \text{もしくは}\ \infty \tag{2}$$

なる方程式について，たとえ，(1) の右辺の級数の収束域もわかったり，更にその外側への解析接続も行われたとしても，この方程式の有効な解法がない様にみえることである．強いて根を求めるとすれば，複素平面を網目に区切って，偏角の原理で根の存在範囲を狭めていくしかない．この方法によれば，調べたい領域の径を R，根の位置の精度を $\pm r$ で押えると，$(R/r)^2$ 程度の多数回にわたる周回積分の操作を必要としよう．

有限次数の方程式については，偏角の原理を積分なしですませ，網目のとり方にも工夫の入った，レーマー法がある．又，逐次近似の方法も多種行われている．が，これらは，数100次までが計算機の機能の限度であろう．次第に誤差が集積されることとか，次数 n の増大に伴って，計算時間が $O(n)$ より大きく増えていくことなどによる．根をある領域内に押える為の定理の操作は恐らく，$n!$ の様な増え方をしよう．

本報告では，先ず，非常に高次の方程式の根についての考察を行う．次に，解析接続なしに任意次数の関数の零点及び極の分布を定め得る一般性のある方法について，基本的なアイデアを示す．それは，理論的に充分単純なものであるので，数値計算の用途にも利用可能であり，又，そのときの精度の評価も可能である．

2. 方程式の解について

n 次方程式の解法は，２次元に広がる複素平面の無限個の点の中から，n 個の点を選ぶ操作であるが，n の増大に伴って，その概念が変化するであろうことに注意しなければならない．$n\leqq 4$ の場合，根の公式は，有限回の代数的演算を示す．根号を開くことまで入れると，一般には無限回の操作になるが，精度に応じて，これは有限回で打切られる．$n\geqq 5$ の方程式について行われている方法は，n 個の根を一挙に，あるいは１個又は２個ずつについて，無限回の操作を経て n 個

の複素数値に到達する．実用上は，これは有限回で打切られる．

さて，次数 n が大きく増大してくると，たとえ n 個の解が何らかの方法で得られたとしても，もはや列記された数値を読みとるだけでも大変な作業になってくる．解の低次に於ける様な意味は薄れてくる．解を要求している問の性格が変化してきているのである．根のグループについての，一般的な性質，例えば，ある線の上にあるかどうかとか，ある領域に於る零点の分布密度の様子等，こういう問にも解は答えるように要求されてくるであろう．もちろん，重要な地点に於ては，根の1つずつについての数値も要求されよう．

この情況に於て，更にもう1つ，低次の場合には存在しなかった次の様な要請も現れる．即ち，n 個の根を全て求めてしまえば，その他の全複素平面には，零点は存在しないという保証が得られない．それ故に，零点の分布を知るには，零点の位置を要求された精度で算出すると同時に，問題の領域内の他の全ての点上には，零点のないことをも算定しなければならないのである．低次に於ても，上の保証は不完全である．計算機はその誤差以下の小さな $f(z)$ の値はゼロと判定してしまう．次の節では以上の要請に答える様な解の形について考察を進める．

3. 解の形式について

与えられた問題の関数 $f(z)$ として，n 次多項式，及び，無限次数，ここでは，有限位数 ρ の超越整関数までを考える．有理型関数まで広げたりすることに困難はない．

さて，解法とは，$f(z)$ に対して，ある操作を施して，$f(z)$ から，零点の位置以外の情報を，消去していき，最後に，零点の位置情報のみを取出す作業である．最も原始的には，問題の2次元領域内の全ての点で $f(z)$ の値を計算し，$f(z)=0$ なる z の値のみ拾い集め，他の情報は捨て去ることである．

この作業を行ってくれる，出来る限り簡単な演算子は次の様なものであろう．零点を $z_r=x_r+iy_r$, $r=1,2,3,\cdots$ と記すと，

$$2\pi\Delta Re\, ln f(z)=\sum_r\delta(x-x_r)\delta(y-y_r) \qquad (3)$$

左辺の演算は，各点で行わなければならないので，先の原始的なものと，同程度である．又，超関数であるので，数値計算には適さないが，その点は $ln|f|$，の調和性を少し崩して，例えば，$ln||f|+\alpha|$ の採用で，ディラックの δ 関数は，少しなめらかになる．α は精度位の小さな量である．

これらを，y について2重積分してみる。

$$-2\pi\int_{-\infty}^{0}dy'\int_{-\infty}^{y'}dy\Delta ln|f(z)|=\sum_{y_r<0}y_r\delta(x-x_r) \qquad (4)$$

右辺は1つの実変数 x のみの（超）関数であるにもかかわらず，2次元平面内の，下半面のみではあるが，点分布の情報を荷負っている．左辺の計算には，依然として問題は残るが，右辺の形は解として，次の意味で完全に近いと考え得る．即ち，零点及び非零の分布の情報を持つ，可能な限り単純な形式と言えよう．上下両半面の解を示す様な変形は容易であるが，ここでは要らない．さて，もし，右辺を直接，左辺を経ずに，計算できるならば，その計算量は，1次元空間内の各点についてであるので，先の $(R/r)^2$ に対して R/r の程度ですむ訳である．

次の節では，なるべく右辺の形式に近いもの，そして，なるべく単純な演算によって得られるもの，という2条件を，ある程度実現する1つの例を示す．

4. 解　　法

微分演算は1回実行する毎に，関数から情報を1つずつ消去してゆく作用があることに注意する．微分された関数を，積分によって復元しようとしても，情報が1つ，積分定数の決定，がなければ不可能である．

整関数は，解析性なるものの強い現れとして，次の因数分解が Hadamard の定理によって定まる．

$$f(z)=e^{Q(z)}P(z) \qquad (5)$$

但し $P(z)$ は canonical product,

$$P(z)=\prod_r E\left(\frac{z}{z_r},p\right), \qquad (6)$$

$$E(u,p)=(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}} \qquad (7)$$

$p\leqq\rho$, $Q(z)$ は高々 ρ 次の多項式である．

$f(z)$ の対数の m 回微分をつくる．$m>\rho$ としておく．すると，これは (5) に依って，

$$\frac{-R^m}{(m-1)!}(ln f(z))^{(m)}=\sum_r\frac{R^m}{(z_r-z)^m} \qquad (8)$$

零点のところに m 位の極をもつ単純な分数の重ね合わせに過ぎないことがわかる．R は適当な定数である．

この関数の，実軸に於る境界値を $F_m(x)$ と記すと，

$$F_m(x)=\sum_r\frac{R^m}{(x_r-x+iy_r)^m} \qquad (9)$$

関数 $F_m(x)$ の簡単な形から，次のことは，ほとんど自明である．$F_m(x)$ の絶対値 $|F_m(x)|$ は，点 x からみて最も近い零点からの寄与が最大になる．他の全ての零点からの寄与の合計が有限であることは，$m>\rho$ であることによる (9) の級数の収束性からわかる．そして，その大きさは，m を大きくすることによって，いくらでも小さく出来るのである．一方，最近接零点からの寄与は，$x=x_r$ の地点で最大値 $(R/y_r)^m$ を取る．この値は，R と m の大きさを適当にとることにより，いくらでも大きくすることが出来る．こうして $|F_m(x)|$ は，ところどころ，即ち，$x=x_r$ の極めて近いところで鋭い peak を持たせることが出来る．この，点 x_r を，x_r の近似値としてよい．又，peak の値から y_r の近似値を得るが，後述の様に，更に $R_e i^m F_m(x)$ の形から，より高精度の x_r, y_r の値を得るだろう．但し，ここに現れる r は，全ての零点についてではない．実軸からみて近いところにある零点群に限られる．近いということの意味は，その零点から実軸までの距離 y_r よりも，他の全ての零点と，実軸上の点 x_r との間の距離の方が大きいとき，近いということになる．言いかえると，実軸上の点 x_r から最も近い零点が $z_r=x_r+iy_r$ であるとき，この零は実軸から近いということにする．近くない零点については，近い零点のつくる鋭く高い peak に隠されてしまう．遠い零点は同じ m と R に対しては，鈍くて低い peak しかつくらない．この点は，関心のより大きい近方の零点を，より高精度で，先に知りたいときは利点となる．遠いところにある多数の零点の影響を分離することもなく，比較的小さな m の値でも近方の零点を決定し得る．一旦，近方の零点 z_r が求まれば，$F_m(x)$ から，近方零点からの寄与の引算が可能になるので，次の段階として，より遠方の零点を決定できる．

数値計算の際は，$|F_m(x)|$ であるいは $F_m(x)F_m{}^*(x)$ で大体の peak がわかったら，その peak 付近のみで，$R_e i^m F_m(x)$ の振舞を調べて，より高い精度が得られよう．$R_e i^m F_m(x)$ は $|F_m(x)|$ より激しく振動する関数であり，その peak 付近の様子をみると，互に近い零点同志の分離も，m を大きくして充分になされているとき，$x=x_r$ 付近に於て，

$$R_e i^m F_m(x) \cong R_e \frac{R^m}{(i(x-x_r)+y_r)^m}$$
$$\cong \left(\frac{R}{y_r}\right)^m \left(1-\frac{m(m+1)}{2}\left(\frac{x-x_r}{y_r}\right)^2\right) \tag{10}$$

となる．よって計算が l 桁の精度で行われるとすれば，

$$10^{-l} \cong \frac{m(m+1)}{2}\left(\frac{x-x_r}{y_r}\right)^2$$

から，大体

$$x=x_r \pm \frac{y_r}{m}\cdot 10^{-l}$$

の程度に x_r が定まり，実軸からの距離に比例して，大きな m が，精度の保持に必要であることがわかる．

根が q 重根であるとき，その判定は例えば，異る m についての peak の比較から，q の値を求め得る．

もし，$f(z)$ が零点以外に極も持つときは，同時に極の位置も決定される．極からの寄与は，符号が逆になるのみで，あとは零点についてと全く同様に扱える．

有限の点へ集積する零点や，真性特異点については以上の議論は成立しない．異る現象が生じ，これは又別な研究対象である．位数無限大の関数や，有限な地点にある真性特異点については，性格のわかった関数での割算とか，変数変換により，特異点を無限遠に追い出す等の工夫が必要である．

5. 結　　語

任意次数について解を得られると同等に重要と考えられることは，零点の決定に関数 $F_m(x)$ の実軸上の値しか要らないという点である．関数 $f(z)$ の表示が，例えば，遠方では収束域からはずれるということがあっても，全く構わないのである．又，境界値としては別に実軸でなくても構わないし，例えば円周上の値であっても，これまでの議論には，わずかの変更しか要しないということは，狭さを要求される peak の巾の範囲で円周は直線で近似可能なことから明らかである．解析接続不要ということの利用例を1つ挙げると Riemann の zeta 関数について，$R_e z>1$ でのオイラー積表示と，その対数の無限回積分が，$0<R_e z<1$ に於るいわゆる自明でない零点とを直接に結び付ける式を導くことが可能である．

数値計算への利用をみると，(9) 式までには全く近似は含れていないし，又，あとの段階も，$F_m(x)$ の値を計算するだけ，ないしは，$F_m(x)$ の極値問題のプログラミングのみで，特に困難はない筈である．計算量からみると，実軸よりも，円周の方が長さ有限で，この点は有利である．しかしながら，円周からみたときの近接零点群の個数は，一般に減少しよう

(4) の形に更に近いものは

$$\left|\sum_{r}\frac{y_{r}^{m+1}}{(x_{r}-x+iy_{r})^{m}}\right| \tag{11}$$

である。$m\to\infty$ の極限では，定数倍を別にして (4) に一致しよう．しかし，この形を実現する演算がみつかるかどうかはわからない．探すとすれば，(11) は和の形であるから，線型演算であり，数値計算の便も考えると，積分演算子はよくない．局所的な演算子の範囲でなければならない．

謝 辞

任意次数の方程式の解法があるかないかの調べに当って，数値解析のテキスト類を紹介頂いた田中助教授に感謝します．