横衝撃荷重を受ける Timoshenko はりの過渡応答

田中　豊・冨地豊子

(受理　昭和53年5月31日)

THE TRANSIENT RESPONSES OF THE TIMOSHENKO BEAMS UNDER TRANSVERSE IMPACT

Yutaka TANAKA and Toyoko TOMICHI

The transient responses of Timoshenko beams under transverse impact are caluculated in this paper. Analysis was carried out with aid of the Laplace transformation for two types of loadings applied to semi infinite and infinite beams respectively. Solutions were derived in form of definite integrals from contour inversion integral of Laplace transformation. Integrations were performed by means of Simpson's method, using high speed electric computer.

The results obtained from numerical evaluation as follow:

(1) The evaluation at the region, $\tau/\alpha<\xi<\tau$, is very difficult except near the impact points.

(2) At the region, $\xi<\tau/\alpha$, this evaluation is carried out without difficulty to large τ, and can be used in practical.

1. まえがき

横衝撃荷重をうける無限長はりや半無限長はりの弾性域における過渡応答を求めるには，解析における基礎式として，通常はりの横振動方程式を用いるが，この方程式にはこれまでに2種類のものがある．その一つは曲げモーメントのみによるたわみを考慮したBernoulli-Euler の方程式であり，他はさらにはり断面の回転慣性とせん断変形を考慮した Timoshenko[1] の方程式である．これらのうち，前者は計算が比較的簡単であるために広く用いられているが，波動がはりを無限大の速さで伝わるという物理的矛盾を含んでいる．これに対して Timoshenko の方程式は，はりを伝わる波動の中で主な二つの波，すなわち曲げモーメント波およびせん断波が有限の速度で伝ぱする波動方程式でもあるので，非常に鋭い衝撃あるいは，はり断面の寸法がその長さに比べて大きな場合の解析に適しているばかりでなく，弾性応力波の伝ぱを考察するために最も適切な方程式であると考えられる．この理由から，従来より Timoshenko の方程式を用いて，種々の衝撃条件の下ではりの衝撃応答を解析した例は少くない．たとえば，Leonard[2] らは曲げモーメント波とせん断波の伝ぱ速度が等しい特別な場合について解析を試みたが，それに続いて Dengler[3] らや Boley[4] らはこれら二つの波の伝ぱ速度が異なる一般的な場合の応答解析を行なっている．上述の研究では，いずれもラプラス変換やフーリエ変換，またはその両者を併用して解析を行なっているが，逆変換の結果得られる定積分の数値計算に，高い計算精度が要求されるところからその計算は非常に繁雑かつ困難なものとなり，諸報告に見られる計算例も衝撃点の近傍の点について，また衝撃後比較的短かい時間についてのみ行なわれているに過ぎない．一方計算の実用化について，Flügge[5] ら，Jones[6] により，停留位相法等を用いて実用的な解を求める試みがなされてきたがいまだ充分に有効な手段が見出されるまでに至らず，このために Timoshenko 方程式に基づく解の計算は実用的でないとされてきた．しかし初期の電子計算機や desk calculator による計算の実用化を目標とした当時に比べ，電子計算機の性能の格段に向上した現在では，この計算における労力，繁雑さはいちじるしく軽減されたものと思われるが，Flügge ら以後 Timoshenko はりの応答について数値計算を行なった報告はほとんど見当らず，前報[7] で紹介した小高・中原の報告[8] においても，衝撃点における，曲げモーメントおよび荷重の計算例だけしか示さ

れていない.

本研究はこの数値計算の可能限界を明らかにすることを目的としたもので，断面一様の無限長はりの中央点および半無限長はりの一端にそれぞれ二種類の荷重条件を与え，ラプラス変換を用いて解析を行ない，主としてモーメントについてその逆変換をシンプソン積分により直接数値積分を行ない，その計算可能限界につき調査を行なったものである.

2. 理論解析

2.1 基 礎 式

図1の如く座標軸を設定し，はり断面の曲げモーメント M, せん断力 Q, 曲げモーメントのみによるたわみ角 ψ, 回転角速度 ω は矢印方向を正とすると

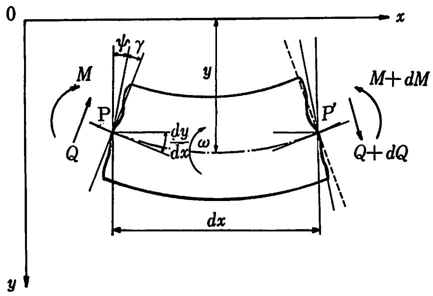


図1　はりの自由体図

$$\left.\begin{aligned}&\partial M/\partial x-Q+\rho I(\partial\omega/\partial t)=0 &\cdots(1a)\\&\partial Q/\partial x-\rho A(\partial v/\partial t)=0 &\cdots(1b)\end{aligned}\right\}\text{運動方程式}$$

$$\left.\begin{aligned}&EIK-M=0 &\cdots(1c)\\&k'AG\gamma-Q=0 &\cdots(1d)\end{aligned}\right\}\text{はりの力学的性質}$$

ここで，x；衝撃点を原点としたはりの軸方向の座標，y；はりのたわみ，t；時間，E, G, ρ；はり材料の縦弾性係数，横弾性係数，密度，I, A；はりの断面2次モーメント，面積，v；はりのたわみ速度，K, γ；曲率，せん断ひずみ，k'；断面の平均せん断応力と最大せん断応力との比である．いま

$$\omega=\partial\psi/\partial t,\quad K=-\partial\psi/\partial x,\quad \gamma=\partial y/\partial x-\psi \qquad \cdots(1e)$$

とすると，(1a) は (1d) と (1e) より

$$EI(\partial^2\psi/\partial x^2)+k'AG\{(\partial y/\partial x)-\psi\}-\rho I(\partial^2\psi/\partial t^2)=0 \qquad \cdots(2a)$$

(1b) は (1d) と (1e) より

$$\rho A(\partial^2 y/\partial t^2)-k'AG\{(\partial^2 y/\partial x^2)-(\partial\psi/\partial x)\}=0 \qquad \cdots(2b)$$

となる．そこで両式から ψ を消去して

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\left(\rho I+EI\frac{\rho}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\rho I\frac{\rho}{k'G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0 \qquad \cdots(3)$$

を得る．本式は，はり断面の回転慣性とせん断変形を考慮に入れた Timoshenko の横振動方程式である.

いま，Boley らと同様にすべての物理量を無次元化する.

$$\xi=x/r,\quad \bar{y}=y/r,\quad \tau=C_M t/r,\quad \bar{M}=Mr/(EI),$$
$$\bar{Q}=Q/(EA),\quad \alpha^2=E/(k'G)=(C_M/C_Q)^2 \qquad \cdots(4)$$

ただし r；はり断面の回転半径，C_M, C_Q；曲げモーメント波およびせん断波の伝ぱ速度である．そのとき (3) 式は

$$\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial\xi^4}+\frac{\partial^2\bar{y}}{\partial\tau^2}-(1+\alpha^2)\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial\xi^2\partial\tau^2}+\alpha^2\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial\tau^4}=0 \qquad \cdots(5)$$

となる．ここで $\bar{y}$ を使って曲げモーメント $\bar{M}$, せん断力 $\bar{Q}$, たわみ角 ψ を表わすと

$$\left.\begin{aligned}&\bar{M}(\xi,\tau)=-\{(\partial^2\bar{y}/\partial\xi^2)-\alpha^2(\partial^2\bar{y}/\partial\tau^2)\}\\&\bar{Q}(\xi,\tau)=(1/\alpha^2)\{(\partial\bar{y}/\partial\xi)-\psi\}\\&\psi=-\int\bar{M}\,d\xi\end{aligned}\right\}\cdots(6)$$

と書き表わすことができる.

つぎに，たわみ $\bar{y}$ の時間 τ についてのラプラス変換を $\tilde{y}=\int\bar{y}e^{-p\tau}d\tau$ で表わし，$\tau=0$ で $\bar{y}=\partial\bar{y}/\partial\tau=0$ なる条件の下で (5) 式をラプラス変換すると

$$\frac{\partial^4\tilde{y}}{\partial\xi^4}-(1+\alpha^2)p^2\frac{\partial^2\tilde{y}}{\partial\xi^2}+p^2\tilde{y}+\alpha^2p^4\tilde{y}=0 \qquad \cdots(7)$$

となり，(7) 式の解はつぎのようになる.

$$\tilde{y}=C_1e^{-\lambda_1\xi}+C_2e^{-\lambda_2\xi}+C_3e^{\lambda_1\xi}+C_4e^{\lambda_2\xi}$$

ここで，$\xi\to\infty$ で $\tilde{y}\to 0$ という条件を用いると $C_3=C_4=0$ となり

$$\tilde{y}=C_1e^{-\lambda_1\xi}+C_2e^{-\lambda_2\xi} \qquad \cdots(8)$$

が得られる．ただし，C_1, C_2 は境界条件によって定まる任意の p の関数，また $a=(\alpha^2+1)/2$, $b=(\alpha^2-1)/2$, $\lambda_1, \lambda_2=\sqrt{p}(ap\mp\sqrt{b^2p^2-1})^{1/2}$ である.

一方，(6) 式に対応するラプラス変換表示は

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{M}(\xi,p)=-\{(\partial^2\tilde{y}/\partial\xi^2)-\alpha^2p^2\tilde{y}\}\\&\tilde{Q}(\xi,p)=(1/\alpha^2)\{(\partial\tilde{y}/\partial\xi)-\tilde{\psi}\}\\&\tilde{\psi}=-\int\tilde{M}\,d\xi\end{aligned}\right\}\cdots(6)'$$

となる．そこで (8) 式を (6)′ 式に代入すると次式が得られる.

$$\left.\begin{aligned}\tilde{M}(\xi,p)&=C_1(\alpha^2p^2-\lambda_1{}^2)e^{-\lambda_1\xi}\\&\quad+C_2(\alpha^2p^2-\lambda_2{}^2)e^{-\lambda_2\xi}\\\tilde{Q}(\xi,p)&=-C_1(p^2/\lambda_1)e^{-\lambda_1\xi}\\&\quad-C_2(p^2/\lambda_2)e^{-\lambda_2\xi}\\\tilde{\psi}&=C_1\{(\alpha^2p^2-\lambda_1{}^2)/\lambda_1\}e^{-\lambda_1\xi}\\&\quad+C_2\{(\alpha^2p^2-\lambda_2{}^2)/\lambda_2\}e^{-\lambda_2\xi}\\\tilde{Q}(o,p)&=-C_1(p^2/\lambda_1)-C_2(p^2/\lambda_2)\end{aligned}\right\}\quad\cdots(9)$$

2.2 横衝撃荷重をうける無限長はりの応答計算

2.2.1 弾性棒がはりの中央点に衝突した場合

このときの解はすでに小高・中原により，はりと衝撃棒との弾性接触論を用いて求められているので，以下その手順によって計算を行なうことにする．

衝撃点におけるはりのたわみ角は対称の条件から0になるので，$\xi=0$ で $\tilde{\psi}=0$ および $\tilde{y}=\tilde{y}_0$ とおくと(8)式と（9）の第3式から

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\tilde{y}_0\frac{(\alpha^2p^2-\lambda_2{}^2)\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2+\alpha^2p^2)}\\C_2&=-\tilde{y}_0\frac{(\alpha^2p^2-\lambda_1{}^2)\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2+\alpha^2p^2)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots(10)$$

と表わすことができる．（10）式の $\tilde{y}_0$ は p の関数であり，棒とはりとの接触条件から求められる．この接触条件についてはすでに紹介した[7]のでその詳細は割愛して結果のみを述べる．

棒の衝突直前の重心速度を v とし，弾性棒の断面積を A'，棒材料の縦弾性係数を E'，棒を伝わる縦波の速度を C_M' とすると図2から明らかなように $A'\sigma'$ なる圧縮力は衝撃棒直下のはり部分の慣性力を無視す

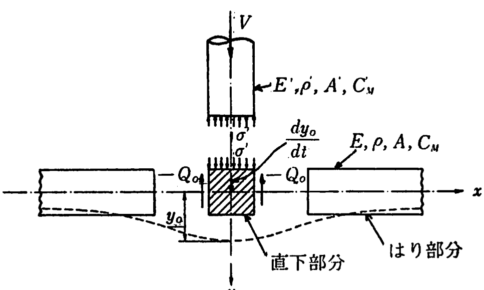


図2　接触条件（無限長はり）

ると，はり断面に働くせん断力 Q_0 とつり合わねばならないから

$$A'E'(V-dy_0/dt)+2Q_0=0 \quad\cdots(13)$$

が得られる．上式を（4）式に従って無次元化し，$\xi=0$ で $y=\tilde{y}_0$ という条件の下でラプラス変換すると

$$(1/\mu)\{\bar{V}/p-p\tilde{y}_0(o,p)\}+\tilde{Q}_0(o,p)=0 \quad\cdots(14)$$

ここで $\bar{V}=V/C_M$, $\mu=2AEC_M'/(A'E'C_M)$ である．

（9）の第4式と（10）式から $\tilde{Q}_0(0,p)$ を求め，（14）式に代入して $\tilde{y}_0$ を求めると

$$\tilde{y}_0=\frac{\bar{V}}{p^2}\frac{\sqrt{1+\alpha^2p^2}+\alpha^2p}{\sqrt{1+\alpha^2p^2}+\alpha^2p+\mu(\lambda_1+\lambda_2)} \quad\cdots(15)$$

が得られ，さらに（9）の第1式に（15）式を代入して

$$\tilde{M}(\xi,p)=\frac{\bar{V}}{p}\frac{\lambda_1e^{-\lambda_1\xi}-\lambda_2e^{-\lambda_2\xi}}{(\lambda_1-\lambda_2)\{\sqrt{1+\alpha^2p^2}+\alpha^2p+\mu(\lambda_1+\lambda_2)\}} \quad\cdots(16)$$

なる式が求められる．上述の場合について $\bar{M}(\xi,\tau)$ を求めるには（16）式の逆変換を行なう必要がある．いま（16）式の逆変換の手順を示すとつぎのとおりである．ここで

$$\bar{M}(\xi,\tau)=(1/2\pi i)\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(\xi,p)e^{p\tau}dp=S_1+S_2$$

とおく．ただし

$$S_1=(1/2\pi i)\int_{Br}F_1(p)e^{(p\tau-\lambda_1\xi)}dp$$

$$S_2=(1/2\pi i)\int_{Br}F_2(p)e^{(p\tau-\lambda_2\xi)}dp$$

である．ここで定数 σ は p の複素平面において，$F(\xi,p)$ の特異点のすべてが直線 $p=\sigma$ の左側にあるように選ばれている．また

$$\lim_{|p|\to\infty}(p\tau-\lambda_1\xi)=(\tau-\xi)p$$

$$\lim_{|p|\to\infty}(p\tau-\lambda_2\xi)=(\tau/\alpha-\xi)\alpha p$$

であることから

$$\begin{aligned}\bar{M}(\xi,\tau)&=0 &&\tau<\xi &&(C_Mt<x)\\&=S_1 &&\tau/\alpha<\xi<\tau &&(C_Qt<x<C_Mt)\\&=S_1+S_2 &&\xi<\tau/\alpha &&(x<C_Qt)\end{aligned}$$

ここで前述のとおり，$C_M=\sqrt{E/\rho}$, $C_Q=\sqrt{k'G/\rho}$ はそれぞれの曲げモーメント波およびせん断波の伝ぱ速度を示す．上式は，衝撃によりはりに生じた擾乱がそれぞれ C_M, C_Q ($C_M>C_Q$) なる伝ぱ速度をもつ二つの波となって伝ぱし，はり上の一点にはまず曲げモーメント波が，ついでせん断波が到来し，その後のはりの応答はこれら二つの波動の和であることがわかる．

さて，（16）式は λ_1, λ_2 なる多価関数を含むため，p 平面内に分岐点 $p=0$（これはまた極でもある），$p=\pm(1/b)$, $p=\pm(i/\alpha)$ をもつ．そこで（16）式を一価正則とするために p 平面上に図3に示すように分岐切断を入れ，$A'ABB'A'$ の径路に沿って積分し，半径

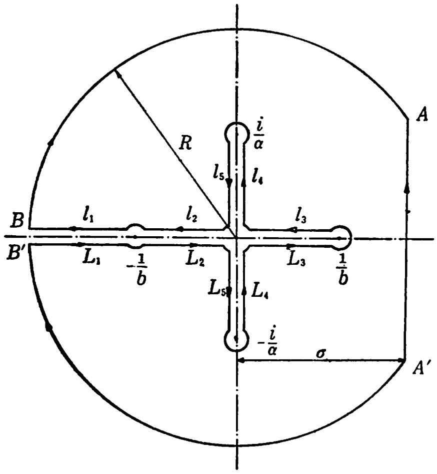


図3　積分路

$R\to\infty$ とすると円弧に沿う線積分は0となり，また図3の全平面上で留数の総和は0になるので

$$\int_{Br}=-\int_{B}^{B'}$$

となる．そこで図3において $L_1+L_2+L_5+L_4+L_3+l_3+l_4+l_5+l_2+l_1$ なる径路に沿って線積分を行ない，(16) 式を逆変数して曲げモーメント $\bar{M}(\xi,\tau)$ を求めると

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}(\xi,\tau)&=0 && (\tau<\xi)\\ &=I_1+I_2 && (\tau/\alpha<\xi<\tau)\\ &=I_2+I_3 && (\xi<\tau/\alpha)\end{aligned}\right\}\quad\cdots(17)$$

ここで

$$I_1=-\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{1/b}1/(r\Psi_1)\times[\phi_1/\phi_2\cdot\sinh(r\tau-\phi_1\xi)\cos\phi_2\xi+\cosh(r\tau-\phi_1\xi)\sin\phi_2\xi]dr$$

$$I_2=2\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{1/\alpha}\phi_3/(r|\Phi_2|^2)\times[I_m(\Phi_2)\sinh\phi_3\xi\cos r\tau+R_e(\Phi_2)\cosh\phi_3\xi\sin r\tau]dr$$

$$I_3=-2\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{1/\alpha}\phi_4/(r|\Phi_2|^2)\times I_m(\Phi_2)\sin(r\tau-\phi_4\xi)dr\quad\cdots(18)$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=\sqrt{r}\,(\sqrt{\alpha^2r^2+1}+ar)^{1/2}/\sqrt{2}\\ \phi_2&=\sqrt{r}\,(\sqrt{\alpha^2r^2+1}-ar)^{1/2}/\sqrt{2}\\ \phi_3&=\sqrt{r}\,(\sqrt{b^2r^2+1}-ar)^{1/2}\\ \phi_4&=\sqrt{r}\,(\sqrt{b^2r^2+1}+ar)^{1/2}\\ \Psi_1&=\sqrt{1+\alpha^2r^2}+\alpha^2r+2\mu\phi_1\\ \Phi_1&=(\sqrt{1-\alpha^2r^2}+\mu\phi_3)+i(\alpha^2r+\mu\phi_4)\\ \Phi_2&=(\phi_3-i\phi_4)\Phi_1\end{aligned}\right\}\quad\cdots(19)$$

以上が小高・中原による解析の概要である．

2.2.2　はりの中央に step velocity を与えた場合

このとき，はりの衝撃点は衝突後直ちに V の速度で y の正方向に等速運動することになる．従って衝撃点の条件は，$\xi=0$ で $\bar{y}_0=\bar{V}\tau$，また $\psi=0$ である．ここで (8) 式と (6)′ 式の第3式において，$\xi=0$ で $\tilde{y}_0=\bar{V}/p^2$, $\tilde{\psi}=0$ とおき C_1, C_2 を求めると

$$C_1=\frac{\bar{V}}{p^2}\frac{(\alpha^2p^2-\lambda_2^2)\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2+\alpha^2p^2)}$$

$$C_2=-\frac{\bar{V}}{p^2}\frac{(\alpha^2p^2-\lambda_1^2)\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2+\alpha^2p^2)}$$

が得られる．(9) 式の第1式に上式を代入すると

$$\tilde{M}(\xi,p)=\frac{1}{p}\frac{\lambda_1e^{-\lambda_1\xi}-\lambda_2e^{-\lambda_2\xi}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\sqrt{1+\alpha^2p^2}+\alpha^2p)}\quad\cdots(20)$$

となる．これは (16) 式において $\mu=0$ とおいた式に等しい．(20) 式も極および分岐点は 2.2.1 の場合と変らないので同じ図3の積分路にしたがって逆変換した結果も (19) 式において $\mu=0$ とおいたものに等しい．すなわち

$$M(\xi,\tau)=I_1+I_2\qquad(\tau/\alpha<\xi<\tau)$$

$$M(\xi,\tau)=I_2+I_3\qquad(\xi<\tau/\alpha)$$

となるが (19) 式の中で第5，6式だけは

$$\Psi_1=\sqrt{1+\alpha^2r^2}+\alpha^2r$$

$$\Phi_1=\sqrt{1-\alpha^2r^2}+i\alpha^2r$$

を用いなければならない．

2.3　横衝撃荷重をうける半無限長はりの応答計算

2.3.1　弾性棒がはりの一端に衝突した場合

このときは衝突点において曲げモーメント $M(0,t)=0$ であるから (6)′ 式において $\xi=0$ で $\tilde{y}=\tilde{y}_0$, $\tilde{M}(o,p)=0$ とおけばよい．その結果 C_1, C_2 はつぎのようになる．

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\tilde{y}_0(\alpha^2p^2-\lambda_2^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\\ C_2&=-\tilde{y}_0(\alpha^2p^2-\lambda_1^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\end{aligned}\right\}\quad\cdots(21)$$

無限長はりの場合と同様にして棒とはりの接触条件は図4から明らかなように

$$A'E'(V-dy_0/dt)/C_M'+Q_0=0\quad\cdots(22)$$

が得られる．上式を無次元化し，$\mu'=AEC_M'/(A'E'C_M)$ とおき，さらにラプラス変換を施して (14) 式に対応する式を作ると

$$(1/\mu')\{\bar{V}/p-p\tilde{y}_0(0,p)\}+\tilde{Q}_0(0,p)=0\quad\cdots(23)$$

を得る．(9) の第4式と (21) 式より $\tilde{Q}_0(o,p)$ を求め，(23) 式に代入して $\tilde{y}_0$ を求めると

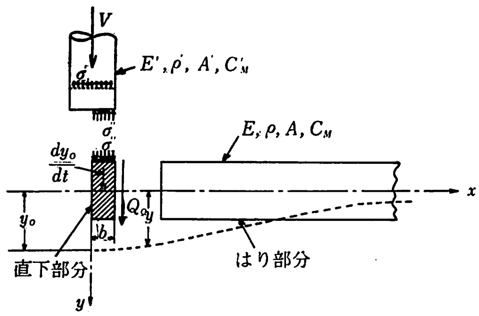


図４　接触条件（半無限長はり）

$$\tilde{y}_0=\frac{\bar{V}}{p^2}\,\frac{(\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{1+\alpha^2p^2}}{(\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{1+\alpha^2p^2}+\mu' p(p+\sqrt{1+\alpha^2p^2})} \qquad \cdots(24)$$

が得られる．この (24) 式を (9) の第１式に代入すると

$$\tilde{M}(\xi,\,p)=\frac{\bar{V}}{(\lambda_1-\lambda_2)}\times\frac{\sqrt{1+\alpha^2p^2}(e^{-\lambda_1\xi}-e^{-\lambda_2\xi})}{\{(\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{1+\alpha^2p^2}+\mu' p(p+\sqrt{1+\alpha^2p^2})\}} \qquad \cdots(25)$$

となる．上式も p 平面において，分母における $\{(\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{1+\alpha^2p^2}+\mu' p(p+\sqrt{1+\alpha^2p^2})\}$ は０にならないので，その逆変換は，前述の 2.2.1 の場合と同様の積分路に沿って (25) 式を線積分すると求められる．線積分の結果得られた $\bar{M}(\xi,\tau)$ はつぎのように求められる．

$$\left.\begin{aligned}\bar{M}(\xi,\tau)&=0 && (\tau<\xi)\\ &=I_4+I_5 && (\tau/\alpha<\xi<\tau)\\ &=I_5+I_6 && (\xi<\tau/\alpha)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(26)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}I_4&=-\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{1/b}\sqrt{1+\alpha^2r^2}/\Psi_2\\ &\qquad\times\cos\phi\xi\,\sinh\,(r\tau-\phi_1\xi)dr\\ I_5&=2\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{1/\alpha}\sqrt{1-\alpha^2r^2}/|\Phi_4|^2\\ &\qquad\times[I_m(\Phi_4)\cosh\phi_3\xi\,\sin r\tau\\ &\qquad-R_e(\Phi_4)\sinh\phi_3\xi\,\cos r\tau]dr\\ I_6&=-2\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{1/\alpha}\sqrt{1-\alpha^2r^2}/|\Phi_4|^2\\ &\qquad\times I_m(\Phi_4)\sin\,(r\tau-\phi_4\xi)dr\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(27)$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=\sqrt{r}\,(\sqrt{1+\alpha^2r^2}+ar)^{1/2}/\sqrt{2}\\ \phi_2&=\sqrt{r}\,(\sqrt{1+\alpha^2r^2}-ar)^{1/2}/\sqrt{2}\\ \phi_3&=\sqrt{r}\,(\sqrt{b^2r^2+1}-ar)^{1/2}\\ \phi_4&=\sqrt{r}\,(\sqrt{b^2r^2+1}+ar)^{1/2}\\ \Psi_2&=\phi_2\{2\phi_1\sqrt{1+\alpha^2r^2}\\ &\qquad+\mu' r(r+\sqrt{1+\alpha^2r^2})\}\\ \Phi_3&=(\phi_3\sqrt{1-\alpha^2r^2}-\mu' r^2)\\ &\qquad+i(\phi_4+\mu' r)\sqrt{1-\alpha^2r^2}\\ \Phi_4&=(\phi_3-i\phi_4)\Phi_3\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(28)$$

2.3.2　はりの一端に step velocity を与えた場合

この問題は Boley ら[4] も取扱っている．衝撃点における条件は，$\xi=0$ で $\bar{y}_0=\bar{V}\tau$, $\bar{M}=0$ となるので 2.2.2 における手順と同様の手順にしたがって，$\xi=0$ で $\tilde{y}_0=\bar{V}/p^2$ かつ $\tilde{M}(0,p)=0$ とおき，(8) 式と (9) の第１式から C_1, C_2 を求めると

$$C_1=(\bar{V}/p^2)\{(\alpha^2p^2-\lambda_2^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\}$$
$$C_2=(\bar{V}/p^2)\{(\alpha^2p^2-\lambda_1^2)/(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\}$$

となる．(9) の第１式に上式を代入することにより

$$\tilde{M}(\xi,\,p)=(e^{-\lambda_1\xi}-e^{-\lambda_2\xi})/(\lambda_1^2-\lambda_2^2) \qquad \cdots(29)$$

が得られる．このときも 2.2.2 の場合と同様 (25) 式において $\mu'=0$ とした式と一致する．(29) 式も分岐点，極および積分路は第３図に示したと同様であるから逆変換した結果も (28) 式において $\mu'=0$ とおいたものに等しい．すなわち

$$\bar{M}(\xi,\tau)=I_4+I_5 \qquad (\tau/\alpha<\xi<\tau)$$
$$\bar{M}(\xi,\tau)=I_5+I_6 \qquad (\xi<\tau/\alpha)$$

となるが (28) 式の中で第５，６式だけは

$$\Psi_2=2\phi_2\phi_1\sqrt{1+\alpha^2r^2}$$
$$\Phi_3=\phi_3\sqrt{1-\alpha^2r^2}+i\phi_4\sqrt{1-\alpha^2r^2}$$

を用いなければならない．

さらに本計算では，同様の手順で $\xi=0$ における $\bar{Q}$，すなわち $\bar{Q}(0,\,\tau)$ を求めたのでその結果をつぎに示しておく．

$$\bar{Q}(0,\,\tau)=-\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{1/\alpha}\frac{\cos r\tau(\phi_3\sqrt{1-\alpha^2r^2}+r\phi_4)}{r\sqrt{1+b^2r^2}\sqrt{1-\alpha r^2}}\,dr \qquad \cdots(30)$$

これは $\xi=0$ における応答の１例として計算したものである．

3.　数値計算

3.1　数値計算法

解析の結果得られた解は (18) 式，(27) 式，(30) 式に示されるようにいずれも定積分の形で与えられるので数値積分により解を求めなければならない．しかし，これらの定積分は，上限や下限において被積分関

数の分母が0となり異常積分となる．たとえば (18) の第1式の第1項 (I_{11} とする) はその上限，下限双方において被積分関数の分母が0となるので，いま0から $1/b$ の間の適当な値 β をとり

$$I_{11}=\int_0^{\beta}+\int_{\beta}^{1/b} \qquad (0<\beta<1/b) \qquad \cdots(31)$$

のように2つの積分の和として書き表わすと，I_{11} の第一項および第二項はそれぞれ積分の下限と上限で被積分関数の分母が0となる．そこで変数変換 $r=u^2$ (したがって $dr=2udu$) を行うと (31) 式の第一項は

$$-\frac{\bar{V}}{\pi}\int_0^{\sqrt{\beta}}\frac{2(u\tau-\phi_1'\xi)}{\sqrt{1+\alpha^2u^4}+\alpha^2u^2+2\mu u\phi_1'}\,\frac{\phi_1'}{\phi_2'}$$

$$\times\frac{\sinh(u^2\tau-u\phi_1'\xi)}{u^2\tau-u\phi_1'\xi}\cos(u\phi_2'\xi)du$$

ただし　$\phi_{1,2}'=(\sqrt{\alpha^2u^4+1}\pm au^2)^{1/2}/\sqrt{2}$

となる．この積分記号内の $\sinh(u^2\tau-u\phi_1'\xi)/(u^2\tau-u\phi_1\xi)$ は $u\to0$ で1となるからこの積分は下限で異常とならない．また第二項は $1/b-r=u^2$ として変数変換を行うと

$$\frac{\bar{V}}{\pi}\int_{\sqrt{\frac{1}{b}-\beta}}^{0}\frac{1}{(1/b-u^2)}$$

$$\times\frac{4}{\{\sqrt{1+\alpha^2(1/b-u^2)^2}+\alpha^2(1/b-u^2)+2\mu\sqrt{1/b-u^2}\phi_1''\}}$$

$$\times\frac{\phi_1''^2}{\sqrt{2b-b^2u^2}}\sinh\{(1/b-u^2)\tau$$

$$-\sqrt{1/b-u^2}\phi_1''\xi\}\cos(\sqrt{1/b-u^2}\phi_2''\xi)du$$

ただし

$$\phi_{1,2}''=\{\sqrt{1+\alpha^2(1/b-u^2)^2}\pm a(1/b-u^2)\}^{1/2}/\sqrt{2}$$

となり，第二項の積分の上限でも被積分関数の分母は0とならず数値積分を行うことができる．また (18)，(27)，(30) 式における定積分の中には，$f(r)\sin r\tau$，または $f(r)\cos r\tau$ なる因数が含まれており，これらは τ の値が増大するにともない，はげしく振動するため，数値積分においては十分な分割数と高い計算精度が必要になると思われる．本計算においてはこのことに留意して数値積分には Simpson 法を採用し，電子計算機により倍精度で計算を行った．なお計算には $\alpha=2$，したがって $a=2.5$, $b=1.5$ なる数値を使用した．

3.2 数値計算結果

この計算は，$\tau<\xi$，$\tau/\alpha<\xi<\tau$，$\xi<\tau/\alpha$ の三つの領域について行なわれているので各領域における数値計算結果について述べる．

3.2.1 $\tau<\xi$ の場合

この場合は，(17) 式，(26) 式より $I_1=I_2=0$ および $I_4=I_5=0$，すなわちモーメント波もせん断波もはり上の一点 ξ に到来していない状態であるのでモーメントの変化はおこらない．したがって $\bar{M}=0$ である．

3.2.2 $\tau/\alpha<\xi<\tau$ の場合

この場合は，はり上の一点 ξ にモーメント波が到来してきているが，せん断波はまだ到達していない時間域を示している．$\bar{M}$ の計算は無限長はりの計算には I_1+I_2，半無限長はりの計算には I_4+I_5 を用いなければならない．実際に計算してみると，ξ, τ の小さな値に対しては妥当と思われる値が得られるが ξ の増大，したがって τ の増加につれて，その計算波形の振巾が急速に増大する傾向がある．たとえば無限長はりの場合 $\mu=0$ で $\bar{M}$ の最大値は $\xi=5$ および10でそれぞれ -7.3×10^{-4}，-5.4×10^{-4} 程度であるが $\mu=15$ および20ではそれぞれ 43×10^{-4}，342×10^{-4} となる．実験結果の示すところでは，この領域における曲げモーメントはわずかに変動するのみで，せん断波の到来によってはじめて大きな曲げモーメントを発生することになるので，ξ, τ の大きな値に対する $\bar{M}$ の計算値は実験値と比べて桁違いに大きく非現実的なものといわなければならない．この領域の計算値については，

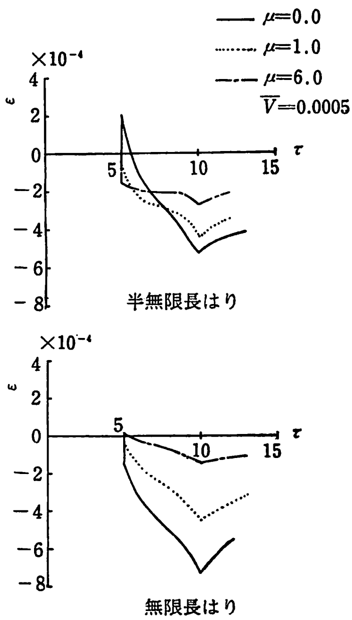


図5　$\tau/\alpha<\xi<\tau$ における $\varepsilon-\tau$ 曲線 ($\xi=5$)

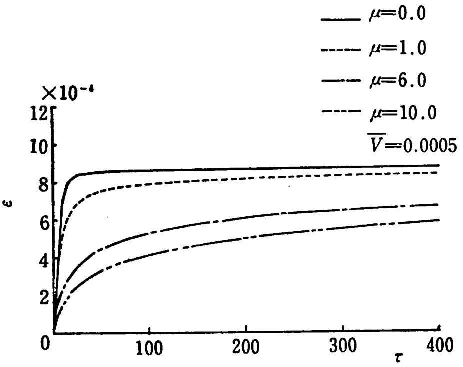


図6 衝撃点における $\varepsilon-\tau$ 曲線（無限長はり）

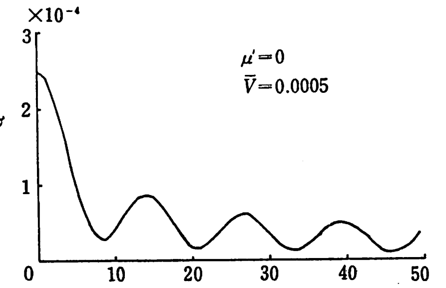


図8 衝撃点における $\overline{Q}-\tau$ 曲線（半無限長はり）

さらにつぎの機会に明らかにしたいと考えている．なお，計算結果を図5および図7，図9の $\xi=5$ に対する $\varepsilon-\tau$ 線図に示しておく．

3.2.3 $\xi<\tau/\alpha$ の場合

この場合は，はり上の一点 ξ にせん断波頭が到達した時刻以降の時間域を示す．前述のようにはりの曲げモーメントは，せん断波頭の到達後に大きな変化を生じ，ξ 点におけるモーメントの最大値はこの領域で発生するので，この時間域の計算は重要である．このことから我々は計算を行なうにあたり，実験結果と比較する場合を考え，一応 $\xi=80$，また $\tau=400$（これは高さ 2cm の軟鋼製角棒では $x=45$cm，$t=450\mu$s に相当する）を実用範囲の目安とし，まず無限長はりに対してこの範囲内で ξ と τ に対して曲げモーメントの計算が可能であるかどうかについて調査を行なった．そこで，まず ξ の一定値に対して，数値積分の計算精度（以下単に精度という）を 10^{-8} に設定し，$\tau=\alpha\xi$ から $\tau=400$ まで種々の τ の値について計算したところ，無限長はりにおいては，20 以下の ξ に対して計算はきわめて容易であるが $\xi\geqq30$ の場合の $\overline{M}$ の計算において $\tau=400$ 近くで極端に大きな計算値が突発的に表われることがわかった．このような場合の計算値を以後不安定値，これに対して妥当と思われる値を安

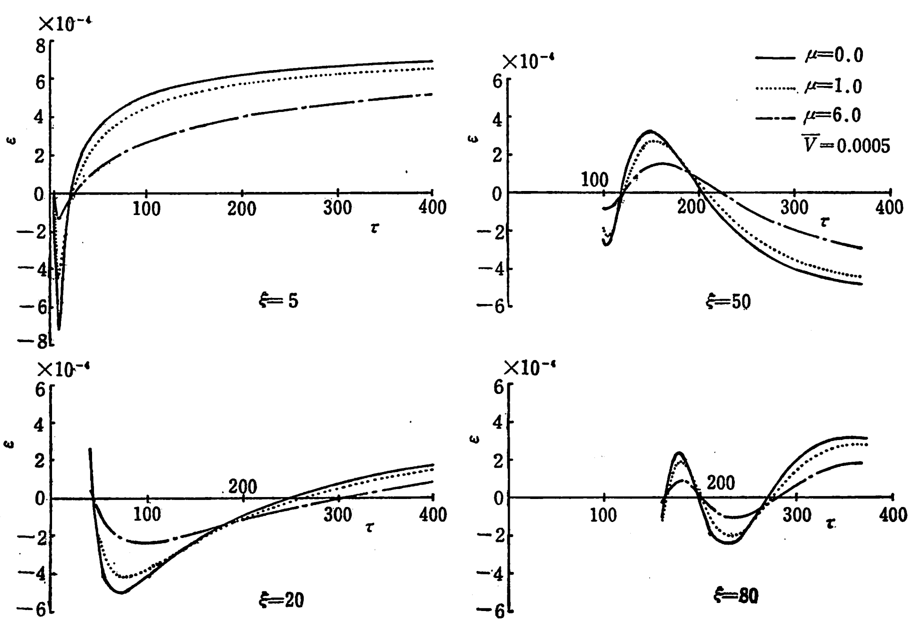


図7 $\xi<\tau/\alpha$ における $\varepsilon-\tau$ 曲線（無限長はり）

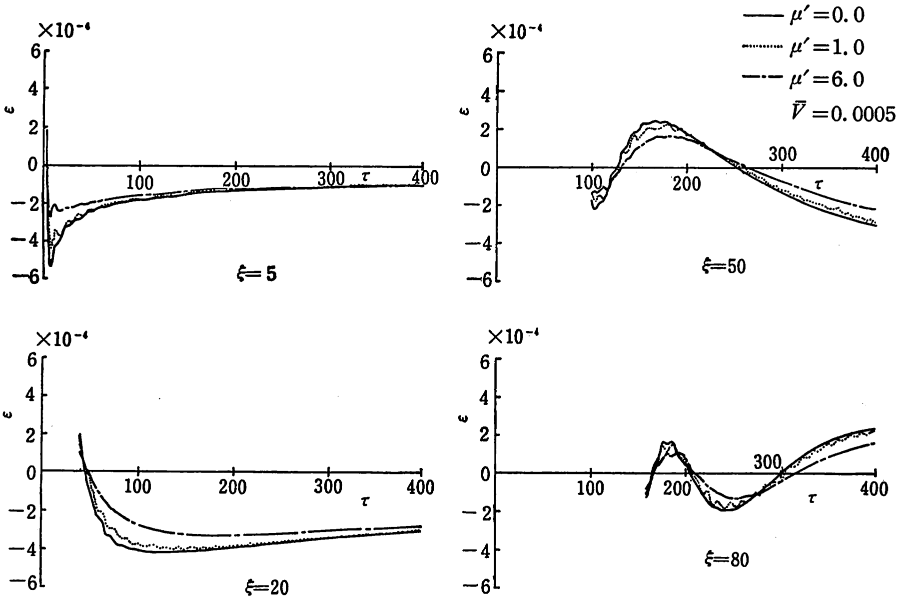
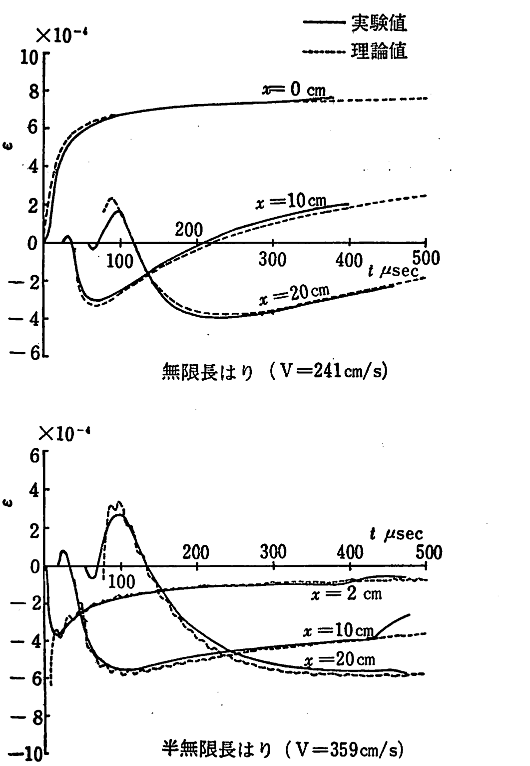


図9　$\xi<\tau/\alpha$ における $\varepsilon-\tau$ 曲線（半無限長はり）



は　り（軟鋼）　22.1cm×22.1cm角
衝撃棒（軟鋼）　21.9cm×21.9cm角

図10　実験値と理論値との比較

定値と称することにする．さて，このような不安定値が発生した場合，さらに精度を1桁上げて計算を行なうと，再び安定値が得られることがわかったので，我々は計算の安定限界を知るためにつぎのような方法を採用した．すなわち，まず ξ の一定値に対して精度を10^{-3}に設定して $\tau=\alpha\xi$ の値から $\Delta\tau=2$ の刻みで計算を行ない，計算値が不安定になると，そこで精度を10^{-4}にあげ以後計算を続行し，再び不安定値が発生するとさらに10^{-5}の精度で計算を行なった．精度が10^{-6}以上の計算には多大の時間を要するので，これ以上の精度の計算は行なっていない．

このような数値計算によって得られた，各精度において安定値を得る τ の最大値（以後 τ_S で表わす）を表1に示す．この表には計算の難易度におよぼす μ の影響も調べるために三種類の μ の値に対する τ_Sの値が示されている．ここで $\mu=0$ は無限長はりの中央点に step velocity を与えた場合である．表1を見ると，たとえば $\xi=30$ の場合の計算では10^{-3}の精度に対して τ_S は約390であり，そこでさらに精度を10^{-4}にして計算を続行すると τ_S は400に達することがわかる．本計算では τ_S が400に達すると計算を打切っているので400以上の τ_S は表の中に存在しない．また，$\xi=40, 50, 80$ の各点では $\bar{M}$ の安定した τ_S の値には若干の差が見られるが大差はなく10^{-3}の精度で約370程度である．この表から精度を上げて計算して

表1

μ ＼ 精度 ＼ ξ	30			40		
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
0	388	400	—	368	368	400
1	390	400	—	368	368	386
6	400	—	—	372	390	394

μ ＼ 精度 ＼ ξ	50			80		
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
0	370	374	400	376	380	394
1	370	372	378	374	378	392
6	370	372	392	374	378	392

も τ_S の値は大巾に増加することはない．精度を1桁上げると計算時間が加速度的に増加するのでこのような計算は実用的でないと思われる．したがって計算時間から実用範囲を定めると，ξ が 40 以上の場合 τ_S は約 370 としてよいであろう．また計算の結果を分析して見ると I_2 の第2項がこの領域の $\bar{M}$ の計算に大きく寄与しており不安定値もこの項から発生することがわかった．したがって I_2 の第2項の計算法には単なる Simpson 積分の代りに適当な近似計算法を用いるとさらに大きな τ_S の値が得られるかもしれない．

以上の計算の結果おのおのの ξ について得られた計算値を縦軸に τ を横軸にとり，描かれた線図を図6と図7に示す．ただし縦軸には $\bar{M}$ の代りにはりの表面ひずみ $\varepsilon(=\sqrt{3}\bar{M})$ が目盛られている．$\mu=0$ の線図は無限長はりの中央点に step velocity を与えた 2.2.3 の場合である．

つぎに半無限長はりについての計算値について述べる．半無限長はりの場合，計算された波形は振巾の小さな高調波が重畳した形で得られるが，この振動は精度を上げて計算しても消失しない．また無限長はりの場合と同じ ξ の値に対して 10^{-3} の精度で計算を行なったところいずれも $\tau=400$ までは安定した計算値が得られた．今回の計算ではこれ以上の計算を試みなかったが，充分我々の目標とした実用限界を満足していることがわかった．この計算結果は，無限長はりの場合と同様，縦軸に表面ひずみ ε を横軸に τ をとって得られた線図，図8および図9に示されている．これらの線図は，$\bar{V}=0.0005$ を用いており，$\xi=5$ を除いていずれもせん断波の到来後の波形である．$\mu'=0$ の線図は半無限長はりの一端に step velocity を与えた 2.3.3 の場合である．

つぎに計算値の妥当性を検討する目的で 2.2.1 および 2.3.1 の場合について計算値と筆者らの一人が行なった実験結果[9]との比較を図10に示す．無限長はり，半無限長はりいずれの場合についても，計算値と実験値とは満足すべき一致を示し，特に τ の増加とともにその一致度は極めて良好である．このことから小高・中原の理論による Timoshenko はりの数値解が妥当なものであることがわかる．

4. 結　語

無限長はりの中央点および半無限長はりの一端にそれぞれ2通りの衝撃条件を与え，Timoshenko の横振動方程式にラプラス変換を適用して解析を行ない，Simpson 積分によりその数値解を求めた結果つぎの結論を得た．

数値積分において安定した曲げモーメントの計算値が得られる最大の τ を τ_S とすると

（1） $\xi<\tau/\alpha$ の範囲では，無限長はりの場合 ξ が 30 までは 10^{-3} の計算精度で τ_S の値が 400 以上の計算が可能であり，ξ が 40 以上になると同じ計算精度で τ_S の値が 370 程度が得られる．また半無限長はりの場合には，ξ の値が 80 までは τ_S の値が 400 以上であることがわかった．一般に，横衝撃をうけるはりの一点における曲げモーメントはせん断波の到達後に最大値に達するので上述の計算範囲から推して Simpson 積分法による Timoshenko 方程式の数値解は実用的であるといってよいであろう．

（2） 定積分 I_2 の第2項の計算方法を改良すると τ_S の値はさらに増大するものと思われる．

（3） $\tau/\alpha<\xi<\tau$ の範囲の計算では，ξ の小さな値に対して妥当な曲げモーメントが得られるが，ξ が増加するにつれて最大曲げモーメントの値は急速に増加し，実験結果と照合してもその不一致は著しい．この領域の数値計算には単なる数値積分に代る近似計算法が必要であろう．

最後に本研究において，有益な御助言をいただいた冨　武満教授に深く謝意を表します．また図面の作成その他に御協力をいただいた本学大学院　石原俊治君にも厚く御礼申し上げます．なお，計算には本学の電子計算機 FACOM230-45S を使用したことを付記しておく．

参考文献

1) S. P. Timoshenko: Phil. Mag. Ser. 6., 41,(1921)
2) R. W. Leonard and B. Budiansky: NACA. T. N. 2874 (1953)
3) M. A. Dengler and M. Goland: Proc. 1st U. S. National Congress of Applied Mechanics. (1952)
4) B. A. Boley and C. C. Chao: J. Appl. Mech. 22 (1955)
5) W. Flügge and E. E. Zajac: Ing. Arch., 28 (1959)
6) R. P. N. Jones: Quart. J. Mech. Appl. Math. 18 (1955)
7) 田中・有冨：鹿児島大学工学部研究報告 第18号 (1976)
8) 小高・中原：日本機械学会論文集, 33巻, 248号 (昭和42-4)
9) 田中：日本機械学会講演論文集, 778-1 (1977)