

代用電荷法における誤差の性質について

村島 定行*・加藤二三男**・宮近 詠史***

(受理 昭和 51 年 5 月 31 日)

ON THE PROPERTIES OF THE ERROR IN THE CHARGE SIMULATION METHOD

Sadayuki MURASHIMA, Misao KATO
and Eiji MIYACHIKA

Ignoring the round-off error, the error in the charge simulation method is harmonic, *i.e.*, the error is the solution of Laplace's equation. The utilization of the above fact is discussed under the purpose of error estimation. Using the result of potential theory, several important properties of the error are enumerated.

For example, ① the point at which the error is maximum appears on the boundary, ② the error of the derivative of the solution along an arbitrary direction is also harmonics and ③ the error is solenoidal and irrotational.

Numerical experiments are consistent with above properties.

It is concluded that for the absolute error estimation the checking of the error only on the boundary is necessary and sufficient. It is pointed out that the easiness and certainty of the error estimations should be emphasized in the charge simulation method.

1 ま え が き

1969 年 Steinbigler 氏¹⁾により静電界の解析法として提案された代用電荷法は非常に簡単な原理にもとづいており、わずかの時間で高精度が得られ、比較的適用範囲も広い。有限要素法、差分法と比較して計算機の容量が少なく、すむ点と解析的な形で答が得られるので結果の取扱いが便利である点などが長所であり、今後多方面^{2)~7)}に使われることと思う。

しかし、この方法には代用電荷の誤差の少い位置の決定という困難な問題があり、代用電荷法を使うすべての人を悩ませている。これに関しては、Singer 氏⁸⁾等が経験的な指標を与えているが、ずいぶんおおまかであり、種々の形状にあてはまるものではない。ほとんども、試行錯誤的に決定している。誤差評価に関しては、ほとんど研究がなされていず、大きな安全率を

見込んで誤差を評価しているのが実状である。

Singer 氏等が与えた指標を精密化して、代用電荷を誤差が少く選べるようにするのも重要であるが、その前に、誤差の性質について考察し、誤差評価の進め方に関して何らかの基準となるものを探す必要がある。

そのための基準として著者等は、「代用電荷法の誤差はラプラス方程式の解である」という事実、即ち誤差の調和性を利用することを考え、若干の考察と数値実験を行った。

2 誤差の調和性について

図 1 に示す第一種の境界値問題を例にとって話を進めよう。Steinbigler 氏が扱った導体電極が存在する場合の静電界の解析の問題は、ここで扱うのと同じである。

一般に代用電荷法は領域 D 外の適当な位置 $A_i(R_i)$ に適当な形状、個数ならびに電荷量の代用電荷 Q_i を境界条件を満たすように配置し、その合成電位として任意の点 $P(r)$ の電位を求めようとするものである。即

* 電子工学科 助教授

** 工学研究科電子工学専攻

*** 現在九州大学大学院工学研究科

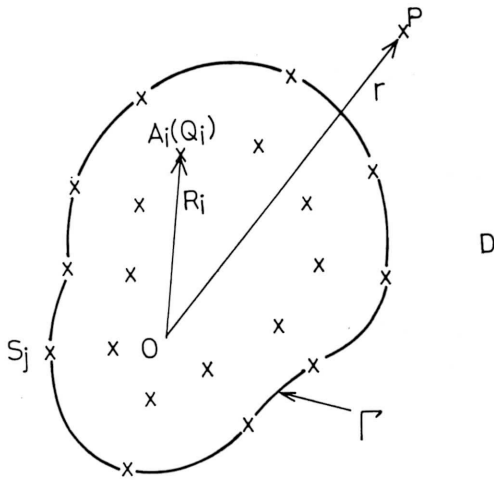


図1 代用電荷法原理図

ち

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^n P_i(R_i, r) Q_i(R_i) \quad (1)$$

ここで、 $P_i(R_i, r)$ は電荷 Q_i の P 点に対する電位係数で、電荷 Q_i の幾何学的形状のほか、その位置 R_i と P 点の位置 r に依存する関数となる。

$\phi(r)$ は境界上のすべての点 s で境界条件 $\phi(s) = f(s)$ を満たすことは不可能で代用電荷数に等しい数の境界上の点 s_j (以後拘束点という) でのみ境界条件を満たすようにする。即ち

$$\begin{aligned} \phi(s_j) &= \sum_{i=1}^n P_i(R_i, s_j) Q_i(R_i) \\ &= f(s_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2)$$

この問題に対する正しい解を $\Psi(r)$ とすると

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi(r) = 0, & r \in D, \\ \Psi(s) = f(s), & s \in \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

が成立する。ここで ∇^2 は3次元のラプラシアンである。代用電荷法による解は、代用電荷の存在する位置を除いて調和であるから、領域 D 内で調和である。従って

$$\nabla^2 \phi(r) = 0, \quad r \in D, \quad (4)$$

代用電荷法の誤差 $e(r)$ を次のように定義する。

$$e(r) = \phi(r) - \Psi(r). \quad (5)$$

式 (2), (3), (4), (5) より

$$\begin{cases} \nabla^2 e(r) = 0, & r \in D, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} e(s) = \phi(s) - f(s), & s \in \Gamma, \end{cases} \quad (7)$$

が成立する。拘束点では誤差ゼロであるから

$$e(s_j) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

となる。

従って代用電荷法によって求めた解 $\phi(r)$ の誤差 $e(r)$ は次の第一種境界値問題の解ということになる。

境界値問題1

領域 D 内で調和で、境界 Γ 上で $\phi(s) = f(s)$ であるような関数 $e(r)$ を求めよ。

以上の説明は3次元として説明したが、2次元の代用電荷法でも誤差の調和性は成立する。

代用電荷法は境界の法線方向の導関数 $g(s)$ が与えられた第二種の境界値問題をも扱えるように拡張されている⁷⁾。この場合の誤差は次の第二種境界値問題の解ということになる。

境界値問題2

領域 D 内で調和で、境界 Γ 上で法線方向の導関数が $\left. \frac{\partial \phi(r)}{\partial n} \right|_{r=s} = g(s)$ であるような関数 $e(r)$ を求めよ。

誤差の調和性は差分法や有限要素法では成立しない。この性質は、点電荷、円線電荷、有限長直線電荷による解（これらは電荷の位置を除いて調和である）の重ね合せとして表現する点に由来する。従って代用電荷法だけでなく、調和関数の重ね合せとして解を表わす方法⁹⁾ であれば同様に調和性が成立する。

ここで述べた調和性は代数的に（丸目誤差を無視して）のみ正しい。代用電荷 Q_i を決定する際、行列の性質によっては大きな桁落ちがおこなうことがある。その場合式 (8) は成立しなくなるが、式 (6), (7) は依然として成立する。つまり $e(r)$ の調和性は変わらない。

3 誤差の性質について

誤差が調和である、即ちラプラス方程式の解であるということからポテンシャル論¹⁰⁾ の成果を借りていくつかの誤差の性質が導き出せる。

平均値の定理より

性質A

誤差が恒等的に定数でないかぎり、誤差が極大または極小となる点は領域 D の内部にはなく、それは必ず境界 Γ 上にある。

換言すると誤差の絶対値 $|e(r)|$ が最大になる点は必ず境界上にくる。

調和関数の微分可能性より

性質B

誤差は領域 D 内で何回も微分可能であり、これによって得られた誤差の導関数がさらにまたラプラス方程式を満足する。

これより

$$e_x = \frac{\partial}{\partial x} e(r) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(r) - \frac{\partial}{\partial x} \Psi(r) \quad (9)$$

とすると $e_x(r)$ は調和である。即ち

$$\nabla^2 e_x(r) = 0, \quad r \in D, \quad (10)$$

$$e_x(s) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi(r) - \frac{\partial}{\partial x} \Psi(r) \right]_{r=s}, \quad s \in \Gamma \quad (11)$$

である。同じことが

$$e_y(r) = \frac{\partial}{\partial y} e(r)$$

$$e_{xx}(r) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e(r)$$

$$e_{xy}(r) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} e(r)$$

⋮

についても成立する。つまり任意方向の電界成分の誤差が調和である。

グリーンの公式より

性質C

$$\iiint_D [\text{grad } e(r)]^2 dV = \iint_{\Gamma} e(r) \frac{\partial e(r)}{\partial n} dS \quad (12)$$

$$e(r) = \iint_{\Gamma} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} e(r) - e(r) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS \quad (13)$$

式(12)の左辺は領域 D の体積で割れば代用電荷法の誤差の巨視的な指標の一つとなる。又式(13)は領域内の任意の点の誤差で微視的な誤差と言える。つまり性質Cは巨視的誤差と微視的誤差がともに境界 Γ 上の誤差と誤差の法線方向の傾きだけから決定されることを示す。一般に代用電荷法では、 $e(r)$ と $\frac{\partial}{\partial n} e(r)$ の境界 Γ 上の値のどちらか一方しかわからないから、直接、誤差評価に利用できるわけではない。

現在代用電荷法で扱う問題は、領域内に電荷が存在しない場合である。従って発散の定理より

性質D

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial e(r)}{\partial n} dS = 0 \quad (14)$$

境界上での電位の法線方向の傾きの誤差を全表面で積分する即ち平均誤差を計算すると 0 である。第二

種の境界値問題の代用電荷法では $\frac{\partial}{\partial n} e(r)$ の値を知ることができるので直接この性質を確認することができる。

ポテンシャルの非回転的性質より領域内の任意の閉曲線 C で

性質E

$$\int_C \text{grad } e(r) \cdot dl = 0 \quad (15)$$

が成立する。

性質Bにより電界の任意方向成分の誤差が調和であるから性質A, C, D, Eは電界の任意方向成分の誤差に対しても成立することは言うまでもない。

以上は3次元の問題について述べた。2次元の場合には(12), (13), (14)式を少し変形しなければならない。それについては付録に示す。

4 数 値 例

4.1 3次元の代用電荷法

図2に示すような球対平板の解析例を扱った。球の電位+1, 平板の電位0, 回転軸上に中心をもつ円線電荷や点電荷など7個(実際は異符号等量の電荷を平板に關し対称の位置にも配置しているが、未知数の数は7である)の代用電荷の重ね合せによる解の誤差の等高線を図3に示す。ここで C は代用電荷の位置を示すパラメーターで C が小さいほど中心に集中して置いたことになる。真の値は電気影像法で計算した。

図中の-6, 7はそれぞれ誤差が -10^{-6} , $+10^{-7}$ であることを示す。即ち、底の10と指数の符号のマイナスとを省略して記入している。

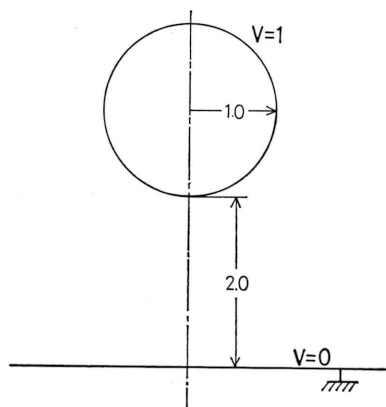
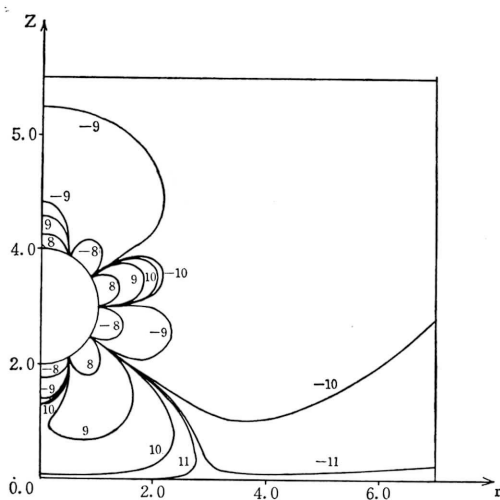
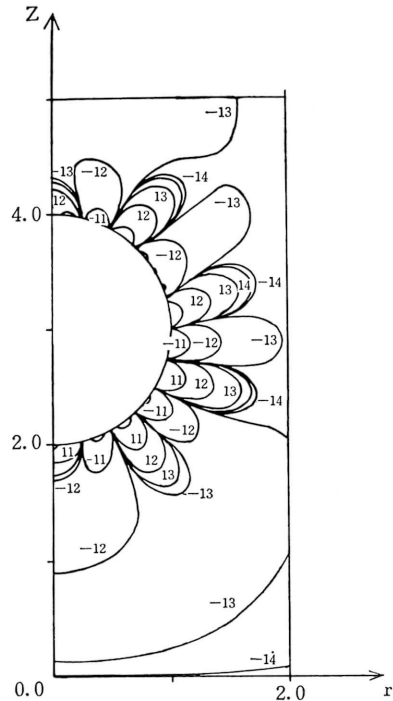


図2 球対平板電極の問題

図3 電位の誤差 ($N=7$, $C=0.2$)

代用電荷を平板に関し反対称に配置したため平板電極上は誤差0になっているが、球電極上では大きな誤差があらわれている。球面上では拘束点で誤差が0になり、その間では大きく正負に振れているが、大きな誤差は境界の近くだけであることがわかる。

図4では代用電荷数 N を13にし、 C を0.3にした場合の誤差の等高線である。球電極上の誤差は 10^{-11} 程度であり、境界から離れるとかなり広い範囲で 10^{-13} より小さい。等高線の高さは10のべき乗で選んでいるのに等高線は尾根づたいに等間隔にあらわれている。従って誤差の大きさは尾根づたいにみると指数関数的に減衰していると言える。つまり境界から離れると急

図4 電位の誤差 ($N=13$, $C=0.3$)

速に小さくなると言える。

4.2 2次元の代用電荷法

図5に示す2次元矩形領域の境界値問題を例にとる。3辺で電位0で、1辺で余弦波状の電位分布が与えられている。境界からの距離 $D=1.8$ の点に26個の対数ポテンシャル源を仮定して求めた解を図6に示

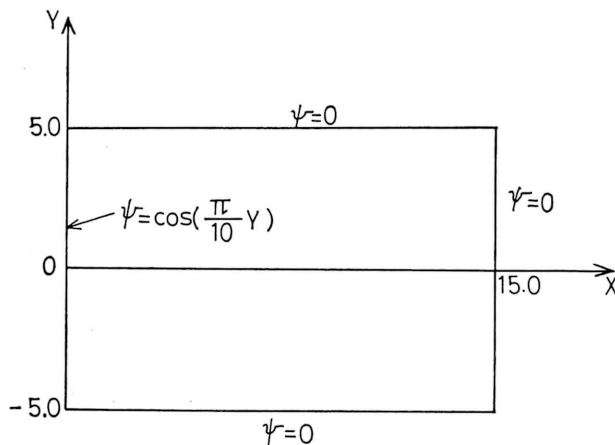


図5 2次元矩形領域の問題

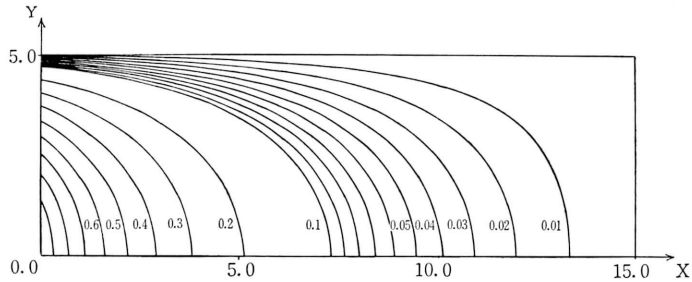
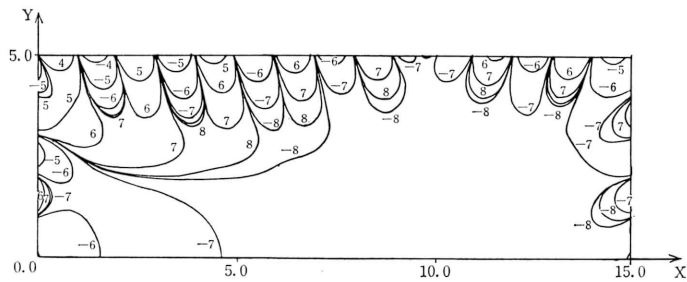
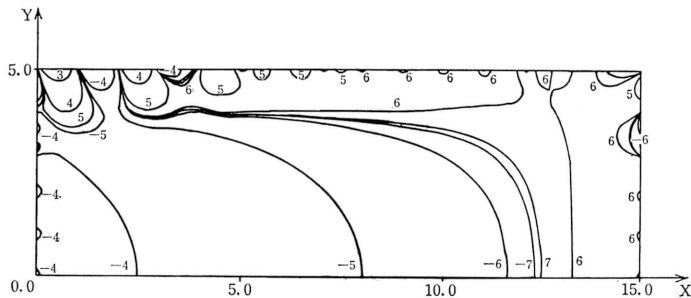


図6 電位分布

図7 電位の誤差 ($N = 26$, $D = 1.8$)図8 電位の誤差 ($N = 26$, $D = 1.0$)

す。この問題の解析解は変数分離により

$$\Psi(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{10}y\right) \frac{\sinh\left\{\frac{\pi}{10}(15-x)\right\}}{\sinh\left(\frac{3}{2}\pi\right)} \quad (16)$$

である。

代用電荷法による解と式 (16) との差の等高線を図 7, 8 に示す。図 7 は $D = 1.8$ で図 8 は $D = 1.0$ の場合である。これら 2 枚の図では、3 次元の場合と同様なことが言える。誤差最大の点は境界上にのみあられ、領域内の誤差は境界から離れるにつれて急速に小さくなる。

図 7 と図 8 では全般的に前者の誤差が小さい。境界上の誤差が小さければ、それだけ領域内部での誤差は

小さい。この点は図 3, 図 4 についても同じである。

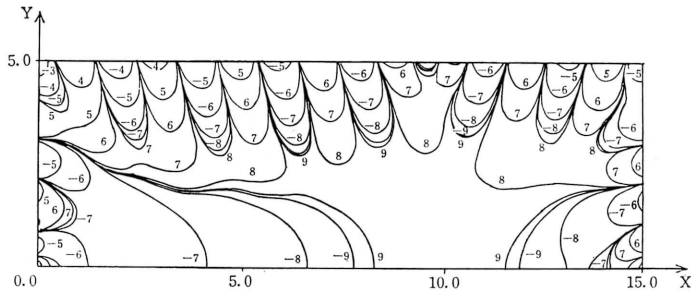
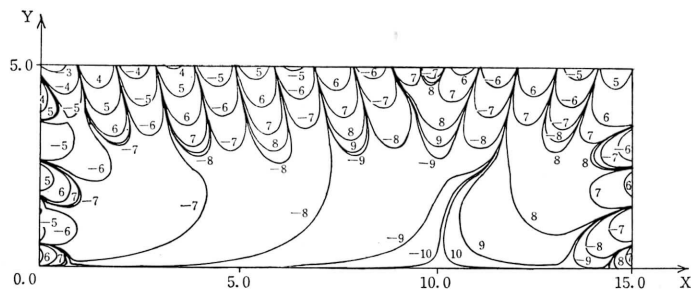
4.3 電界の誤差

静電界の問題ではしばしば電位の導関数を必要とする。図 9, 図 10 には前節で扱った問題の $D = 1.8$ の場合の解の導関数、即ち電界の x 方向成分, y 方向成分の誤差を示す。

この場合、電界の x 方向成分 E_x は

$$E_x = \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{\pi}{10}y\right) \cdot \frac{\cos h\left\{\frac{\pi}{10}(15-x)\right\}}{\sinh\left(\frac{3}{2}\pi\right)} \quad (17)$$

となり、式 (16) とくらべて $\pi/10$ ほど小さくなる。図 9, 図 10 は図 7 の電位の誤差にくらべて全般に 1 桁弱

図9 電界 x 方向成分の誤差 ($N=26$, $D=1.8$)図10 電界 y 方向成分の誤差 ($N=26$, $D=1.8$)

小さくなっている。これは絶対誤差だから起ったことで、相対誤差であればほとんど変りはない。境界から離れるにつれて急速に誤差は小さくなる。

5 誤差評価について

これまで述べてきたことから誤差が極大になる点は境界上のみであられ、境界から離れるにつれて急速に誤差が小さくなることがわかった。又境界上での誤差が小さくなればそれに応じて領域内の誤差も小さくなる。以上は誤差の調和性により保証されている。

結論として、代用電荷法の誤差評価には境界上の誤差だけ調べていれば最大誤差を知ることができる。拘束点の数より多くの境界上の点で誤差を調べ、大きいところがあればその近くの代用電荷の配置を変えるか、ふやして再計算し、所望の値より誤差が小さくなるまで試行錯誤的にくりかえす。この際領域内部の誤差を心配する必要はない。

Steinbigler¹⁾氏は向きあった棒対棒電極の問題で回転軸上の電位を比較して精度の検討を行っている。

高電圧の問題では電界強度の一番強い場所が重要なのだが、回転軸上（ここは領域内でも誤差の小さい所）の誤差が小さくても全体的な誤差については安心でき

ない。

更に Steinbigler¹⁾氏は学位論文中で差分法で得た解と比較して代用電荷法の有効性を確かめている。

これは最初としては必要なことであるが、差分法の精度の範囲内でしか情報は得られない。代用電荷法は他の方法（厳密解を除く）で得た解と比較せずとも与えられた境界条件と比較することで絶対的な誤差の検討ができる。

差分法や有限要素法での誤差は領域内のどこで最大になるかは、一般には不明であり、又真の値もわからない場合が普通である。従って離散化の精粗、偏微分方程式の近似度に応じて、おおまかな値を推定することになるが精密さにかける。

代用電荷法では境界に最大点があられることがわかっていて、得られた結果の境界上の値を計算してみるだけで真の値（境界条件）と比較でき、絶対誤差を知ることができる。安全率、過大評価等が入り込む余地がない。

3次元の問題なら境界面上だけで、2次元の問題なら境界線上だけで誤差を調べればよい点は大きな長所である。

以上の誤差評価の容易さ、確実さは、今まで指摘されたことがないが大いに強調されるべきである。

角度を変えて言えば、境界条件をできるだけ正確にシミュレートするように代用電荷の数と配置を変えていくという簡明な操作のくりかえしで確実に真の値に近づいていくことであり、数値解法として非常にすぐれた方法と言える。

誤差の少い代用電荷の選定という困難な問題が解決されると以上の特徴が一層はつきりしてくるものと思う。

6 結 論

静電界の簡単な解法として注目されている代用電荷法の誤差は代数的にはラプラス方程式の解である即ち調和であることを指適し、それから導かれる誤差の性質を列挙した。誤差の絶対値最大の点は境界上にもみ現われること、誤差は非回転的であり無発散であること等を指適した。更に電位の任意方向の勾配即ち電界の任意方向成分についても調和性があり、上に述べた性質があることを指適した。

3次元、2次元の境界値問題を例にとり誤差の等高線を描いたが、境界から離れるにつれて誤差は急速に小さくなることがわかった。

最大誤差を押えるためには境界上の誤差だけ調べればよい、即ち境界上での誤差が小さくなるよう代用電荷の位置等を変更していけば正しい解に近づいていく。従って代用電荷法は与えられた境界条件と比較するだけで（領域内の誤差を調べることなく）誤差の絶対比較ができる。この誤差評価の容易さは代用電荷法に言われている種々の長所に新しく加えられるべきであらう。

文 献

- 1) H. Steinbigler: 学位論文, Technischen Hochschule München, (1969).
- 2) 増田閃一, 松本陽一: 電気学会論文誌, 93-B, 2, p 41 (昭 48-2).
- 3) 増田閃一, 松本陽一: 電気学会論文誌, 93-B, 2, p 48 (昭 48-2).
- 4) 増田閃一, 松本陽一: 電気学会論文誌, 93-A, 7, p 305 (昭 48-7).
- 5) 増田閃一, 松本陽一: 電気学会論文誌, 94-A, 12, p 515 (昭 49-12).
- 6) 増田閃一, 松本陽一: 電気学会論文誌, 96-A, 1, p 1 (昭 51-1).
- 7) 青山道夫, 増田閃一: 電気学会論文誌, 95-A, 12, p 505 (昭 50-12).
- 8) H. Singer, H. Steinbigler: IEEE, PAS-93, p 1660 (1974).
- 9) L. Collatz: The Numerical Treatment of Differential Equation, Springer-Verlag, New York (1966).
- 10) 宇野利雄, 洪姪植: ポテンシャル, 培風館 (1957).

付 録

二次元領域 D と境界線 Γ の場合本文中の (12), (13), (14) 式は次のようになる¹⁰⁾,

$$\iint_D \{\text{grad } e(r)\}^2 dS = \int_{\Gamma} e(r) \frac{\partial}{\partial n} e(r) ds, \quad (\text{付-1})$$

$$e(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \log \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial n} e(r) - e(r) \frac{\partial}{\partial n} \left(\log \frac{1}{r} \right) \right\} ds, \quad (\text{付-2})$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} e(r) ds = 0. \quad (\text{付-3})$$

ここで2次元に対応して $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ であり, $\text{grad } e(r)$ も x 方向と y 方向の二成分しかない。