

保存型有限要素法による熱伝導問題の陽的解法—I

自然座標による定式化

菊 川 浩 行

Heat Conduction Problems in Solids by Explicit Conservative Finite Element Method-I

Natural Coordinate Formulations

Hiroyuki KIKUKAWA*

Abstract

For the purpose to solve heat conduction problems in solids by explicit finite element method, the conservation of heat quantity is seriously considered instead of adopting usual weighted residual method. Only simplex elements are investigated and the area coordinates (volume coordinates) are fully utilized in the 2-dimensional (3-dimensional) case. Since the equation of heat conduction is not the starting point, the obtained finite element equations are not the same as those of the lumped mass matrix method. Our explicit method is applied to the heat conduction problems in the infinite (2-dimensional) and the finite (3-dimensional) cylinders. The numerical solutions agree almost exactly to the analytic ones.

ほとんどの有限要素法は、重みつき残差法特にガラーキン法を用いて定式化されている。熱伝導問題を有限要素法で解く場合もガラーキン法が用いられているが¹⁾、ガラーキン法の質量行列は零でない対角要素を持つので、陰的に解かねばならない。あまり詳しい計算をしなければ陰的に解くことにもそれほど不便は感じないが、詳しい計算をしたり、3次元の計算を行う場合には大次元の連立1次方程式を解くことになるので、データの配列について工夫したり、ユニット消去法を用いたりする必要が生じる²⁾。もし陽的に解くことができればそのような工夫をする必要がないのでプログラムが簡単になるし、また詳しい計算をして連立1次方程式が大次元になればなるほど、陰的解法に比べて計算時間についても有利になる。

差分法では、微分を差分で置きかえるだけなので、陽的解法にするのは容易である。有限要素法では普通、集中行列法を用いて質量行列を対角化して陽的に解いているが³⁾、集中行

* (Laboratory of Engineering Oceanography, Faculty of Fisheries, Kagoshima University, 50-20 Shimoarata 4, Kagoshima, 890 Japan)

列法にはエネルギーが散逸するという欠陥があり⁴⁾、事実、集中行列法で熱伝導問題を解こうとすると発散してしまう。また、もう一つの陽的有限要素法である陽的重みつき残差法⁵⁾を用いた場合には、発散は起こらないが熱伝導係数を数倍大きくしたような結果が得られ、正しい解が得られないことが確かめられる。

最近バナツェーク⁶⁾は、重みつき残差法を用いずに、物理量の保存そのものから有限要素法を定式化する方法（保存型有限要素法、CFEM）を提唱した。CFEMは空間的には陽的方法なので、時間微分について陽的方法を用いれば、問題を陽的に解くことができる。ここでは、固体における熱伝導問題について、CFEMを自然座標系で定式化し、無限及び有限円柱の複合型熱伝導問題に適用する。また、得られた数値解を解析解と比較する。

簡単のために、要素としては2次元及び3次元のシンプレックス要素に限る。バナツェークはアイソパラメトリック要素についてCFEMを定式化し、シンプレックス要素の場合は集中行列法と同じ結果になると述べているが、熱伝導の基礎方程式から出発し、かつガウスの積分公式を用いた場合にそうなるのであって、基礎方程式から出発せず、直接熱量の保存を考える場合には、シンプレックス要素の場合でも集中行列法と同じ結果にはならない。面積座標や体積座標を利用すると、後者の場合、要素方程式が非常に簡単な形に表されることが示される。

2次元熱伝導問題

2次元シンプレックス要素は3角形であり、その内部で温度 $T(x_1, x_2, t)$ は x_1, x_2 の1次関数で近似される。

$$T(x_1, x_2, t) = L_\alpha(x_1, x_2) T_\alpha(t) \quad (1)$$

$$L_\alpha(x_1, x_2) = \frac{1}{2A_e}(a_\alpha + b_\alpha x_1 + c_\alpha x_2) \quad (2)$$

$$a_\alpha = x_{1\beta}x_{2\gamma} - x_{1\gamma}x_{2\beta}, \quad b_\alpha = x_{2\beta} - x_{2\gamma}, \quad c_\alpha = x_{1\gamma} - x_{1\beta} \quad (3)$$

α, β, γ はサイクリック

(1)~(3)式でギリシャ添字は3角形の3つの頂点を表し、ギリシャ添字が繰り返されたときは1~3の頂点についての和をとるものとする。 L_α ($\alpha=1\sim 3$)は面積座標と呼ばれる。 A_e は考えている3角形要素の面積、 $(x_{1\alpha}, x_{2\alpha})$ は3角形の α 番目の頂点の座標、 $T_\alpha(t)$ は頂点 α における時刻 t での温度を表す。

CFEMでは領域内に補助領域を考えて、その内部における熱量の収支を考える。図1の点線で囲まれた補助領域を考えよう。点線で表された境界 Γ を通しては入ってくる熱量によって節点 α における温度 T_α が変化することを考慮すると次の式が得られる。

$$\left(\sum_{i=1}^6 A_i\right) \rho c \frac{\Delta T_\alpha}{\Delta t} = \kappa \int_\Gamma \nabla T \cdot n d\Gamma \quad (4)$$

(4)式で ρ は密度、 c は比熱、 κ は熱伝導率、 n は Γ の法線ベクトルである。(4)式は、次のような要素方程式を6つの要素について重ね合わせたものと考えられる。(図2)

$$\frac{A_e}{3} \rho c \frac{\Delta T_\alpha}{\Delta t} = \kappa \int_{\Gamma_{a+\gamma\beta}} \nabla T \cdot n d\Gamma \quad (5)$$

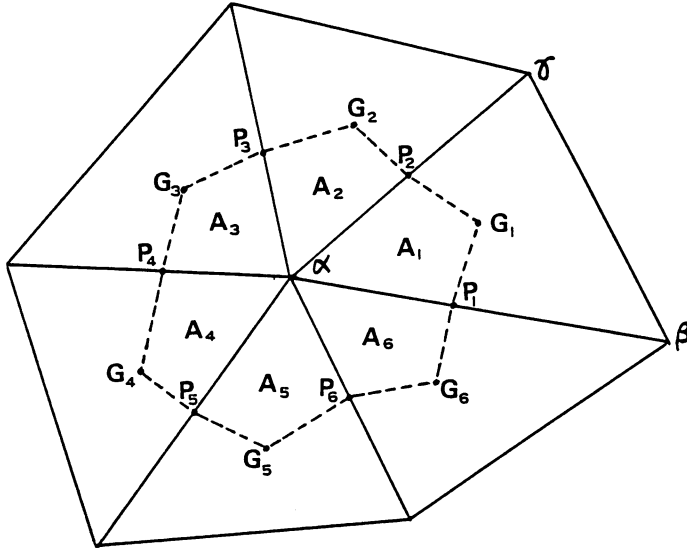


Fig. 1. An example of a subdomain. P_i are midpoints of sides and G_i are the centers of gravity of the triangle elements. A_i denote the areas of squares whose vertices are α , P_i , G_i and P_{i+1} . The temperature of the subdomain bounded by dashed lines is determined by the quantity of energy incoming or outgoing through the boundary of dashed lines.

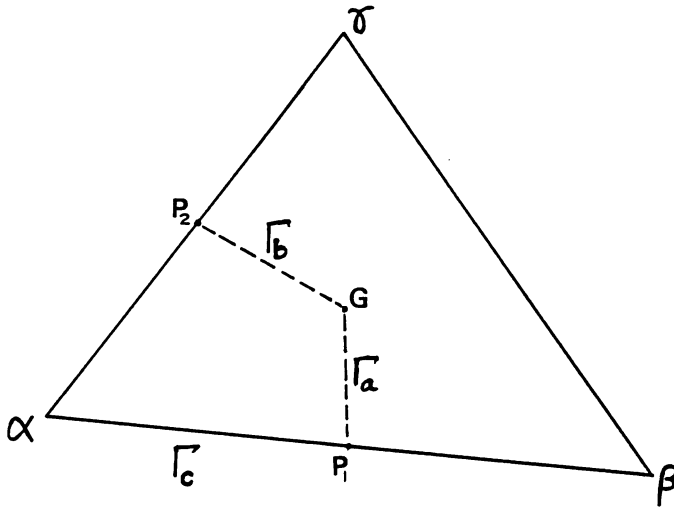


Fig 2. A part of a subdomain in a triangular element whose vertices are α , β and γ . Γ_a and Γ_b are two parts of the boundary of the subdomain. If the triangular element is one of the boundary elements of the whole domain and the side $\overline{\alpha\beta}$ is a part of its boundary, Γ_c becomes also a part of the boundary of the subdomain.

法線ベクトル \mathbf{n} は Γ_a, Γ_b で

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(\Gamma_a) &= \left(\frac{b_\beta - b_\alpha}{6\ell_a}, \frac{c_\beta - c_\alpha}{6\ell_a} \right) \\ \mathbf{n}(\Gamma_b) &= \left(\frac{b_\gamma - b_\alpha}{6\ell_b}, \frac{c_\gamma - c_\alpha}{6\ell_b} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

で与えることが確かめられる。(6)式で ℓ_a, ℓ_b は境界 Γ_a, Γ_b の長さである。(1), (2), (6)式を用いると(5)式は

$$\begin{aligned} \frac{A_e}{3} \rho c \frac{\Delta T_\alpha}{\Delta t} &= \kappa \left(\frac{b_\rho}{2A_e} \frac{b_\beta - b_\alpha}{6} + \frac{c_\rho}{2A_e} \frac{c_\beta - c_\alpha}{6} \right) T_\rho \\ &\quad + \kappa \left(\frac{b_\rho}{2A_e} \frac{b_\gamma - b_\alpha}{6} + \frac{c_\rho}{2A_e} \frac{c_\gamma - c_\alpha}{6} \right) T_\rho \\ &= \kappa \left(\frac{b_\rho}{2A_e} \frac{b_\beta + b_\gamma - 2b_\alpha}{6} + \frac{c_\rho}{2A_e} \frac{c_\beta + c_\gamma - c_\alpha}{6} \right) T_\rho \\ &= -\frac{\kappa}{4A_e} (b_\rho b_\alpha + c_\rho c_\alpha) T_\rho \end{aligned} \quad (7)$$

となる。(7)式の変形で, $b_\alpha + b_\beta + b_\gamma = c_\alpha + c_\beta + c_\gamma = 0$ を使用した。

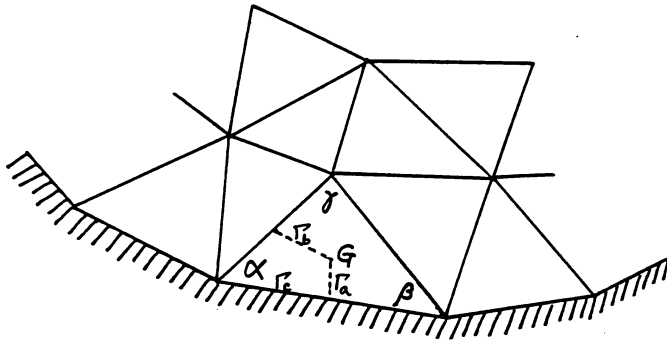


Fig. 3. Two-dimensional simplex element $\alpha \beta \gamma$ in the case of boundary element.

もし、図2の要素が考えている領域の境界の要素の場合(図3), Γ_c を通しては入ってくる熱量も(5)式の右辺に加えねばならない。領域の境界上では、総括熱伝達率を α' , 外の媒質の温度を T_a とすると

$$\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} + \alpha'(T - T_a) = 0 \quad (8)$$

が満たされるので Γ_c を通しては入ってくる熱量は

$$\begin{aligned} \kappa \int_{\Gamma_c} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= -\alpha' \int_{\Gamma_c} (T - T_a) d\Gamma \\ &= -\alpha' \left\{ \int_{\Gamma_c} T_\rho L_\rho d\Gamma - T_a \ell_c \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\alpha \left\{ T_a \frac{1!}{(1+1)!} \ell_c + \frac{T_a + T_b}{2} \frac{1!}{(1+1)!} \ell_c - T_a \ell_c \right\} \\
 &= \frac{\alpha \ell_c}{2} \left\{ 2T_a - T_a - \frac{T_a + T_b}{2} \right\} \tag{9}
 \end{aligned}$$

となる。但し ℓ_c は境界 Γ_c の長さで、 $(b^2 + c^2)^{1/2}/2$ で与えられる。(9)式を導くとき、要素内で温度は x_1, x_2 の1次関数であることから、点 P_1 での温度は $(T_a + T_b)/2$ であることを考慮し、面積座標に関する積分公式⁸⁾

$$\int_L \mathcal{L}_i \mathcal{L}_j d\Gamma = \frac{a! b!}{(a+b+1)!} \ell \tag{10}$$

を使用した。(7)式と(9)式が、2次元シンプレックス要素の場合の、固体における熱伝導のCFEM要素方程式である。

CFEMを用いた数値解の信頼性を確かめるため、無限円柱についての計算を実行した。無限円柱の対称性により、円柱の半分についての計算を行えば充分である。2次元シンプレックス要素による分割を図4に示す。無限円柱の初期温度を0℃とし、外気の温度 T_a を30℃

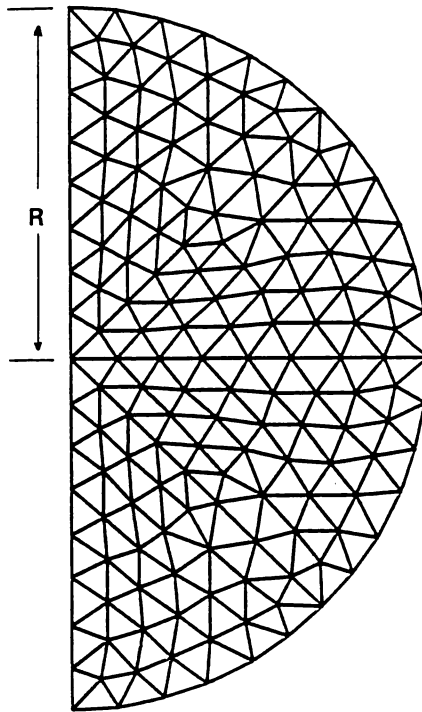


Fig. 4. A division of an infinite cylinder with radius R by triangular elements. Because of the symmetry of the problem, only half of the cylinder is considered.

と仮定した。物理定数としては、

$$\begin{aligned} \rho c &= 1 \text{ (cal/cm}^2 \cdot \text{°C)} \\ x &= 2.5 \text{ (cal/cm} \cdot \text{h} \cdot \text{°C)} \\ \alpha &= 3.75 \text{ (cal/cm}^2 \cdot \text{h} \cdot \text{°C)} \end{aligned} \quad (11)$$

を採用する。時間微分については、陽的なオイラーの前進差分を用いる。計算が収束するためには、時間差分 Δt はノイマンの収束条件

$$\frac{2x\Delta t}{\rho c} \text{Max} \left\{ \left(\frac{1}{\Delta x_1} \right)^2, \left(\frac{1}{\Delta x_2} \right)^2 \right\} \leq 1 \quad (12)$$

を満たさなければならない。(12)式は、 Δt の上限として約20秒を与えるが、安全性を見込んで $\Delta t=10$ 秒を採用した。無限円柱の中心と表面についての結果を図5に示す。

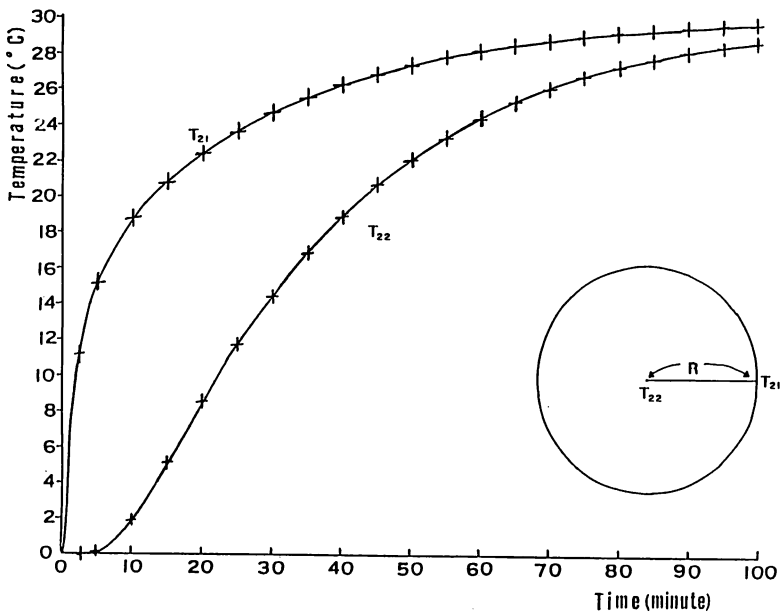


Fig. 5. The results of the calculation. The radius of the cylinder is taken to be 2 (cm). The calculated results agree almost exactly to the analytic solutions (+) in Eq. (34).

3次元熱伝導問題

3次元シンプレックス要素は4面体であり、その内部で温度 $T(x_1, x_2, x_3, t)$ は x_1, x_2, x_3 の1次関数で近似される。

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = L_\alpha(x_1, x_2, x_3) T_\alpha(t) \quad (13)$$

$$L_\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6V_e}(a_\alpha + b_\alpha x_1 + c_\alpha x_2 + d_\alpha x_3) \tag{14}$$

$$a_\alpha = A_{1\alpha}, b_\alpha = A_{2\alpha}, c_\alpha = A_{3\alpha}, d_\alpha = A_{4\alpha} \tag{15}$$

(13)~(15)式でギリシャ添字は4面体の4つの頂点を表し、ギリシャ添字が繰り返されたときは1~4の頂点についての和をとるものとする。L_α(α=1~4)は体積座標と呼ばれる。V_eは考えている4面体の体積、T_α(t)は頂点αにおける時刻tでの温度を表す。

(15)式でA_{αβ}は行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix} \tag{16}$$

の余因子である。(16)式の(x_{1α}, x_{2α}, x_{3α})は4面体要素のα番目の頂点の座標を表す。

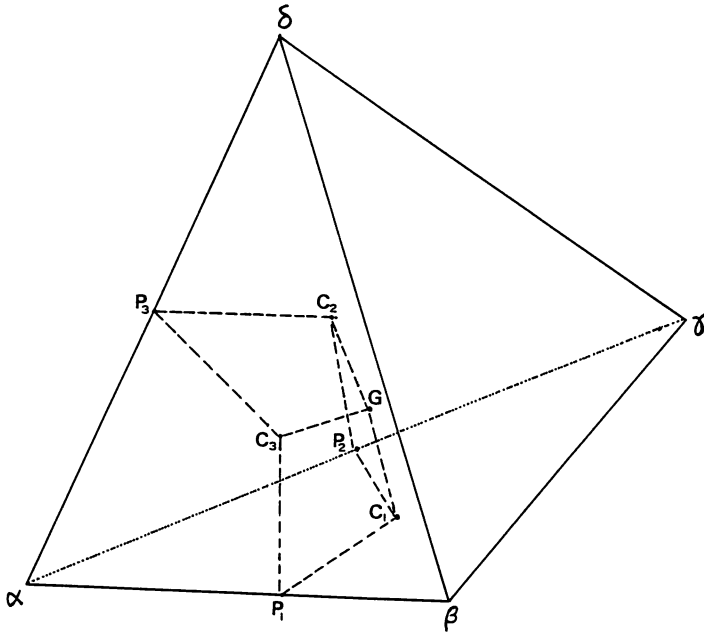


Fig. 6. A part of a subdomain in a tetrahedral element whose vertices are α, β, γ and δ. P_i are midpoints of sides, C_i the centers of gravity of triangle surfaces and G is the center of gravity of the tetrahedral element. The square surfaces defined by S_a≡□P₁C₁GC₃, S_b≡□C₁P₂C₂G, S_c≡□C₂P₃C₃G are three parts of the boundary surfaces of the subdomain. If the tetrahedral element is one of the boundary elements of the whole domain and Δαβγ is a part of its boundary surfaces, S_a≡□αP₁C₁P₂ becomes also a part of the boundary surfaces of the subdomain.

2次元の場合と同様に、3次元の補助領域を設けて、その内部での熱量の収支を考える。4面要素内の補助領域を図6のようにとると、重ね合わせるべき要素方程式は次のように書ける。

$$\frac{V_e}{4} \rho c \frac{\Delta T_a}{\Delta t} = \kappa \int_{S_a+S_b+S_c} \nabla T \cdot n dS \quad (17)$$

(17)式の右辺の積分を実行する前に、まず、3つの4角形 S_a, S_b, S_c が平面であり、それぞれの上では法線ベクトル n が一定であることに注意しよう。このことは、3次元空間内の4点 $(x_{1a}, x_{2a}, x_{3a}), (x_{1b}, x_{2b}, x_{3b}), (x_{1c}, x_{2c}, x_{3c}), (x_{1d}, x_{2d}, x_{3d})$ が同一平面上にあるための条件は

$$\begin{vmatrix} x_{1a} & x_{2a} & x_{3a} & 1 \\ x_{1b} & x_{2b} & x_{3b} & 1 \\ x_{1c} & x_{2c} & x_{3c} & 1 \\ x_{1d} & x_{2d} & x_{3d} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

で与えられること、及び図6で

$$\begin{aligned} x_{iP_1} &= \frac{x_{ia} + x_{i\beta}}{2}, \quad x_{iP_2} = \frac{x_{ia} + x_{i\gamma}}{2}, \quad x_{iP_3} = \frac{x_{ia} + x_{i\sigma}}{2} \\ x_{iC_1} &= \frac{x_{ia} + x_{i\beta} + x_{i\gamma}}{3}, \quad x_{iC_2} = \frac{x_{ia} + x_{i\gamma} + x_{i\sigma}}{3} \\ x_{iC_3} &= \frac{x_{ia} + x_{i\beta} + x_{i\sigma}}{3}, \quad x_{iC} = \frac{x_{ia} + x_{i\beta} + x_{i\gamma} + x_{i\sigma}}{4}, \end{aligned} \quad (i=1\sim 3) \quad (19)$$

であることより容易に確かめられる。

次に、4角形 S_a 上での法線ベクトル n を求めよう。上に述べたように S_a は平面だから3点 P_1, C_1, C_3 の決定する平面の法線ベクトルを求めればよい。 P_1, C_1, C_3 の決定する平面の方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ x_{1P_1} & x_{2P_1} & x_{3P_1} & 1 \\ x_{1C_1} & x_{2C_1} & x_{3C_1} & 1 \\ x_{1C_3} & x_{2C_3} & x_{3C_3} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{b_\beta - b_\alpha}{18} x_1 + \frac{c_\beta - c_\alpha}{18} x_2 + \frac{d_\beta - d_\alpha}{18} x_3 + \frac{a_\beta - a_\alpha}{18} \end{aligned} \quad (20)$$

で与えられる。故に、平面 S_a の法線ベクトル n の成分を (n_1, n_2, n_3) とすると

$$\frac{n_1}{b_\beta - b_\alpha} = \frac{n_2}{c_\beta - c_\alpha} = \frac{n_3}{d_\beta - d_\alpha} \quad (21)$$

でなければならない。(21)式と $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ より

$$n_1 = \frac{b_\beta - b_\alpha}{A_n}, \quad n_2 = \frac{c_\beta - c_\alpha}{A_n}, \quad n_3 = \frac{d_\beta - d_\alpha}{A_n} \quad (22)$$

$$A_n = \{(b_\beta - b_\alpha)^2 + (c_\beta - c_\alpha)^2 + (d_\beta - d_\alpha)^2\}^{1/2} \quad (23)$$

が得られる。

一般に、3次元空間内の3点 $(x_{1a}, x_{2a}, x_{3a}), (x_{1b}, x_{2b}, x_{3b}), (x_{1c}, x_{2c}, x_{3c})$ の作る3角形の面積 A は

$$A = \frac{1}{2} |A_1^2 + A_2^2 + A_3^2|^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_{1a} & x_{2a} \\ 1 & x_{1b} & x_{2b} \\ 1 & x_{1c} & x_{2c} \end{vmatrix}, A_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_{2a} & x_{3a} \\ 1 & x_{2b} & x_{3b} \\ 1 & x_{2c} & x_{3c} \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_{3a} & x_{1a} \\ 1 & x_{3b} & x_{1b} \\ 1 & x_{3c} & x_{1c} \end{vmatrix} \tag{25}$$

で与えられることに注意すると、点 P_1, C_1, C_3 の作る3角形の面積は $A_n/36$ であり、点 C_1, G, C_3 の作る3角形の面積は $A_n/72$ であることが確かめられる。故に4角形 S_a の面積 A_a は $A_a = A_n/36 + A_n/72 = A_n/24$ である。

4角形 S_a の法線ベクトルが(2)式で与えられること、(2)式の A_n は $24A_a$ であること、及び(14)式を利用すると

$$\int_{S_a} \nabla T \cdot ndS = \left(\frac{b_\rho}{6V_e} \frac{b_\beta - b_\alpha}{24} + \frac{c_\rho}{6V_e} \frac{c_\beta - c_\alpha}{24} + \frac{d_\rho}{6V_e} \frac{d_\beta - d_\alpha}{24} \right) T_\rho \tag{26}$$

であることが確かめられる。同様にして

$$\int_{S_b} \nabla T \cdot ndS = \left(\frac{b_\rho}{6V_e} \frac{b_\gamma - b_\alpha}{24} + \frac{c_\rho}{6V_e} \frac{c_\gamma - c_\alpha}{24} + \frac{d_\rho}{6V_e} \frac{d_\gamma - d_\alpha}{24} \right) T_\rho$$

$$\int_{S_c} \nabla T \cdot ndS = \left(\frac{b_\rho}{6V_e} \frac{b_\sigma - b_\alpha}{24} + \frac{c_\rho}{6V_e} \frac{c_\sigma - c_\alpha}{24} + \frac{d_\rho}{6V_e} \frac{d_\sigma - d_\alpha}{24} \right) T_\rho \tag{27}$$

が得られる。(26), (27)式と $b_\alpha + b_\beta + b_\gamma + b_\sigma = c_\alpha + c_\beta + c_\gamma + c_\sigma = d_\alpha + d_\beta + d_\gamma + d_\sigma = 0$ を用いると(17)式は最終的に次のように書ける。

$$\frac{V_e}{4} \rho c \frac{\Delta T_\alpha}{\Delta t} = -\frac{\kappa}{36V_e} (b_\rho b_\alpha + c_\rho c_\alpha + d_\rho d_\alpha) T_\rho \tag{28}$$

もし図6の4面体要素が、考えている領域の境界の要素で、3角形 $\alpha\beta\gamma$ が境界面であるときは、(17)式の右辺に次の項を付け加えなければならない。

$$\begin{aligned} \kappa \int_{S_d} \nabla T \cdot ndS &= -\alpha \int_{S_d} (T - T_\alpha) dS \\ &= -\alpha \left\{ \int_{S_d} T_\rho L_\rho dS - T_\alpha A_d \right\} \\ &= -\alpha \left\{ \left(T_\alpha + \frac{T_\alpha + T_\beta}{2} + \frac{T_\alpha + T_\beta + T_\gamma}{3} \right) \frac{2}{(1+2)!} \frac{A_d}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left(T_\alpha + \frac{T_\alpha + T_\gamma}{2} + \frac{T_\alpha + T_\beta + T_\gamma}{3} \right) \frac{2}{(1+2)!} \frac{A_d}{2} - T_\alpha A_d \right\} \\ &= \frac{\alpha A_d}{6} \left\{ 6T_\alpha - 2T_\alpha - \frac{T_\alpha + T_\beta}{2} - \frac{T_\alpha + T_\gamma}{2} - 2 \frac{T_\alpha + T_\beta + T_\gamma}{3} \right\} \end{aligned} \tag{29}$$

$$A_d = \frac{1}{3} \frac{1}{2} (b_\sigma^2 + c_\sigma^2 + d_\sigma^2)^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

(29), (30)式を導くのに、4面体要素内で温度は x_1, x_2, x_3 の1次関数であることから、点 P_1, P_2, C_1 での温度はそれぞれ $(T_\alpha + T_\beta)/2, (T_\alpha + T_\gamma)/2, (T_\alpha + T_\beta + T_\gamma)/3$ で与えられること、3角形 $\alpha\beta\gamma$ の面積が $(b_\sigma^2 + c_\sigma^2 + d_\sigma^2)^{\frac{1}{2}}/2$ で与えられること、及び積分公式⁷⁾

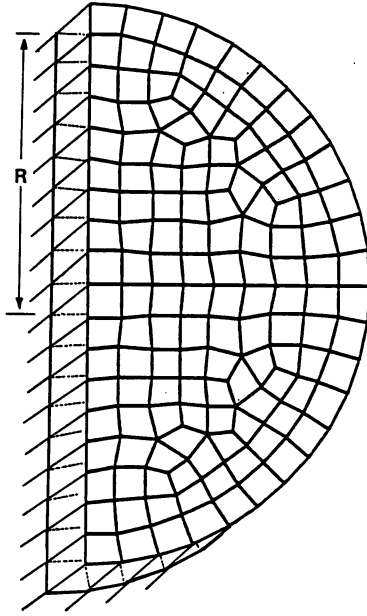


Fig. 7. A division of a finite cylinder by hexahedral elements. Because of the symmetry of the problem, only a quarter of the cylinder is considered.

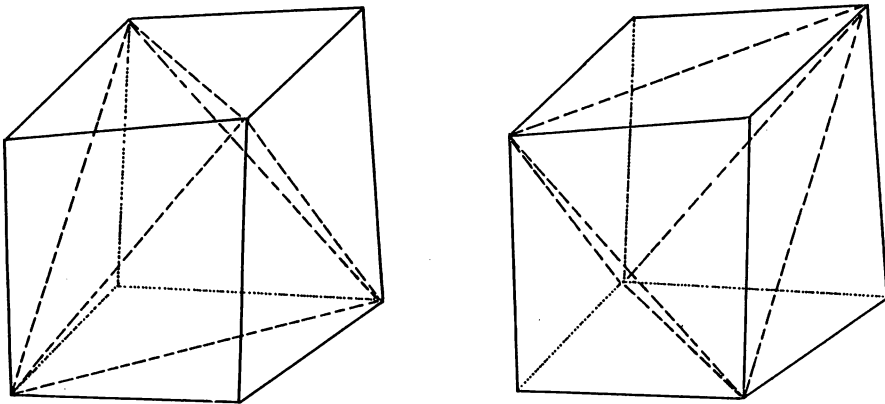


Fig. 8. One hexahedral element is further divided by five tetrahedral subelements in two ways.

$$\int_S L_1^a L_2^b L_3^c dS = \frac{a! b! c!}{(a+b+c)!} 2A \tag{31}$$

を用いた。(28)式と(29)式が3次元シンプレックス要素を用いた場合の、固体における熱伝導のCFEM要素方程式である。

3次元のCFEM数値解の信頼性を確かめるため、有限円柱について数値計算を実行した。有限円柱の対称性から計算はその4分の1について行った。領域をまず図7に示すように6面体要素に分割し、次に図8に示すように1つの6面体要素を5つの4面体要素に2つの方法で分割する。6面体要素方程式は、2つの方法で分割された5つの4面体要素方程式を重ね合わせて平均をとったものである。このように2つの分割の方法について平均をとることによって、数値計算の安定性が高まることがわかっている。(2つの方法について平均をとることは、2次元の場合に鋭角3角形のみを用いることと対応しているものと思われる。)初期条件、外気の温度、物理定数、時間差分はすべて2次元の場合と同じように選んだ。結果を図9に示す。図より、 T_{32} は T_{21} より、 T_{34} は T_{22} よりも早く温度が上昇することがわかる。また、 T_{32} は T_{33} よりも少しだけ早く温度が上昇している。

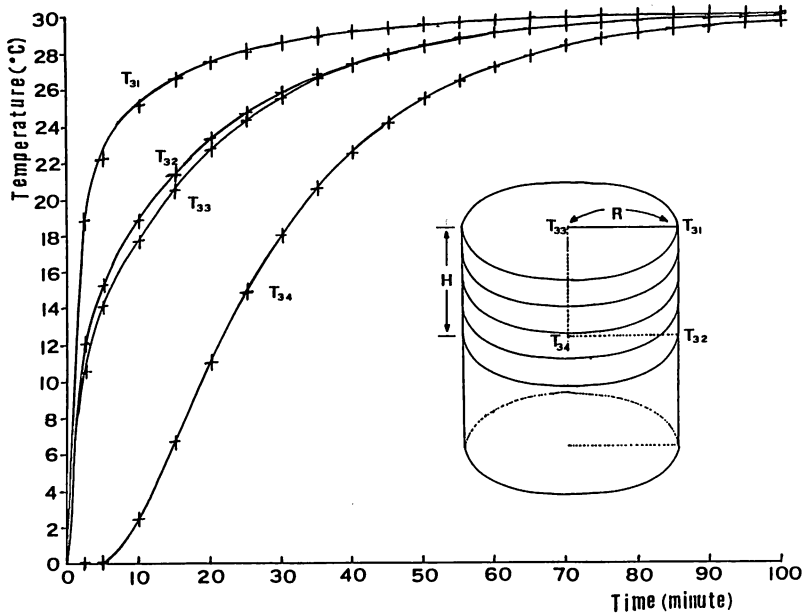


Fig. 9. The results of calculation. Both R and H in the figure are taken to be 2 (cm). The calculated results agree almost exactly to the analytic solutions (+) in Eq. (38).

解 析 解

固体における2次元熱伝導問題の基礎方程式と境界条件は次のように与えられる。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (32)$$

$$\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} + \alpha(T - T_a) = 0 \quad (\text{境界上で}) \quad (33)$$

半径 R の無限円柱を考える。(32), (33)式を極座標で書きなおし, 初期条件 $T(x_1, x_2, 0) = T_i$ を満足するという条件をおくと, 方程式の解 $T(x_1, x_2, t) = T(r, t)$ は次のように求められる。

$$\frac{T_a - T(r, t)}{T_a - T_i} = F(r, t) \quad (34)$$

$$F(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m_R \text{EXP}(-\beta_n^2 \kappa t / \rho c R^2)}{(1 + \beta_n m_R^2) J_0(\beta_n)} J_0\left(\beta_n \frac{r}{R}\right)$$

$$m_R = \frac{\kappa}{\alpha R}$$

$$\beta_n \text{ は } J_0(\beta) = m_R J_1(\beta) \text{ の } n \text{ 番目の根} \quad (35)$$

β_n の値は $n=1 \sim 7$ について文献9)に与えられている。数値解と比較するため, 5分ごとの解析解を, 無限円柱の中心と表面について, 図5に+記号で示してある。図5より, 解析解と数値解はほとんど一致していることがわかる。

固体における3次元熱伝導問題の基礎方程式と境界条件は次のように与えられる。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) = 0 \quad (36)$$

$$\kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} + \alpha(T - T_a) = 0 \quad (\text{境界上で}) \quad (37)$$

半径 R , 高さ $2H$ の有限円柱を考える。(36), (37)式を円柱座標で書きなおし, 初期条件 $T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_i$ を満足するという条件をおくと, 方程式の解 $T(x_1, x_2, t) = T(r, z, t)$ は次のように求められる。

$$\frac{T_a - T(r, z, t)}{T_a - T_i} = F(r, t) G(z, t) \quad (38)$$

$$G(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m_H \text{EXP}(-\gamma_n^2 \kappa t / \rho c H^2)}{(1 + \gamma_n^2 m_H^2 + m_H) \cos(\gamma_n)} \cos\left(\gamma_n \frac{z}{H}\right)$$

$$m_H = \frac{\kappa}{\alpha H}$$

$$\gamma_n \text{ は } \cot(\gamma) = m_H \gamma \text{ の } n \text{ 番目の根} \quad (39)$$

γ_n の値は $n=1 \sim 7$ について文献10)に与えられている。数値解と比較するため, 5分ごとの解析解を, 有限円柱の4つの点 (R, H) , $(R, 0)$, $(0, H)$, $(0, 0)$ について, 図9に+記号で示してある。解析解と数値解とのずれは点 (R, H) についてほんのわずかに認められるのみである。なお2次元, 3次元の場合とも, (35), (39)式の n についての和は $n=7$ ままで打ち切って解析解を求めた。

要 約

重みつき残差法を用いずに、熱量の保存という条件を1つ1つの要素に課すことによって、空間について陽的な有限要素法を、2次元、3次元の固体における熱伝導問題について構築することができた。2次元問題についての要素方程式は(7)式と(9)式で与えられ、それらは b_α, c_α ($\alpha=1\sim 3$) のみを用いて書かれている。3次元問題についての要素方程式は(8)式と(9)式で与えられ、それらは $b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ ($\alpha=1\sim 4$) のみを用いて書かれている。これらの式と、時間微分についてオイラーの前進差分を採用した陽的有限要素法の数値解は、無限円柱、有限円柱について、解析解とほとんど一致した。

有益な本を貸していただいたこと、いくつかの点について教授していただいたことについて御木英昌博士に感謝致します。

文 献

- 1) H. MIKI, H. KIKUKAWA and J. NISHIMOTO (1978) : Fundamental studies on the thawing of frozen fish-III Numerical analysis for thawing process. Mem. Fac. Fish., Kagoshima Univ. 27, 107-115.
- 2) H. MIKI, H. KIKUKAWA and J. NISHIMOTO (1980) : An application of three-dimensional finite element method to thawing processes in foodstuff. Mem. Fac. Fish., Kagoshima Univ. 29, 11-22.
H. MIKI, H. KIKUKAWA and J. NISHIMOTO (1981) : Numerical calculation of three-dimensional heat conduction on freezing process of marine foodstuff. Bull. Japan Soc. Sci. Fish. 48, 775-779.
- 3) O. C. ZIENKIEWICZ (1977) : "The Finite Element Method" pp535-539, McGraw Hill, London.
- 4) M. KAWAHARA, H. HIRANO, T. TSUBOTA and K. INAGAKI (1981) : Selective lumping finite element method for shallow water flow. Int. J. Numer. Meth. Fluids 2, 89-112.
- 5) H. KIKUKAWA and H. ICHIKAWA (1984) : An improved explicit finite element method for tidal flow. Int. J. Numer. Meth. Eng., 20, 1461-1475.
- 6) J. BANASZEK (1984) : A conservative finite element method for heat conduction problems. Int. J. Numer. Meth. Eng., 20, 2033-2050.
- 7) 武山斌郎・大谷茂盛・相原利雄 (1983) : 伝熱工学, p76 (丸善・東京)
- 8) M. A. E. EISENBERG and L. E. MALVERN (1973) : On the finite element integration in natural coordinates. Int. J. Numer. Meth. Eng. 7, 574-575.
- 9) H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER (1959) : "Conduction of Heat in Solids" pp491-493 Oxford University Press, London.
- 10) A. B. NEWMAN (1936) : Heating and cooling rectangular and cylindrical solids. Industrial Eng. Chem. 28, 545-548.