

保存領域法による潮汐の数値解析— I

水平 2 次元問題

菊 川 浩 行

Numerical Simulation of Tide by Conservative Region Method— I Horizontal Two Dimensional Problems

Hiroyuki KIKUKAWA*

Abstract

The explicit method named conservative region method is proposed for the horizontal two dimensional tidal flow problems. The method is formulated by considering the conservations of the water mass and the momentum for some special subdomain instead of starting from the governing equations and without using the weighted residual method.

The triangular and the quadrilateral element cases are formulated and are applied to a rectangular model basin with constant depth. The results are almost the same in both cases.

The numerical results of the tidal residual flow are compared with Yasuda's analytic solutions. There are little differences between their shapes except in the neighbourhood of the open boundary, but the absolute values of the numerical results are about twice as large as the analytic ones. The differences between them might be due to

- (i) the artificial boundary condition at the open boundary,
- (ii) a little rough division of the rectangular model basin and
- (iii) the ignorance of the nonlinear interaction of the tidal residual flow in the analytic solutions.

潮汐を数値的に評価する方法としては差分法¹⁾が一般的であり、少なくとも定性的には観測結果を理解することができるようになってきた。しかしながら、複雑な形状を持つ境界の場合やノイマン型境界条件を扱う場合には有限要素法の方が有利であることが知られている。差分法も有限要素法とともに偏微分方程式を解くための手法であるが、差分法が単に微分を差分で近似するだけなのに対して、有限要素法では領域内の物理量を関数で近似し、変分法（リッツ法）や重みつき残差法を用いて定式化される。時間に依存する潮汐問題では重みつき残差法の一つであるガラーキン法が広く用いられている。ガラーキン法の質量行列は対角行列ではないので、この方法は陰的方法であり、詳しい計算をしたり 3 次元の問題を解く場

* 鹿児島大学水産学部海洋環境計測学研究室
(Laboratory of Marine Electronics, Faculty of Fisheries, Kagoshima University, 50-20 Shi-
moarata 4, Kagoshima, 890 Japan)

合には多くの領域と計算時間およびプログラムの工夫が必要となる。

近年、ガラーキン法に代わるいろいろな陽の有限要素法が工夫されているが²⁾、いずれも重みつき残差法の変形である。ここでは、方程式が与えられていてそれを解くという立場ではなく、方程式の基礎となる物理量の保存が特定の補助領域で成り立つように工夫された陽的方法を水平2次元潮汐問題について提唱する。得られた式は、保存型有限要素法³⁾を潮汐問題に適用するとしたら得られるであろう結果とよく似たものであると考えられるが、有限要素法との立場の違いを明確にするため保存領域法と呼ぶことにする。

次節で3三角形要素の場合に、後に4辺形要素の場合について保存領域法を定式化し、矩形モデル湾に適用する。特に潮汐残差流についての安田の解析解⁴⁾と比較する。3三角形要素と4辺形要素の間の結果の違いはほとんどない。潮汐残差流における解析解との一致は定量的にはあまり良くないが、定性的には潮位を強制的に与える湾口付近を除いて満足できるものである。

3 角 形 要 素

2次元シンプレックス要素内では、物理量 $q(x_1, x_2, t)$ は x_1, x_2 の1次関数で近似され、次のように表わされる。

$$q(x_1, x_2, t) = L_\alpha(x_1, x_2)q_\alpha(t) \tag{1}$$

$$L_\alpha(x_1, x_2) = (a_\alpha + b_\alpha x_1 + c_\alpha x_2) / 2A_e \tag{2}$$

$$a_\alpha = x_{1\beta}x_{2\gamma} - x_{1\gamma}x_{2\beta}, \quad b_\alpha = x_{2\beta} - x_{2\gamma}, \quad c_\alpha = x_{1\gamma} - x_{1\beta} \tag{3}$$

α, β, γ はサイクリック

ギリシャ添字は3三角形の3つの頂点を表わし、ギリシャ添字がくり返されたときは1~3についての和をとるものとする。 L_α は面積座標、 $q_\alpha(t)$ は頂点 α における時刻 t での物理

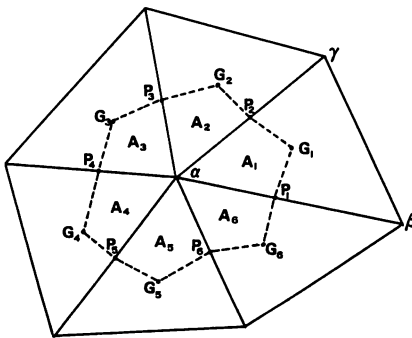


Fig. 1. An example of a subdomain. P_i are the midpoints of sides and G_i are the centers of gravity of the triangular elements. A_i denotes the area of a quadrilateral, the vertices of which are α, P_i, G_i and P_{i+1} .

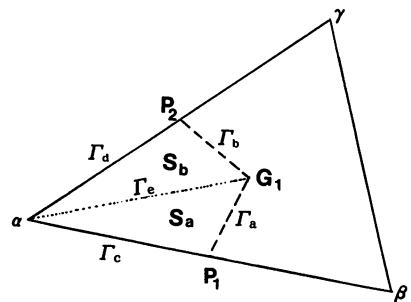


Fig. 2. A part of a subdomain in a triangular element, the vertices of which are α, β and γ . Γ_a and Γ_b are two parts of the boundary.

量 q の値, A_e は考えている 3 角形の面積を表わす.

図 1 の点線で囲まれた補助領域を考える. 点線で示された境界 Γ を通しては入ってくる流量によって節点 α の潮位 η_α が上昇する. 境界 Γ の微小部分 $d\Gamma$ を通しては入ってくる流量は Δt 時間に $-\rho(h+\eta)v \cdot n d\Gamma \Delta t$ である. 但し, \mathbf{n} は $d\Gamma$ の外向きの法線ベクトル, ρ は密度, h は水深, η は潮位, \mathbf{v} は流速を表わす. このことから, 節点 α における Δt 時間の潮位の上昇 $\Delta\eta_\alpha$ は, 流量の保存を考慮して, 次式で与えられることがわかる.

$$\rho \left(\sum_{i=1}^6 A_i \right) \Delta\eta_\alpha = - \int_{\Gamma} \rho(h+\eta) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \Delta t \quad (4)$$

図 2 を参照すると, (4)式は次に示す要素方程式を 6 つの要素について重ね合わせたものと考えてよい.

$$\rho \frac{A_e}{3} \Delta\eta_\alpha = - \int_{\Gamma_a+\Gamma_b} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \Delta t \quad (5)$$

$$\mathbf{u} \equiv \rho(h+\eta)\mathbf{v} \quad (6)$$

(5)式の積分はそのまま実行してもよいが, ここではガウスの積分定理を用いて変形する.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_a+\Gamma_b} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma &\Rightarrow \int_{\Gamma_a+\Gamma_c+\Gamma_e} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_b+\Gamma_d+\Gamma_e} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{S_a+S_b} \nabla \cdot \mathbf{u} dS \\ &= \frac{1}{6} (b_\rho u_{1\rho} + c_\rho u_{2\rho}) \end{aligned} \quad (7)$$

この置き換えは, $\Gamma_c+\Gamma_d$ についての積分が, 隣の要素がある場合はその要素の積分と消し合い, 隣の要素がない境界の場合, 海岸では $\mathbf{v}=0$ とおくので零になり, 開口部では潮位 η を与えるので η を求める式そのものが不要になることを考え合わせると可能であることがわかる. なお, (7)式の面積積分は面積座標に関する次の積分公式⁵⁾を用いて実行した.

$$\int_S L_1^l L_2^m L_3^n dS = \frac{\ell! m! n!}{(\ell+m+n+2)!} 2A \quad (8)$$

但し, A は領域 S の面積である. 結局, 質量の保存から次の要素方程式が得られた.

$$\rho \frac{A_e \Delta\eta_\alpha}{3 \Delta t} = - \frac{1}{6} (b_\rho u_{1\rho} + c_\rho u_{2\rho}) \quad (9)$$

運動量の保存についても同じように考えることができる. 図 1 の点線で囲まれた補助領域の運動量を変化させる要因としては, 境界 Γ を通しては入ってくる流量に伴う運動量増加, 境界の外の流体が及ぼす圧力の力積による運動量増加, コリオリ力の力積によるもの, 及び, 境界の外の流体との摩擦力によるものが考えられる. なお, 水平 2 次元モデルを考えているので, 重力による直接の運動量変化 (z 方向) は考えなくてもよい.

境界を通しては入ってくる流量に伴う Δt 時間の運動量増加は, 図 2 の要素について次のように書ける.

$$- \int_{\Gamma_a+\Gamma_b} \rho(h+\eta) v_n v d\Gamma \Delta t = - \int_{\Gamma_a+\Gamma_b} \mathbf{u} v_n d\Gamma \Delta t \quad (10)$$

x_1 方向について, (10)式を次のように変形する.

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_a+\Gamma_b} u_1 v_n d\Gamma \Delta t &\Rightarrow \left(- \int_{\Gamma_a+\Gamma_c+\Gamma_e} u_1 v_n d\Gamma - \int_{\Gamma_b+\Gamma_d+\Gamma_e} u_1 v_n d\Gamma \right) \Delta t \\ &= - \int_{S_a+S_b} \partial_j (u_1 v_j) dS \Delta t \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{36} \left\{ u_{1\alpha} b_\rho (2v_{1\alpha} + v_{1\alpha\beta} + v_{1\alpha\gamma} + 2v_{1\alpha\beta\gamma}) + u_{1\beta} c_\rho (2v_{2\alpha} + v_{2\alpha\beta} + v_{2\alpha\gamma} + 2v_{2\alpha\beta\gamma}) \right. \\ \left. + (v_{1\beta} b_\rho + v_{2\beta} c_\rho) (2u_{1\alpha} + u_{1\alpha\beta} + u_{1\alpha\gamma} + 2u_{1\alpha\beta\gamma}) \right\} \Delta t \quad (11)$$

ここで(1), (2), (8)式を用いて積分を実行し, 次の簡易記号を採用した.

$$q_{\alpha\beta} = (q_\alpha + q_\beta)/2, \quad q_{\alpha\beta\gamma} = (q_\alpha + q_\beta + q_\gamma)/3 \quad (12)$$

境界の外側の流体が内側の流体に及ぼす圧力 p による Δt 時間の運動量増加は

$$\int_{-h}^{\eta} dz \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} p(-n) d\Gamma \Delta t = - \int_{-h}^{\eta} dz \int_{s_a + s_b} \nabla p dS \Delta t \quad (13)$$

で与えられ, x_1 方向については $p = \rho g(\eta - z)$ を考慮して次のようになる.

$$- \rho g \int_{s_a + s_b} (h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} dS \Delta t \\ = - \frac{\rho g}{36} b_\rho \eta_\rho [2(h + \eta)_\alpha + (h + \eta)_{\alpha\beta} + (h + \eta)_{\alpha\gamma} + 2(h + \eta)_{\alpha\beta\gamma}] \Delta t \quad (14)$$

コリオリ力の力積による運動量増加は

$$- f \int_{s_a + s_b} \rho (h + \eta) (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) dS \Delta t = - f \int_{s_a + s_b} \mathbf{k} \times \mathbf{u} dS \Delta t \quad (15)$$

である. 但し, f はコリオリ係数, \mathbf{k} は鉛直上向き単位ベクトルを表わす. x_1 方向については次式で与えられる.

$$f \int_{s_a + s_b} u_2 dS \Delta t = \frac{f}{18} A_e (2u_{2\alpha} + u_{2\alpha\beta} + u_{2\alpha\gamma} + 2u_{2\alpha\beta\gamma}) \Delta t \quad (16)$$

最後に, ニュートン流体を仮定すれば, 境界の外の流体との摩擦力が $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ に比例すると考えるのは自然であろう. このとき, 摩擦力による運動量増加は

$$\mu \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} (h + \eta) (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v} d\Gamma \Delta t \rightarrow \frac{\mu}{\rho} \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} d\Gamma \Delta t \quad (17)$$

で与えられる. 比例定数 μ は粘性率である. (17)式の右辺の積分は, Γ_a, Γ_b 上で法線ベクトル \mathbf{n} が, l_a, l_b を Γ_a, Γ_b の長さとする

$$\mathbf{n}(\Gamma_a) = \left(\frac{b_\beta - b_\alpha}{6l_a}, \frac{c_\beta - c_\alpha}{6l_a} \right), \quad \mathbf{n}(\Gamma_b) = \left(\frac{b_\gamma - b_\alpha}{6l_b}, \frac{c_\gamma - c_\alpha}{6l_b} \right) \quad (18)$$

で与えられることを用いると容易に実行できて, x_1 方向については次のようになる.

$$\frac{\mu}{\rho} \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} (\mathbf{n} \cdot \nabla) u_1 d\Gamma \Delta t \\ = \nu \left[\left(\frac{b_\rho}{2A_e} \frac{b_\beta - b_\alpha}{6} + \frac{c_\rho}{2A_e} \frac{c_\beta - c_\alpha}{6} \right) u_{1\alpha} + \left(\frac{b_\rho}{2A_e} \frac{b_\gamma - b_\alpha}{6} + \frac{c_\rho}{2A_e} \frac{c_\gamma - c_\alpha}{6} \right) u_{1\beta} \right] \Delta t \\ = - \frac{\nu}{4A_e} (b_\alpha b_\rho + c_\alpha c_\rho) u_{1\alpha} \Delta t \quad (19)$$

考えている要素が境界の要素の場合, 海岸では $\mathbf{v} = 0$ とおくので \mathbf{u} を求める式そのものが不要であり, 開口部では $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$ と考えれば特別扱いをしなくてもよい. 結局, 運動量の保存から, 点 α における x_1 方向の運動量変化 $\Delta u_{1\alpha}$ についての要素方程式として次式が得られた.

$$\frac{A_e}{3} \frac{\Delta[\rho(h + \eta)_\alpha v_{1\alpha}]}{\Delta t} = \frac{A_e}{3} \frac{\Delta u_{1\alpha}}{\Delta t} = [(11) + (14) + (16) + (19)] / \Delta t \quad (20)$$

x_2 方向については, (11), (19)式で $u_1 \rightarrow u_2$, (14)式で $b_o \rightarrow c_o$, (16)式で $f \rightarrow -f$, $u_2 \rightarrow u_1$ の置き換えを行えばよい.

3 角形要素の矩形モデル湾への応用

前節で述べた方法の安定性や結果の信頼性を調べるため, 図 3 に示す矩形モデル湾に適用した. 物理定数としては次に示すものを用い, コリオリ力は無視した.

T (周期)=12.5(時間), G (重力加速度)=9.8(m/秒²), h (深さ)=100(m)

ν (渦動粘性率)=10³(m²/秒), W (湾巾の半分)= $\frac{W^*}{\beta_H}$, $W^*=5$, $\beta_H=\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$

$\omega=\frac{2\pi}{T}$, L (湾長)=0.5L*, $L^*=\frac{\pi\sqrt{gh}}{2\omega}$

ここで L^* は摩擦がないときの基本潮汐に共振する湾の長さを表す. 境界条件としては, 開口部で潮位 η を $\sin(-2\pi t/T)$ で与え, 海岸で $v=0$ とした. (9), (20)式の左辺の $\Delta\eta/\Delta t$, $\Delta u_i/\Delta t$ については 2 段階ラックスーウェンドロフ時間差分法で近似し, 時間ステップ Δt を 15 秒とした.

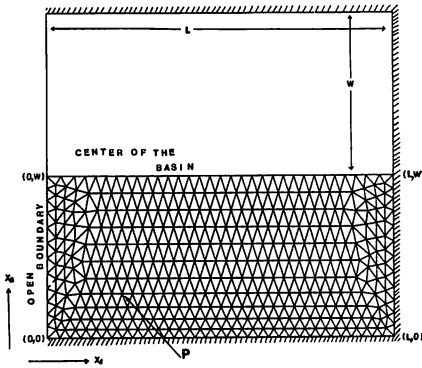


Fig. 3. Division of the rectangular model basin by triangular elements. Since the Coriolis force is ignored, only the lower half of the basin is considered.

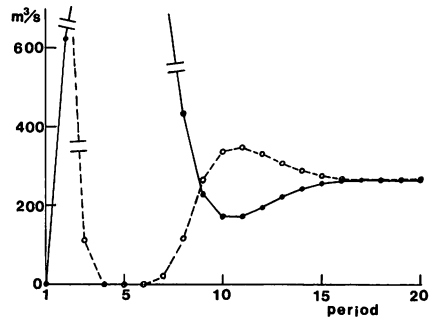


Fig. 4. Inflow (●—●) and outflow (○---○) parts of the water mass transport for the tidal residual flow at the open boundary.

潮汐残差流量における開口部の流入量と流出量を各周期について図 4 に示す. 16 周期目ではほとんど収束して流量の保存がよく成り立っていることがわかる. 図 5 には 20 周期目の潮汐残差流量が示してある. 図 6 に潮汐残差流量における運動量収支のつり合いの様子を, 各項の役割の大きさを見るために規格化して示してある. 湾の中央付近では移流項と重力項が, 岸の近くでは粘性項と重力項が主につり合っていることがわかる. 図 7 に図 3 の点 P における潮位と u_1 , u_2 の時間変化の様子を示す.

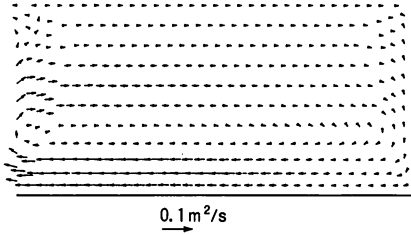


Fig. 5. Distribution of the tidal residual flow at the 20-th period.

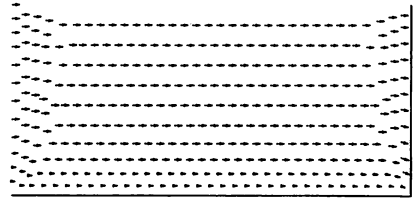


Fig. 6a. Distribution of the normalized advective term for the tidal residual flow.

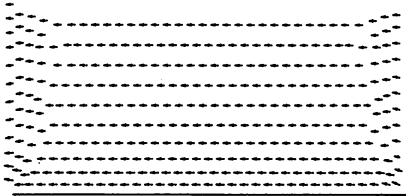


Fig. 6b. Distribution of the normalized gravitational term for the tidal residual flow.

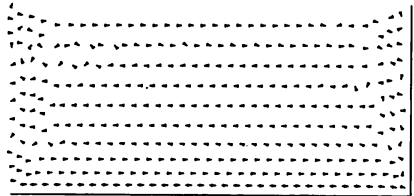


Fig. 6c. Distribution of the normalized viscous term for the tidal residual flow.

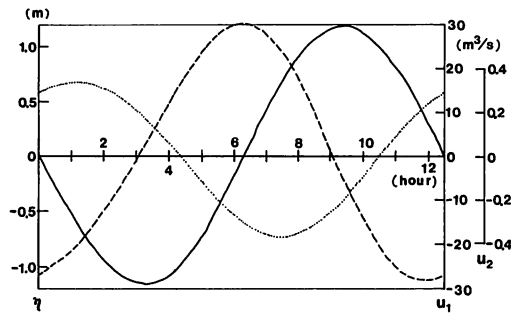


Fig. 7. The variations of η (solid line), u_1 (dashed line) and u_2 (dotted line) at the point P in Fig. 3.

4 辺形要素

図8の点線で囲まれた補助領域の物理量の保存を考える。この場合、図9のように4辺形を正方形に変換して考えると便利である。

$$x_i = 0.25(1 + y_1 y_{1a})(1 + y_2 y_{2a}) x_{ia} \quad i=1, 2 \tag{21}$$

②1式でギリシャ添字は、4 辺形または正方形の 4 つの頂点を表わし、ギリシャ添字がくり返されたときは 4 つの頂点についての和をとるものとする。物理量 q については次式の近似を採用する。

$$q(y_1, y_2, t) = 0.25(1 + y_1 y_{1\alpha})(1 + y_2 y_{2\alpha}) q_\alpha(t) \tag{22}$$

②2式で $q_\alpha(t)$ は頂点 α における時刻 t での物理量の値を示す。

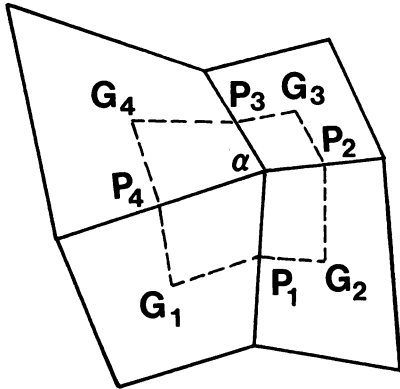


Fig. 8. An example of a subdomain. P_i are the midpoints of sides and G_i are the centers of gravity of the quadrilateral elements.

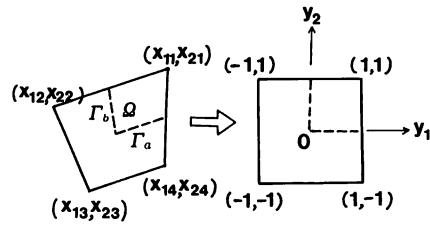


Fig. 9. Change of coordinates from a quadrilateral element to a square element.

3 角形要素の場合と同じように、図 8 の点線で示された境界 Γ からの流入量によって、節点 α の潮位が上昇すると考える。全体についての式は各要素についてのものを重ね合わせれば得られるから、図 9 に示す 1 つの要素について考える。すると次の要素方程式が得られる。

$$\left(\rho \int_{\Omega} dx_1 dx_2\right) \frac{\Delta \eta}{\Delta t} = - \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \tag{23}$$

②3の左辺の積分は②1式を用いて次のように実行できる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx_1 dx_2 &= \int_0^1 dy_1 \int_0^1 dy_2 \det(J) \\ &= (0.25)^2 y_{1\alpha} y_{2\alpha} (x_{1\alpha} x_{2\beta} - x_{2\alpha} x_{1\beta}) (1 + 0.5 y_{1\beta}) (1 + 0.5 y_{2\alpha}) \equiv c_v \end{aligned} \tag{24}$$

但し、②4式の $\det(J)$ は

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}$$

を示す。②3式の右辺の積分は次の関係を用いて実行することができる。

$$d\Gamma = \left\{ (dx_1)^2 + (dx_2)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

$$\Gamma_a \text{ 上で } d\Gamma = \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dy_1$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2) = \left(\frac{\partial x_2}{\partial \Gamma}, -\frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} \right) \quad (26)$$

$$\int_{\Gamma_a} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_0^1 \left\{ u_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - u_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right\}_{y_2=0} dy_1$$

$$= (0.25)^2 (u_{1\alpha} x_{2\beta} - u_{2\alpha} x_{1\beta}) y_{1\beta} (1 + 0.5 y_{1\alpha}) \quad (27)$$

$$\Gamma_b \text{ 上で } d\Gamma = \left\{ \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dy_2$$

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial x_2}{\partial \Gamma}, \frac{\partial x_1}{\partial \Gamma} \right) \quad (28)$$

$$\int_{\Gamma_b} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_0^1 \left\{ -u_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + u_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \right\}_{y_1=0} dy_2$$

$$= -(0.25)^2 (u_{1\alpha} x_{2\beta} - u_{2\alpha} x_{1\beta}) y_{2\beta} (1 + 0.5 y_{2\alpha}) \quad (29)$$

(27)~(29)式より、質量の保存から次の要素方程式が得られた。

$$\rho c_v \frac{\Delta \eta_1}{\Delta t} = - \{ (27) + (29) \} \quad (30)$$

運動量の保存については、3角形要素の場合と同じように、運動量を変化させる4つの要因を考える。まず x_1 方向の運動量変化を考える。境界を通しては入ってくる流量に伴う単位時間の運動量増加は、図9に示された要素について次のように書ける。

$$-\int_{\Gamma_a + \Gamma_b} \rho(h + \eta) v_n v_1 d\Gamma = -\int_{\Gamma_a + \Gamma_b} u_1 v_n d\Gamma$$

$$= -\int_0^1 \left\{ u_1 v_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - u_1 v_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right\}_{y_2=0} dy_1 - \int_0^1 \left\{ -u_1 v_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + u_1 v_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \right\}_{y_1=0} dy_2$$

$$= -(0.25)^3 u_{1\alpha} (v_{1\beta} x_{2\gamma} - v_{2\beta} x_{1\gamma}) (y_{1\gamma} y_{1\alpha\beta} - y_{2\gamma} y_{2\alpha\beta}) \quad (31)$$

$$y_{i\alpha\beta} \equiv (1 + 0.5 y_{i\alpha} + 0.5 y_{i\beta} + \frac{1}{3} y_{i\alpha} y_{i\beta}) \quad (32)$$

(31)式の積分を実行するのに(26), (28)式を用いた。

境界の外側の流体が内側の流体に及ぼす圧力 p による単位時間の運動量増加は次のように評価することができる。

$$\int_{-h}^{\eta} dz \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} p(-n_1) d\Gamma \Rightarrow -\rho g \int_a (h + \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_1} dx_1 dx_2$$

$$= -\rho g \int_0^1 \int_0^1 (h + \eta) \left\{ \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial y_2} \right\} \det(J) dy_1 dy_2$$

$$= -\rho g (0.25)^3 (h + \eta)_{\alpha} y_{2\beta} y_{1\gamma} (x_{2\beta} \eta_{\gamma} - x_{2\gamma} \eta_{\beta}) y_{1\alpha\beta} y_{2\alpha\gamma} \quad (33)$$

但し、(33)式の $\partial y_1 / \partial x_1$, $\partial y_2 / \partial x_1$ は

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{pmatrix} = (\det J)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} \quad (34)$$

を用いて計算した。

コリオリ力による単位時間当たりの運動量増加は次のように書ける。

$$\begin{aligned} -f \int_a^b (\mathbf{k} \times \mathbf{u})_1 dx_1 dx_2 &= f \int_a^b u_2 dx_1 dx_2 \\ &= f \int_0^1 \int_0^1 u_2 \det(J) dy_1 dy_2 \\ &= f(0.25)^3 u_{2\alpha} y_{1\beta} y_{2\gamma} (x_{1\beta} x_{2\gamma} - x_{2\beta} x_{1\gamma}) y_{1\alpha\gamma} y_{2\alpha\beta} \end{aligned} \quad (35)$$

最後に、境界の外の流体との摩擦力による運動量増加は、摩擦力が $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ に比例すると考えて、次のように書ける。

$$\begin{aligned} &\mu \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} (h + \eta) (\mathbf{n} \cdot \nabla) v_1 d\Gamma \rightarrow \nu \int_{\Gamma_a + \Gamma_b} \mathbf{n} \cdot \nabla u_1 d\Gamma \\ &= \nu \int_0^1 \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \right\}_{y_2=0} dy_1 + \nu \int_0^1 \left\{ -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \right\}_{y_1=0} dy_2 \\ &\equiv S(\Gamma_a) + S(\Gamma_b) \end{aligned} \quad (36)$$

(36)式の右辺の積分は

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_1}{\partial y_j} + \frac{\partial y_2}{\partial x_i} \frac{\partial u_1}{\partial y_2}$$

を用い、 $\partial y_j / \partial x_i$ は(34)式を用いて計算すれば実行することができて次のようになる。

$$\begin{aligned} C_a &= y_{1\alpha} y_{2\beta} (x_{1\alpha} x_{2\beta} - x_{2\alpha} x_{1\beta}) = \det(J)_{y_1=y_2=0} \neq 0 \\ D_a &= y_{1\alpha} y_{1\beta} y_{2\beta} (x_{1\alpha} x_{2\beta} - x_{2\alpha} x_{1\beta}) \end{aligned} \quad (37)$$

と定義すると $D_a \neq 0$ のとき

$$S(\Gamma_a) = \nu \left\{ \frac{B_a - \bar{B}_a}{D_a} + \frac{(A_a - \bar{A}_a) D_a - (B_a - \bar{B}_a) C_a}{D_a^2} \ell n \left(1 + \frac{D_a}{C_a} \right) \right\} \quad (38)$$

$D_a = 0$ のとき

$$S(\Gamma_a) = \frac{\nu}{C_a} \{ A_a - \bar{A}_a + 0.5(B_a - \bar{B}_a) \} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} A_a &= 0.25 y_{2\alpha} y_{1\beta} (x_{2\alpha} u_{1\beta} - x_{2\beta} u_{1\alpha}), \quad \bar{A}_a = A_a(x_2 \rightarrow -x_1), \\ B_a &= 0.25 y_{1\alpha} y_{2\alpha} y_{1\beta} (x_{2\alpha} u_{1\beta} - x_{2\beta} u_{1\alpha}), \quad \bar{B}_a = B_a(x_2 \rightarrow -x_1) \end{aligned} \quad (40)$$

$S(\Gamma_b)$ は次のようになる

$$S(\Gamma_b) = -S(\Gamma_a)(y_1 \leftrightarrow y_2)$$

結局、 x_1 方向の運動量保存から

$$\int_a^b dx_1 dx_2 \frac{\Delta[\rho(h + \eta) v_{11}]}{\Delta t} = c_v \frac{\Delta u_{11}}{\Delta t} = (31) + (33) + (35) + (36) \quad (41)$$

が得られた。 x_2 方向の運動量保存からは

$$\begin{aligned} c_v \frac{\Delta u_{21}}{\Delta t} &= (31)(u_1 \rightarrow u_2) + (33)(x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2) \\ &\quad + (35)(f \rightarrow -f, u_2 \rightarrow u_1) + (36)(u_1 \rightarrow u_2) \end{aligned} \quad (42)$$

が得られる。

4 辺形要素の矩形モデル湾への応用

(30), (41), (42)式を矩形モデル湾に適用した。図10は分割図である。まず、3角形要素の場合と同じ物理定数と同じ境界条件の場合の結果を図11～図14に示す。図11は潮汐残差流量における開口部での流入量と流出量を各周期について示したもので図4に対応する。図12は20周期目の潮汐残差流量、図13は潮汐残差流量における運動量収支を規格化して示したもので、それぞれ図5、図6に対応する。図11～図13は図4～図6と絶対値まで含めてよく一致している。図14は図10の点Pにおける潮位と u_1 , u_2 の時間変化を示したものである。点Pにおいては u_1 の時間平均は負であるが、図14を見ると u_1 の絶対値は u_1 が正のときの方が負のときよりもむしろ大きい。 u_1 の平均値が負になるのは、 u_1 が負である時間の方が正である時間よりも長いことに原因がある。

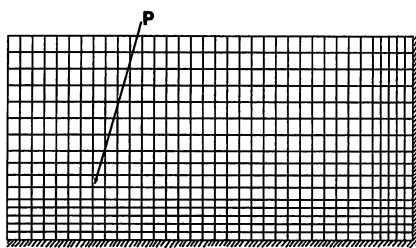


Fig. 10. Division of the rectangular model basin by quadrilateral elements.

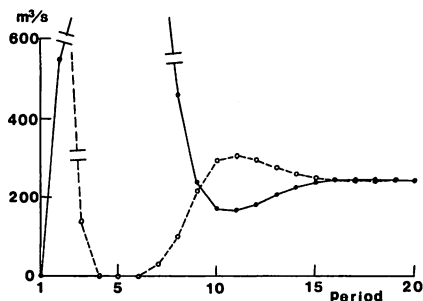


Fig. 11. Inflow (●—●) and outflow (○—○) parts of the water mass transport for the tidal residual flow at the open boundary.

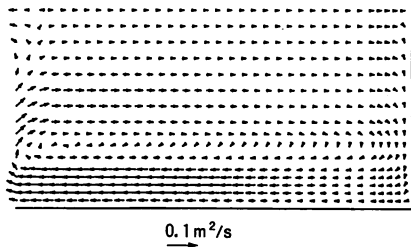


Fig. 12. Distribution of the tidal residual flow at the 20-th period.

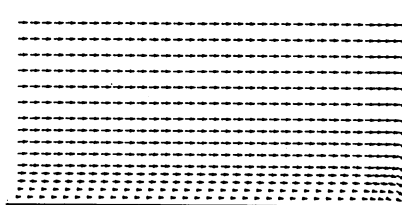


Fig. 13a. Distribution of the normalized advective term for the tidal residual flow.

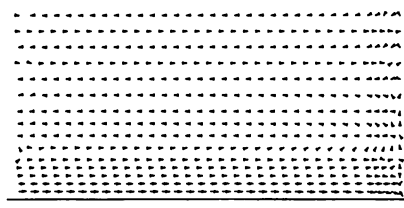
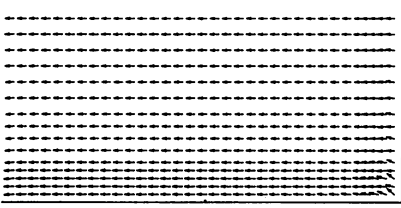


Fig. 13b. Distribution of the normalized gravitational term for the tidal residual flow.

Fig. 13c. Distribution of the normalized viscous term for the tidal residual flow.

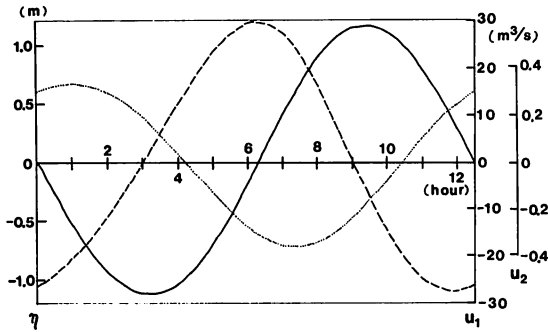


Fig. 14. The variations of η (solid line), u_1 (dashed line) and u_2 (dotted line) at the point P in Fig. 10.

次に、図10と同じ分割を用いて、 $W^*=10$ 、 $L=2L^*$ の場合の計算を行なった。図15～図18はその結果を示す。図15は潮汐残差流量における開口部での流入量と流出量を各周期について示したものであるが、 $L=0.5L^*$ の場合に比べて湾長が4倍になったことを反映して、図11に比べて収束が遅くなっている。図16は92周期目における潮汐残差流量、図17は潮汐残差流量における運動量収支を規格化して示したものである。図17において、湾中央付近では移流項と重力項が、岸近くでは重力項と粘性項が主につり合っている様子は $W^*=5$ 、 $L=0.5L^*$ の場合と本質的にかわらない。図18には、図10の点 P における潮位と u_1 、 u_2 の時間変化を示す。

安田の解析解

この節では、安田⁴⁾が与えた潮汐残差成分に関する解析的流線関数の解を流量のベクトル図として示す。但し、流量ベクトルは流線関数から得られる流速ベクトルに水深をかけたもので与えられるとし、物理定数は数値計算のものと同じものを用いた。

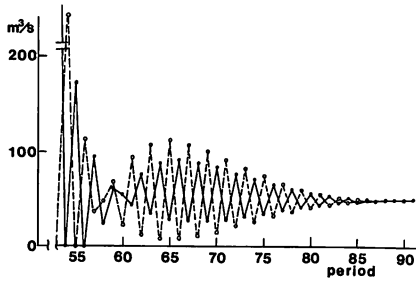


Fig. 15. Inflow (●—●) and outflow (○—○) parts of the water mass transport for the tidal residual flow at the open boundary.

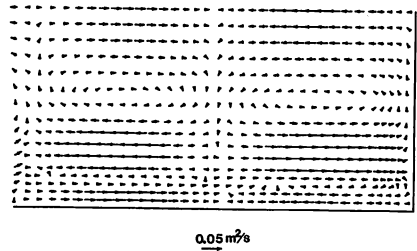


Fig. 16. Distribution of the tidal residual flow at the 92-th period in the case of $W^*=10$ and $L=2L^*$.

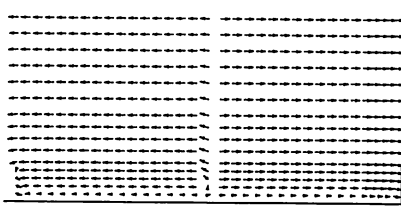


Fig. 17a. Distribution of the normalized advective term for the tidal residual flow in the case of $W^*=10$ and $L=2L^*$.

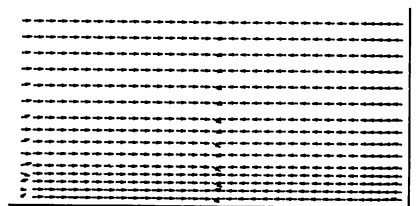


Fig. 17b. Distribution of the normalized gravitational term for the tidal residual flow in the case of $W^*=10$ and $L=2L^*$.

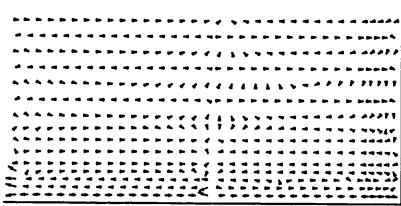


Fig. 17c. Distribution of the normalized viscous term for the tidal residual flow in the case of $W^*=10$ and $L=2L^*$.

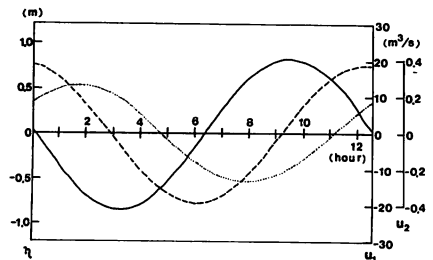


Fig. 18. The variations of η (solid line), u_1 (dashed line) and u_2 (dotted line) at the point P in Fig. 10 in the case of $W^*=10$ and $L=2L^*$.

図19は $W^*=5$, $L=0.5L^*$ の場合である。数値計算の結果の図 5, 図12を図19と比べると、全体の様子はほぼ対応しているが、開口部と $x_1=L$, $x_2=0$ 付近の様子が一致していないこと、絶対値が解析解のほぼ2倍であること等の差異が見られる。図20は $W^*=10$, $L=2L^*$ の場合の解析解である。数値計算結果の図16を図20と比べると、 $W^*=5$, $L=0.5L^*$ の場合と同じ差異が見られる。このように、数値計算結果が解析解と系統的差異を持つ原因として、境界条件、特に開口部付近のものが人工的であること、境界層に起因する潮汐残差成分を数値計算で再現するには、岸近くの分割が粗すぎることなどが考えられる。また図16において湾中央付近の絶対値が図20より非常に大きいことから、境界層外で大きいと思われる残差流の非線形効果（解析解では無視されている）も数値計算の結果と解析解とのずれに寄与している可能性もある。

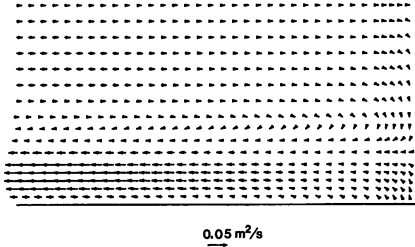


Fig. 19. Yasuda's analytic solution for the tidal residual flow in the case of $W^*=5$ and $L=0.5L^*$.

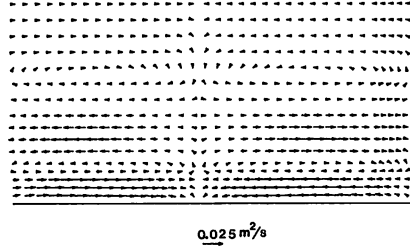


Fig. 20. Yasuda's analytic solution for the tidal residual flow in the case of $W^*=10$ and $L=2L^*$.

課 題

支配方程式から出発せず、重みつき残差法を用いず、物理量の保存のみを考慮して、水平 2 次元潮汐問題の陽的数値計算法を構築した。この方法は、有限要素法と同じく複雑な境界を近似するのに適し、プログラムも非常に簡単である。矩形モデル湾の潮汐残差流量についての解析解との一致は必ずしも良くないが、大まかな様子は現実のものとそれほど変わらない結果を与えるであろうと期待される。今後、実際の湾へ適用し、観測結果との比較を試みるつもりである。

ここに述べた保存領域法は、特に 4 辺形要素の場合、3 次元 6 面体要素への拡張が可能であると思われる。3 次元問題へ拡張し、安田の鉛直方向の潮汐残差流の解析解と比べるとは興味を持たれる次の課題である。

安田の解析解に関する注意を喚起していただいたことについて、市川洋博士に感謝致します。

文 献

- 1) Y. OONISI (1977) : A numerical study on the tidal residual flow. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **33**, 207-218.
- 2) J. DONEA, S. GIULIANI and H. LAVAL (1979) : Accurate explicit finite element schemes for convective-conductive heat transfer problems. *FEM Method for Convection Dominated Flows* (Ed. T. J. R. Hughes), ASME, New York, AMD-34, 149-166.
M. KAWAHARA, H. HIRANO, T. TSUBOTA and K. INAGAKI (1982) : Selective lumping finite element method for shallow water flow. *Int. J. Numer. Method Fluids*, **2**, 89-112.
H. KIKUKAWA and H. ICHIKAWA (1984) : An improved explicit finite element method for tidal flow. *Int. J. Numer. Method Enging.*, **20**, 1461-1475.
- 3) J. BANASZEK (1984) : A conservative finite element method for heat conduction problems. *Int. J. Numer. Method Enging.*, **20**, 2033-2050.
菊川浩行 (1985) : 保存型有限要素法による熱伝導問題の陽的解法 - I 自然座標による定式化. 鹿児島大学水産学部紀要, **34**, No. 1, 169-181.
- 4) H. YASUDA (1980) : Generating mechanism of tidal residual current due to the coastal boundary layer. *J. Oceanogr. Soc. Japan*, **35**, 241-252.
安田秀一 (1983) : 境界層による潮汐残渣流系 - その方程式と湾長が任意の場合の解. 中国工業技術試験所報告**19**, 67-86.
- 5) M. A. E. EISENBERG and L. E. MALVERN (1973) : On the finite element integration in natural coordinates. *Int. J. Numer. Method Enging.*, **7**, 574-575.