開超弦の場の理論におけるtreeレベル5点振幅の分析

道下 洋二*

（Received 25 October, 2011）

Analysis of Tree Level Five-Point Amplitudes in Open Superstring Field Theory

MICHISHITA Yoji

要約

Berkovits型の開超弦の場の理論において質量殻上のtreeレベル5点振幅を計算し、それが第一量子化での振幅と一致しているかどうかを見る。まずゲージ固定の手続きにおける問題点を述べ、5つのボゾンの振幅で振幅が一致することを示す。フェルミオンを含む振幅ではもっともらしいファインマン則の形を推測し、それを用いる。それはより点数の低い振幅ではうまく第一量子化の振幅を再現するが、5点の場合は変更が必要で、その変更は単に頂点の係数を変えるだけでよいことを示す。

キーワード：弦理論、弦の場の理論、超対称性

*鹿児島大学教育学部　准教授

1　はじめに

弦の場の理論は弦理論の非摂動的性質の研究にとって有用な方法のひとつである。ボゾン的な弦の場の理論についてかなり研究が進んでいるので、それを超弦の場合にも推し進めようというのが本稿の狙いである。

Berkovits によって NSR 形式に基づいた開超弦の場の理論が与えられている [1]。(ほかにも拡張された pure spinor 形式に基づいたものとしては [2] 等がある。) この理論の作用は無限に多くの項を持ち、2 種類のゲージ対称性を持つ。ひとつは状態空間を大きい Hilbert 空間にとったために加わった余分な状態を消去するためのもので、もうひとつは物理的状態が BRST コホモロジーで与えられることを保証するものである。

振幅の計算のためにはまずこれらのゲージ対称性のゲージ固定について述べなければならない。ボゾン的な場合にはゲージ固定は Batalin-Vilkovisky 形式によって行われたことを思い出そう。(BV 形式の一般論については例えば [3] を見よ。) すなわち Siegel ゲージ条件 $b_0\Phi = 0$ で固定された系の作用は、弦の場のゴースト数に関する制限をはずすことで、固定前の作用と全く同じ形の作用で与えられる。(例えば [4, 5] を見よ。) このことは弦の BRST 形式による第一量子化において状態スペクトラムを得るときにゴースト数に特に制約を設けなかったことに対応している。そこで自然な考えとして超弦の場合でも単にゴースト数の制約を外すことでゲージ固定された作用が与えられると考えたくなる。そのように与えられた系は第一量子化の 3 点振幅を正しく再現することがすぐにわかる。しかし残念ながらこの系は Batalin-Vilkovisky 形式を直接適用して得られる系とは違うものである。それは場の 3 次の項ですら古典的マスター方程式を満たさないことから見てとれる。したがってゲージ固定された系の正しい姿はゴースト部分が複雑で、ループ振幅などゴーストが絡む計算は第一量子化の計算との対応が見づらくそれより相当複雑であると考えられる。実際古典的マスター方程式の完全な解を見出すのは絶望的である。([6] などでそれを扱う試みがなされている。)

ここではこのような複雑な問題には深入りせず、ゴーストが絡まない部分を考えてみる。そうすると質量殻上の tree レベル 4 点振幅は第一量子化の結果を正しく再現することが知られている [7, 8]。([9, 10] も見よ。) これはゲージ固定された系でゴーストをゼロとおけばゲージ固定前の作用と同じものが得られるはずなので、ゲージ固定された系が何であるかとりあえず知る必要がないために可能である。

この路線をさらに推し進めて、本稿では質量殻上の tree レベル 5 点振幅を計算する。まず前座として第 2 節ではゲージ固定の手続きにおける様々な問題点について述べる。それから第 3 節で一般の tree レベル振幅の計算法の基礎について短くまとめる。

第 4，5，6，7 節で具体的に 5 点振幅の計算の詳細について述べる。計算の過程でさまざまな項が互いに打ち消し合っているのを見るであろう。ボゾンの 5 点振幅は第一量子化のそれと一致することが示される。フェルミオンを含む場合はいくらかの違いが見出されるが、5 点頂点の係数の少々の

変更でその違いは解消される。このことはフェルミオン場の拘束条件に非線形な補正が入ってくることに由来するのではないかと思われる。第 8 節では残された疑問について述べる。

2 開超弦の場の理論におけるゲージ固定について

2.1 自由場の理論

本稿で扱う開超弦の場の理論のボゾン部分の作用は

$$\begin{aligned} S_B &= -\frac{1}{2g^2}\left\langle\left\langle (e^{-\Phi}Q_B e^{\Phi})(e^{-\Phi}\eta_0 e^{\Phi}) - \int_0^1 dt (e^{-t\Phi}\partial_t e^{t\Phi})\{(e^{-t\Phi}Q_B e^{t\Phi}),(e^{-t\Phi}\eta_0 e^{t\Phi})\}\right\rangle\right\rangle \\ &= -\frac{1}{g^2}\sum_{M,N=0}^{\infty}\frac{1}{(M+N+2)!}(-1)^N\begin{pmatrix} M+N \\ N \end{pmatrix}\langle\langle (Q_B\Phi)\Phi^M(\eta_0\Phi)\Phi^N\rangle\rangle . \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで NS セクターの弦の場 Φ はゴースト数 $N_g = 0$ と描像数 $N_p = 0$ を持つ。弦の場の積の定義については [11] を見よ†。Φ の実数条件については [12] を見よ。以下では特に強調するときを除き 2 重括弧 $\langle\langle\ \cdot\ \rangle\rangle$ は省略する。

作用の 2 次の部分は

$$S_2 = -\frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{2}Q\Phi\eta_0\Phi\right]. \tag{2.2}$$

これは次のゲージ対称性を持つ。

$$\delta\Phi = Q\Lambda, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{\delta}\Phi = \eta_0\widetilde{\Lambda}. \tag{2.4}$$

次のゲージ固定条件をとろう。

$$b_0\Phi = 0, \quad \xi_0\Phi = 0, \tag{2.5}$$

あるいは

$$b_0\Phi = 0, \quad \widetilde{G}_0^-\Phi = 0. \tag{2.6}$$

ここで

$$\widetilde{G}^- = [Q, J^{--}] = \xi T^{\mathrm{tot}} - \partial\xi bc - be^{\phi}G_m - \eta e^{2\phi}b\partial b, \tag{2.7}$$

$$\widetilde{G}_0^- = [Q, J_0^{--}] = \int\frac{dz}{2\pi i}z\widetilde{G}^-, \tag{2.8}$$

であり、

$$J^{--} = b\xi, \quad J_0^{--} = \int\frac{dz}{2\pi i}zb\xi. \tag{2.9}$$

$Q, b_0, \eta_0, \widetilde{G}_0^-$ のゼロでない交換関係は

$$\{Q, b_0\} = L_0, \quad \{\eta_0, \widetilde{G}_0^-\} = L_0. \tag{2.10}$$

†ここでは bc ゴースト部分について $\langle c(z_1)\partial c(z_2)\partial^2 c(z_3)\rangle = -2$、あるいは $\langle 0|c_{-1}c_0c_1|0\rangle = 1$ という規格化を採用している。これはいくつかの文献で採用されている規格化と符号が逆で、そのため作用全体の符号が逆になる場合があるので注意。

特に $\widetilde{G}_0^-$ は Q や b_0 と交換する。条件 (2.5) のもとで Φ は $\Phi = \xi_0 V$ の形をとる。ここで V は ξ_0 を含まず、$V = V_m e^{-\phi} c$（V_m は物質場からなる）という形をとるとき V_m は第一量子化の「旧い共変形式」における頂点演算子に対応する。(2.6) の条件はあまりなじみがないかもしれない。この条件のもとでは Φ は $\Phi = \widetilde{G}_0^- V$ という形をとる。このゲージでは Φ と第一量子化の頂点演算子との関係が簡単ではないが、$\{Q, \widetilde{G}_0^-\} = 0$ であるために (2.5) よりも使いやすい条件でありうる。しかし線形化された部分の解析や 4，5 点振幅の計算などではどちらの条件がより有利であるともいえないので両方の条件を並行して考えていくことにする。

この相互作用項のない場合にどのようにしてゲージ固定が行えるかを見てみよう。もし (2.4) のほうを先に固定すると、その系には局所対称性がまだ残っていて、それも最後には固定されなければならない。その種の残留対称性は一般には (2.3) と、補償的な変換で (2.4) の形をしたものとの組み合わせである。その補償的変換によって弦の場が元のゲージスライスに戻される。(2.5) のもとでの残留対称性は

$$\delta' \Phi = Q\Lambda' - \eta_0(\xi_0 Q\Lambda'), \quad \xi_0 \Lambda' = 0 \tag{2.11}$$

であり、(2.6) のもとでの残留対称性はもっと簡単に

$$\delta' \Phi = Q\Lambda', \quad \widetilde{G}_0^- \Lambda' = 0 \tag{2.12}$$

である、これらの対称性はボゾン的弦のときと同様に $b_0 \Phi = 0$ によって固定できる。

ボゾン的弦の第一量子化では通常頂点演算子 V に $[b_0, V\} = 0$ という条件を課し、V のゴースト数については何の制約もおかなかった。同じようにもともとの弦の場 Φ のゴースト数は 1 であるが、この条件は $b_0 \Phi = 0$ でゲージ固定した後に除かれる。ゲージ固定後の作用は元の作用と同じ形で、Φ を $\sum_n \Phi_n$ に置き換えたものである。Φ_n はゴースト数 n を持ち、$n \leq 1$ が BV 形式の「場」であり、$n > 1$ が「反場」である。Φ_1 はもとの Φ である。(例えば [4, 5] を見よ。)

同様にゲージ固定した系での超弦の場のスペクトラムを予想してみよう。弦の場は 2 つの数でラベルされていた。すなわち N_g と N_p である。第一量子化においては描像変換によって任意の N_p の値を持った頂点演算子を作ることができ、それらは同じ状態の違った表示であるとみなされた。したがって弦の場での N_p の値は固定されなければならない。

まず (2.4) を固定しよう。η_0 のコホモロジーは自明なので、単に $\eta_0 \Phi = 0$ あるいは $\widetilde{G}_0^- \Phi = 0$ とするだけで固定が終了する。そして残留対称性の固定は BV 形式によって行う。Φ を $\sum_n \Phi_n$ で置き換えよう。Φ_n は $(N_g, N_p) = (n, 0)$ の場であって $b_0 \Phi_n = 0$ を満たす。Φ_0 がもともとの場である。Φ_{1-n} は Φ_n の「反場」である。これを見るために、Φ_n が Φ_{1-n} と同じだけの自由度を持ち、それらの基底をなす状態のグラスマン偶奇性が逆であることを示そう。

$\widetilde{G}_0^- \Phi_N = 0$ を満たす Φ_N は

$$\Phi_n = \widetilde{G}_0^- V_N c_1 e^{-\phi} |0\rangle \tag{2.13}$$

という形の状態からなる。ここで V_N は $(N_g, N_p) = (N, 0)$ の演算子であり、$\beta_{r<0}, \gamma_{r<0}, b_{n<0}, c_{n\leq 0}$ と物質場からなる。V_N はさらに次のように分解される。

$$V_N = U_N + c_0 W_{N-1}. \tag{2.14}$$

U_N と W_{N-1} はそれぞれ $(N_g, N_p) = (N, 0)$ と $(N-1, 0)$ の演算子で、$\beta_{r<0}, \gamma_{r<0}, b_{n<0}, c_{n<0}$ と物質場からなる。$[V_N]$ という記号を V_N の形をした状態で張られる空間であると定義する。$[U_N]$ と $[W_N]$ も同様に定義する。そうすると直ちに $[U_N] = [W_N]$ と $[U_N] \simeq [U_{-N}]$ が見て取れる。後者は写像 $b_n \leftrightarrow c_n$ と $\beta_r \leftrightarrow \gamma_r$ が全単射であることによる。したがって

$$[V_N] = [U_N] + c_0[U_{N-1}], \tag{2.15}$$

$$[V_{1-N}] = [U_{1-N}] + c_0[U_{-N}] \simeq [U_{N-1}] + c_0[U_N]. \tag{2.16}$$

これらより Φ_N と Φ_{1-N} の中の状態の数は等しく、グラスマン偶奇性は逆であることが分かる。

Φ_N の中の状態にかかる係数場のグラスマン偶奇性はその状態とは逆に取る。したがって Φ_N はグラスマン偶である。

条件 (2.6) で完全にゲージ固定された作用は

$$S_f = -\frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{2}Q\left(\sum_N \Phi_N\right)\eta_0\left(\sum_M \Phi_M\right) + \sum_N b_0 B_{N+2}\eta_0\Phi_{-N}\right]. \tag{2.17}$$

ここで Φ_N は $\widetilde{G}_0^- \Phi_N = 0$ を満たす。もう一つの条件 $b_0\Phi_N = 0$ は $\widetilde{G}_0^- B_N = 0$ を満たすラグランジュ未定乗数 B_N で与えられる。BRST 変換は

$$\delta\Phi_{N\leq 0} = -\beta Q\Phi_{N-1}, \quad \delta\Phi_{N>0} = \beta b_0 B_{N+1}, \quad \delta B_N = 0 \tag{2.18}$$

で与えられる。β はグラスマン奇のパラメータである。

(2.5) でゲージ固定された作用は (2.17) と同じで、Φ_N と B_N は $\xi_0\Phi_N = 0$ と $\xi_0 B_N = 0$ を満たし、BRST 変換は次のとおりである。

$$\delta\Phi_{N\leq 0} = -\beta(Q\Phi_{N-1} - \eta_0(\xi_0 Q\Phi_{N-1})) = -\beta\xi_0\eta_0 Q\Phi_{N-1}, \quad \delta\Phi_{N>0} = \beta b_0 B_{N+1}, \quad \delta B_N = 0. \tag{2.19}$$

2.2 相互作用のある場合

前小節の自由場の理論でのゲージ固定法が相互作用項がある場合に拡張できるかどうか見てみよう。理論を実用上有用なものにするためにはゲージ固定条件は変えるべきではないが、そうすると (2.4) を固定した後の残留対称性が複雑になる。これはゲージ変換に場の高次の項があり、$\xi_0\Phi = 0$ または $\widetilde{G}_0^- \Phi = 0$ を満たす二つの場の積が必ずしもそれらの条件を満たさないことによる。(ξ_0 と $\widetilde{G}_0^-$ はライプニッツ則を満たさないことに注意。) ゲージ変換の形は

$$\delta e^{\Phi} = (Q\Lambda)e^{\Phi} + e^{\Phi}(\eta_0\widetilde{\Lambda}), \tag{2.20}$$

あるいは

$$\begin{aligned}\delta\Phi &= Q\Lambda + \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\underbrace{\Phi,[\Phi,[\ldots,[\Phi}_{n},Q\Lambda]]\ldots] \\ &\quad +\eta_0\widetilde{\Lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n [\underbrace{\Phi,[\Phi,[\ldots,[\Phi}_{n},\eta_0\widetilde{\Lambda}]]\ldots], \\ &\quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad \ldots\end{aligned} \tag{2.21}$$

条件 (2.5) に対する残留対称性は

$$\begin{aligned}\delta'\Phi &= Q\Lambda' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\underbrace{\Phi,[\Phi,[\ldots,[\Phi}_{n},Q\Lambda']]\ldots] \\ &\quad +\eta_0\widetilde{\Lambda}' + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n [\underbrace{\Phi,[\Phi,[\ldots,[\Phi}_{n},\eta_0\widetilde{\Lambda}']]\ldots].\end{aligned} \tag{2.22}$$

ここで

$$\widetilde{\Lambda}' = \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{\Lambda}'_n, \tag{2.23}$$

$$\widetilde{\Lambda}'_0 = -\xi_0 Q\Lambda', \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}'_n &= -\xi_0\Big(a_n[\underbrace{\Phi,[\Phi,[\ldots,[\Phi}_{n},Q\Lambda']]\ldots] \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n}(-1)^m a_m[\underbrace{\Phi,[\Phi,[\ldots,[\Phi}_{m},\eta_0\widetilde{\Lambda}'_{n-m}]]\ldots]\Big).\end{aligned} \tag{2.25}$$

(2.6) に対する残留対称性は上の式で $\widetilde{\Lambda}'_0 = 0$ とすることで得られる。

ボゾン的弦の場合と同様に、ゲージ固定された作用の候補として、元の作用で単に Φ を $\sum_N \Phi_N$ に置き換えたものを考えよう。場の 2 次の項は前小節のものと同じである。場の 3 次の項は振幅の計算の観点からは自然に見える。すなわち第一量子化の 3 点振幅を再現し、またループ計算においてはあらゆるゴースト数の状態がループを同じ重みでまわるはずであるがそれも実現されている。

残念ながら、この系は経路積分がゲージ固定条件によらないことを保証する次の (古典的) マスター方程式を満たさない。

$$\sum_s (-1)^{\phi_s}\frac{\partial}{\partial\phi_s}S\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_s}S = 0, \tag{2.26}$$

ここで「場」ϕ_s は $\Phi_N(N \le 0)$ の成分で、「反場」$\bar{\phi}_s$ は $\Phi_N(N \ge 1)$ の成分にとってある。実際にこの式が満たされないことを見るには左辺の Φ の 3 次の項への寄与をみれば十分である。それは S の 2 次の項と 3 次の項から来る。

$$\sum_s (-1)^{\phi_s}\frac{\partial}{\partial\phi_s}S\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_s}S\bigg|_{\Phi^3} \sim \Phi Q(Q\Phi\eta_0\Phi + \eta_0\Phi Q\Phi) \neq 0. \tag{2.27}$$

ここで $\sum \eta_0 |s\rangle\langle s| + \cdots = 1$ を用いた。相互作用のない場合から出発して BV 形式を正直に適用していけばマスター方程式を満たす作用を原理的には作ることはできるが、実際上は場の展開の低次

の項から順に決めていくことしかできない。実際やってみると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
-g^2 S_0 &= \frac{1}{2}Q\left(\sum_N \Phi_N\right)\eta_0\left(\sum_M \Phi_M\right) - \frac{1}{6}\Phi_0(Q\Phi_0\eta_0\Phi_0 + \eta_0\Phi_0 Q\Phi_0) \\
&\quad -\frac{1}{2}\Phi_1\eta_0[\Phi_0,(1+\eta_0\xi_0)Q\Phi_{-1}] + \sum_{N\geq 2}\Phi_N\{\eta_0\Phi_0,\eta_0\xi_0 Q\Phi_{-N}\} + \sum_N b_0 B_{N+2}\eta_0\Phi_{-N} \\
&\quad +O(\Phi^3_{N\neq 0}) + O(\Phi^4_N), \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

$$
\delta\Phi_0 = -\beta\xi_0\eta_0 Q\Phi_{-1} + \frac{1}{2}\beta\xi_0\eta_0[\Phi_0,(1+\eta_0\xi_0)Q\Phi_{-1}] + O(\Phi^2_{N\neq 0}) + O(\Phi_0^2), \qquad (2.29)
$$

$$
\delta\Phi_{N\leq -1} = -\beta\xi_0\eta_0 Q\Phi_{N-1} - \beta\xi_0\{\eta_0\Phi_0,\eta_0\xi_0 Q\Phi_{-N-1}\} + O(\Phi^2_{N\neq 0}) + O(\Phi_0^2), \qquad (2.30)
$$

$$
\delta\Phi_{N>0} = \beta b_0 B_{N+1}, \qquad (2.31)
$$

$$
\delta B_N = 0. \qquad (2.32)
$$

3 推測されるファインマン則

この節では、これまでの考察から推測される、散乱振幅計算のためのファインマン則を列挙し、計算のための基礎的事項についてまとめる。

まず NS セクターのみを含む場合のファインマン則について述べる。ゲージ固定された作用の自由部分から、伝播関数 $\mathcal{P} = \Phi_p\Phi_p$ の形 (ここで添字 p は縮約されていることを表す。) がわかる。これは $Q\eta_0/g^2$ の逆行列であるので、$b_0\Phi = \widetilde{G}_0^-\Phi = 0$ のゲージ固定条件から、

$$
\mathcal{P} = \left(\frac{Q\eta_0}{g^2}\right)^{-1} = g^2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}. \qquad (3.1)
$$

あるいは $b_0\Phi = \xi_0\Phi = 0$ のゲージ固定条件に対しては、

$$
\mathcal{P} = \left(\frac{Q\eta_0}{g^2}\right)^{-1} = g^2\xi_0\frac{b_0}{L_0}, \qquad (3.2)
$$

となる。相互作用頂点は、ゲージ固定前の作用で Φ を $\sum_N \Phi_N$ に置き換えることによって得られる。ゴースト部分がこれでいいかどうかは疑問だが、物理的状態に対してはこれで問題ない。

伝播関数の中の $1/L_0$ や b_0 がどのように機能するか見てみよう。$1/L_0$ は長さ τ、幅 π の帯を世界面上に挿入するという幾何学的解釈が次の Schwinger パラメータ表示から得られる。

$$
\frac{1}{L_0} = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau L_0}. \qquad (3.3)
$$

τ はモジュラーパラメータである。(ここではリーマン面のモジュライと頂点演算子の位置の両方をモジュライと呼んでいる。)

b_0 は τ に対応する Beltrami 微分 μ_τ を与える。(例えば [13] の第 5 章と 9 章や [14] を見よ。)：

$$
b_0 = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\mu_\tau b(z). \qquad (3.4)
$$

第一量子化における tree レベル振幅は任意の 3 つの頂点演算子の位置を c ゴースト因子を入れて固定し、残りの頂点演算子の位置について積分することで得られる：

$$
A_{1\mathrm{st}} = \left\langle V_1 c(z_1) V_2 c(z_2) V_3 c(z_3)\int dz_4 V_4(z_4)\ldots\int dz_N V_N(z_N)\right\rangle. \qquad (3.5)
$$

CFT 相関関数は上半平面で評価され、積分は実軸に沿って行われる。しかし弦の場の理論においては、振幅内での場の位置は固定されているので、上の第一量子化の振幅をそれに沿った表現に書き換える必要がある（例えば [13] の第 5 章を見よ。）：

$$A_{1\mathrm{st}} = \int d\alpha_4 \ldots \int d\alpha_N \left\langle \int d^2 w_4 \mu_{\alpha_4} b(w_4) \ldots \int d^2 w_N \mu_{\alpha_N} b(w_N) \right.$$
$$\left. \times V_1 c(z_1) V_2 c(z_2) V_3 c(z_3) V_4(z_4) c(z_4) \ldots V_N(z_N) c(z_N) \right\rangle. \tag{3.6}$$

α_i はモジュラーパラメータである。この表現では頂点演算子の位置の積分は b ゴーストと Beltrami 微分の因子に置き換えられている、これらの因子も弦の場の理論の計算では伝播関数の中に入っている。したがってこの表現が弦の場の理論から直接与えられる振幅であろうと期待される。

さらに、Witten タイプの 3 点頂点と、伝播関数に対応する幅 π の帯の組み合わせから作られたリーマン面に対して、伝播関数から導入された Schwinger パラメータの空間がこのリーマン面のモジュライ空間に一致することが証明されている [15]。

N 点振幅については、次の式で陰に与えられる等角写像 $\rho(z)$ が、3 点頂点と伝播関数から作られたリーマン面を上半平面に写像する。

$$\frac{d\rho}{dz} = \mathcal{N} \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{N-2}(z - Y_i)(z - \bar{Y}_i)}}{\prod_{r=1}^{N}(z - Z_r)}. \tag{3.7}$$

この写像が以下で必要になるわけではないが、詳細は例えば [16] を見よ。質量殻外の場合であっても、頂点演算子は $\rho(z)$ で写像されるが、特に外線が $Q\Phi = 0$ を満たす時は、Φ は $Vc + Q(*)$ という形で与えられ、Vc の共形次元はゼロである。（もし Φ のゴースト数が 1 でないときは Vc は単にゼロである。）このことは BRST コホモロジーが Vc という形の演算子の集合に等しいことからわかる。したがって $\rho(z)$ の写像は余分な因子を与えない。

これらすべてを考慮すると、ボゾン的弦の場の理論の場合は単純な 3 点頂点 Φ^3 と伝播関数 $\frac{b_0}{L_0}$ からなるので、第一量子化の振幅を確かに再現することが分かる。しかし超弦の場合は以下に挙げる事情でそう簡単ではない。

- 第一量子化では、頂点演算子の描像数は相関関数の中で合計が特定の値になるように調整されていなければならなかった。例えば tree レベル振幅なら合計は -1 である。弦の場の理論では場は $N_p = 0$ であり、頂点のさまざまな位置に挿入された Q の役割はまさにこの描像数の調整であると期待される。すなわち $\Phi = \xi_0 V$ に対しては $Q\Phi$ は N_p を 1 増やした V に対応する。また頂点には η_0 も挿入されていて、これらは余分な ξ_0 を除き全体として ξ_0 を 1 個しか含まないように調整すると期待される。

- 外線がサイクリックに同じ順序に並んでいるファインマン図の和は第一量子化のその順序の振幅を再現すると期待される。それらのファインマン図はどれか一つを計算すれば他は外線の弦の場を並べ変えるだけで得られるが、その並べ替えは Q や η_0 は動かさない。しかし第一量子

化との比較のためには Q や η_0 も同時に並べ変えなければならない。そこでそれらを部分積分と同じような要領で正しい位置に移動させる必要がある。(Q と η_0 はライプニッツ則を満たし、$\langle\langle Q(\cdot)\rangle\rangle = \langle\langle \eta_0(\cdot)\rangle\rangle = 0$ であることに注意せよ。) その変形の過程で Q や η_0 が伝播関数と接触したとき余分な項が現れるが、それらの合計は打ち消すことが期待される。

3 点頂点だけでモジュライ空間のすべてを覆い尽くせるにもかかわらずなぜ Berkovits 型の開超弦の場の理論が 4 点やそれ以上の頂点を持っているのかということの理由が実はこれで与えられる。[7] で 4 点振幅について示されているとおりそれらの多点頂点の役割はまさに上述の余分な項を消すことにある。この打ち消しの効果が働くためには上述の項は 3 点頂点だけで作られたファインマン図のものより伝播関数の数が減っていなければならない。

計算上の注意点を列挙する：

- 経路積分の因子 e^{-S} からくるマイナス符号に注意。
- 外線の場の順序からくる符号因子に注意。
- $1/L_0$ を消す時、それは実は相関関数を対応するモジュラーパラメータで微分してマイナス符号をつけたものを積分していることに相当する：$\frac{1}{2\pi}\int d^2z\mu_\tau T(z) \to -\partial_\tau$。したがって境界からの二つの寄与がある。1 つは無限に長い伝播関数に対応する無限大のモジュラスからである。これは "canceled propagator argument" によって消える。もう一つは単に $1/L_0$ を消してマイナス符号をつけたもので与えられる (パラメータの方向が正として、すなわちヤコビアン因子が正として)。
- 外線には質量殻条件のみを課し、ゲージ固定条件を課さなくても以下で行う計算は成り立つ。これは暗にこの計算法が Nakanishi-Lautrap 場を持つ通常のゲージ理論と同じものになっていることを示す。すなわち伝播関数はゲージ固定条件から導かれたものと同じで、ゲージ場自体はゲージ固定条件を満たすとは限らず、BRST コホモロジーから除かれるべき非物理的成分を含む。
- ファインマン図の回転によって、

$$X\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Y = (-1)^{XY}Y\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}X, \tag{3.8}$$

$$X\frac{b_0}{L_0}Y = (-1)^{X+Y+XY}Y\frac{b_0}{L_0}X. \tag{3.9}$$

伝播関数の中の L_0 の 2 重逆数は次のように 1 つの Schwinger 積分で表現できる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_0}\frac{1}{L_0} &= \int_0^\infty d\tau_1\int_0^\infty d\tau_2 e^{-(\tau_1+\tau_2)L_0}\\ &= \int_0^\infty d\tau\tau e^{-\tau L_0} \quad (\tau=\tau_1+\tau_2),\end{aligned} \tag{3.10}$$

しかしこれは第一量子化では現れないはずのあらわな τ 依存性を生みだす。したがって質量殻上ではどちらかの L_0 は何とかして消すことができるはずである。4 点振幅のときは実際にそうなっている [7]。5 点振幅でもそうなっていることを後で見る。

ここでいくつかの相互作用頂点についての式を書き下しておこう。$\delta\Phi$ とあるのは特にその場を他の頂点と伝播関数でつなぐことを意識している。その他の場がすべて質量殻上にあることを仮定した式では on-shell の添字をつけてある。

$$\delta V_3^{BBB}|_{\text{off-shell}} = -\frac{1}{2g^2}\delta\Phi(Q\Phi\eta_0\Phi + \eta_0\Phi Q\Phi). \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\delta V_4^{BBBB}|_{\text{on-shell}} &= \frac{1}{12g^2}\delta\Phi(2\eta_0\Phi\Phi Q\Phi - 2Q\Phi\Phi\eta_0\Phi \\ &\quad -\eta_0\Phi Q\Phi\Phi + Q\Phi\eta_0\Phi\Phi - \Phi\eta_0\Phi Q\Phi - \Phi Q\Phi\eta_0\Phi).\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\delta V_5^{BBBBB}|_{\text{on-shell}} &= -\frac{1}{24g^2}\delta\Phi(Q\Phi\eta_0\Phi\Phi\Phi - Q\Phi\Phi\eta_0\Phi\Phi + Q\Phi\Phi\Phi\eta_0\Phi \\ &\quad +\eta_0\Phi Q\Phi\Phi\Phi - \Phi Q\Phi\eta_0\Phi\Phi - \Phi Q\Phi\Phi\eta_0\Phi \\ &\quad -\eta_0\Phi\Phi Q\Phi\Phi - \Phi\eta_0\Phi Q\Phi\Phi + \Phi\Phi Q\Phi\eta_0\Phi \\ &\quad +\eta_0\Phi\Phi\Phi Q\Phi - \Phi\eta_0\Phi\Phi Q\Phi + \Phi\Phi\eta_0\Phi Q\Phi).\end{aligned} \tag{3.13}$$

今までは NS セクターのみを考えてきた。R セクターについては古典的には次のように考えられる。まず 2 つの弦の場 Ψ と Ξ を導入する [8]。Ψ は第一量子化の頂点演算子 V と $\Psi = \xi_0 V$ で関係している。作用は、S_F を Ψ と Ξ を含む部分として、$S_B + S_F$ で与えられる。S_F は

$$S_F = \frac{1}{2g^2}(Q_B\Xi)e^{\Phi}(\eta_0\Psi)e^{-\Phi}, \tag{3.14}$$

であり、これに拘束条件 $Q_B\Xi = e^{\Phi}(\eta_0\Psi)e^{-\Phi}$ がさらに加わる。この系は正しい運動方程式を与える。

この古典的記述から R セクターを含んだファインマン則を推測すると、

- $b_0\Psi = b_0\Xi = 0$ と、$\xi_0\Psi = \xi_0\Xi = 0$ あるいは $\widetilde{G}_0^-\Psi = \widetilde{G}_0^-\Xi = 0$ という条件を課す。
- Ψ や Ξ のかかわるゼロでない伝播関数は $\Psi_p\Xi_p = \Xi_p\Psi_p = -2\mathcal{P}$ だけである。
- 相互作用の頂点は、S_F の 3 次やそれ以上の項において、$Q_B\Xi$ と $\eta_0\Psi$ をどちらも $\omega \equiv \frac{1}{2}(Q_B\Xi + \eta_0\Psi)$ で置き換えたもので与えられる。
- 外線の質量殻上の $Q_B\Xi$ は $\eta_0\Psi$ で置き換えられる。

3 番目の規則は拘束条件を満たす成分だけが伝播することを意味する。ここで拘束条件とは線形化された $Q_B\Xi = \eta_0\Psi$ のことである。この規則で与えられる 3 点頂点と 4 点頂点で第一量子化の 4 点振幅が再現できる。しかし線形化された拘束条件を用いるのは問題ではないかと思うかもしれない。実際あとで 5 点振幅を再現するためには 5 点頂点の係数は上で与えたものから変更しなければならないことを見る。

とにかくここでは上の規則で与えられる頂点をいくつか書き下しておこう。FFB 等の記号はフェルミオン場とボゾン場の順序を表す。

$$v_3^{FFB}|_{\text{off-shell}} = \frac{1}{g^2}\omega\omega\Phi, \tag{3.15}$$

$$v_4^{FFBB}|_{\text{off-shell}} = 0, \tag{3.16}$$

$$v_4^{FBFB}|_{\text{off-shell}} = 0, \tag{3.17}$$

$$v_4^{FFFF}|_{\text{off-shell}} = 0, \tag{3.18}$$

$$v_5^{FFBBB}|_{\text{off-shell}} = \frac{1}{6g^2}\omega\omega\Phi\Phi\Phi, \tag{3.19}$$

$$v_5^{FBFBB}|_{\text{off-shell}} = -\frac{1}{2g^2}\omega\Phi\omega\Phi\Phi, \tag{3.20}$$

$$v_5^{FFFFB}|_{\text{off-shell}} = 0. \tag{3.21}$$

4 5-ボゾン振幅

この節では質量殻上の 5-ボゾン振幅を計算し、それが第一量子化の結果を再現することを見る。外線が $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5$ という順序（あるいはそれのサイクリックな置換）で並んでいる第一量子化の振幅を A_5^{BBBBB} と書くことにする。それらの外線は質量殻条件 $Q\eta_0\Phi_i = 0$、すなわち線形化された運動方程式を満たす。A_5^{BBBBB} は次の形に書かれる。

$$\begin{aligned}
-g^2 A_5^{BBBBB} = \;& \Phi_1 Q\Phi_2 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_3 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_4 \eta_0 \Phi_5 \\
&+ Q\Phi_2 Q\Phi_3 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_4 \frac{b_0}{L_0} \eta_0 \Phi_5 \Phi_1 \\
&- Q\Phi_3 Q\Phi_4 \frac{b_0}{L_0} \eta_0 \Phi_5 \frac{b_0}{L_0} \Phi_1 Q\Phi_2 \\
&- Q\Phi_4 \eta_0 \Phi_5 \frac{b_0}{L_0} \Phi_1 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_2 Q\Phi_3 \\
&- \eta_0 \Phi_5 \Phi_1 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_2 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_3 Q\Phi_4 .
\end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで例えば $\Phi_1 Q\Phi_2 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_3 \frac{b_0}{L_0} Q\Phi_4 \eta_0 \Phi_5$ は $\langle \Phi_1 * Q\Phi_2 | \frac{b_0}{L_0} \left| Q\Phi_3 * \frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4 * \eta_0\Phi_5) \right\rangle$ を意味する。右辺のそれぞれの項は 5 つの外線場の間に $\frac{b_0}{L_0}$ を挟み込む可能な方法のそれぞれに対応する。もちろんこの振幅は (3.6) の形に書き直せる。

Φ_i が $\xi e^{-\phi} c V_{-1}$ の形に書かれるときには、質量殻条件 $QV_{-1} = 0$ を使えば $Q\Phi_i$ は

$$Q(\xi e^{-\phi} c V_{-1}) = cV_0 + \eta e^{\phi} V_{-1}, \tag{4.2}$$

となる。この右辺第二項は ϕ の荷電が余分にあるために (4.1) に寄与しない。したがって (4.1) がよく知られた第一量子化の振幅になっていることが分かる。

Q と η_0 は b_0 との交換子を気にせずに自由に移動できることに注意せよ。その交換子は無限に長い帯をリーマン面に挿入したものからくる寄与であり、前節で述べたとおり、"canceled propagator argument"によって消えるからである。

4.1 2つの伝播関数を持つファインマン図

対応する弦の場の理論の振幅を計算しよう。3 点頂点と 2 つの伝播関数からなるファインマン図は 5 つある。

$$(1\text{-}1) : 12p3p45 \quad (1\text{-}2) : 23p4p51 \quad (1\text{-}3) : 34p5p12 \quad (1\text{-}4) : 45p1p23 \quad (1\text{-}5) : 51p3p34$$

この記法は、例えば (1-1) なら Φ_1 と Φ_2 と伝播関数に接続する場からなる 3 点頂点と、その伝播関数ともう 1 つの伝播関数と Φ_3 からなる 3 点頂点と、さらにその伝播関数、Φ_4、Φ_5 からなる 3 点頂点でできたファインマン図を表す。ここではおもにゲージ固定条件 (2.6) に従った場合を考えるが、以下で行う計算は $\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}$ を ξ_0 で置き換えれば条件 (2.5) の場合にもそのまま通用することをのちにコメントする。式変形の指針を以下に述べる。

- 伝播関数の位置からわかる通り、(1-i) のそれぞれが (4.1) の中のそれぞれの項を再現するはずである。したがってそれらは L_0 の 2 重逆数 $1/(L_0)^2$ あるいはむき出しの ξ_0 を含まない形に変形できるはずである。
- (4.1) の中にある項以外の項は伝播関数をせいぜい 1 つしか持たないはずである。

(1-1) は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
(1\text{-}1) &= \frac{1}{3!}\cdot 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{6g^2}\right)^3\cdot 3[(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2+\eta_0\Phi_1Q\Phi_2)\Phi_{p1}] \\
&\quad \times 3[(Q\Phi_{p1}\eta_0\Phi_3+\eta_0\Phi_{p1}Q\Phi_3)\Phi_{p2}] \\
&\quad \times 3[\Phi_{p2}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)] \\
&= \frac{1}{8g^2}(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2+\eta_0\Phi_1Q\Phi_2)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0} \\
&\quad \times\left[Q\left\{\eta_0\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right\}\right. \\
&\quad \left.+\eta_0\left\{Q\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right\}\right] \\
&= -\frac{1}{8g^2}\left[8\Phi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\right. \\
&\quad -4\eta_0\Phi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\Phi_4\Phi_5-4\eta_0\Phi_1Q\Phi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5 \\
&\quad +2\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)+2\Phi_1\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
&\quad -(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2+\eta_0\Phi_1Q\Phi_2)\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
&\quad \left.+(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2+\eta_0\Phi_1Q\Phi_2)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right]. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

最後の表現の第 1 項が欲しい項であり、その他の項は期待通りの形をしている。例として 2 番目の表現から最後の表現への変形の詳細を説明する。最初に η_0 を移動させよう。かぎカッコの中には 2

つの項があるが、その 1 つ目の項の Φ_3 にかかっているものを引き離し、2 つ目の項の丸カッコのすぐ外にあるものをそのカッコの内側に作用させる。そうすると 1 つ目の項は 2 つの伝播関数のどれかとの交換子をとることで 2 つの項を作り出し、2 つ目の項では丸カッコ内の $\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}$ の因子が除かれる。こうして次の 3 つの項が得られる。

$$
\begin{aligned}
\text{(1-1)} \quad = \quad & \frac{1}{8g^2}(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2+\eta_0\Phi_1Q\Phi_2)\left[\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right\}\right. \\
& -\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right\} \\
& \left.-\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\left\{Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right\}\right]. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

次に Q を移動させるが、$\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}$ を通過しないように行おう。それには 1 つ目の項の丸カッコの前にあるものを外側に移動させる。これによってちょうどその Q の前にある $\frac{b_0}{L_0}$ が除かれる。2 番目の項では丸カッコのすぐ外の Q をその内側に作用させ、2 つの項を得る。1 つは Φ_3 に作用させることで、もう 1 つは $\frac{b_0}{L_0}$ に作用させて得られる。3 番目の項はこの段階ではそのままにしておく。

$$
\begin{aligned}
\text{(1-1)} \quad = \quad & \frac{1}{8g^2}(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2+\eta_0\Phi_1Q\Phi_2)\left[\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right. \\
& -\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
& -\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
& \left.-\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right]. \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

この第 1 項と第 3 項は伝播関数を 1 つだけ含んでいて、ちょうど (4.3) の最後の表現の最後の 2 項に等しい。第 2 項と第 4 項は等しく、さらに次のように変形できる。目標としている表現は η_0 が Φ_5 にのみかかっているので、$(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2+\eta_0\Phi_1Q\Phi_2)=-\eta_0(Q\Phi_1\Phi_2-\Phi_1Q\Phi_2)$ のなかにある η_0 を引き離したい。それによって $\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}$ が除かれる。

$$
\begin{aligned}
\text{2nd and 4th term} \quad = \quad & \frac{1}{4g^2}(Q\Phi_1\Phi_2-\Phi_1Q\Phi_2)\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
= \quad & \frac{1}{4g^2}\left[-2\Phi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right. \\
& \left.+Q(\Phi_1\Phi_2)\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right] \\
= \quad & \frac{1}{4g^2}\left[-4\Phi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\right. \\
& -2\Phi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\eta_0Q(\Phi_4\Phi_5) \\
& \left.+Q(\Phi_1\Phi_2)\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right]. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

第 1 項が最終的に欲しい項である。2 番目の項の $\Phi_4\Phi_5$ の前にある η_0Q と、3 番目の項の $\Phi_1\Phi_2$ の前にある Q を引き離すことで、(4.3) の第 2、第 3、第 4、第 5 項が得られる。

上の計算では Q は $\frac{\widetilde{G}_0}{L_0}$ を通過しなかった。したがってもしゲージ固定条件を (2.5) に変えたとしても、ξ_0 が $\frac{\widetilde{G}_0}{L_0}$ に置き換わる以外は全く同じ計算が通用する。いちいち説明しないがこれはこれから行う他のファインマン図の計算でも成り立っている。

他の (1-i) は (4.3) のサイクリックな置換によって与えられる。したがって第 1 項のそれぞれの置換が最終的に欲しい表現のそれぞれの項と、伝播関数を 1 つだけ持った余分な項を与える。

$$\begin{aligned}\frac{1}{8g^2}\left[8\Phi_2 Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\Phi_1\right] &= \frac{1}{8g^2}\Bigg[8Q\Phi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\Phi_1\\ &\quad +8\Phi_2Q\Phi_3Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Phi_1+8\Phi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\eta_0\Phi_1\Bigg],\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{8g^2}\left[8\Phi_3Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_1\eta_0\Phi_2\right] &= \frac{1}{8g^2}\Bigg[-8Q\Phi_3Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Phi_1Q\Phi_2\\ &\quad +8Q\Phi_3Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Phi_1\Phi_2+8Q\Phi_3Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\Phi_1\Phi_2\\ &\quad +8\Phi_3Q\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_1\eta_0\Phi_2-8\Phi_3Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5Q\Phi_1\eta_0\Phi_2\Bigg],\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{8g^2}\left[8\Phi_4Q\Phi_5\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\eta_0\Phi_3\right] &= \frac{1}{8g^2}\Bigg[-8Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Phi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2Q\Phi_3\\ &\quad +8Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\Phi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\Phi_3-8Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3\\ &\quad -8\Phi_4\Phi_5Q\Phi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\eta_0\Phi_3-8\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_1Q\Phi_2\eta_0\Phi_3\Bigg],\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{8g^2}\left[8\Phi_5Q\Phi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\right] &= \frac{1}{8g^2}\Bigg[-8\eta_0\Phi_5\Phi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3Q\Phi_4\\ &\quad -8\eta_0\Phi_5\Phi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\Phi_4-8\eta_0\Phi_5\Phi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\Bigg].\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2 伝播関数を 1 つ持つファインマン図

3 点頂点 1 つ、4 点頂点 1 つ、1 つの伝播関数からなるファインマン図は 5 つある。

$$(2\text{-}1):123p45,\quad (2\text{-}2):234p51,\quad (2\text{-}3):345p12,\quad (2\text{-}4):451p23,\quad (2\text{-}5):512p34$$

(2-1) は次のようになり、他の (2-i) はそれのサイクリックな置換で与えられる。

$$\begin{aligned}(2\text{-}1) &= \frac{1}{24g^2}(2Q\Phi_1\Phi_2\eta_0\Phi_3-2\eta_0\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3\\ &\quad +\eta_0\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3-\Phi_1Q\Phi_2\eta_0\Phi_3+\Phi_1\eta_0\Phi_2Q\Phi_3-Q\Phi_1\eta_0\Phi_2\Phi_3)\\ &\quad \times\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5).\end{aligned} \tag{4.11}$$

期待されることは、(1-i) と (2-i) の中の伝播関数を 1 つだけ持つ項の和が、伝播関数を持たない形に書き直せるということである。例として、Φ_1, Φ_2, Φ_3 が伝播関数の前にある項の和 ((123p45) と書こう) をとってみよう。

$$
\begin{aligned}
(123p45) \;=\; & \frac{1}{24g^2}\Bigg[(2Q\Phi_1\Phi_2\eta_0\Phi_3 - 2\eta_0\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3 \\
& +\eta_0\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3 - \Phi_1Q\Phi_2\eta_0\Phi_3 + \Phi_1\eta_0\Phi_2Q\Phi_3 - Q\Phi_1\eta_0\Phi_2\Phi_3) \\
& \times\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
& +12\eta_0\Phi_1Q\Phi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5 - 6\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
& +3(Q\Phi_1\eta_0\Phi_2 + \eta_0\Phi_1Q\Phi_2)\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
& -12Q\Phi_1\Phi_2\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_4Q\Phi_5 + 6Q\Phi_1(Q\Phi_2\eta_0\Phi_3 + \eta_0\Phi_2Q\Phi_3)\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5 \\
& -3\Phi_1(Q\Phi_2\eta_0\Phi_3 + \eta_0\Phi_2Q\Phi_3)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
& +24\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + 24Q\Phi_1Q\Phi_2\eta_0\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5\Bigg]. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

ここで (3.8) と (3.9) を使ってある。いくつかの項の中には伝播関数として $\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}$ があるが、それらが他の項と打ち消すためにはそれらの和が $\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}$ のない形に書き直されねばならない。実際その和は

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{24g^2}\Bigg[(2Q\Phi_1\Phi_2\eta_0\Phi_3 - 2\eta_0\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3 \\
& +4\eta_0\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3 - 4\Phi_1Q\Phi_2\eta_0\Phi_3 - 2\Phi_1\eta_0\Phi_2Q\Phi_3 + 2Q\Phi_1\eta_0\Phi_2\Phi_3) \\
& \times\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Bigg] \\
= \; & \frac{1}{24g^2}\Bigg[2\eta_0(2\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3 - Q\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \Phi_1\Phi_2Q\Phi_3) \\
& \times\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Bigg] \\
= \; & \frac{1}{24g^2}\Bigg[2(2\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3 - Q\Phi_1\Phi_2\Phi_3 - \Phi_1\Phi_2Q\Phi_3)\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Bigg] \\
= \; & \frac{1}{24g^2}\Bigg[2(3\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3 - Q(\Phi_1\Phi_2\Phi_3))\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Bigg] \\
= \; & \frac{1}{24g^2}\Bigg[6\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
& +2\Phi_1\Phi_2\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Bigg] \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

となり期待通りである。これと残りの項との和をとると、

$$
(4.12) \;=\; \frac{1}{24g^2}\Bigg[2\Phi_1\Phi_2\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5 + \eta_0\Phi_4Q\Phi_5)
$$

$$
\begin{aligned}
&-6(\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3-\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3)\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\\
&-24\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\eta_0\Phi_5-12Q\Phi_1\Phi_2\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_4Q\Phi_5\\
&+6(-3Q\Phi_1Q\Phi_2\eta_0\Phi_3+Q\Phi_1\eta_0\Phi_2Q\Phi_3+2\eta_0\Phi_1Q\Phi_2Q\Phi_3)\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5\Bigg]. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

第2, 3, 4項で Φ_4 と Φ_5 にかかる η_0 と、Φ_5 にかかる Q を、$\Phi_4\Phi_5$ と $Q\Phi_4\Phi_5$ が $\frac{b_0}{L_0}$ の右にあらわれるように移動させる。こうすると $Q\Phi_4\Phi_5$ を含む項は打ち消して、

$$
\begin{aligned}
(4.12) &= \frac{1}{24g^2}\Bigg[2\Phi_1\Phi_2\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\\
&\quad +6\eta_0(\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3-\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3+2Q\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\Phi_4\Phi_5\\
&\quad +12\eta_0Q(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\Bigg]\\
&= \frac{1}{24g^2}\Bigg[2\Phi_1\Phi_2\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\\
&\quad +6\eta_0(\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3-\Phi_1Q\Phi_2\Phi_3+2Q\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\Phi_4\Phi_5\\
&\quad +12\Phi_1\Phi_2\Phi_3Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\Bigg] \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

となり、すべての伝播関数を除くことに成功した。同様に $(234p51), (345p12), (451p23), (512p34)$ も伝播関数のない形に書き直せる。

$$
\begin{aligned}
(234p51) &= (\text{permutation of } (123p45)) + \frac{1}{24g^2}\Big[24\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\Phi_5\eta_0\Phi_1\Big], \qquad (4.16)\\
(345p12) &= (\text{permutation of } (123p45)), \qquad (4.17)\\
(451p23) &= (\text{permutation of } (123p45))\\
&\quad +\frac{1}{24g^2}\Big[24Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\Phi_1\Phi_2\Phi_3-24\Phi_4\Phi_5\Phi_1Q\Phi_2\eta_0\Phi_3\Big], \qquad (4.18)\\
(512p34) &= (\text{permutation of } (123p45))\\
&\quad +\frac{1}{24g^2}\Big[-24\Phi_5Q\Phi_1\eta_0\Phi_2\Phi_3\Phi_4-24\eta_0\Phi_5\Phi_1\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\Big]. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

4.3 伝播関数のないファインマン図と最終結果

$\sum(1\text{-}i)$ から目標とする表現を抜き出し、他の項を伝播関数がせいぜい1つだけの形にすることには成功した。それら他の項は $\sum(2\text{-}i)$ と合わせて伝播関数のない形になる。

これまでに得た結果をまとめると

$$
\begin{aligned}
\sum_i[(1\text{-}i)+(2\text{-}i)] &= A_5^{BBBBB}\\
&\quad +(123p45)+(234p51)+(345p12)+(451p23)+(512p34) \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

さらに $(123p45)+(234p51)+(345p12)+(451p23)+(512p34)$ のなかの Φ_1 にかかる η_0 と Q を除

くと、

$$
\begin{aligned}
&(123p45)+(234p51)+(345p12)+(451p23)+(512p34)\\
=&-\frac{1}{12g^2}\Phi_1[Q\Phi_2\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5-\eta_0\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\Phi_5+\Phi_2Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5\\
&+\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5-\eta_0\Phi_2\Phi_3\Phi_4Q\Phi_5-\Phi_2\Phi_3\eta_0\Phi_4Q\Phi_5]
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

を得、これらは 5 点頂点のみからなる伝播関数のないファインマン図 (3-1) と打ち消す。

$$
\begin{aligned}
(3\text{-}1) &= -\frac{1}{24g^2}\Phi_1[Q\Phi_2\eta_0\Phi_3\Phi_4\Phi_5-Q\Phi_2\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5+Q\Phi_2\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5\\
&\quad+\eta_0\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\Phi_5-\Phi_2Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5-\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5\\
&\quad-\eta_0\Phi_2\Phi_3Q\Phi_4\Phi_5-\Phi_2\eta_0\Phi_3Q\Phi_4\Phi_5+\Phi_2\Phi_3Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\\
&\quad+\eta_0\Phi_2\Phi_3\Phi_4Q\Phi_5-\Phi_2\eta_0\Phi_3\Phi_4Q\Phi_5+\Phi_2\Phi_3\eta_0\Phi_4Q\Phi_5]\\
&= \frac{1}{12g^2}\Phi_1[Q\Phi_2\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5-\eta_0\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\Phi_5+\Phi_2Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5\\
&\quad+\Phi_2Q\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5-\eta_0\Phi_2\Phi_3\Phi_4Q\Phi_5-\Phi_2\Phi_3\eta_0\Phi_4Q\Phi_5]\\
&\quad-\frac{1}{24g^2}\Phi_1Q\eta_0(\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5).
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

最後の表現の最後の項は Φ_1 が on-shell であるので消える。したがってようやく弦の場の理論の振幅が第一量子化のそれと一致することが示された。

$$
\sum_i[(1\text{-}i)+(2\text{-}i)]+(3\text{-}1)=A_5^{BBBBB}. \tag{4.23}
$$

5 4-フェルミオン 1-ボゾン振幅

この場合も詳細は前節の場合と似ているので概略の説明にとどめる。再現したい振幅は

$$
\begin{aligned}
-g^2A_5^{FFFFB} &= \Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4Q\Phi_5\\
&\quad+\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\Psi_1\\
&\quad-\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Psi_1\eta_0\Psi_2\\
&\quad-\eta_0\Psi_4Q\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\\
&\quad-Q\Phi_5\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

であり、3 つの 3 点頂点と 2 つの伝播関数からなるファインマン図は次の 5 つある。

$$
(1\text{-}1):12p3p45,\quad (1\text{-}2):23p4p51,\quad (1\text{-}3):34p5p12,\quad (1\text{-}4):45p1p23,\quad (1\text{-}5):51p2p34
$$

ここで 1, 2, 3, 4 はフェルミオン場である。伝播関数がより少ないファインマン図は存在しない。それは 4 つフェルミオンを持った頂点も、2 つのフェルミオンと 2 つのボゾンを持った頂点もないからである。式変形の指針は前節と同様に

- (1-i) のそれぞれが目標の表現の 5 つの項をそれぞれ再現し、残りの項はすべて打ち消すはず

である。

それぞれのファインマン図を計算すると、

$$
\begin{aligned}
(1\text{-}1) &= \left(\frac{1}{g^2}\right)^3 [\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_p][\Phi_p\eta_0\Psi_3\omega_p][\omega_p\eta_0\Psi_4\Phi_5] \\
&= -\frac{1}{2g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\left[Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4\eta_0\Phi_5\right)+\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4Q\Phi_5\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2g^2}\left[2\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4Q\Phi_5\right. \\
&\quad \left.+\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\Phi_5-\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4\Phi_5\right], \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1\text{-}2) &= \left(\frac{1}{g^2}\right)^3 [\Phi_5\eta_0\Psi_1\omega_p][\omega_p\eta_0\Psi_2\Phi_p][\Phi_p\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4] \\
&= \frac{1}{2g^2}\left[\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left(\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\right)\right. \\
&\quad \left.+Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left(\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2g^2}\left[-2Q\Phi_5\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\right. \\
&\quad \left.-\Phi_5\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4+\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\right], \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1\text{-}3) &= -\left(\frac{1}{g^2}\right)^3 [\eta_0\Psi_4\Phi_5\omega_p][\omega_p\eta_0\Psi_1\Phi_p][\Phi_p\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3] \\
&= \frac{1}{2g^2}\left[\eta_0\Psi_4\eta_0\Phi_5\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left(\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\right)\right. \\
&\quad \left.+\eta_0\Psi_4Q\Phi_5\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left(\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\right)\right] \\
&= \frac{1}{2g^2}\left[2\eta_0\Psi_4Q\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\right. \\
&\quad \left.-\eta_0\Psi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3+\eta_0\Psi_4\Phi_5\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\right], \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1\text{-}4) &= -\left(\frac{1}{g^2}\right)^2\frac{1}{2g^2}[\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\Phi_{p1}][\Phi_{p1}(\eta_0\Phi_5Q\Phi_{p2}+Q\Phi_5\eta_0\Phi_{p2})][\Phi_{p2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2] \\
&= -\frac{1}{2g^2}\left[\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\right)\right. \\
&\quad \left.+\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2g^2}\left[-2\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\Psi_1\eta_0\Psi_2\right.
\end{aligned}
$$

$$-\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\Phi_5\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2+\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Bigg], \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
(1\text{-}5) &= -\left(\frac{1}{g^2}\right)^3[\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\Phi_p][\Phi_p\eta_0\Psi_4\omega_p][\omega_p\Phi_5\eta_0\Psi_1] \\
&= -\frac{1}{2g^2}\Bigg[\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4 Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\right) \\
&\quad +\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\Bigg] \\
&= -\frac{1}{2g^2}\Bigg[2\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\Psi_1 \\
&\quad -\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1+\eta_0\Psi_2\eta_0\Psi_3\eta_0\Psi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1\Bigg].
\end{aligned} \tag{5.6}$$

これらの最後の表現の第 1 項が A_5^{FFFFB} を再現し、(3.8) と (3.9) を用いれば残りは打ち消すことが見て取れる。

$$\sum_i(1\text{-}i)=A_5^{FFFFB}. \tag{5.7}$$

これは我々が与えた 2 つのフェルミオンと 1 つのボゾンを持った 3 点頂点、2 つのフェルミオンと 2 つのボゾンを持った 4 点頂点、4 つのフェルミオンと 1 つのボゾンを持った 5 点頂点が正しいものであることを示している。はじめの 2 つが正しいことは 4 点振幅の計算 [8] からもすでに分かっている。この計算では 2 つのフェルミオンと 3 つのボゾンを持った 5 点頂点が正しいかどうかについては何も言っていないことに注意せよ。実際第一量子化の振幅の再現のためにはこれらの頂点の係数を変更する必要があることをのちに見る。

6 FFBBB の順に並んだ 2-フェルミオン 3-ボゾン振幅

再現したい振幅は

$$\begin{aligned}
g^2A_5^{FFBBB} &= \eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5 \\
&\quad -\eta_0\Psi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
&\quad -Q\Phi_3Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2 \\
&\quad -Q\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2Q\Phi_3 \\
&\quad +\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3Q\Phi_4.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1　2 つの伝播関数を持つファインマン図

3 つの 3 点頂点と 2 つの伝播関数からなるファインマン図は次の 5 つある。

$$(1\text{-}1) : 12p3p45,\quad (1\text{-}2) : 23p4p51,\quad (1\text{-}3) : 34p5p12,\quad (1\text{-}4) : 45p1p23,\quad (1\text{-}5) : 51p2p34$$

変形の手順は前の場合と同じである。

- 伝播関数の位置からわかる通り、(1-i) のそれぞれが目的の表現の中のそれぞれの項を再現するはずである。したがってそれらは L_0 の 2 重逆数 $1/(L_0)^2$ あるいはむき出しの ξ_0 を含まない形に変形できるはずである。
- 目的の表現の中にある項以外の項は伝播関数をせいぜい 1 つしか持たないはずである。

それぞれのファインマン図を計算すると、

$$\begin{aligned}
(1\text{-}1) &= \frac{1}{g^2}\left(-\frac{1}{2g^2}\right)^2[\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_{p1}][\Phi_{p1}(Q\Phi_3\eta_0\Phi_{p2}+\eta_0\Phi_3Q\Phi_{p2})] \\
&\quad \times[\Phi_{p2}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)] \\
&= \frac{1}{4g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\left[Q\Phi_3\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right\}\right. \\
&\quad \left.+\eta_0\Phi_3Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{4g^2}\left[4\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\right. \\
&\quad -2\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3\Phi_4\Phi_5-2\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5 \\
&\quad -\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5) \\
&\quad \left.+\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\right], \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1\text{-}2) &= -\frac{1}{2g^2}\left(\frac{1}{g^2}\right)^2[\Phi_5\eta_0\Psi_1\omega_p][\omega_p\eta_0\Psi_2\Phi_p] \\
&\quad \times[\Phi_p(Q\Phi_3\eta_0\Phi_4+\eta_0\Phi_3Q\Phi_4)] \\
&= -\frac{1}{4g^2}\Phi_5\eta_0\Psi_1\left[Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_3\eta_0\Phi_4+\eta_0\Phi_3Q\Phi_4)\right\}\right\}\right. \\
&\quad \left.+\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_3\eta_0\Phi_4+\eta_0\Phi_3Q\Phi_4)\right\}\right\}\right] \\
&= \frac{1}{4g^2}\left[4\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_3Q\Phi_4\right. \\
&\quad +\Phi_5\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4)+\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4) \\
&\quad -\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4)
\end{aligned}$$

$$+\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4)\Bigg], \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
(1\text{-}3) &= -\frac{1}{2g^2}\left(\frac{1}{g^2}\right)^2[(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Phi_p][\Phi_p\eta_0\Psi_1\omega_p][\omega_p\eta_0\Psi_2\Phi_3]\\
&= \frac{1}{4g^2}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\\
&\quad\times\left[Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\eta_0\Phi_3\right)+\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2Q\Phi_3\right)\right]\\
&= \frac{1}{4g^2}\Bigg[-4Q\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2Q\Phi_3\\
&\quad-2\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2Q\Phi_3-2\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2Q\Phi_3\\
&\quad+(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\\
&\quad-(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_2\Phi_3\Bigg],
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
(1\text{-}4) &= \frac{1}{g^2}\left(-\frac{1}{2g^2}\right)^2[(Q\Phi_3\eta_0\Phi_4+\eta_0\Phi_3Q\Phi_4)\Phi_{p1}]\\
&\quad\times[\Phi_{p1}(Q\Phi_5\eta_0\Phi_{p2}+\eta_0\Phi_5Q\Phi_{p2})][\Phi_{p2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2]\\
&= \frac{1}{4g^2}(Q\Phi_3\eta_0\Phi_4+\eta_0\Phi_3Q\Phi_4)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\\
&\quad\times\left[Q\Phi_5\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\right)+\eta_0\Phi_5Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\right)\right]\\
&= \frac{1}{4g^2}\Bigg[-4Q\Phi_3Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\\
&\quad-(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4)\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2+(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4)\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\\
&\quad+(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4)\eta_0\Phi_5\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\\
&\quad-(Q\Phi_3\Phi_4-\Phi_3Q\Phi_4)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Bigg],
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
(1\text{-}5) &= -\left(\frac{1}{g^2}\right)^3[\eta_0\Psi_2\Phi_3\omega_{p1}][\omega_{p1}\Phi_4\omega_{p2}][\omega_{p2}\Phi_5\eta_0\Psi_1]\\
&= -\frac{1}{4g^2}\eta_0\Psi_2\Phi_3\Bigg[Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_4Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\}\\
&\quad+Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_4\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\}\\
&\quad+\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_4Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\}\\
&\quad+\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_4\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\}\Bigg]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\frac{1}{4g^2}\Bigg[4\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +2\eta_0\Psi_2\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1+2\eta_0\Psi_2\Phi_3 Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1-\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1-\eta_0\Psi_2\eta_0\Phi_3 Q\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +\eta_0\Psi_2\eta_0\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1-\eta_0\Psi_2\eta_0\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_4 Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\Bigg]. \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

期待された通り、これらの最後の表現の第 1 項が A_5^{FFBBB} を再現し、残りは伝播関数を 1 つしか持たないことが見て取れる。

6.2　伝播関数を 1 つ持つファインマン図

3 点頂点 1 つと 4 点頂点 1 つと 1 つの伝播関数からなるファインマン図は次の 1 つだけである。(2-1): $12p345$

これの寄与は

$$
\begin{aligned}
(2\text{-}1) \quad = \quad & \frac{1}{g^2}\frac{1}{12g^2}[\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_p][\Phi_p(2\eta_0\Phi_3\Phi_4 Q\Phi_5-2Q\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5 \\
& -\eta_0\Phi_3 Q\Phi_4\Phi_5+Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5-\Phi_3\eta_0\Phi_4 Q\Phi_5-\Phi_3 Q\Phi_4\eta_0\Phi_5)] \\
= \quad & \frac{1}{12g^2}\Bigg[\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(2\eta_0\Phi_3\Phi_4 Q\Phi_5-2Q\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5 \\
& -\eta_0\Phi_3 Q\Phi_4\Phi_5+Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5-\Phi_3\eta_0\Phi_4 Q\Phi_5-\Phi_3 Q\Phi_4\eta_0\Phi_5)\Bigg]. \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

6.3　伝播関数のないファインマン図と最終結果

以上の計算で欲しい表現を $\sum_i(1\text{-}i)$ から抜き出し、残りを伝播関数が 1 つだけの項として表すことができた。(2-1) と合わせると伝播関数のない項にまとめることができる。

$$
\sum_i(1\text{-}i)+(2\text{-}1)=A_5^{FFBBB}+\frac{1}{12g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5. \qquad (6.8)
$$

今までの計算からすると、3 点頂点と 4 点頂点から作られたファインマン図の中の伝播関数が 1 つの項が伝播関数のない形にまとまったので、それらの頂点の与え方は正しかったと言える。しかし 5 点頂点だけからなるファインマン図 (3-1) の寄与は、

$$
(3\text{-}1)=\frac{1}{6g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5, \qquad (6.9)
$$

となるので、最終結果は

$$
\sum_i(1\text{-}i)+(2\text{-}1)+(3\text{-}1)=A_5^{FFBBB}+\frac{1}{4g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5 \qquad (6.10)
$$

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{1}{4g^2}\Bigg[4\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +2\eta_0\Psi_2\Phi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1+2\eta_0\Psi_2\Phi_3 Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1-\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +\eta_0\Psi_2 Q\Phi_3\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1-\eta_0\Psi_2\eta_0\Phi_3 Q\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
& +\eta_0\Psi_2\eta_0\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1-\eta_0\Psi_2\eta_0\Phi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_4 Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\Bigg]. \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

期待された通り、これらの最後の表現の第 1 項が A_5^{FFBBB} を再現し、残りは伝播関数を 1 つしか持たないことが見て取れる。

6.2 伝播関数を 1 つ持つファインマン図

3 点頂点 1 つと 4 点頂点 1 つと 1 つの伝播関数からなるファインマン図は次の 1 つだけである。(2-1): $12p345$

これの寄与は

$$
\begin{aligned}
(2\text{-}1) &= \frac{1}{g^2}\frac{1}{12g^2}[\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_p][\Phi_p(2\eta_0\Phi_3\Phi_4 Q\Phi_5-2Q\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5 \\
&\quad -\eta_0\Phi_3 Q\Phi_4\Phi_5+Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5-\Phi_3\eta_0\Phi_4 Q\Phi_5-\Phi_3 Q\Phi_4\eta_0\Phi_5)] \\
&= \frac{1}{12g^2}\Bigg[\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(2\eta_0\Phi_3\Phi_4 Q\Phi_5-2Q\Phi_3\Phi_4\eta_0\Phi_5 \\
&\quad -\eta_0\Phi_3 Q\Phi_4\Phi_5+Q\Phi_3\eta_0\Phi_4\Phi_5-\Phi_3\eta_0\Phi_4 Q\Phi_5-\Phi_3 Q\Phi_4\eta_0\Phi_5)\Bigg]. \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

6.3 伝播関数のないファインマン図と最終結果

以上の計算で欲しい表現を $\sum_i(1\text{-}i)$ から抜き出し、残りを伝播関数が 1 つだけの項として表すことができた。(2-1) と合わせると伝播関数のない項にまとめることができる。

$$
\sum_i(1\text{-}i)+(2\text{-}1)=A_5^{FFBBB}+\frac{1}{12g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5. \qquad (6.8)
$$

今までの計算からすると、3 点頂点と 4 点頂点から作られたファインマン図の中の伝播関数が 1 つの項が伝播関数のない形にまとまったので、それらの頂点の与え方は正しかったと言える。しかし 5 点頂点だけからなるファインマン図 (3-1) の寄与は、

$$
(3\text{-}1)=\frac{1}{6g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5, \qquad (6.9)
$$

となるので、最終結果は

$$
\sum_i(1\text{-}i)+(2\text{-}1)+(3\text{-}1)=A_5^{FFBBB}+\frac{1}{4g^2}\eta_0\Psi_1\eta_0\Psi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_5 \qquad (6.10)
$$

$$
\begin{aligned}
&-\eta_0\Psi_1\Phi_2\eta_0\Psi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\\
&+\eta_0\Psi_1\Phi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

$$
\begin{aligned}
(1\text{-}2) &= -\left(\frac{1}{g^2}\right)^3[\Phi_5\eta_0\Psi_1\omega_{p1}][\omega_{p1}\Phi_2\omega_{p2}][\omega_{p2}\eta_0\Psi_3\Phi_4]\\
&= \frac{1}{4g^2}\Phi_5\eta_0\Psi_1\Bigg[Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_2Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Phi_4\right)\right\}\right\}\\
&\quad+Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_2\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Psi_3\eta_0\Phi_4\right)\right\}\right\}\\
&\quad+\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_2Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Phi_4\right)\right\}\right\}\\
&\quad+\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_2\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Psi_3\eta_0\Phi_4\right)\right\}\right\}\Bigg]\\
&= -\frac{1}{4g^2}\Bigg[-4\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3Q\Phi_4\\
&\quad-\Phi_5\eta_0\Psi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\Phi_4-\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\\
&\quad+\Phi_5\eta_0\Psi_1\Phi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3Q\Phi_4-\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}\Phi_2\eta_0\Psi_3Q\Phi_4\\
&\quad-\Phi_5\eta_0\Psi_1Q\Phi_2\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\Phi_4-\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\\
&\quad+Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\Phi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Phi_4+\Phi_5\eta_0\Psi_1Q\Phi_2\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_3\eta_0\Phi_4\\
&\quad-\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_2\eta_0\Psi_3Q\Phi_4-\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\eta_0\Phi_4\Bigg],
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

$$
\begin{aligned}
(1\text{-}3) &= -\frac{-1}{2g^2}\left(\frac{1}{g^2}\right)^2[(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\Phi_p][\Phi_p\eta_0\Psi_1\omega_p][\omega_p\Phi_2\eta_0\Psi_3]\\
&= \frac{1}{4g^2}(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\Bigg[Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_2\eta_0\Psi_3\right)\\
&\quad+\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Psi_2\eta_0\Psi_3\right)\Bigg]\\
&= -\frac{1}{4g^2}\Bigg[4Q\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\\
&\quad+2\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_2\eta_0\Psi_3+2\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\\
&\quad+(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\Phi_2\eta_0\Psi_3\\
&\quad-(Q\Phi_4\eta_0\Phi_5+\eta_0\Phi_4Q\Phi_5)\eta_0\Psi_1\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_2\eta_0\Psi_3\Bigg],
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

$$
(1\text{-}4) = \left(\frac{1}{g^2}\right)^3[\eta_0\Psi_3\Phi_4\omega_{p1}][\omega_{p1}\Phi_5\omega_{p2}][\omega_{p2}\eta_0\Psi_1\Phi_2]
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4g^2}\eta_0\Psi_3\Phi_4\Bigg[Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_5 Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Phi_2\right)\right\}\right\} \\
&\quad +Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_5\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1 Q\Phi_2\right)\right\}\right\} \\
&\quad +\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_5 Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Phi_2\right)\right\}\right\} \\
&\quad +\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_5\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1 Q\Phi_2\right)\right\}\right\}\Bigg] \\
&= \frac{1}{4g^2}\Bigg[-4\eta_0\Psi_3 Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1 Q\Phi_2 \\
&\quad +2\eta_0\Psi_3 Q\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\Phi_2 - 2\eta_0\Psi_3 Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1\Phi_2 \\
&\quad -\eta_0\Psi_3\Phi_4\Phi_5\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1 Q\Phi_2 + \eta_0\Psi_3\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 Q\Phi_2 \\
&\quad -\eta_0\Psi_3 Q\Phi_4\Phi_5\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Phi_2 + \eta_0\Psi_3\Phi_4 Q\Phi_5\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Psi_1\eta_0\Phi_2 \\
&\quad -\eta_0\Psi_3\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\eta_0\Phi_2 + \eta_0\Psi_3\eta_0\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 Q\Phi_2\Bigg], \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1\text{-}5) &= \left(\frac{1}{g^2}\right)^3[\Phi_2\eta_0\Psi_3\omega_{p1}][\omega_{p1}\Phi_4\omega_{p2}][\omega_{p2}\Phi_5\eta_0\Psi_1] \\
&= \frac{1}{4g^2}\Phi_2\eta_0\Psi_3\Bigg[Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_4 Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\} \\
&\quad +Q\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\left\{\Phi_4\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\} \\
&\quad +\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_4 Q\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\} \\
&\quad +\eta_0\left\{\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\left\{\Phi_4\eta_0\left(\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\right)\right\}\right\}\Bigg] \\
&= \frac{1}{4g^2}\Bigg[-4Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
&\quad +\Phi_2\eta_0\Psi_3 Q\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 + \Phi_2\eta_0\Psi_3\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
&\quad -Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\frac{b_0}{L_0}\Phi_4\Phi_5\eta_0\Psi_1 + Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\frac{b_0}{L_0}\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
&\quad -Q\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1 - \Phi_2\eta_0\Psi_3 Q\Phi_4\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1 \\
&\quad +\Phi_2\eta_0\Psi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}Q\Phi_4\eta_0\Phi_5\eta_0\Psi_1 + \eta_0\Phi_2\eta_0\Psi_3\frac{\widetilde{G}_0^-}{L_0}\frac{b_0}{L_0}\Phi_4 Q\Phi_5\eta_0\Psi_1\Bigg]. \qquad (7.6)
\end{aligned}
$$

そしてこれらの項の総和は第一量子化の振幅と、伝播関数のない項 1 つとの和にまとめられる。

$$
\sum(1\text{-}i) = A_5^{FBFBB} + \frac{1}{4g^2}\eta_0\Psi_1\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\Phi_5. \qquad (7.7)
$$

7.2 伝播関数のないファインマン図と最終結果

前の場合と同様、今までの計算で3点頂点と4点頂点から作られたファインマン図の中の伝播関数が1つの項が伝播関数のない形にまとまったので、それらの頂点の与え方は正しかったと言える。しかし5点頂点については、それから作られるファインマン図(3-1)の寄与は、

$$(3\text{-}1) = \frac{1}{2g^2}\eta_0\Psi_1\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\Phi_5, \tag{7.8}$$

であるので

$$\sum_i (1\text{-}i) + (3\text{-}1) = A_5^{FBFBB} + \frac{3}{4g^2}\eta_0\Psi_1\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\Phi_5 \tag{7.9}$$

となり第一量子化の振幅からずれが生じる。もし5点頂点の係数が $-1/2$ 倍の $-\frac{1}{4g^2}\eta_0\Psi_1\Phi_2\eta_0\Psi_3\Phi_4\Phi_5$ であったら A_5^{FBFBB} を再現できるので、このとおりの変更が必要となる。

8 議論

以上さまざまな計算を行ったが、やはり原理的な部分で様々な疑問が残る。それらをいくつか述べよう。

そもそもなぜ弦の場の理論が第一量子化の振幅をそのまま再現しなければならないかという疑問がある。というのは弦の場の成分が直接第一量子化の頂点演算子に対応するのではなく場の再定義ののちに対応するようになっているかもしれないという議論ができるからである。しかし線形化したレベルでは対応は直接であると思われるので、やはりS行列、すなわちon-shellの散乱振幅はそのまま第一量子化の振幅を再現するはずと思うのが自然である。

treeレベルの計算においてはゴーストを含んだ頂点がどのようであるかを考える必要がなかったが、ループ計算ではループをゴーストが回るのでたとえ外線がすべてゴーストでない場合もゴースト頂点が必要になる。第一量子化の計算の場合はゴーストであろうと物理的な場であろうと同じ重みでループを回るが、弦の場の理論の計算では一見そうでない形にならざるをえないようである。しかしそれらも最終的には第一量子化の振幅に等しいはずなので何らかの一般的機構が働いて等しくなるのであろうと思われる。

Rセクターの取り扱いについての疑問として、通常第一量子化では課される $\beta_0\Psi = 0$ の条件がないことがある。これらの点についてのさらなる発展が期待される。

参考文献

[1] N. Berkovits, "*Super-Poincare Invariant Superstring Field Theory*", hep-th/9503099, *Nucl. Phys.* **B450** (1995) 90.

[2] N. Berkovits, "*Pure Spinor Formalism as an N=2 Topological String*", hep-th/0509120, *JHEP* **0510** (2005) 089.

[3] J. Gomis, J. Paris, S. Samuel, "*Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization*", *Phys. Rept.* **259** (1995) 1, hep-th/9412228.

[4] C. B. Thorn, "*String Field Theory*", *Phys. Rep.* **175** (1989) 1.

[5] 岸本 功, "開弦の場の理論におけるＢＶ形式について", 素粒子論研究・電子版 Vol.4 (2010), http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~sokened/sokendenshi/sokendenshi.htm

[6] S. Torii, "*Gauge Fixing of Open Superstring Field Theory in the Berkovits Non-Polynomial Formulation*", *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **188** (2011) 272.

[7] N. Berkovits and C. T. Echevarria, "*Four-Point Amplitude from Open Superstring Field Theory*", hep-th/9912120, *Phys. Lett.* **B478** (2000) 343.

[8] Y. Michishita, "*A Covariant Action with a Constraint and Feynman Rules for Fermions in Open Superstring Field Theory*", hep-th/0412215, *JHEP* **0501** (2005) 012.

[9] N. Berkovits and M. Schnabl, "*Yang-Mills Action from Open Superstring Field Theory*", hep-th/0307019, *JHEP* **0309** (2003) 022.

[10] H. Fuji, S. Nakayama and H. Suzuki, "*Open String Amplitudes in Various Gauges*", hep-th/0609047, *JHEP* **0701** (2007) 011.

[11] N. Berkovits, A. Sen and B. Zwiebach, "*Tachyon Condensation in Superstring Field Theory*", hep-th/0002211, *Nucl. Phys.* **B587** (2000) 147.

[12] K. Ohmori, "*Level-Expansion Analysis in NS Superstring Field Theory Revisited*", hep-th/0305103.

[13] J. Polchinski, "*String Theory Volume I: An Introduction to the Bosonic String*", Cambridge University Press.

[14] S. B. Giddings and E. Martinec, "*Conformal Geometry and String Field Theory*", *Nucl. Phys.* **B278** (86) 91.

[15] B. Zwiebach, "*A Proof that Witten's open string theory gives a single cover of moduli space*", *Commun. Math. Phys.* **142** (1991) 193.

[16] R. Bluhm and S. Samuel, "*The Off-Shell Koba-Nielsen Formula*", *Nucl. Phys.* **B323** (1989) 337.