

小学校における式の意味論的認識に関する研究 —代数的推論の観点から—

和田信哉*

(2015年10月27日 受理)

A study on semantic recognition of expression in elementary school:
From a viewpoint of algebraic reasoning

WADA Shinya

要約

本稿は、小学校算数と中学校数学の接続、とりわけ算術から代数への移行を最終的な目的とする研究の一環として、その移行過程で重要となると考えられる小学校児童の式の意味論的認識の様相をより明らかにすることを目的としている。そのために、小学校第3学年「除法」の授業を記号論的及び質的に分析した結果を示し、それと第2学年「加法と減法の相互関係」の事例とを比較考察することを通して議論を行った。

その結果、次の諸点を指摘した。(1)加法的構造や乗法的構造に関する同義性の認識のためには、いわゆる逆思考の問題を扱うことが有効である。(2)多義性の認識は「演算が用いられる場面」、反義性の認識は「演算の操作」、同義性の認識は「演算の構造」というように、認識する意味のレベルが異なるものとなっている。(3)意味論的認識の高まりにかかわる代数的推論の様相を明らかにした。

キーワード：式、意味論的認識、加法的構造、乗法的構造、代数的推論

* 鹿児島大学教育学系 准教授

1. はじめに

中等教育段階における算術から代数への移行に関する生徒の困難はよく知られているところであるが、その克服には至っていないのが現状であろう (Carraher & Schliemann, 2007)。本研究は、算術と代数の接続を最終的な目的とするものであり、そのために代数的推論と言語学 (記号論) という二つの観点でアプローチしている (和田, 2012, 2013, 2014a, 2014b)。

算術から代数への移行に対する取り組みの一つである「初期の代数 (Early Algebra)」では、算数において代数的推論を促進させることが代数学習につながるということを前提にして研究が進められており (Carraher & Schliemann, 2007)、本研究もこのような立場に立つものである。また、言語学研究の観点で子どもの式の認識をみるならば、それは語用論から意味論、統語論へと進むものと考えられる (平林, 1987)。本研究では小学校段階の子どもの認識を対象としているため、児童の式の意味論的認識の様相に関心があり、和田 (2014b) で語用論的認識から意味論的認識への移行過程の一端を示した。しかしながら、それは第2学年「加法と減法の相互関係」の単元の事例のみに基づいたものであるが故、さらなる事例の収集による議論が課題として残されている。

そこで、本稿では、第3学年「除法」の単元の授業 (和田・宮崎, 2016) の記号論的及び質的分析の結果を示し、それと「加法と減法の相互関係」の事例とを比較考察することによって、児童の式の意味論的認識の様相をより明らかにしていきたい。

2. 理論的背景

(1) 代数的推論

中等教育段階で学習する代数は、生徒がそれを理解することは困難であると指摘されている (例えば, Booth, 1988; 小山, 1988など)。そして、そのような困難を克服する試みの一つとして、そもそも算術の一般化が代数であるという立場から、初等教育段階で代数的推論を促進させることを目指す「初期の代数」の研究 (Carraher & Schliemann, 2007; 藤井, 2010) が挙げられる。つまり、算数においては、たとえ代数記号や代数的内容を直接的に扱っていなくとも、代数的な思考を働かせている場面が多くあり、そのような思考を促進させていくことが代数学習につながっていくという立場であり、本研究もこのような立場に立つものである。

しかしながら、現在、代数的推論に関する統一された見解がないという状況にある。本研究では「一般性の認識」と「正当化」を一般的な視点として置き、第6学年の分数の乗法・除法の単元を対象とした授業分析 (和田, 2012, 2013) 及びダイアグラムの推論の観点での事例分析 (和田, 2014a) を通して、代数的推論を次のように暫定的に規定している: 「規約性を有する表現における数や演算の性質や関係などの関係性を見いだし、それを正当化すること」⁽¹⁾。また、代数的推論を、構成規則をもつ操作的表現や図的表現に基づいた「具体に基づく代数的推論」と数や演算の性質に基づいた「抽象に基づく代数的推論」とに大別している。

(2) 言語学的観点でみた式の認識

言語学研究においては、文に関する研究分野として、文の構造を研究する統語論、文の意味を研究する意味論、文の運用を研究する語用論がある（西原，2012）。これらを数学教育に、特に小学校と中学校の数や式にかかわる学習に対応させるならば、統語論は文字式以降の学習に対応する。したがって、文字式学習における困難は式の意味論的認識から統語論的認識への移行という観点で説明することが可能となる（平林，1987）。

しかしながら、言語学的観点から考えれば、数や式にかかわる内容には、小学校段階で語用論から意味論への移行時期があるはずであるが、あまり問題となっていない。その移行がうまくいっていないから式の意味論的認識が十分に高まっておらず、統語論的認識への移行にもうまくつなげていないのではないかと考えることもできよう。したがって、式の意味論的認識の様相を明らかにし、語用論的認識からの移行過程の特徴を明らかにすることも重要ではないかと考える。本研究では、小学校第2学年の「加法と減法の相互関係」と第3学年の「除法（特に等分除と包含除の統合）」の単元がその移行時期に当たると仮定して研究を進めている。

(3) 加法と減法の相互関係でみられた代数的推論と式の認識

和田（2014b）では、上記の移行内容の一つである「加法と減法の相互関係」の単元の授業を構想し、それを記号論的及び質的に分析した。その結果、次のような代数的推論がみられた。

具体に基づく代数的推論の様相

- ARC I：規約性の協定化（図的表現の構成規則と操作規則の顕在化・共有化）
- ARC II：比較による対象化（複数の図的表現の比較による関係性への焦点化）
- ARC III：サンドイッチの操作（加減の関係を図的表現（テープ図）の上下の入れ替え操作で認識）

抽象に基づく代数的推論の様相

- ARA I：確かめ算による逆（加減の関係を確かめ算で認識）
- ARA II：部分-全体のダイアグラム（加減の関係を記号的ダイアグラムで認識）

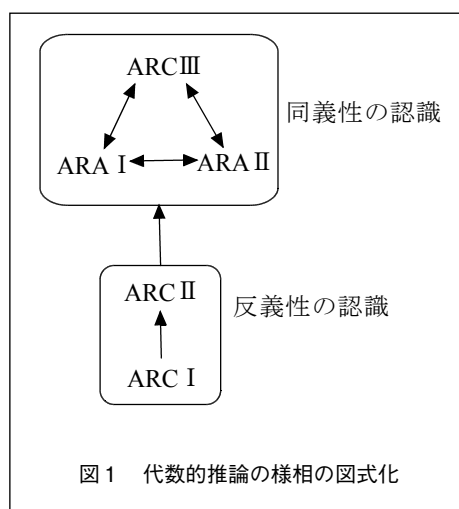
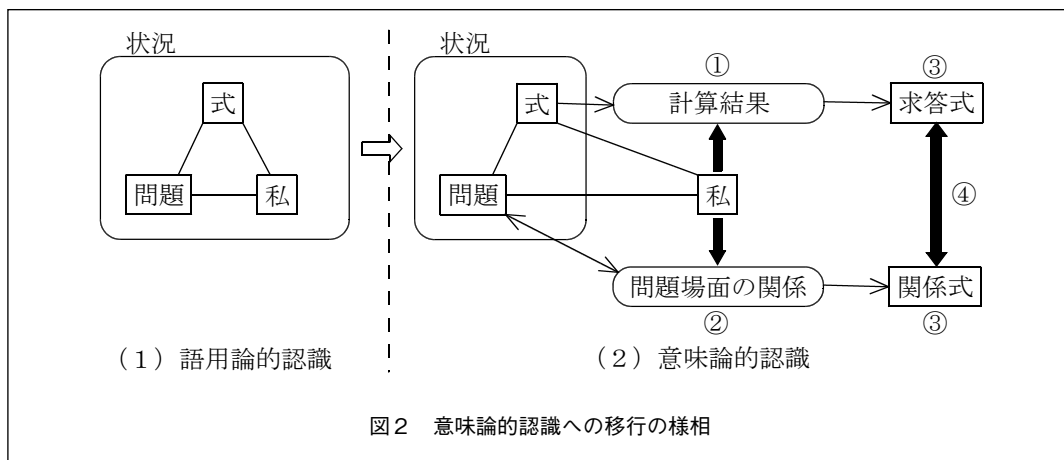


図1 代数的推論の様相の図式化

また、図1のように、これらの代数的推論は相互に関係しあっていた。まず ARC I と ARC II により、加法と減法の反義性を視覚的に認識できるようになり、それに基づいて、ARA I と ARA II、ARC III の相互作用によって加法と減法と同義性を直観的に把握し、それらの相

互関係の理解を深めていった。また、式の見方に関しては、計算結果を表すものとしての「求答式」と、問題場面の関係を表すものとしての「関係式」があり、両者の見方が同時にできなければならないこともわかった。

これらをふまえると、式の語用論的認識から意味論的認識への移行は、図2のように記述できる。最初の語用論的認識は、問題の状況の中にある「私（児童）」が、その答えを導く過程を表す道具として式を用いている状態である（図2(1)）。そして、加法と減法の相互関係以前の学習によって、「私」が状況から脱するようになってきているが、式の見方は語用論的認識のように計算結果を表すものというままである。また、ここで図的表現によって視覚的に反義性が認識される（図2(2)①）。しかし、加減の逆思考の問題を考えることによって、式を問題場面の関係を表すものとしても認識し（図2(2)②）、それらの見方から求答式と関係式が導かれる（図2(2)③）。これらの式は、同じ問題から導かれたものであるから同じ意味を有しているはずなので、それらの式及びそれぞれの式の見方の関係性について考えることで代数的推論が働いて、それらの同義性が直観的に把握される（図2(2)④）。



3. 乗法的構造の認識：等分除と包含除の統合の授業

上記で取り上げた事例は、第2学年の加法と減法の相互関係である。より一般的に議論していくためには、他の学年・単元の事例も交えながら議論を進めていく必要がある。そこで、ここでは第3学年の「除法」の事例（和田・宮崎，2016）を挙げていく。

本研究では、算術から代数への移行という課題のためには、低学年から関係性を見いだしていくような授業が必要であり、また十分に可能であると考えている。先に述べたように、言語学的観点から考えると、語用論から意味論への移行によって関係性へ焦点化でき、さらに代数的思考として重視されている「ある操作とその逆への焦点化」や「等号への再焦点化」(Kieran, 2004)も可能となると考えている。そこで、加法と減法の相互作用の事例に続き、乗法的構造を対象にした授業（和田・宮崎，2016）を分析していく。

実際の授業は、2014年7月7日から7月17日に亘って鹿児島市内の小学校で実施した。授業の概要は以下の通りである（授業実践の詳細な報告は、和田・宮崎、2016を参照）。

時	学習内容	児童の活動の概要
1	乗法を図で表す	3×5と4×4のどちらが多いかという状況を用い、2年生にもわかるように図的表現で表していった。長方形型と数直線型の2つが出たが、「どちらが多い」がわかりやすいのは数直線型であることが指摘された。
2	等分除の導入	「アメを4人で分けます。1人分は何個になるでしょう」という状況から、「等しく分ける」ことを意識した。次に全部の数が12であることを示し、「分け方」について考え、「1つずつ配る方法」と「3つずつ配る方法」が出た。後者は答えがわかってないといけないことが指摘され、その後、数直線図で表して乗法との比較を行った。
3	等分除の答えの求め方	「ブロック○個を3人で同じ数ずつ分けます」という状況から、1人分が1個だったら、2個だったら、…と考えて変数的・図式的に表した。次に全部の数が15個であることを示し、1人分が5個であるときに答えになることを確認し、その図的表現と乗法の図的表現とを比較した。
4	包含除の導入	はじめに等分除の図的表現を復習した後「お菓子が12個あります。1人に4個ずつ分けます」という状況を示し、配り方が等分除とは異なることを確認した。そして、これも除法の式で表すことができる理由を等分除と比較しながら考えた。
5	包含除の答えの求め方	「ブロック15個を1人3個ずつ分けます」という状況から、1人だったら余る、2人だったら、…と考えて変数的・図式的に表した。次に5人だったら15個全部を分けることができ、それは $3 \times \square = 15$ と考えることであると指摘された。その後、図的表現によって乗法と比較し、具体的操作が逆であることを認識した。
6	乗除の逆思考	関係式が $6 \times \square = 42$ になる問題を提示し、その関係式と求答式、図的表現を考えた。次に、関係式が $\square \times 7 = 42$ になる問題を提示し、その関係式と求答式、図的表現も考えた。最後にそれらを比較し、乗法であることや図的表現が同じところ、 \square の場所や求答式が異なることが指摘された。
7	問題づくり（1） —等分除と包含除の統合—	式「 $10 \div 5$ 」を提示し、この式になる問題をつくった。等分除の問題と包含除の問題が作成され、「同じ式だけど分け方が違う」「式は同じだけど図が違う」と認識した。
8	問題づくり（2） —乗法・等分除・包含除の相互関係—	式「 $4 \times 6 = 24$ 」が提示され、どれか一つの数値を未知数として問題をつくった。

4. 授業の分析

上記の授業は、2台のビデオカメラで記録し、観察者（筆者）のフィールドノートと児童のノートのコピーなどをあわせてトランスクリプトを作成した。授業の分析としては、まず、トランスクリプトに基づいて、授業で中心的に扱われている数学的な表現（中原，1995）を同定し、次に児童たちの発言などからその表現の対象を同定した。そして、表現の対象が具体的なものから一般的なものへと変化したと考えられる場面を、一般性が認識された場面として同定した。また、それらの一般性が認識された場面において正当化された場面を特定し、その場面を代数的推論が現れた場面とした（詳細は、和田，2012を参照）。さらに、グラウンデッド・セオリー・アプローチの手法を用いた質的な分析（木下，2003）も行った。

なお、語用論的認識に関しては、既に第2学年の段階で脱していると考え、ここでは意味論的認識がどのように高まっていったのか、その様相を中心に分析していく。

(1) 代数的推論

上記のような方法での分析の結果、次のような代数的推論が同定された。

(ア) 図的表現の規約性の協定化

本授業では、数直線図を投げ所にして乗法と除法の相互関係を認識させようとしていたため、第1時で乗法を数直線図（図3参照）で表す時間を設けた。つまり、数直線図に乗法の操作などの関係性を見だし、構成規則と操作規則を協定

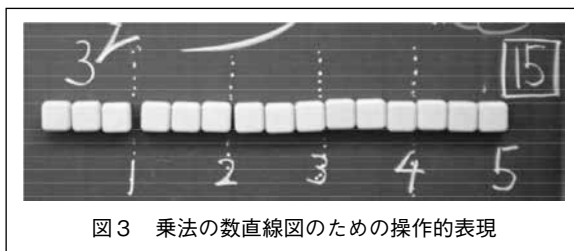


図3 乗法の数直線図のための操作的表現

した。また、第4時や6時では、除法の操作が数直線図ではどのように表されるかということが議論となり、「まとまりをまとめるのがかけ算、まとまりをばらすのがわり算」という認識につながった。

(イ) 図的表現の比較による対象化

複数の図的表現を比較する際、それらに共通する関係性に焦点が当たることになるため、代数的推論が働くことになる。例えば、第2時の等分除をはじめて学習する場面で、乗法とは逆の関係にあることを直観的に把握させるためにそれらの数直線図を比較させたところ、児童NDは次のように発言した。

教師：ND君ぐらいだ。じゃあ、ND君がどんなことをいうか、ND君、どうぞ。

ND：こっちはここの3のまとまりが5個あって、これが5個あって、こっちは3のまとまりが4個あって、それが。

このように、児童 ND は数直線図の比較によって、乗法と除法との共通点として「まとまり（1つ分）」に気づいた。この「まとまり」という認識は、これ以降の子どもたちの有力な見方の一つになっていった。なお、このような比較による代数的推論は、乗法と除法だけでなく、特に第6時以降で「等分除と包含除」や「乗法と等分除と包含除」の比較の際にも働いていた。

(ウ) ダイアグラムの推論

ダイアグラムの推論とは、規約性のあるダイアグラムの構成、操作、観察によって新たな関係性などを導くものである（和田，2014a）。本授業では、等分除と包含除それぞれでの答えの求め方（第3時と5時）の際にみられた。例えば、第3時の「 $\square \div 3$ 」という場面設定で、「もし1人分が1ならば \square は3になる」というように、1人分の数を変数として考えさせ、それらを縦に並べてそこから3の段の九九になっていることを見いだした（図4参照）。

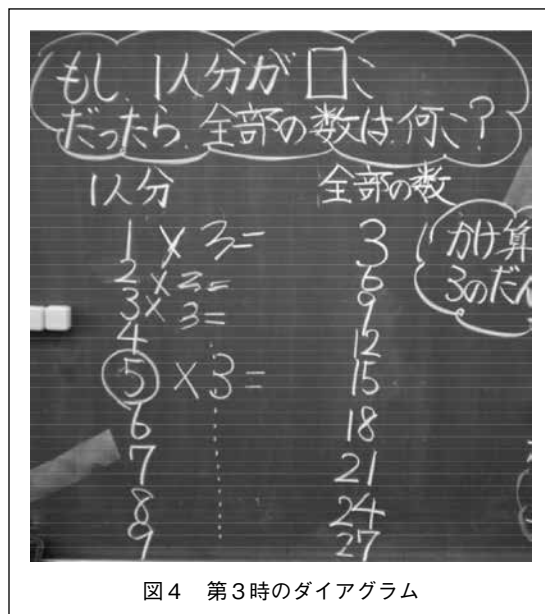


図4 第3時のダイアグラム

(エ) 逆の見方

乗法と除法の相互関係を扱うのであるから、それらが「逆」の関係にあるという見方は不可欠となる。このような見方は、詳細にみると四つに分類できた。一つは、「式を読む方向が逆」という見方である。例えば、第2時で「 $12 \div 3 = 4$ 」という式が提示された後、次のようなやりとりがあった。

教師：はい、1回も当たってない人、はい、MSさん、どうぞ。

MS：えっと、右、あ、左から見たらわり算だけど、右から見たらかけ算になっている。

C： $3 \times 4 = 12$ 。

C：ああー。

二つには、除法の求答法は乗法になるという意味での逆、三つには、除法の確かめ算が乗法になるという意味での逆、四つには、包含除の際にみられたものであるが、具体的操作が逆になっているという見方であった。なお、上の児童 MS の見方は「式を読む方向が逆」であるが、その後のある児童の「 $3 \times 4 = 12$ 」という発言は、「求答法による逆」を意識していると考えられる。

(オ) 式の□の位置

これは、第6時以降の等分除と包含除、乗法との比較の中で「関係式」が出てきたため、「□」の位置によって判断しようとして働いた推論である。もちろん、数直線図における□の位置による推論もあったが、それは①の構成規則に含まれるものである。

これらの代数的推論の様相をまとめると、次のようになる。

具体に基づく代数的推論の様相

- ARC ①：規約性の協定化
- ARC ②：比較による対象化
- ARC ③：ダイアグラムの推論
- ARC ④：具体的操作による逆

抽象に基づく代数的推論の様相

- ARA ①：式を読む方向による逆
- ARA ②：求答法による逆
- ARA ③：確かめ算による逆
- ARA ④：□の位置

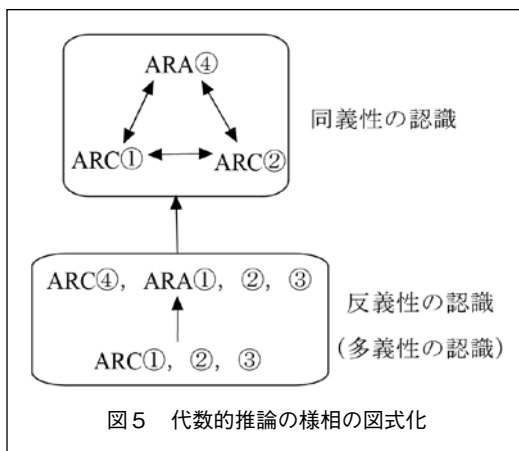


図5 代数的推論の様相の図式化

これら代数的推論の様相と意味論の観点でみた本授業における式の認識の関係は、図5のようになる。除法をはじめて学習する内容であるから、等分除と包含除という複数の意味があること(多義性)を数直線図を媒介として学びつつ(ARC ①②③)、乗法の逆操作であることを明確にするようにして反義性についても学んだ(ARC ④, ARA ①②③)。そして、第6時でいわゆる乗除の逆思考問題を取り扱うことと第7時と第8時の学習によって、等分除と包含除、そして乗法が同じ乗法的構造であるという同義性について、数直線図を媒介として直観的に把握した(ARC ①②, ARA ④)。

(2) 意味論的認識

上述の代数的推論の様相に基づいた意味論的認識の様相は、図6のようになる。それ以前の学習によって「私」が状況から脱するようになってきているが、式の見方は語用論的認識のように計算結果を表すものという傾向が強い。しかし、除法の場合、求答法は逆の関係である乗法である

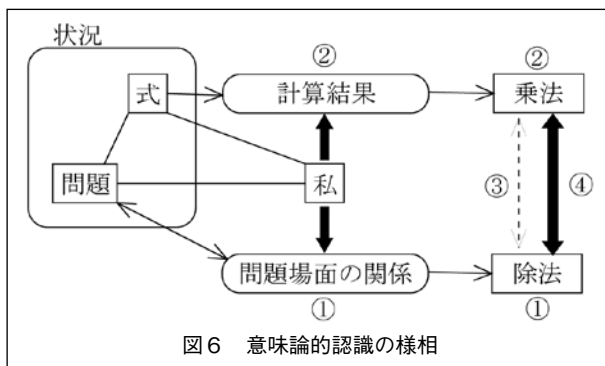


図6 意味論的認識の様相

ため、最初は問題場面の関係をとらえて除法の式を立式する必要がある（図6①）。除法の意味を理解した上で、次にその求答法について考え、それが乗法であることを認識する（図6②）。そして、これらの反義性を具体的操作や式の観点からとらえ（図6③）、乗除の逆思考問題などを扱うことで、それらの同義性を直観的に把握する（図6④）。

5. 議論：意味論的認識の様相

ここでは、和田（2014b）の加法と減法の相互関係の単元と上記の除法の単元でみられた意味論的認識の様相について比較考察していく。

加法と減法の相互関係では、その学習以前にそれぞれの演算が用いられる場面の多義性を学習している。そして、その単元の学習において、それらが操作として反義であること、そして操作として逆の関係にあるけれども、加法的構造としてみると同義であるという直観的な把握に至った。

これに対し、除法の単元では、教科書に準じた単元構成であれば、はじめに除法が用いられる場面の多義性（等分除と包含除）と同時に、除法の求答法として乗法が位置づけられること（反義性）を認識する。そして、この後に場面が違っても同じ式になるという場面が設定され、式表示としての同義性が認識されることになる。しかしながら、ここでの反義性は、操作として逆の関係になっていることを明示的に学習するようにはなっていない。また、最終的な同義性の認識は、等分除と包含除の式表示としての同義性の認識を促すものであり、乗法と除法の構造的な同義性の認識を促すものではなく、むしろ多義性の認識の範疇であるといえよう。

そのため、本研究では、数直線図の導入による操作としての反義性の認識と、乗除の逆思考の問題を扱うことによる構造的な同義性の認識をねらって授業を構成し、その結果、実際にそのような認識に至ったと考えられる。式の統語論的認識を考えると、逆の関係にあるものを同じとみなし、それらの間の関係を文法（変形規則）の視点から考えることがそのような認識になるであろう。意味論的認識は、もちろん文法の考察までには至らないが、統語論的認識への接続を考えるならば、逆の関係にあるものを同じものと直観的に把握することまでが必要ではないであろうか。そこまで認識が高まっていれば、同義である関係の論理的な把握（文法の考察）へと移行しやすくなるのではないであろうか。それが、本研究でみられた図の表現を媒介とした加法的構造及び乗法的構造の直観的把握であると考えられる。加法と減法の相互関係では、異論はあるかもしれないが、元々がそこまでを求めているといえるけれども、乗法的構造ではその把握を明示的には行っていない。統語論的認識への移行を考えれば、構造としての同義性の直観的把握までが必要であるから、その一つの提案として、この単元で乗除の逆思考の問題を扱うことは意味があろう。

また、図2と図6を比較すると、意味論的認識の様相は同じような構造を有しているといえる。つまり、式の見方として「求答式」と「関係式」の二つの見方ができるようになることが重要となる。ただし、除法の場合は求答法が乗法になるため、その様相における思考過程は同

じではない。加法的構造の場合、加法の求答法が減法になるわけではないので、加法と減法の相互関係の単元でそれらの関係について考えることが必要となるが、乗法と除法の場合は、除法の学習の際に乗法を必然的に用いることになる。しかしこのことが、乗法を用いることが当然のこととなってしまい、それらが逆の関係にあることを曖昧にし、そのまま学習が進んでしまう要因となっているといえるのではないか。したがって、この点でも等分除と包含除の統合の際には、乗除の逆思考の問題を扱うことが必要となろう。

さらに、これら二つの移行のための授業では、どちらでも多義性の認識から反義性の認識、そして同義性の認識へと進んでいった(図1と5を参照)。これが、意味論的認識を高める一つの過程であるといえよう。ただし、この過程における「意味」の意味が異なることに注意する必要がある。つまり、多義性の認識は「演算が用いられる場面」の認識であるし、反義性の認識は「演算の操作」、同義性の認識は「演算の構造」を認識することである(図7)⁽²⁾。

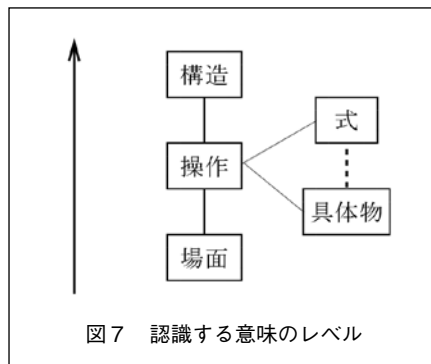


図7 認識する意味のレベル

したがって、意味論的認識が高まる過程では、意味のレベルも現実的なものから数学的なものへと高まるため、その点を考慮した授業展開を考えていかなければならないであろう。

また、図1と図5から、式の意味論的認識の高まりにかかわる代数的推論の様相も明らかになった。具体に基づく代数的推論に関しては、同義性の直観的把握をねらいとするならば、図的表現の媒介は必須であるから、図的表現の規約性を協定化していくことや複数の図的表現の比較によって関係性を見だしていくことは、そのための前提条件であるといえよう。また、抽象に基づく代数的推論に関しては、反義性や同義性の認識の鍵となる逆の認識が重要であることがわかった。ただし、意味のレベルが数学的なものへと高まる反義性や同義性の認識の際、数学的なレベルだからといって抽象に基づく代数的推論のみが働くわけではないこともわかった。どちらの授業でも、具体に基づく代数的推論と抽象に基づく代数的推論との相互作用によってそれらの認識が促進されていたのである。したがって、これらの推論の相互作用が生じるような授業構成を考えていくことが、反義性や同義性の認識には必要となるであろう。

6. おわりに

本稿は、第3学年「除法」の授業の記号論的及び質的分析の結果を示し、それと第2学年「加法と減法の相互関係」の単元の事例とを比較考察することによって、児童の式の意味論的認識の様相をより明らかにすることを目的としていた。その結果、式の意味論的認識の様相がより明らかになったといえよう。ここでは、いくつかの課題について言及しておきたい。

まずは、式の意味論的認識を高めるために適切な学年・単元を特定することが挙げられる。これまでの研究では、加法的構造は第2学年「加法と減法の相互関係」の単元、乗法的構造は

第3学年「除法（等分除と包含除の統合）」の単元がそのような認識を高める単元であると仮定していた。しかしながら、例えば加法と減法の相互関係では、逆向きのストラテジーを身につけるといって進めた方が適切であり、それらの相互関係を理解させるのは難しいのではないかと感じることもあった。また、図7にも表れているように、逆の見方には様々なレベルのものがみられた。児童たちの乗除や加減が「逆」の関係にあるということの理解のため、これらの違いを吟味し、その理解のための道筋を明らかにする必要がある。さらに、媒介する図的表現の適切性も課題として挙げられる。特に、除法の単元では、数直線図を用いて授業を構成した。しかしながら、例えば面積図を用いた授業展開も可能であるため、他の図的表現でもそのような授業を考えていく必要がある。最後に、さらに研究を進めていくことで、代数的推論をより明らかにすることが、特に意味論的認識の高まりにかかわるものをより明らかにしていくことが必要であろう。

付記

本研究を実施するにあたり、多大なるご協力をいただきました田中裕一先生、宮崎憲一郎先生、本田康幸先生、並びに児童の皆様にご心より御礼申し上げます。なお、本研究は科研費（課題番号24730744、15K04452）の助成を受けている。

註及び引用・参考文献

- (1) 和田 (2014b) の規定では、「…、それを演繹的に説明すること」としていた。和田 (2012) で述べているように、そこでの「演繹的」とは厳密なものではなく、前提に操作的表現や図的表現を用いるいわゆるアクションブルーフを含めた、弱い意味での演繹的推論を意図している。ところが、本稿でも言及しているダイアグラムの推論 (和田, 2014a) は、一見するとダイアグラムにおける規則性を見だしていることから帰納的推論とみなされるかもしれないが、ダイアグラムの定義から、それから規則性が導かれるのは必然的であるので一般から特殊へと進んでいることとなり、その意味では弱い演繹的推論に分類されるものである。しかし、「それでも帰納的推論ではないか」という疑念を払拭するため、「演繹的に説明する」という部分を、社会的な理由づけの行為 (熊谷, 1998) という意味で「正当化する」と修正した。ただし、この規定が意味するところに大きな変更があるわけではない。
- (2) 図7の右側の式の観点と具体物の観点は、逆の見方でみられた多様性に依拠しているが、これらの詳細な検討は今後の課題であるため、それらの関係は点線で表現している。
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In Coxford, A. F. et al. (Eds.), *The idea of algebra, K-12*, 20-32. NCTM, INC.
- Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 669-705. Information Age Publishing.
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- 木下康仁 (2003), 『グラウンデッド・セオリー・アプローチの実践』, 弘文堂.
- 熊谷光一 (1998), 「小学校5年生の算数の授業における正当化に関する研究」, 『数学教育学論究』, 70, 3-38.
- 小山正孝 (1988), 「算術から代数への移行に関する認識論的考察」, 『第21回数学教育論文発表会論文集』, 52-57.
- 中原忠男 (1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
- 西原哲雄編 (2012), 『言語学入門』, 朝倉書店.
- 平林一榮 (1987), 『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館.
- 藤井齊亮 (2010), 「文字式」, 日本数学教育学会編, 『数学教育学研究ハンドブック』, 83-94, 東洋館.
- 和田信哉 (2012), 「分数の乗法・除法に関する代数的推論の明確化」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18 (1), 31-41.
- 和田信哉 (2013), 「分数の乗法・除法に関する代数的推論の機能に関する研究」, 『日本数学教育学会誌』, 95 (2), 2-10.
- 和田信哉 (2014a), 「図的表現と操作的表現の規約性に関する研究」, 『鹿児島大学教育学部研究紀要 教育科学編』, 65, 31-48.
- 和田信哉 (2014b), 「加法と減法の相互関係に関する研究」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 20(2), 77-91.
- 和田信哉・宮崎憲一郎 (2016), 「等分除と包含除の統合に関する実践的研究」, 『鹿児島大学教育学部教育実践研究紀要』, 25.

