

教育学部における幾何学の授業内容の改善について(1)

—コンパクト性の理解度から—

On the improvement of teaching geometry in a class for prospective teachers(1)
— from the understanding of compactness —

安井 孜*
YASUI Tsutomu

キーワード：コンパクト、理解度、数学教育、教科専門科目

1 はじめに

近年、大学生の学力が低下してきたのではないかといわれ、それを示すデータも徐々に発表されてきた ([9]ほか)。筆者は長年、教育学部で主として幾何学、特に位相幾何学の講義を担当してきた。個人的なデータは持ち合わせないが、地方の国立大学教育学部の数学の授業を受講する学生に対し、学力の低下は経験的に正しいと思う。実際、授業で採用するテキストのレベルを考えると、この30年間、新しいテキストを採用するたびにそのレベルは絶えず下がり続けてきた。それに応じて試験問題も徐々に易しくしてきた。論理的展開を要する証明問題は、まずその数を減らした。証明問題を採用する場合でも、幾何学における典型的なアイディアを使うが、証明は短くてすむものを選ぶようになってきた。厳密性を深く追求するのは控えめにし（厳密性は管理として、いつも後からついて行くものである [2, p. 29]）、一方で、基本的な概念は正確に覚えることを求め、少しづつ「意味=感覚」 [2, p. 27] に重きを置くようにしてきた。その背景には、同じ幾何学でも、受講生が将来数学教師を目指すのなら、それにふさわしい講義の仕方があるだろうという認識があった。そこで教育学部における自分自身の幾何学の講義を、期末テストの結果を通して、検討してみることにした。

本小論は以下のように構成されている。第2節では、本小論を発表するに至った動機と先行する今岡の結果 [5] とを紹介する。第3節では本学部

の幾何学の講義の内容を説明する。それは同時に幾何学2の受講生の幾何学に関する教育的背景でもある。第4節では、幾何学2の試験問題の紹介、出題の意図、採点基準、採点の結果を報告する。第5節で、幾何学2の採点結果の分析をし、さらに和歌山大学の調査 [5] との比較を論じる。第6節で今後の課題を明確にする。

2 本研究の動機と先行研究

1. 動 機

本学部で平成13年度後期に開講された、2年生向けの幾何学2では、位相空間の連結性、道連結性、コンパクト性について10回の講義と4回の演習を行なった。第3節で述べるように、幾何学の授業は4科目しかなく、さまざまな幾何学を紹介する時間はとれない。そこで、コンパクト性に関しては、「n次元ユークリッド空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件はそれが有界閉集合であることである」の理解を目標にした。定期試験では第1節で述べたような意図の下に出題した。採点をしながら、学生の感覚的な理解にすら疑問を抱いた。ユークリッド空間のコンパクト部分集合は有界閉集合と同値であることは正確に記述できるが、幾何学的直感的イメージとしては捉えられていないのではないかという疑問である。

このたびの幾何学2の試験も、問題の半分は昨年の問題から採用した。コンパクト性はたいていの大学の位相空間の講義に現れる最後の概念で、理解の難しさは承知している。講義は厳密に論理的に進めるものの、受講生には直感的、感覚的に

* 鹿児島大学教育学部数学教育（幾何学）

理解できればよいと考え、証明問題は試験問題には採用しなかった。2次元ユークリッド空間（即ち平面）における部分集合（即ち図形）を与える、それがコンパクト（即ち有界閉集合）かどうか判定させようとした。採点結果は出題者の意図を大きく外れるものであった。原因は単に受講生の学力低下に帰するものではないと考え、コンパクト性に関する受講生の答案を何度も見直してみた。その結果がこの小論の報告である。報告を目的に試験をしたわけではないので、母数は22と少ないが、学科の入学定員（19人）を考えればやむをえないことである。それでも、コンパクトの理解し難い原因、つまずくところが見えてきた。

2. 先行研究

このような状況下で筆者は広島大学大学院教育学研究科教授今岡光範氏の論文[5]を思い出した。氏は和歌山大学教育学部に在職中1992年度に、集合と位相空間について学生の理解に関するアンケート調査を行っている。その結果を以下のように報告している[5, p. 20]。

○位相空間に入る前の集合論で既に理解が難しくなっている。

○（授業中繰り返し強調し、いくつかの例示をしたにもかかわらず）位相空間の中でも特にコンパクト性は理解しにくい。

今岡の調査と今回の試験では、場所も時間も隔たっているが、10年くらいで数学、幾何学、の教育内容が大きく変わることはない。一方、10年前、和歌山大学におけるアンケートの対象となった学生と、今回本学部の幾何学2の受講生の位相空間に関する教育的背景が非常に類似していた。そこで今回の幾何学2の試験の結果と今岡の報告[5]とを比べてみることにした。

3. 幾何学の講義の実際

1. 講義内容について

数学専修の学生は、教科専門科目として、線形代数学1、解析学1（微分）を1年前期に、線形代数学2、解析学2（積分）、代数学1（初等整数論）を1年後期に受講している。いずれも演習は付随していない。上記の授業の知識を前提に幾何学の講義は2年前期から始まる。2年前期は初

等幾何学と幾何学1、後期は幾何学2、3年前期は幾何学の講義ではなく、3年後期に幾何学3が開講される。いずれも演習はついていないが、3年後期の数学科教育演習3（必修）が事実上、幾何学系の演習となっており、2年前期の幾何学の講義内容、即ち、論理と集合、距離空間と位相、に関する演習を行なった。初等幾何学は初等・中等コース共に必修、幾何学1は中等コース必修、幾何学2は共に選択科目である。初等幾何学の前半は集合論、後半は解析幾何学；幾何学1では実数の性質の復習からはじめ、距離空間と連続写像、点列コンパクト性、位相空間から開集合・閉集合の性質までを講義した。幾何学2は幾何学1の続きで、開集合の基底、連結性、道連結性、コンパクト性の講義を10回と4回の演習を行なった。授業とは別に、前期に10回ほど自主的に演習を設けた。講義だけでは講義内容の理解は難しいと判断したからである。しかし、前期のこの自主的な演習には卒業がかかっている4年生を中心に多いときで5人、幾何学2の演習には多いときで8人の参加であった。

2. テキストについて

初等幾何学の前半は、内田[6]、鎌田[4]、井関[3]、松阪[1]らの本を参考に、論理と集合について、筆者が23頁のプリント[8]を作成し、受講生に配布した。幾何学1は内田の本[6]をテキストに指定し、§3 実数の集合、§5 数列の収束と連続関数、§6 実変数の連続関数、§7 距離空間、§8 距離空間の開集合と閉集合、§9 距離空間の連続写像、§11 点列コンパクト集合、§13 位相空間を講義した。幾何学2も引き続き内田の本[6]をテキストに、§14いろいろな位相、§15（最後の節）位相的性質について講義した。位相的性質についてはテキストに書かれていらない性質、例えば道連結性、についても少し詳しく講義したので、2節を10回かけて講義した。位相空間の講義は連結性（道連結性を含む）とコンパクト性の講義で終わることが多い。連結性はその漢字から幾何学的イメージが浮かぶが、コンパクト性にはそれがない。（昔は「完閉」という漢字が当てられたこともあったが、現在は使われていない。名訳とは思うが。）これもコンパクト性の理解を難し

くする原因のひとつと思われる。

3. コンパクト性について

有界な数列が収束する部分列を持つことは解析学1で学んでいる。前期の点列コンパクト性に関する講義では、区間縮小法の説明と、 n 次元ユークリッド空間において有界閉集合は点列コンパクトであることを示した。逆の成立は証明していない。位相空間は前期の終わりに開集合を用いて定義した。後期の§15では開被覆を用いてコンパクトを定義した。コンパクト距離空間では、点列コンパクトとコンパクトとは同値であることを示した。さらに、 n 次元ユークリッド空間の部分集合がコンパクトであるならば有界閉集合であることを示し、最終的に有界閉集合とコンパクト部分集合とは同値であることを説明した。

4 コンパクト性に関するテストとその結果

幾何学2の受講登録35人中12人が放棄、1人は別の試験、残り22人が統一試験を受けた。22人の内訳は2年生12人、3年生7人、4年生以上3人であった。3年生以上の10人の内、再履修の受講生はいずれも昨年度以前の幾何学2の講義をコンパクト性の講義に入る前に放棄しており、22人全員が本期初めてコンパクト性に関する講義を受けたとみなせる。

1. 試験問題

22人が受けた試験の問題のうち、コンパクト性に関する問題は以下の通りである。

問題1(ii) (X, \mathcal{O}) を位相空間、 $A \subset X$ とする。 A がコンパクトであることの定義を正確に書け。

問題3 R^n の部分集合 A がコンパクトであるための必要十分条件を一言で（または簡潔に）述べよ。

問題6 R^2 の部分集合 A を $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ とおく。

(ii) A はコンパクトか？簡単な説明をつけて結果を述べよ（以下同様）。

(iii) $A_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2\}$ はコンパクトか？

(iv) $A_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$ はコンパクトか？

問題紙のなかで予想配点はすべて5点と述べておいた。実際は、問題1(ii)は7点満点で採点し、

残りはすべて予想配点通り5点満点で採点した。

2. 採点の結果

試験の結果を表にまとめると次のようになつた。

表1：テストの結果

問題	1(ii)	3	6(ii)	6(iii)	6(iv)
配点	7点	5点	5点	5点	5点
平均点	3.5点	3.9点	2.8点	2.0点	1.5点
○	10人	16人	5人	5人	5人
△	4人	3人	9人	5人	2人
×	7人	2人	0人	4人	5人
無回答	1人	1人	8人	8人	10人
合計	22人	22人	22人	22人	22人

ただし、○は正解またはほぼ正解、×は全くまたはほとんど理解していない、△は○と×の中間と判断し、下記の表でその点数を表す。

表2：○、△、×の配点

問題	1(ii)	3	6(ii)	6(iii)	6(iv)
○	5-7点	5点	5点	5点	5点
△	3-4点	2点	4点	4点	4点
×	0-2点	0点	0点	0点	0点

問題1(ii)の○の10人中、満点の7点を得たのは5人であった。

3. 出題の意図と採点

問題1(ii)（7点満点）は「任意」または「全て」、「ある」または「存在する」を用いて、論理的に正確な記述（同時に正確な暗記）を求めるものであった。実はこれが同時に簡潔明瞭な表現でもある。昨年も出題しているので、受講生には予想できたはずである。しかし過去の経験から、正確な記述がそれほど易しくはないと思っていた。専門用語、記号の羅列で、日本語の体をなさない、単に部分点を狙ったと思われる([7, p. 57])答案が2点以下の7人中6人いた。「全て（全称）」なのか「存在（特称）」なのか不明瞭な答案が3点以上の中に6人いた。

問題3は大定理であり、そのまま覚えておいてほしい命題である。表現、即ち解答、は簡潔明瞭であるし、昨年も出題しているので、これも受講生には予想できたはずである。これは大部分の受講生が正解を記述できる、点の稼げる問題と予想していた。事実そうなったことは平均点の高さからもみてとれる。「有界閉集合」と解答すれば5

点、「有界閉区間」と解答すれば2点、それ以外は0点で採点した。「有界閉区間」は「 R^n の部分集合」と問題の中で述べているし、講義のなかで閉区間の直積集合も閉区間と呼んでいるので、「有界閉集合」と間違えたとは考えにくい。

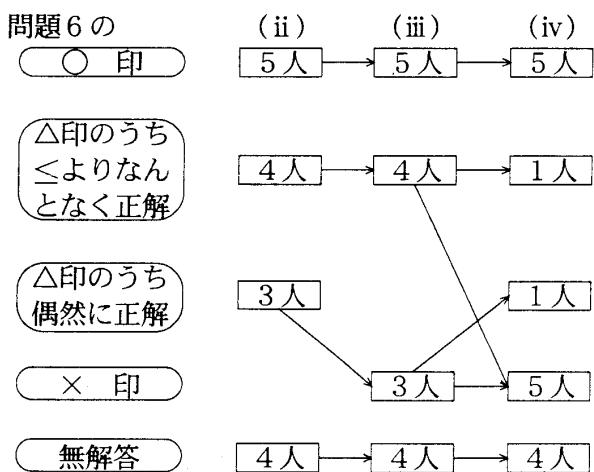
問題6(ii)-(iv)は昨年は出題していない。受講生にとって予想外の問題であったはずである。言葉の上で、「コンパクト=有界閉集合」と分かっていても、幾何学的直感的に理解しているかどうかを問う問題である。したがって配点も、判定が正しければ4点、理由も正しければ5点を与えた。ここでは問題(ii)、(iii)でそれぞれ8人、(iv)で10人が無解答であった。こんなに多くの無解答が出るとは予想外であった。後日、全問無解答の学生5人中3人にその理由を聞いたところ、全員コンパクトかどうか判定できなくて何も書かなかつたと答えた。センター試験のように、コンパクトなら1、そうでないなら2を塗りつぶせと指示すれば、判らなくても1または2を塗りつぶしたであろうに。点数を上げることへの貪欲さが欠けている。

4. 言葉の上でコンパクトを理解した学生の問題6への対応

問題3で△または×であった5人は、問題(ii)で2人が説明を付けずにコンパクトと書き、問題(iii)では1人が説明抜きでコンパクトでないと書き、問題(iv)では5人全員無解答であった。

問題3で正解の16人の問題6(ii)-(iv)に対する対応を図1で表す。この図がこの16人のコンパクト性の理解の度合いをよく表している。

図1：問題3で正解の16人



5 テストの結果の分析と和歌山大学との比較

1. 結果の分析

一般位相空間論としてのコンパクトの概念は難しいとされている。まずその定義の記述が論理的な記述に習熟していなければ易しくはない。事実、問題1(ii)7点満点で7点を得たのは5人で、○印の残り5人(5-6点)と△の4人(3-4点)は記述に曖昧さがあるか、不正確なところがあった。他人(この場合教師、採点者)に対し、自分の意図を正確に伝える表現力の不足は、コンパクト性に限らず、今回の試験の他の問題の解答の中にも、ここではそのデータを示さないが、多数現れている。

コンパクトの概念を文字から幾何学的直感的に捕らえることは難しい。論理の積み重ねでやつと、「n次元ユークリッド空間において、その部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は、その部分集合が有界閉集合であること」が得られる。この表現は単純明快で覚えるのは容易である。この問題は出題が予想されていたと思うが、それも22人中16人が正解であったことから読み取れる。

問題はここからである。では本当に「有界閉集合」が理解されているのだろうか？それを問題3で正解であった16人の問題6(ii)-(iv)の解答および第4節の図1から読み取りたい。(ii)で○印の5人は、問題1で正解の4人とほぼ正解の1人である。この5人はコンパクトの概念を幾何学的直感的にも正しく理解しているとみなせる。残りの受講生がどこでつまずいたかに関心がある。なんとなく正解の4人は不等式 $x^2+y^2 \leq 2$ で有界性を判断し、2つの不等号 \leq で挟まれた範囲ということで閉集合らしいと判断している。(実数の世界Rでは、後述するように、それは正しいことを授業中に間接的に説明している。)

従って、(iii)のように $1 \leq x^2+y^2$ では有界でないと判断し、コンパクトでないと解答している。偶然に(ii)で正解であった3人は、以下の(iii)、(iv)については意味不明な理由をつけるか、なんら理由を述べずにコンパクト性を判定している。単に不等号でのみ(ii)、(iii)の部分集合のコンパ

クト性を判定しているので、(iv)の正解に結びつかない。即ち、閉集合かどうか判定できない。(iii)の場合、不等号が $<$ であれ \leq であれ上から抑えられていないから有界でなく、閉集合かどうか判断する必要はなかった。従って、なんとなく(ii)で正解の4人は(iii)では正しく判定できた。しかし(iv)になると閉集合かどうかの判定が必要となるため、たちまちつまずいている。

「(ii)で \leq よりなんとなく正解」した1人の受講生の答案を、その典型的な解答例として紹介する。この学生は問題3では「有界閉集合」と解答しているにもかかわらず、問題6では「有界」と記述すべきところを全て「有限」と記述している。

(ii) $A = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

$\exists U = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} : A$ の open cover, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ は有限な部分集合である。よってコンパクトである。

(iii) $A_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2\}$.

$\exists U = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} : A_1$ の open cover, $1 \leq x^2 + y^2$ は有限な部分集合でない。よってコンパクトでない。

(iv) $A_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 2\}$.

$\exists U = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} : A_2$ の open cover, $1 \leq x^2 + y^2 < 2$ は有限な部分集合である。 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset A_2$ 。よってコンパクトである。

A_2 が不等式 $1 \leq x^2 + y^2 < 2$ ではなくて、 $1 < x^2 + y^2 < 2$ で与えられておれば、それは開集合と判断したに違いない。実際 R では開区間 (a, b) は開集合であることを授業の中で直接説明している。出題する側が A_2 は閉集合でない（開集合でもない）ことは明らかと判断していたのに受講生の方はそうではなかった。

コンパクト性を正確に理解していない受講生にとって、「証明せよ」には慣れているが、「説明せよ」というのは初めての経験で戸惑ったようだ。

2. 閉集合の扱い

ここで幾何学1の講義の中で開集合、閉集合がどのように扱われたか、講義ノートを調べてみる。位相は開集合系を用いて定義しており、閉集合はその補集合が開集合のときと定義している。閉集合の補集合は開集合になることは説明してい

る。 R で開区間は開集合であり、半開区間、閉区間は開集合でないことは直接証明している。しかし閉区間が閉集合であり、開区間、半開区間が閉集合でないことは直接的には証明していなかった（閉包（closure）を用いて間接的には証明していた）。受講生は閉区間が閉集合とは言葉の類似性から信じて疑わなかったかもしれない。講義する側も、閉区間が閉集合であることくらい定義からすぐ得られることだし、ほとんど自明のこととしていた。 R^2 で、開球（open disc）が開集合であることは直接証明しているが、閉球（closed disc）が閉集合であることは、それがその閉包と一致すること、閉包が閉集合であることは述べたものの、閉集合とは言い切っていなかった。 R^2 の部分集合で、開集合でも閉集合でもない例は講義の中では示していなかった。（配布した演習問題の中にもなかった。）従って、問題6(iv)の A_2 のような部分集合は、受講生にとって開集合でないとはいっても、閉集合ではないとは言い切れなかったかもしれない。「説明せよ」という表現も込めて、教える側にはほとんど自明のことでも、教えられる側にはそうでないという認識のギャップが大きかったようである。

3. 和歌山大学との比較

ここで先行する今岡[5]の結果と比べてみる。1992年度の和歌山大学教育学部数学科の幾何学に関する講義と、2001年度の鹿児島大学教育学部の幾何学の講義には共通点が多い。ともに2年前期で集合の講義をしているし、その内容もほとんど同じである。和歌山大学は濃度に関する講義内容が鹿児島大学より豊富で、時間も多めにとっている。鹿児島大学の幾何学1、2の内容と、和歌山大学の一般幾何学2の内容はほとんど同じである。したがって、鹿児島大学のほうが少しゆっくり講義したことになる（第3節で述べたように、鹿児島大学の方が2倍の時間を掛けたわけではない）。位相空間の定義はともに開集合で定義している。上記の講義はとともに2年生向けのものである。和歌山大学では受講生からのアンケート[5, p. 19]、鹿児島大学では教育改善委員会報告[11, p. 29]と、調査の対象も時期も異なるが、両大学の学生が普段は教室外で勉強をほとんどしていな

い点まで共通である。和歌山大学では80%の受講生がコンパクトの概念は理解できないと答えており、鹿児島大学では22人中17人（約77%）の受講生が理解できていない。ただこのパーセントから両大学の学生が同程度に理解している（理解していない）とは判断できない。鹿児島大学の場合幾何学2が必修でないこともあり、途中で放棄した受講生が35人中12人おり、実際はこの数字（77%）よりもっと悪いはずである。和歌山大学の場合も放棄した学生からはアンケートをとっていない点は同じだが、放棄した学生が58人中8人と明らかに少ない。[5]には記述がないが、試験を受けた受講生のほとんどが単位を得ていることから判断すれば、和歌山大学では一般幾何学2は必修であったようである。和歌山大学では、半分くらい理解できたと回答した学生は、理解できないところが多いというグループに入れられていないから、鹿児島大学よりその範囲は小さい。それでもコンパクト性の理解が難しい点では一致している。

6 結論および今後の課題

位相空間におけるコンパクトの概念の難しさは、連結性と比べ、幾何学的イメージがその定義からも、（特に日本語では）言葉からも浮かばないし、表現の難しい点にある。少ない資料からだが、今回の幾何学2の試験の結果から、ユークリッド空間におけるコンパクト性の理解ができるいない受講生は、2つのグループに分けられる。1つは有界性は理解できるが、閉集合が理解できていないグループ、もう1つは有界性も閉集合も理解できていないグループである。

有界性は論理的にも幾何学的直感的にも易しい概念なので、それくらいその定義と文字から分かるだろうというのが講義する側の立場であった。第5節2の終わりで述べたように、この立場は変えねばならないようである。有界性については、授業の中で有界な例、有界でない例を1度はつくりと示しておく必要があるようだ。しかしここに多くの時間を割く必要はないと思う。

閉集合については、閉集合の例、そうでない例を示すだけでは不十分だろう。閉集合の場合、双

対の関係にある開集合についても理解が十分でないことが予想されるからである。授業の進行は遅れるが、普段の教室外での学習がほとんど期待できない現状[11, p. 29]では、幾何学1の講義の中で、開集合の例、閉集合の例、開集合でも閉集合でもない例、さらに連結性との関連から開集合かつ閉集合の例をたくさん見せて、イメージを膨らませることが必要と思う。

幾何学系の授業が4科目しかないというゆとりのない現状では、授業の進行の遅れは、内容を精選し、内部、近傍、近傍系、閉包は後の授業で必要なものだけに限定し、位相の強弱は演習にまわし、距離空間としては異なるが、位相空間としては同一となる例なども演習にまわし、関心と余裕のある受講生だけに任せることを考えなければならないと思う。

数学の授業の場合、特に1-2年生向けの授業には演習をつけて、問題をたくさん解かせ、それにより論理的思考および論理的記述の訓練をし、いろいろな例に接し概念形成を補強する必要があると考える。数学教師を目指す学生にとって位相空間の概念は知識として持っていて欲しいが、幾何学的イメージは距離空間、特にユークリッド空間、の場合で十分と考えている。

平成14年度入学生からは、1年後期に解析学系の演習を週1回行なうし、2年前期に代数学系の演習と、幾何学1の講義と平行して幾何学系の演習を行なうことになったので、位相空間の諸概念に限らず、教科専門としての数学全体の理解度は現状よりは改善されることが予想される。

今後の研究上の課題として、第2、3段落で述べたような授業を行なった後、その結果を再度検討してみたい。

和歌山大学における調査結果を教えてくれた広島大学大学院教育研究科教授今岡光範氏に感謝します。京都教育大学教授守屋誠司氏には、筆者が数学教育関係の小論を初めて発表するに際し、有益な助言を与えてくれたこと、絶え間なく激励してくれたことに感謝します。

参考文献

- [1] 松阪和夫：集合・位相入門、岩波書店、1968年
- [2] ルネ・トム：現代数学と通常の数学、R. ジュラン編：何のための数学か、東京図書、1975年より pp. 19–32
- [3] 井関清志：集合と論理、新曜社、基礎数学叢書2、1979年
- [4] 鎌田正良：集合と位相、近代科学社、現代数学ゼミナール8、1989年
- [5] 今岡光範：教育学部での数学の授業から一位相空間についてー、和歌山大学教育実践研究指導センター紀要、No. 3、pp. 13–22、1994年
- [6] 内田伏一：位相入門、裳華房、1997年
- [7] 大野晋・上野健爾：学力が危ない、岩波新書、2001年
- [8] 安井孜：基本的かつ易しい集合の話(初等幾何学の前半)、講義用プリント2001年度版
- [9] 戸瀬信之・西村和雄：大学生の学力を診断する、岩波新書、2001年
- [10] 芳沢光雄：「すべて」と「ある」の教育、日本数学教育学会誌第84巻第1号(数学教育 56–1)、pp. 13–16、2002年
- [11] 鹿児島大学教育学部教育改善委員会編：学生の教育参加・知的な活動について意識調査、鹿児島大学教育学部、2002年