

円形層間剥離を有する円板の軸対称自由振動

有富 正男* 井戸川 剛** 平山 将行***

AXISYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF A CIRCULAR PLATE CONTAINING A DISK-SHAPED DELAMINATION

Masao ARITOMI, Takeshi IDOGAWA and Masayuki HIRAYAMA

The influence of a delamination on the natural vibration characteristics of circular laminated plates is investigated theoretically. Axisymmetric free vibration of the clamped plate with a disk-shaped delamination is analyzed by taking into account the inplane displacement at the reference plane. Basic assumption is that the delaminated layers are contacting one another. Experiments are also carried out for the effects of the delamination size and the location of delamination on the natural frequencies. Good agreement between the theory and experiments is observed, which validates the analytical models assumed in our present study.

Keywords : Free vibration, Delamination, Circular Laminated Plate, Natural Frequency, Mode Shape

1. まえがき

積層複合材料は比強度、比剛性が大きく、ニーズにあった設計ができるため、軽量化が要求される輸送機械を始め、多くの分野で広く使用されている。しかし一方で、これら積層材料は外部から低速度衝撃などを受けると、容易に材料内部の接着部分に、表面から観測困難な層間剥離が発生する。この層間剥離が、積層材料の振動特性に及ぼす影響を明らかにしておけば、層間剥離の存在や剥離進展問題を検討する場合に役立つものと考えられる。

同種材からなる積層はり^{1),2)}、中央面に剥離がある対称複合積層はり³⁾、複合積層はり⁴⁾、複合サ

ンドイッチはり⁵⁾、異種材からなる非対称積層はり⁶⁾など、さまざまな積層はりの自由振動特性に及ぼす層間剥離の影響の研究は、多数なされている。しかしながら、積層はりと同様に実用上重要な積層板については、関根ら⁷⁾が内部に円形状の層間剥離を有する複合材積層板の剛体球による衝撃応答を、また著者ら⁸⁾が円形剥離を有する積層円板の軸対称自由振動を理論解析している程度で、剥離を有する積層板の振動問題の研究はまだ十分ではない。

本報では、異種材からなる二層の積層円板が、その中心部に円形の内部剥離を有する場合の軸対称自由振動を、前報⁸⁾では無視した積層板の基準面の面内変位の影響を考慮して理論解析を行う。そして、剥離の大きさや厚さ方向の位置が、周辺固定円板の固有振動数と振動モードに及ぼす影響を調査する。同時に、さまざまな剥離条件の異種材積層円板を製作して振動実験を行い、測定した固有振

2001年8月31日受理

* 機械工学科

** 博士前期課程機械工学専攻

*** 三井金属(株)

動数と理論結果を比較して解析モデルの妥当性を検証する。

2. 理論解析

2.1 基礎式

図1に示すような、2枚の異種材を接着した半径 R の積層円板が、中心部に半径 c の円形剥離を有する場合を考える。板はともに均質・等方性材料とし、厚さ、縦弾性係数、ポアソン比および密度は、上の板については h_1, E_1, ν_1, ρ_1 、下の板については h_2, E_2, ν_2, ρ_2 とし、これらに関する諸量を式(1)のように定める。

$$C_j = \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2}, \quad D_j = \frac{E_j h_j^3}{12(1 - \nu_j^2)}, \quad (j=1,2)$$

$$C_{j12} = \nu_j C_j, \quad D_{j12} = \nu_j D_j, \quad (j=1,2)$$

$$C = C_1 + C_2, \quad C_{12} = C_{112} + C_{212} \quad (1)$$

$$D_s = D_1 + D_2, \quad D_{s12} = D_{112} + D_{212}$$

$$h = h_1 + h_2, \quad \rho h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$$

また、剥離部分の上層の板を領域①、下層の板を領域②、接着された円環部分を領域③とする。座標原点は、領域①と②ではそれぞれ板の中立面の円板の中心位置 O_1, O_2 に、領域③では上層の板上面から η の距離のところに基準面を設け、その面の円板の中心位置 O_3 に定める。座標軸は、それぞれの座標原点から半径方向と円周方向に沿って r 軸と θ 軸を、それらに垂直に z 軸を定め、鉛直下方へのたわみを w_1, w_2, w_3 、円環部分の基準面の r 方向の

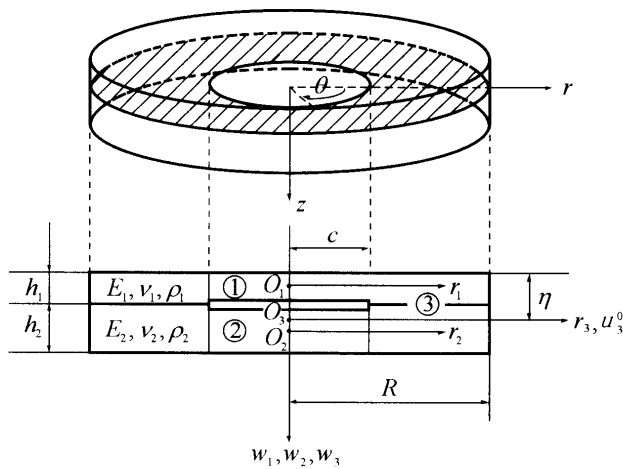


Fig.1 Geometry of a circular laminated plate containing a disk-shaped delamination

面内変位を u_3^0 とする。なお、半径方向の座標は $r_1 = r_2 = r_3 \equiv r$ とおける。

本報では、微小振幅の自由曲げ振動を考える。まず円環部分の積層板に作用する面内力 $N_{3r}, N_{3\theta}$ と曲げモーメント $M_{3r}, M_{3\theta}$ は

$$\begin{bmatrix} N_{3r} \\ N_{3\theta} \\ M_{3r} \\ M_{3\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & C_{12} & B & B_{12} \\ C_{12} & C & B_{12} & B \\ B & B_{12} & D & D_{12} \\ B_{12} & B & D_{12} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{3r}^0 \\ \varepsilon_{3\theta}^0 \\ \kappa_{3r} \\ \kappa_{3\theta} \end{bmatrix} \quad (2)$$

で与えられる。ただし、基準面のひずみ $\varepsilon_{3r}^0, \varepsilon_{3\theta}^0$ と曲率 $\kappa_{3r}, \kappa_{3\theta}$ は

$$\varepsilon_{3r}^0 = \frac{\partial u_3^0}{\partial r}, \quad \varepsilon_{3\theta}^0 = \frac{u_3^0}{r}$$

$$\kappa_{3r} = -\frac{\partial^2 w_3}{\partial r^2}, \quad \kappa_{3\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial w_3}{\partial r} \quad (3)$$

と表される。また、伸びと曲げの連成剛性 B, B_{12} と曲げ剛性 D, D_{12} は

$$B = \frac{1}{2} \left[\frac{E_1 h_1}{1 - \nu_1^2} (h_1 - 2\eta) + \frac{E_2 h_2}{1 - \nu_2^2} (h + h_1 - 2\eta) \right]$$

$$B_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\nu_1 E_1 h_1}{1 - \nu_1^2} (h_1 - 2\eta) + \frac{\nu_2 E_2 h_2}{1 - \nu_2^2} (h + h_1 - 2\eta) \right]$$

$$D = \frac{1}{3} \left[\frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \{ (h_1 - \eta)^3 + \eta^3 \} \right. \\ \left. + \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right] \quad (4)$$

$$D_{12} = \frac{1}{3} \left[\frac{\nu_1 E_1}{1 - \nu_1^2} \{ (h_1 - \eta)^3 + \eta^3 \} \right. \\ \left. + \frac{\nu_2 E_2}{1 - \nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right]$$

のように、基準面の位置 η によって変化する。そこで、この基準面の位置について考えてみる。まず、座標 r 、たわみ w_1, w_2, w_3 、面内変位 u_3^0 、および時間 t と各諸量を次のように無次元化する。

$$(\bar{\xi}, \bar{c}) = (r, c) / R, \quad (\bar{w}_i, \bar{u}_3^0) = (w_i, u_3^0) / h, \quad (i=1,2,3)$$

$$(\bar{h}_j, \bar{\eta}) = (h_j, \eta) / h, \quad \bar{\rho}_j = \rho_j / \rho, \quad (j=1,2)$$

$$(\bar{C}, \bar{C}_{12}) = (C, C_{12}) R^2 / D, \quad (\bar{B}, \bar{B}_{12}) = (B, B_{12}) R / D \quad (5)$$

$$(\bar{D}, \bar{D}_2, \bar{D}_s, \bar{D}_{s12}, \bar{D}_{12}) = (D_1, D_2, D_s, D_{s12}, D_{12}) / D$$

$$\bar{D} = \frac{12(1 - \nu_2^2) D}{E_2 h^3}, \quad \tau = \frac{t}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}, \quad \alpha = \frac{E_1}{E_2}, \quad \beta = \frac{h}{R}$$

円環部分の積層板では、基準面の面内変位の影響を考慮した微小振幅の軸対称自由振動を考えると、半径方向と鉛直方向の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_3^0}{\partial \tau^2} - \bar{C} \left(\nabla^2 \bar{u}_3^0 - \frac{\bar{u}_3^0}{\xi^2} \right) + \bar{B} \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla^2 \bar{w}_3) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \nabla^4 \bar{w}_3 - \bar{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla^2 \bar{u}_3^0) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \bar{u}_3^0}{\partial \xi^2} + \frac{\bar{u}_3^0}{\xi^3} \right\} = 0$$

と与えられ、面内変位 \bar{u}_3^0 とたわみ \bar{w}_3 が連成する微分方程式となる。ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (7)$$

ところが、基準面を

$$\bar{B} = 0 \quad (8)$$

を満足する

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2} \frac{(1-\nu_2^2)\alpha \bar{h}_1^2 + (1-\nu_1^2)\bar{h}_2(1+\bar{h}_1)}{(1-\nu_2^2)\alpha \bar{h}_1 + (1-\nu_1^2)\bar{h}_2} \quad (9)$$

の位置に定めると、運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_3^0}{\partial \tau^2} - \bar{C} \left(\nabla^2 \bar{u}_3^0 - \frac{\bar{u}_3^0}{\xi^2} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_3}{\partial \tau^2} + \nabla^4 \bar{w}_3 = 0$$

のように、基準面の面内変位 \bar{u}_3^0 とたわみ \bar{w}_3 が分離され、簡単に運動方程式の解を求めることができる。

次に、剥離部分は図2の上の図のように、剥離円周縁でヒンジ止めされた重ね板とみなし、上下の板のヒンジには単位縁長さ当たり Z の大きさの半径方向面内力が作用するとする。これに加え、円環部分の面内力 N_{3r} 、 $N_{3\theta}$ によって、上下の板の剥離円周縁に半径方向と円周方向の面内力が作用することになる。しかしながら、剥離円周縁に作用する円周方向面内力 $(N_{3\theta})_{r=c}$ が剥離部分の重ね板の振動

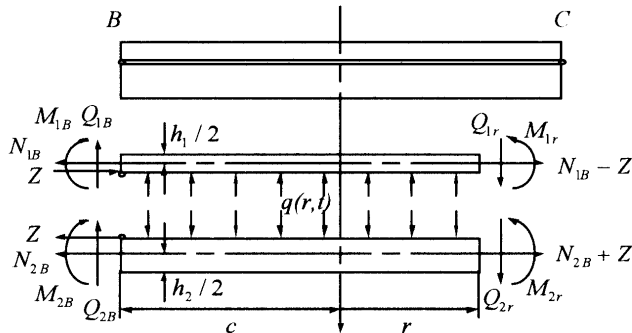


Fig.2 Free body diagram in the delamination region

に及ぼす影響は、半径方向面内力の Z や $(N_{3r})_{r=c}$ に比べて小さく、無視できるものと考えられる。このような仮定のもとでは、剥離円周縁で上下の板に半径方向面内力 N_{1B} と N_{2B} が作用し、任意断面の r 方向と θ 方向の面内力は、 r に無関係な $N_{1r} = N_{1\theta} = N_{1B} - Z$ と $N_{2r} = N_{2\theta} = N_{2B} + Z$ が作用することになる。また、振動中上下の板が接すると、剥離界面に相互接触力 $q(r, t)$ が作用すると仮定すれば、その自由体線図は図2の下の図となる。これらの力を

$$(\bar{N}_{3r}, \bar{Z}, \bar{N}_{1B}, \bar{N}_{2B}) = (N_{3r}, Z, N_{1B}, N_{2B}) R^2 / D \quad (11)$$

$$\bar{q} = q R^4 / (Dh)$$

と無次元化すれば、上下の板の運動方程式は

$$\bar{\rho}_1 \bar{h}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_1 \nabla^4 \bar{w}_1 - (\bar{N}_{1B} - \bar{Z}) \nabla^2 \bar{w}_1 + \bar{q} = 0 \quad (12)$$

$$\bar{\rho}_2 \bar{h}_2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \bar{D}_2 \nabla^4 \bar{w}_2 - (\bar{N}_{2B} + \bar{Z}) \nabla^2 \bar{w}_2 - \bar{q} = 0 \quad (13)$$

と表される。ただし剥離円周縁において、円環部分の基準面に作用する $(N_{3r})_{r=c}$ を、面内力に関する力とモーメントの釣合式より、剥離部分の上下の板の中立面に作用する力学的等価な面内力、すなわち

$$\bar{N}_{1B} = (1 + \bar{h}_1 - 2\bar{\eta})(\bar{N}_{3r})_{\xi=c}$$

$$\bar{N}_{2B} = (2\bar{\eta} - \bar{h}_1)(\bar{N}_{3r})_{\xi=c} \quad (14)$$

$$(\bar{N}_{3r})_{\xi=c} = \beta \left(\bar{C} \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial \xi} + \bar{C}_{12} \frac{\bar{u}_3^0}{\xi} - \bar{B}_{12} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial \xi} \right)_{\xi=c}$$

に置き換えている。ここで、上下の板のたわみは等しい、すなわち $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ と仮定し、式(12)と式(13)を加え合わせると

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla^4 \bar{w}_1 - \beta \left(\bar{C} \frac{\partial \bar{u}_3^0}{\partial \xi} + \bar{C}_{12} \frac{\bar{u}_3^0}{\xi} - \frac{\bar{B}_{12}}{\xi} \frac{\partial \bar{w}_3}{\partial \xi} \right)_{\xi=c} \nabla^2 \bar{w}_1 = 0 \quad (15)$$

となるが、第3項の非線形項は他の項に比べて微小で無視できるとすれば、剥離部分の重ね板の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \bar{D}_s \nabla^4 \bar{w}_1 = 0 \quad (16)$$

と簡単になる。

2.2 解法

円板は調和振動すると仮定し、無次元固有角振動数を \bar{p} とし、たわみ \bar{w}_1 、 \bar{w}_3 、基準面の面内変

位 \bar{u}_i^0 および面内力 \bar{Z} , \bar{N}_{1B} , \bar{N}_{2B} を

$$\begin{aligned} \bar{w}_i(\xi, \tau) &= X_i(\xi) \sin(\bar{p}\tau + \phi), \quad (i=1,3) \\ \bar{u}_i^0(\xi, \tau) &= U_i(\xi) \sin(\bar{p}\tau + \phi) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\{\bar{Z}(\tau), \bar{N}_{1B}(\tau), \bar{N}_{2B}(\tau)\} = \{\bar{Z}_0, \bar{N}_{10}, \bar{N}_{20}\} \sin(\bar{p}\tau + \phi)$$

とおくと、式(10)および式(16)より $X_i(\xi)$ と $U_i(\xi)$ は

$$X_i(\xi) = A_{i1} J_0(\lambda_i \xi) + A_{i2} Y_0(\lambda_i \xi) + A_{i3} I_0(\lambda_i \xi) + A_{i4} K_0(\lambda_i \xi), \quad (i=1,3) \quad (18)$$

$$U_i(\xi) = A_{i1} J_1(\lambda_i \xi) + A_{i2} Y_1(\lambda_i \xi)$$

$$\lambda_1^2 = \bar{p} / \sqrt{\bar{D}_s}, \lambda_3^2 = \lambda^2 = \bar{p}, \lambda_4^2 = \bar{p} / \sqrt{\bar{C}} \quad (19)$$

と得られる。ただし、 $J_n(\cdot)$, $Y_n(\cdot)$ は n 次の第1種、第2種の Bessel 関数、 $I_n(\cdot)$, $K_n(\cdot)$ は n 次の第1種、第2種の変形 Bessel 関数である。

また、式(12)と式(13)に含まれる面内力 \bar{Z} は、上下の板の互いに接している面の半径方向の伸びは等しいという条件、すなわち

$$\int_0^{\bar{c}} \varepsilon_1^{(j)} d\xi + \int_0^{\bar{c}} \varepsilon_1^{(b)} d\xi = \int_0^{\bar{c}} \varepsilon_2^{(j)} d\xi + \int_0^{\bar{c}} \varepsilon_2^{(b)} d\xi \quad (20)$$

から求められる。ただし、剥離界面の上下の板の伸びひずみ $\varepsilon_1^{(j)}$, $\varepsilon_2^{(j)}$ と曲げひずみ $\varepsilon_1^{(b)}$, $\varepsilon_2^{(b)}$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(j)} &= \frac{\bar{D}(1-\nu_1)\beta^2}{12\alpha\bar{h}_1(1-\nu_2^2)} (\bar{N}_{1B} - \bar{Z}) \\ \varepsilon_2^{(j)} &= \frac{\bar{D}\beta^2}{12\bar{h}_2(1+\nu_2)} (\bar{N}_{2B} + \bar{Z}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\varepsilon_j^{(b)} = (-1)^j \beta^2 \frac{\bar{h}_j}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_j}{\partial \xi^2}, \quad (j=1,2)$$

と表され、式(21)を式(20)に代入して積分すると、面内力 \bar{Z} の大きさ \bar{Z}_0 は

$$\begin{aligned} \bar{Z}_0 &= \frac{1}{(1-\nu_2)\alpha\bar{h}_1 + (1-\nu_1)\bar{h}_2} \left\{ -\frac{6(1-\nu_2^2)}{\bar{D}\bar{c}} \alpha\bar{h}_1\bar{h}_2 \left(\frac{dX_1}{d\xi} \right)_{\xi=\bar{c}} \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu_1)\bar{h}_2\bar{N}_{10} - (1-\nu_2)\alpha\bar{h}_1\bar{N}_{20} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

で与えられる。ここで \bar{N}_{10} と \bar{N}_{20} は式(14)から

$$\bar{N}_{10} = \beta(1+\bar{h}_1-2\bar{\eta}) \left(\bar{C} \frac{dU_3}{d\xi} + \bar{C}_{12} \frac{U_3}{\xi} - \frac{\bar{B}_{12}}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} \right)_{\xi=\bar{c}}$$

$$\bar{N}_{20} = \beta(2\bar{\eta}-\bar{h}_1) \left(\bar{C} \frac{dU_3}{d\xi} + \bar{C}_{12} \frac{U_3}{\xi} - \frac{\bar{B}_{12}}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} \right)_{\xi=\bar{c}} \quad (23)$$

と求められる。

次に、境界条件と連続条件を式(18)の正規関数 $X_i(\xi)$, $U_i(\xi)$ を用いて表す。まず無孔円板の場合、

板中心点のたわみは有限でなければならない。ところが ξ が 0 に近づくとき $Y_0(\lambda_i \xi)$ と $K_0(\lambda_i \xi)$ の値は無限大となるため

$$\xi=0 \text{ で } X_i = \text{有限より}, A_{i2} = A_{i4} = 0 \quad (24)$$

の条件が必要となる。また本報では、円板の全周辺が固定され、面内方向には不動の場合を取り上げるので、境界条件は

$$\xi=1 \text{ で } X_3 = 0, \frac{dX_3}{d\xi} = 0, U_3 = 0 \quad (25)$$

となる。さらに、剥離円周縁でたわみとたわみ角が連続であるから

$$\xi=\bar{c} \text{ で } X_1 = X_3, \frac{dX_1}{d\xi} = \frac{dX_3}{d\xi} \quad (26)$$

が得られ、基準面の面内変位が連続であることより

$\xi=\bar{c}$ で

$$\begin{aligned} \bar{\eta} \leq \bar{h}_1 \text{ のとき } & \frac{(1-\nu_1)\bar{D}\bar{c}}{12(1-\nu_2^2)\alpha\bar{h}_1} (\bar{N}_{10} - \bar{Z}_0) \\ & - \left(\bar{\eta} - \frac{\bar{h}_1}{2} \right) \frac{dX_1}{d\xi} = \frac{U_3}{\beta} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta} > \bar{h}_1 \text{ のとき } & \frac{\bar{D}\bar{c}}{12\bar{h}_2(1-\nu_2)} (\bar{N}_{20} + \bar{Z}_0) \\ & + \left(1 - \bar{\eta} - \frac{\bar{h}_2}{2} \right) \frac{dX_1}{d\xi} = \frac{U_3}{\beta} \end{aligned}$$

の条件が必要となる。また、曲げモーメントとせん断力の連続条件は

$\xi=\bar{c}$ で

$$\begin{aligned} \bar{D}_s \frac{d^2 X_1}{d\xi^2} + \bar{D}_{s12} \frac{1}{\xi} \frac{dX_1}{d\xi} - \frac{\bar{Z}_0}{2} \\ = \frac{d^2 X_3}{d\xi^2} + \bar{D}_{12} \frac{1}{\xi} \frac{dX_3}{d\xi} - \bar{B}_{12} \frac{U_3}{\xi} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\bar{D}_s \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X_1) = \frac{d}{d\xi} (\nabla_d^2 X_3) \quad (29)$$

と表される。ただし

$$\nabla_d^2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \quad (30)$$

そこで、式(18)の X_1, X_3, U_3 にこれらの条件を適用し、 X_1 および U_3 の中に含まれる定数 $A_{11}, A_{13}, A_{41}, A_{42}$ を消去すると

$$[H]\{A\} = \{0\} \quad (31)$$

の関係が求められる。ここで、 $\{A\}$ は

$$\{A\} = \{A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}\}^T \quad (32)$$

であり、 $[H]$ は 4 行 4 列の正方マトリックスである。式(31)より

$$|H| = 0 \quad (33)$$

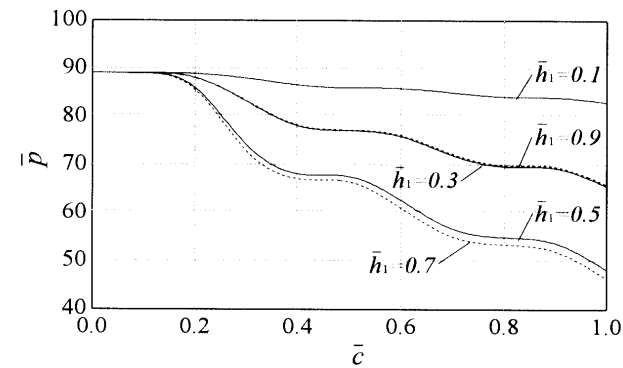
の振動数方程式が得られる。

3. 計算結果

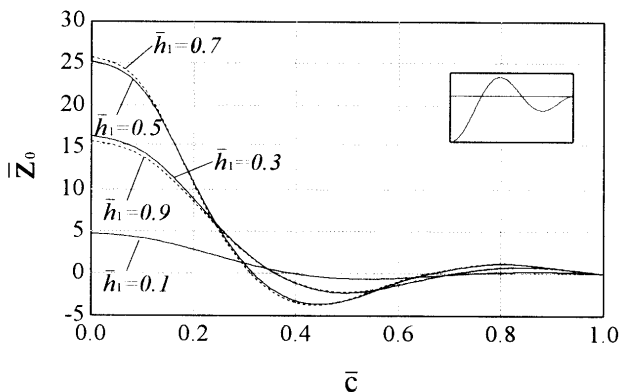
数値計算では、上の板には $E_1 = 74.0 \text{ GPa}$, $\nu_1 = 0.35$, $\rho_1 = 2700 \text{ kg/m}^3$ のアルミニウム, 下の板には $E_2 = 200 \text{ GPa}$, $\nu_2 = 0.29$, $\rho_2 = 7700 \text{ kg/m}^3$ のステンレスを, また $\beta = h/R = 1/80$ の円板を仮定し, 式(33)にニュートン法を適用して固有振動数 \bar{p} を計算した. また, 軸対称振動の1次から3次までの振動モードについて, 剥離半径が $\bar{c} = 0.001 \sim 0.999$ の範囲で計算した. ただし, $\bar{c} = 0.001$ のときの \bar{p} の値は, 10.22, 39.77, 89.10 となって等方均質な固定円板の値と一致した.

3.1 固有振動数と面内力

図3は, 固有振動数と剥離円周縁のヒンジに生



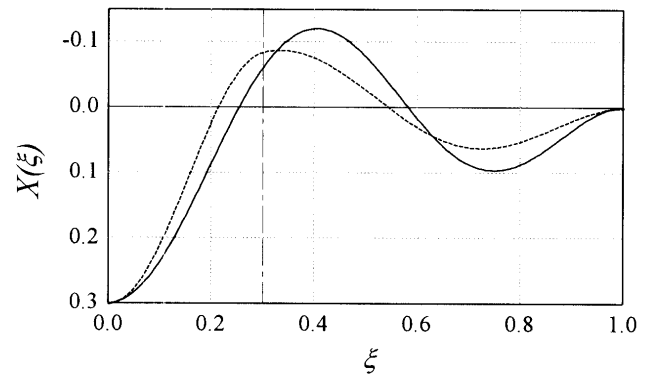
(a) natural frequency



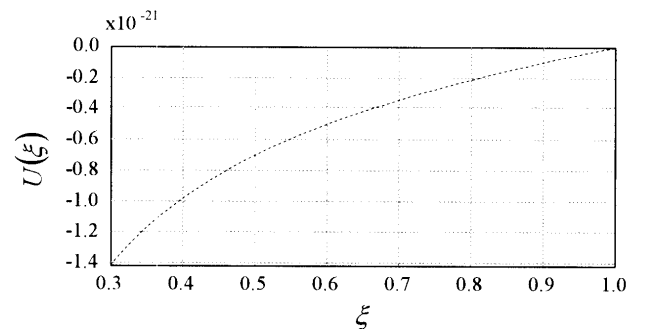
(b) inplane force ($\bar{A} = 0.3$)

Fig. 3 Effect of delamination size on natural frequency and inplane force (axisymmetric third mode)

じる面内力が, 剥離の大きさによってどのように変化するかを示したものである. 面内力 \bar{Z}_0 は, 図2に示す作用方向を正とし, 振動モードが略図で示される場合の, 最大振幅 A が板厚 h の 0.3 倍, すなわち $\bar{A} = A/h = 0.3$ として式(22)で計算した. まず, 剥離半径 \bar{c} が大きくなると, 積層板に比べて小さな曲げ剛性をもつ重ね板の剥離領域が広がるため, 剥離の厚さ方向の位置 \bar{h}_1 に関係なくいずれも固有振動数は減少している. また, 図3の(a)と(b)を比較すると, 剥離が大きくなるのにもとない固有振動数が減少する傾向は, 面内力が極値をとる付近では小さく, 面内力が零付近では大きい. このことにより, 剥離円周縁に作用する面内力 \bar{Z}_0 は, 剥離による固有振動数の減少を抑制する傾向にあるといえる. なおこれらの結果を, 積層板の基準面の面内変位の影響を無視した文献(8)の結果を比較してみると, \bar{p} , \bar{Z}_0 のいずれもほとんど一致する. このことから, 剥離を有する積層円板の曲げ振動問題



(a) transverse deflection



(b) inplane displacement

— integral plate, - - - $\bar{c} = 0.3, \bar{h}_1 = 0.5$

Fig. 4 Mode of vibration (axisymmetric third mode, $\bar{A} = 0.3$)

を取り扱う場合、式(9)の位置に定めた基準面の面内変位の影響は無視しても差し支えないといえる。

3.2 振動モードと面内変位

図 4(a)の点線は、半径 $\bar{c} = 0.3$ の剥離をもつ積層円板の、最大振幅が $\bar{A} = 0.3$ のときの振動モードであり、このとき円環部分の積層板の基準面に生ずる面内変位が図 4(b)である。(a)図の縦の一点鎖線は剥離端を表す。まず(a)図をみると、モードの節線が実線の剥離のない板に比べて剥離の中心方向へ移動している。これは、剥離部分の重ね板の曲げ剛性が円環部分の積層板の曲げ剛性に比べて小さいためと考えられる。また、図 4 の(a)と(b)を比較すると、たわみに比べて基準面の面内変位は極端に小さく、剥離を有する積層円板の微小振幅の曲げ振動問題では、積層板の基準面の面内変位の影響は考慮しなくてもよいことがわかる。

4. 実験

微小振幅の振動実験を行って固有振動数を測定し、理論結果と比較して解析モデルの妥当性を検証した。

4.1 試験片と実験要領

試験片の外形寸法は、一辺が 200mm の正方形板である。試験片は厚さが 1mm となるように、さまざまな厚さのアルミニウム板、タフピッチ銅板、ステンレスばね鋼板のうち二つの材料を組み合わせ、シアノアクリレート系瞬間接着剤で接着して製作した。それらの材料定数を表 1 に示す。このとき、所定の剥離半径と剥離位置をもつ試験片を製作するために、まず2枚の透明なアクリル板を使用し、接着剤が未接着部分へ浸透することを考慮した、接着剤の適切な添付位置と量を試行錯誤で取得した。さらに、この方法で表 1 中の二種類の材料を接着し、重りを約 24 時間載せて接着部分にむらがなく、しかもほぼ所定の剥離をもつ試験片を製作した。

試験片取付枠は、大きさが 250mm 角で厚さが 20

Table 1 Material properties

Materials	E GPa	ν	ρ kg/m ³
Aluminum	72.4	0.33	2700
Tough-pitch copper	114	0.35	8600
Stainless spring steel	194	0.30	7770

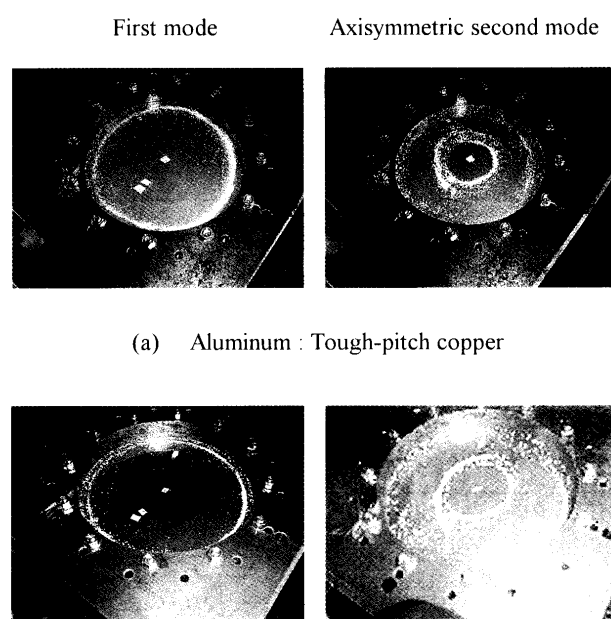
mm の 2 枚の鉄板のそれぞれ中心部に半径 80mm の開口部を設け、試験片接触面を研磨仕上げして製作した。実験の際には、試験片を取付枠に挟んで 12 本のボルトに 7.84Nm の一定トルクを均等にかけて締付けた。

実験は次の手順で行った。まず試験片を挟んだ試験片取付枠を、定盤の上に固定した支持台上に水平に設置した。次に、発振器からの正弦波をパワーアンプで増幅して口径 120mm のスピーカに入力し、その音響出力を直径 10mm の先端開口をもつホーン型ノズルで集中させて、最大振幅点の試験片中心を音圧により加振した。このとき、加振振動数を変化させ、加振用のスピーカ端子電圧とレーザー変位計で測定した振動変位の応答出力電圧とでリサージュ図形を描かせて共振点を検出し、固有振動数を計測した。

4.2 実験結果と考察

図 5 は、板上面に食塩を一様に散布して描かせたクラドニ図形の写真の一例である。実験は、食塩によって描かせた節円により、固有振動数に対応する振動モードを確認しながら行った。

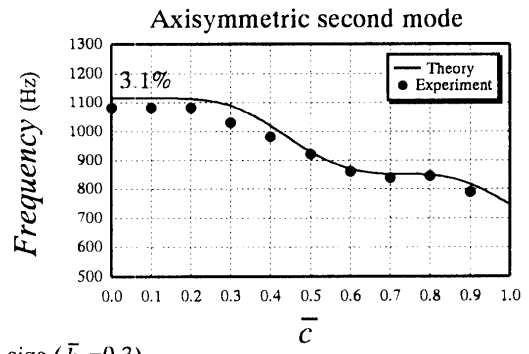
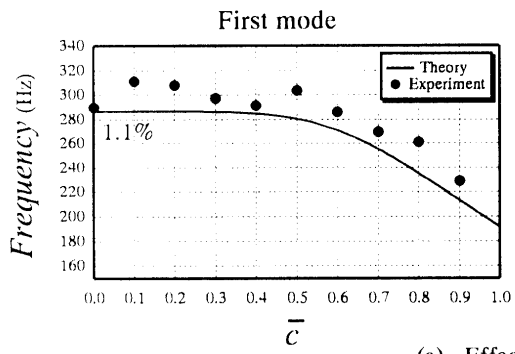
図 6 は上層にアルミニウム、下層にタフピッチ銅を、図 7 は上層にタフピッチ銅、下層にステンレスばね鋼を用いた積層円板の、実験で測定された



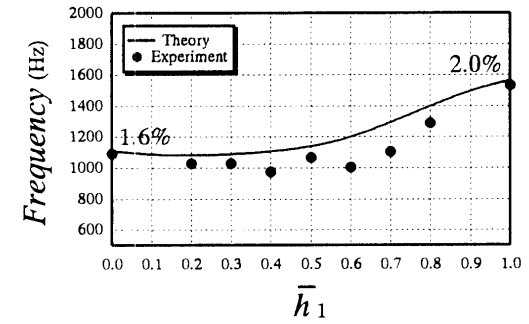
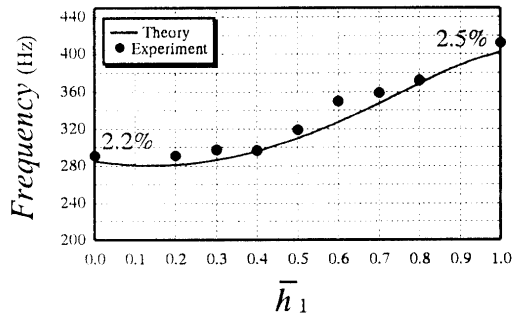
(a) Aluminum : Tough-pitch copper

(b) Tough-pitch copper : Stainless spring steel

Fig. 5 Modes of vibration ($\bar{c} = 0.3, \bar{h}_1 = 0.2$)

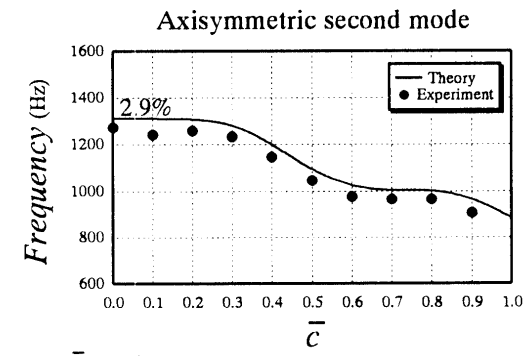
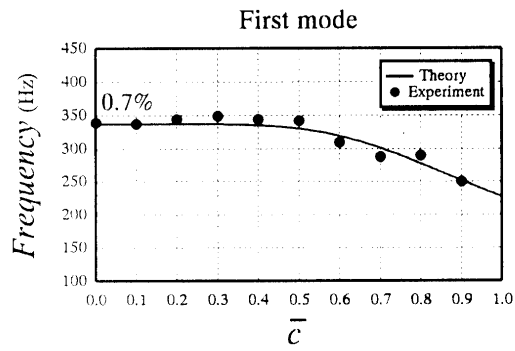


(a) Effect of delamination size ($\bar{h}_1=0.3$)

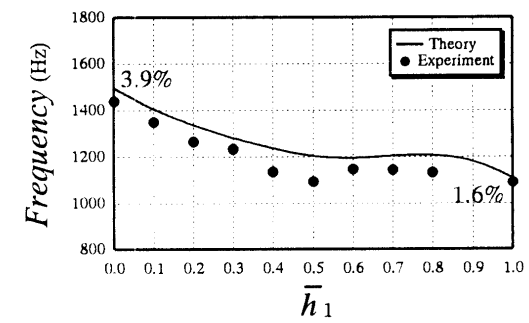
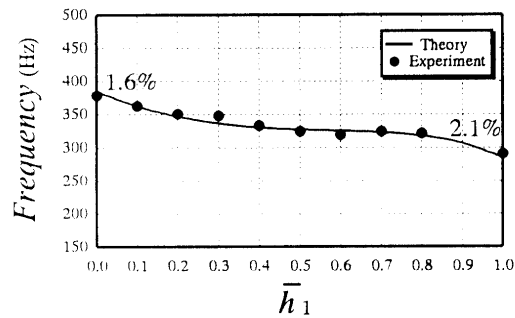


(b) Effect of thickness-wise location of delamination ($\bar{c}=0.3$)

Fig. 6 Comparison between experimental and theoretical frequencies
(Aluminum : Tough-pitch copper)



(a) Effect of delamination size ($\bar{h}_1=0.3$)



(b) Effect of thickness-wise location of delamination ($\bar{c}=0.3$)

Fig. 7 Comparison between experimental and theoretical frequencies
(Tough-pitch copper : Stainless spring steel)

固有振動数を理論値と比較したものである。まず、両図(a)の $\bar{c}=0$ の完全に接着された積層円板の結果をみると、固有振動数の実験値はいずれの場合も理論値とよく一致しており、今回の実験でも、試験片の接着層が固有振動数に及ぼす影響は、ほとんど認められないことがわかる。また、実験で得られた固有振動数の値は、剥離半径が大きくなるにつれて理論曲線とほぼ同じ傾向で減少している。

次に、両図(b)で $\bar{h}_1=0$ と $\bar{h}_1=1$ のときがそれぞれ厚さ 1mm の単一材料の板となるが、それらの固有振動数の測定結果は、図中に示した誤差からわかるように理論値とよく一致している。したがって、実験装置に取付けられた試験片は、周辺固定の境界条件を満足しているものといえる。また図 6(b)の 2 次モードで、 $\bar{h}_1=0.6$ と 0.7 の場合に誤差が 16.3%、12.7%と実験値が小さな値となったが、図 6、図 7 でそれらを除くと誤差は 10%以内に収まっている。したがって、微小変位の板理論に基づいた本報の解析モデルの妥当性が検証できたといえる。

5. あとがき

本報では、二層の異種材積層円板が板中心部に円形の層間剥離を有する場合の軸対称自由振動を、円環部分の積層板の基準面の面内変位の影響を考慮し、剥離部分では上下の板のたわみは等しいと仮定して理論解析を行った。同時に、さまざまな剥離条件をもつ異種材積層円板を製作して振動実験を行い、理論結果がいずれの場合も測定した固有振動数とよく一致することを確認した。したがって、今回の解析モデルは積層円板の自由振動特性に及ぼす剥離の影響を調査する際には、簡単でしかも有効な方法といえる。また、円環部分の基準面の面内変位が積層円板の振動特性に及ぼす影響は、

鉛直方向のたわみに比べて極めて小さく無視できること、剥離円周縁に作用する面内力は、剥離による固有振動数の減少を抑制する傾向にあることなどが明らかになった。

参考文献

- 1) Wang, J. T. S., Liu, Y. Y. and Gibby, J. A. : Vibrations of Split Beams, *J. Sound Vib.*, 84(4), pp. 491-502(1982).
- 2) Mujumdar, P. M. and Suryanarayan, S. : Flexural Vibrations of Beams with Delaminations, *J. Sound Vib.*, 125(3), pp. 441-461(1988).
- 3) Tracy, J. J. and Pardoen, G. C. : Effect of Delamination on the Natural Frequencies of Composite Laminates, *J. Compos. Mater.*, 23(12), pp. 1200-1215(1989).
- 4) Shen, M. H. and Grady, J. E. : Free Vibrations of Delaminated Beams, *AIAA J.*, 30(5), pp. 1361-1370(1992).
- 5) Hu, J. S. and Hwu, C. : Free Vibration of Delaminated Composite Sandwich Beams, *AIAA J.*, 33(10), pp. 1911-1918(1995).
- 6) 有富正男, 隈元健, 小田美紀男, 戸谷眞之 : はく離を有する積層はりの自由振動, *日本機械学会論文集 C 編*, 65(638), pp. 3943-3950(1999).
- 7) 関根英樹, 胡寧, 夏目卓也, 福永久雄 : 層間剥離を有する複合材積層板の衝撃応答解析, *日本機械学会論文集 A 編*, 63(608), pp. 787-793(1997).
- 8) 有富正男, 真壁弘, 小田美紀男, 戸谷眞之 : 円形はく離を有する積層円板の軸対称自由振動, *日本機械学会論文集 C 編*, 67(654), pp. 300-308(2001).