

算数教育における概念の形成

Formation of concept in arithmetic

大 山 正 信

Masanobu Oyama

算数教育において、いろいろな概念を明かにしていくこと、例えば十進法の内容、加法や減法の内容あるいは割合の内容などをどのようにして把握させるかということは、計算力の養成などよりもはるかに重要なことでありながら、このような概念がいかにして形成されていくかという点についての教育心理学的な研究はほとんどされていないといつてよい。

概念を作りあげていくという過程は、計算力の養成などのように反復練習によっては完成され得ない。例えば3位数同士の加法はその根底に十進記数法の内容がなければ理解できない筈であるが、実は計算法の記憶と、反復練習によって加法の計算は可能である。しかしこのような計算練習によって十進法の内容は作られ得ない。

以下の小論では、2, 3の例について、概念形成がいかにしてされるか、またその概念形成の過程において児童がどのように誤った概念の把握をしていくかを検討する。

(I) 三角形の高さの概念について

「高さ」というとき、友だちの背の高さ、木の高さ、建物の高さ、あるいは山の高さなど児童の日常生活の中に「高さ」という言葉が使われ、したがって「高さ」という概念を児童は自分なりに作りあげている筈である。そのような段階で「三角形の高さ」について学ぶとき、児童は自分のもっている「高さ」の内容の中でそれらを把握しようとするのは当然であろう。しかし実際は「三角形の高さ」というときその「高さ」は木の高さや山の高さなどというときの「高さ」とは本質的にちがったものをもっている。したがって児童のもっている「高さ」の内容からすればどうしても「高さ」と認め難いものを高さとして認めなければならないという段階に到達する。「高さ」を教える場合の問題点の一つはそのような点にあると思われる。

(1) 教科書ではどのように書いてあるか

教科書では高さの指導をどうしているかを見る前に、木の高さや背の高さというときの「高さ」と三角形の「高さ」とがどのような点で異っているかを明かにしておこう。

まず木の高さ、背の高さというときの高さは、木の高さが2 m 50 cmであるというようにそれは、「長さ」である。三角形の高さではどうかはあとに述べる教科書の内容でふれることにする。次に木の高さ、背の高さというときは、木であればその木が立っている地面、人であればその人が立っている部屋の床が基準となるのであって、基準となるものはいつも水平の位置にあるものである。

ところが三角形の高さは、一つの辺を底辺と見たとき、その底辺に対して高さがきまるのであって、その底辺は必ずしも水平に位置にあることを要しないのである。したがって、木の高さ、背の高さなどの場合、「高さ」は独立して使われるが、三角形の「高さ」は、どの辺を「底辺」とするかできまるので、「高さ」は独立してでなしに「底辺」といつも対になって使われなければならないのである。以上のような観点にたてば、教科書で三角形の高さについて述べるとき、どのような点に注意しなければならないかは明かである。

さて三角形の高さは5年の教材であるが、学図では「三角形の1つの辺 BC を底辺とすれば、 A から BC に垂直にひいた線 AD が高さになります。」(図1)

とし、あとで AC を底辺と見る例をあげて「三角形の3つの辺のうち、どれを底辺とみるかによって、高さがきまります。」と述べている。

東書では、「右の図の三角形で、 BC の辺や EF の辺を底辺といい、向かいあった頂点から底辺に垂直にひいた直線 AD , GH を高さといいます。」(図2) 教育出版では「三角形の頂点から、向かい合っている辺に垂線をひいたとき、その垂線の長さを、高さといい、頂点に向かい合った辺を、底辺といいます。」と述べ底辺をかえたとき、高さはどれになるかを考えさせている。

上の例でそれぞれ学図では「線 AD を」、東書では「直線 AD を」、教育出版では「垂線の長さを」高さといっていることに注目したい。学図や東書では頂点 A からひいた直線が高さなのであって、図3の EF は高さではない。つまり「高さ」は線分 AD という「図形」であって、線分 AD の「長さ」ではない。中学校の教科書でも、「線分 AB 」と「線分 AB の長さ」とをはっきり区別しない習慣があるが上記の場合も「図形」と「長さ」とを区別しないで使っているのではないかという疑問も生ずるが、東書の平行四辺形の高さのところを見ると「… BC の辺を底辺といい、底辺に垂直な AE や FG , DH を高さといいます。高さはどこをとっても、同じ長さです。」と明かに「高さ」と「長さ」を区別していることがわかる。教育出版では、「……そのあいだのきよりを、高さといいます。」と長さでとおしている。

児童が日常生活のなかで作りあげた「高さ」の概念は「長さ」である。三角形の高さでは、それを頂点をとおる直線、つまり図形として捉えねばならないという概念のきりかえは難しい。現実の問題として「高さ」は三角形の面積の計算のためのものであるし、また現場の教師のあいだで

図1

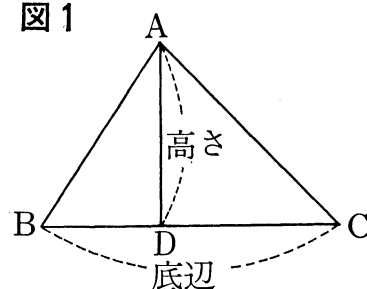


図2

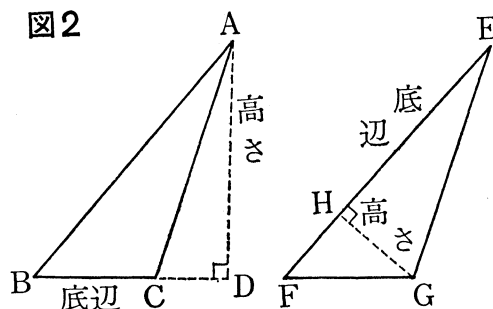
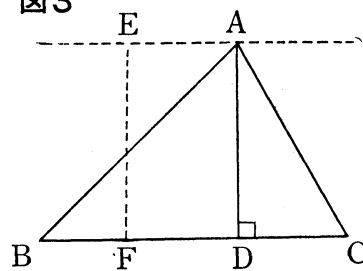


図3



は、「高さ」を「図形」として教えるか「長さ」として教えるか、はっきりした意識はもたれていない。例えば学図では、はっきり「図形」として捉えているにもかかわらず、指導する教師の側では、そのような意識はもたれていない。（なお図形の性質を研究する幾何学では、「高さ」は1つの頂点から、対辺に下ろした垂線で、長さではなく図形をいうのである。）このような幾何学における三角形の「高さ」の概念が、長さを問題にすべき場合にはいりこんで混乱を招いていると思われる。

(2) 児童は「高さ」をどのように捉えているか。

教室で三角形の高さについての学習がなされるとき、はじめは図1のような三角形を書いて、頂点Aから向かいあった辺BCに垂直にひいた直線が高さだと説明される。かつそれを直観的に把握させる手段として、直線ADを指して「このようなものが高さである。」と示されるのが普通である。このとき、多くの児童は、「BCを底辺とすると、AからBCに垂直にひいた線AD」で表わされる辺BCと頂点Aとの関係、また高さADと底辺BCとの関係などを理解することよりも、図に示された直線ADについて、自分なりの捉え方をして、（木の高さ、背の高さなどをもとにして）高さという概念を作りあげてしまうようである。そのことは次の事実によって証明される。

三角形の高さとは何かを6年生※に文章で表現さしてみたところ、次のような表現があった。

- (イ) 三角形を2つに分ける線
- (ロ) 上から下にまっすぐにひいた線

なお多くの児童は文章でまとまった表現をすることはできなかった。ついでに底辺についてみると

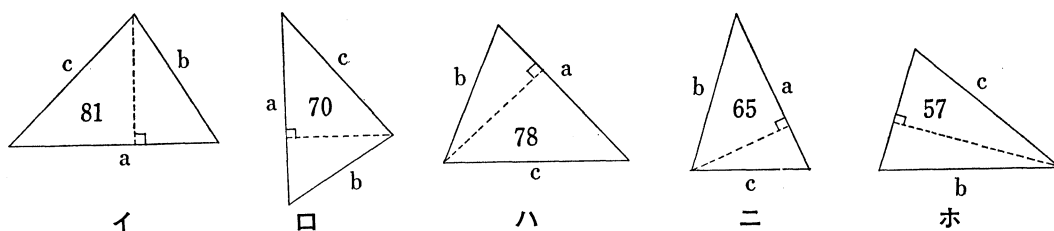
- (イ) 三角形のその線
- (ロ) 一番長い辺
- (ハ) 三角形のささえになるもの

などと述べている。

次に高さと底辺との関係をどのように捉えているかを見るために、次の問題で調べてみた。

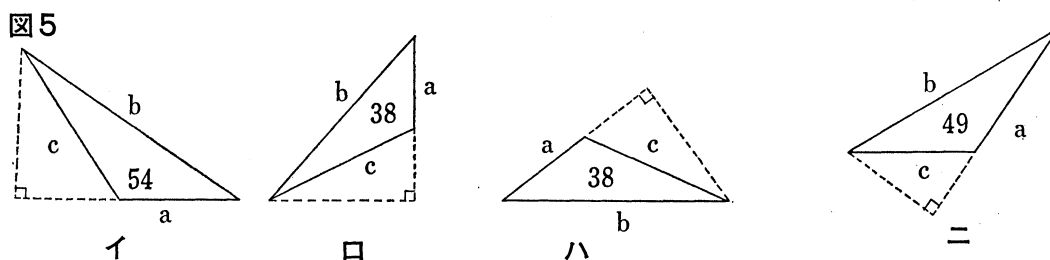
「春雄君はいろいろな三角形の高さを点線のようにはかりました。春雄君はa, b, c 3つの辺のうちどれを底辺として考えているのでしょうか。春雄君が底辺として考えているものの記号を○でかきなさい。」

図4



三角形のなかに書きこんだ数字は、正答率である。誤答者のなかには、水平の位置にある辺を底辺と考えたり、3辺のうちで一番長い辺を底辺と考えたり、あるいは一番長い辺が水平の位置になるので、どちらを底辺とするか迷った跡が見られた。

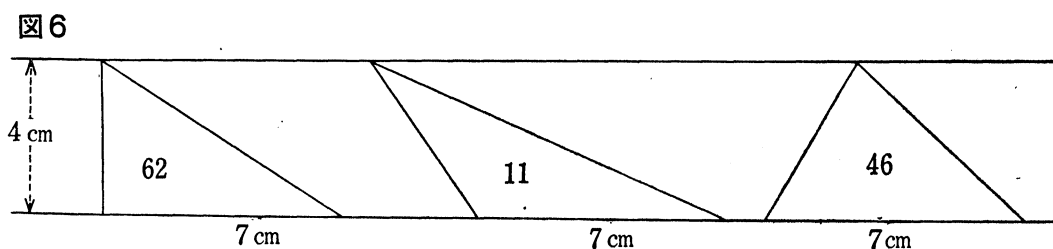
高さを表わす点線が三角形の外部に書かれると正答率は急速に減少する。



誤答者のうちほとんどすべての児童が一番長い辺 b を底辺としている。このような鈍角三角形では、3辺のうちで最も長い辺がはっきりしているので、短かくても水平の位置にある辺を底辺とする児童はほとんどいない。

以上が三角形の高さについて学習してから約1年後の児童の実態である。一方彼等は「三角形の面積はどのようにして求めますか。その求め方を書きなさい。」に対しては70%の正答率を、「底辺が10cm、高さが6cmの三角形の面積を求めなさい。」に対しては75%の正答率を示す。しかし「高さ」が本当にわかっていないために、次のような問題ではその正答率が示すようなつまづきを見せるのである。

「つぎの三角形の面積を求めなさい。」



(3) 概念はどのようにして作られるか

以上述べたことからわかるように、「三角形の高さ」というような簡単な概念でも、そのことについて説明したり教えたりしただけでは理解され得ないのである。それではある概念を明確に捉えることができるのは、どのような過程が必要なのか。2年生のある学級*での「家族」という概念の形成過程を見てみよう。

「みつばちのかぞく」という単元の学習の前に「家族」とは何かということを話し合って教師の方で「家族とは同じ一軒の家に住んでいる人」と定義した。ところが話し合いを進めていくうち

* 和田小学校2年（浜田学級）

に、児童のなかには、家族は人数に関係があるような発言をするものがでてきた。例えばある児童は、家族は5人いなければいけない、と言うのである。ここに児童たちの概念形成の一つの過程が見られる。家族とは同じ一軒の家に住んでいる人というとき、その児童がまず思いうかべるのは、自分に最も身近な家族、すなわち自分の家に住んでいる人たちである。その家には、父・母・姉・妹・それに自分と5人いる。このように5人いるのが家族だと考えるだろう。そこでA君の家は母親とA君と2人しかいない。これも家族と言えるかということになると、5人いないから家族でないと主張する。この児童が母子2人であっても家族であると認めるようになったのは、次のような過程であった。*

「家族とは同じ一軒の家に住んでいる人をいう。」

「母と子と2人であっても、やはり同じ一軒の家に住んでいる。」

「だから父や姉などがいなくても、やはり家族といわねばならない。」

このように底学年においても、論理的思考のもとに、「だから……でなければならない。」と考えることができなければ、正しい概念の把握はできない。ただ事柄をそのままうけとっただけでは、例えば「家族とは同じ一軒の家に住んでいる人をいう。」と覚えてただけでは家族の概念が把握されたとは言えないのである。

このような観点から、三角形の高さについて考えて見よう。

高さについては、木の高さ、建物の高さなど日常生活のなかで、地面に垂直にはかったものとしての高さの概念が作られている。したがって、三角形の高さについて、新しい概念を作りあげていくには、「高さを求めるには、どの辺を底辺と考えるかをきめねばならない。」という論理が必要となる。いつも底辺を水平な位置に書くのでは、底辺の概念がはっきりしないために、「底辺をきめねばならない。」という論理が生れてこない。次に図1のような三角形について「高さ」を学ぶと、高さは「三角形のなかに書かれた線」と捉えるのは自然であろう。したがって、図2の三角形のように、「三角形の外にあっても、高さと言わねばならない。」という論理が必要となってくる。

このような論理が働らく根拠は、現行の教科書でいえば、例えば「三角形の頂点から、向かいあっている辺に垂線をひいたとき、その垂線の長さを高さといい、……」というような高さの定義である。この定義にたちかえて、「自分の考えでは、高さと考えるにはどうもおかしいが、定義によればこれを高さと考えねばならない。」と考える過程を経て高さの概念が形成されていくと考えられる。もちろん、三角形の高さの定義が、教科書に述べてあるとおりでよいかは、前にも述べたように疑問であるし、さらに直線と線分を区別していないこと、それと関連して頂点から辺にひいた垂線の概念など、検討するべき問題が残されている。

* 和田小学校教諭・浜田春雄氏による

(Ⅱ) 点と線概念について

点や直線は図形を構成する基本的な要素でありながら、言葉では定義できない。それは無定義術語として使われ、相互の関係によってのみ規定される。すなわち

2点をとる直線はただ1本だけ存在する。

2直線はただ1点においてのみ交わる。

したがって、点や直線について考えるとき、これらの関係を満たすものであればよいのであって、われわれが直観的に点や直線であると考えているものでなくてもよいのである。

しかしこれらの関係は抽象的であって、その意味を理解するためには、これらの関係を満たす具体的なモデルが必要である。このようなモデルとして、ユークリッド流の

位置のみあって、大きさのないものとしての点

位置、長さはあるが、巾も厚さもないものとしての線

まっすぐな線としての直線

などを直観的に把握することが必要なのである。ところでこれらの点や線をどのようなものとして児童は認識しているだろうか。

(1) 教科書では点や線についてどのように書いてあるか。

教科書では点や線については、一切ふれていないといってよい。

3年で直線について、東京書籍では、「糸をぴんとはると、まっすぐな線になります。このようにまっすぐな線を直線といいます。」教育出版では、「紙をおったときの、おりめのように、まっすぐな線を直線といいます。」と述べているが「点」についてはふれていない。ただそれぞれ「かどの点を頂点といいます。」「かどのことを頂点といいます。」と書き、大阪書籍では、「かどの先の点を頂点といいます。」とそれぞれニュアンスのちがう表現が見られる。

中学校1年の教科書では、もっとも詳しく述べてあると思われる大阪書籍が次のように書いている。「紙の上に直線にかくには、ふつう、定木を使う。正しい定木のへりを直線とみなしているのである。大工がすみなわを使うのは、木材の上に直線を引く手軽な方法である。強く張った細い糸を直線とみなしているのである。また、紙の折りめを利用して直線を引くことがある。これは、平面の交わりが直線と考えられるからである。

直線の交わりは点になる。点は位置を示すもので、ふつう、えんぴつの先などでしるしをつけたリ、二つの短い線を交わらせたりして、その位置を表わす。

1点Aを通る直線は無数にあるが、Aのほかにもう一つの点Bを通る直線は、一つだけである。」

以上のような教科書による学習からは、位置のみあって、大きさのないものとしての点、長さと位置だけあって、巾も厚さもないものとしての線などを考えることができないのは当然であろう。

定木で引いた直線，ぴんとはった糸で表わされる直線，このようなものが直線だと示されたとき，児童は，点や直線をどのようにうけとめるだろうか。このことは後で明かにしよう。

(2) MSG* のテキストではどのようにとりあげているか。

MSG の Mathematics for the Elementary School, Grade 4 Part 1 では，図形を「点集合」として捉えようとする立場をとっている。したがってまず点の概念作りから始まる。

「点とは何でしょうか。それは鋭った鉛筆の先端でしょうか。針の先端でしょうか。鉛筆でかいた小さな印でしょうか。幾何学で“点”，というのは何のことをしらべましょう。」で始まって，「幾何学における点は，空間の正確な位置を表わします。眼に見ることができない程小さいものを想像することができますか。点は小さくて大きさがありません。顕微鏡がなければ細菌を見ることはできません。しかし細菌は多くの点を蔽っています。……」

このような調子で「点」の説明をし，次に線は無数に多くの点の集まりであることを理解させようとしている。このような考え方が点や線の本来の意味を理解させるのに成功したかどうかは，いまのところ明かでない。しかし図形を点集合として捉えるいき方は，非常に魅力的であり，今後の図形教育の一つ方向を示唆するものであると思われる。しかし，それが可能なためには，「位置のみあって大きさのないものとしての点」の概念が把握され得ることが必要である。

(3) 中学生は点や線をどのように認識しているか。

現行の教育課程で教育された中学生が，点や線をどのように認識しているかを調査した結果を次に述べる。***

(イ) 次のA～Iで，点といえるものの記号を○で囲みなさい。

図7

A B C D E F G H I

(ロ) 次のA～Gで，線といえるものの記号を○で囲みなさい。

図8

A B C D E F G

(イ)(ロ)ともAのところは何もかいてないのは，あまり細くかいたので，見えないのだと説明した。調査対象は1年50名，自然学級，2年100名，能力別編成AおよびCクラス，3年50名，能力別編成Cクラスである。

まず(イ)(ロ)に対する生徒の選択の様子は次のとおりである。

* School Mathematics Study Group

*** 谷山市谷山中学校，前田勉氏による

(イ)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1 年	1	5	13	23	12	5	3	3	3
2 年 (A)	6	27	19	16	14	5	3	3	3
2 年 (C)	1	3	15	21	11	4	1	1	1
3 年 (C)	4	25	34	24	19	11	10	10	10

(ロ)	A	B	C	D	E	F	G
1 年	1	10	33	4	4	4	4
2 年 (A)	6	29	25	10	6	4	4
2 年 (C)	0	18	26	9	1	1	1
3 年 (C)	2	35	35	21	17	16	18

(ロ)でいえばB, Cなどの線に集中し, ある程度以上太くなると, 線とは認めないものが多くなっている。しかしなかには, どんなに巾が広くても, たとえば校底に一ぱいの巾でも, それをずっとのばせば線になると考えている生徒もいる。(技術科で, 線を細線, 太線と区別し, それぞれの線をどれくらい太さでかくかを指導していることに注目すべきであろう。)

次に点と線との関係について

- (イ) 長さ1 cmの線には, いくつの点をとれるか。
- (ロ) 長さ1 mmの線には, いくつの点をとれるか。
- (ハ) 長さ0.0001 mmの線には, いくつの点をとれるか。

結果は次のとおりである。

- (イ) 1年・無数(2人), 10(13人), その他(19人)
2年A・無数(34人), 多数(4人), その他(19人)
2年C・10(15人), 5(3人), 20(4人) 2(4人), その他(12人)
3年C・無数(12人), 10(7人), 多数(3人), その他(13人)
- (ロ) 1年・無数(2人), 1(10人), 2(10人)とれない(1人), その他(7人)
2年A・無数(28人), 多数(1人), 2(5人), その他(11人)
2年C・1(13人), 2(8人), 3(6人), その他(7人)
3年C・無数(12人), 1(9人), 2(8人), 多数(1人), その他(9人)
- (ハ) 1年・無数(2人), とれない(3人), 1(1人), その他(12人)
2年A・無数(21人), とれない(10人) 1(7人), その他(6人)
2年C・1(14人), とれない(7人), その他(9人)
3年C・無数(12人), とれない(9人), 1(6人), その他(4人)

長さ0.0001mmの線には, 点をとれないというものが合計29人いることは注目に値する。2年Aでは無数にとれるというものが他のクラスに較べて多いが, それでも, 線の長さが短くなるにつれて, その人数が減少していることも面白い。

- (イ) 次の図のように, 一つの平面に球が接している。接しているところは, (点, 線, 円, 三角形, 四角

形)である。

	点	線	円	三角形	四角形
1 年	13	5	21	3	0
2 年 (A)	30	4	15	2	0
2 年 (C)	10	3	25	6	2
3 年 (C)	13	5	24	2	0

以上の調査の結果が明かにするように、中学生が「点」というとき、それは鉛筆で印をつけた、ほどよい大きさの点であり、線というとき思いうかべるのは、ほどよい太さをもった線なのである。これらは実は、点や線ではないのであって、点とは、大きのないものであるというようなことを考えねばならない必然性を生み出す指導は、いまのところなされていない。

(4) 点や線の正しい概念の形成

現行の小中学校の教科書からわかるように、点や線を、位置のみあって大きさのない点、長さのみあって、巾や厚さのないものとしての線として認識することは、いまの小中学生に要求されていない。それでは、点や線の正しい概念は、高等学校以上の課程でとりあげるべきものなのか。また、大きさのある点、巾のある線として、点や線を考えて、図形教育に支障はないものなのか。2点間の距離というとき、点に大きさがあっては、どこを測ればよいのか、平行線間の距離というとき、線に巾があれば、どこを測ればよいのか、点や線についての正しい概念なしには考えられない問題が、いい加減に処理されているのである。

しかし、大きさのない点、巾のない線が、思考の結果としてのみ存在し、眼に見ることができなければ、それを実在のものとして把握することは、小中学生には困難である。したがって、点や線を直観化する工夫が必要である。SMSG では、まず点についての概念を作り、点の集まりとしての線を考えているが、ここでは、まず線の内容からはいり、線と線との交わりとして点を考えようというのである。

図9のように画洋紙の半分を墨でぬりつぶすと、黒くぬられた部分と、ぬられない白い部分とに分けられる。この黒い部分と白い部分との境い目が実は「線」である。

このような境い目を、中学生はどのように見るか、つまり境い目には、巾がないこと、境い目は線であることなどをどう捉えているかを見よう。※

図9



※ 谷山中学校・前田勉氏による

	3 年 C	2 年 C	2 年 A	1 年	計
巾がある 線である	9	10	5	9	33
巾がある 線でない	3	4	2	4	13
巾がない 線である	14	16	19	13	62
巾がない 線でない	8	11	19	6	44

境い目にも巾があるといっている生徒が46名いるが、巾はなくて、線であると認めている者が多い。巾はないといいながら、それは線でないという者が44名もいるが、それは従来の線についての誤った概念のためと思われる。図9の境い目を線として認識できれば、その交点としての点を考えることは容易である。点や線についての誤った概念が作られる前に、図9のような直観的な方法で、点や線の概念が把握できるかは今後の実験に待ちたい。

現在多くの小中学生が、点を大きさのあるもの、線を巾のあるものとして考えている以上、正しい点や線の概念は、点や線をそのように考えることによっておこる矛盾を論理的に考察することによって

大きさがあつたのでは、点とは考えられない。

点は、大きさのないものでなければならない。

巾があつたのでは、線とは考えられない。

線は、巾のないものでなければならない。

という認識を経ることによってはじめて把握される。このような過程によって、彼等の点や線についての概念が、どのように変っていくかは、次の機会に報告したい。