

A Disc-Shaped Interface Crack in a Laminated Plate Subject to a Uniform Temperature Change

○正 深川和良 (鹿大院)
正 戸谷眞之 (鹿大)

正 有富正男 (鹿大)

Kazuyoshi FUKAGAWA, Masao ARITOMI, and Masayuki TOYA
Dept. of Mechanical Engineering, 1-21-40, Korimoto, Kagoshima.

1. 緒言

円形はく離を有する積層円板が一様な温度変化を受ける場合を想定し、微小たわみの板理論に基づき熱応力による板の変形、およびはく離のエネルギー解放率を解析する。

2. たわみの解析

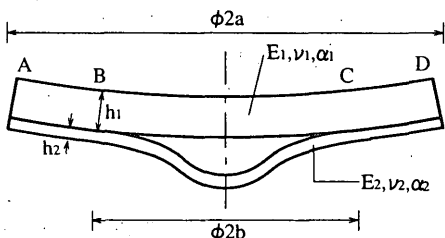


Fig. 1 Bending of a circular laminated plate containing a disk-shaped crack due to uniform temperature change

図1に示すような中央に円形はく離を有する、材質の異なる2枚の弾性円板をはり合わせて作られた積層円板を考える。等方弾性体を仮定し、ヤング率、ポアソン比、熱膨張係数、板厚を上板については $E_1, \nu_1, \alpha_1, h_1$ 、下板については $E_2, \nu_2, \alpha_2, h_2$ とする。また、円板の半径を a 、円形はく離の半径を b とする。一様な温度変化 T を受けるときの熱応力によるたわみを解析する。仮に $\alpha_1 < \alpha_2$ とすると温度上昇($T > 0$)により、図1に示すような下向きに凸となるような軸対称のたわみが生じる。

まず、軸対称変形を仮定し、この時の積層円板の平衡方程式を求め、基準面を平面ひずみ条件下の積層はりの中立軸と同じ位置に定めると、たわみおよび半径方向変位 u_0 に関する方程式は簡単になる。円板上面から基準面までの距離 η は以下の式で与えられる。

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E_1 h_1^2 + E_2 h_2^2}{1 - \nu_1^2 + 1 - \nu_2^2} \right\} / \left\{ \frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{1 - \nu_1^2 + 1 - \nu_2^2} \right\} \dots (1)$$

基準面に関する単位長さ当たりのモーメント M_r 、およびせん断力 Q_r は以下ようになる。

$$M_r = B_{12} \frac{u_0}{r} - D \frac{d^2 w}{dr^2} - D_{12} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - QT \dots (2)$$

$$Q_r = -D \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) \dots (3)$$

B_{12}, D, D_{12}, Q は付録に定義されている定数である。

板上に分布力が作用しない場合は平衡方程式は均質板に対するものと同じになり、基準面の定義を考慮すると、結

局次式のようになる。

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0 \dots (4)$$

一方、半径方向変位は

$$u_A = A_1 r + A_2 / r \dots (5)$$

で与えられる (A_1, A_2 は未定定数)。

円環部分のたわみを w_A とすると、図2に示すような自由体線図に対し式(4)および $Q_r = 0$ より

$$w_A = C_{1A} + C_{2A} \ln(r/a) + C_{3A} r^2 \dots (6)$$

で与えられる。ここで未定定数 $C_{1A} \sim C_{3A}$ は $r = a, b$ における条件 $w_A(a) = 0, M_r(a) = 0, M_r(b) = M_i$ から求まる A_1, A_2, M_i によって表される未定定数である。

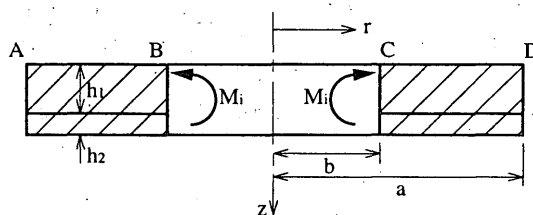


Fig. 2 Free-body diagram of the bonded part

次にはく離部分のたわみ曲線を求める。はく離部分を周辺でヒンジ止めされた重ね円板としてモデル化する。ヒンジの作用は上の円板に対して円板下縁部に中心に向かって水平方向に作用する引張力(単位長さ当たり Z とする)、下の円板に対して円板上縁に作用する圧縮力($-Z$)に置き換えることができる。以下 Z を断面力と呼ぶ。はく離面は非接触であると仮定する。自由体線図は図3に示されるものとなる。

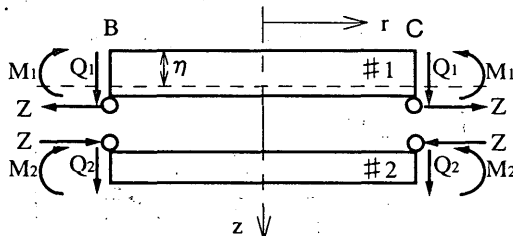


Fig. 3 Free-body diagram of the delaminated part

上下の円板のたわみをそれぞれ w_{B1}, w_{B2} とするとたわみの完全解は以下のような。

$$w_1 = B_1 I_0(k_1 r) - K_{B1} / k_1^2, \quad k_1 = \sqrt{Z/D} \dots (7)$$

$$w_2 = B_2 J_0(k_2 r) - K_{B2} / k_2^2, \quad k_2 = \sqrt{Z / D_2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで K_{B1} , K_{B2} , B_1 , B_2 は未定定数であり, J_0 , I_0 はそれぞれ零次の第一種ベッセル関数および第一種変形ベッセル関数である. $r=b$ におけるたわみと傾きの連続条件, モーメントの連続条件 $M_1 + M_2 = M_i$, $r=a$ において面内力 = 0 なる条件を課し, また近似的に $r=b$ においても面内力 = 0 とする. これらの条件からすべての未定定数が断面力 Z で表される.

最後に断面力 Z を決定する. ヒンジ止めされた部分の縁は, 変形後もはく離部分の上下の円板の各々の中立面と直角を保つという条件により, 以下の式を得る.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dw_1}{dr} \right)^2 dr + \frac{1-\nu_1}{E_1 h_1} bZ + \alpha_1 T b \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^b \left(\frac{dw_2}{dr} \right)^2 dr - \frac{1-\nu_2}{E_2 h_2} bZ + \alpha_2 T b \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

3. たわみ曲線の数値解例とエネルギー解放率

ここで例として, 円板の半径を $a=300\text{mm}$, はく離半径は $b=200\text{mm}$, 上層が厚さ $h_1=10\text{mm}$ の SUS304 材, 下層に $h_2=5\text{mm}$ のアクリル材を用いたモデル材について式(9)の数値解を得, それに基づいて得られたたわみ曲線を図4に示す. また, 得られたたわみの $r=0$ における上板と下板のたわみの差 dw と温度差 T の関係を図5に示す. 温度差が小さい時はたわみの差も小さいことがわかる. しかしある温度差付近にてその挙動は変化し急激にたわみの差が増大, すなわち, 座屈に類似した挙動が生じていることがわかる.

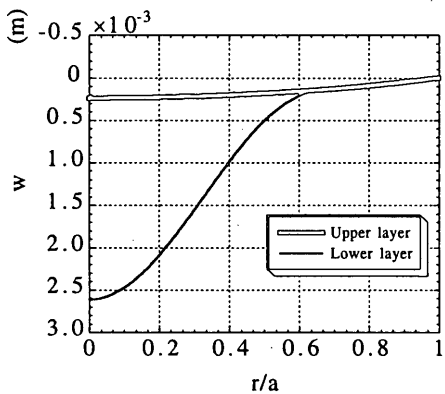


Fig.4 Deflection curves at T=20°C

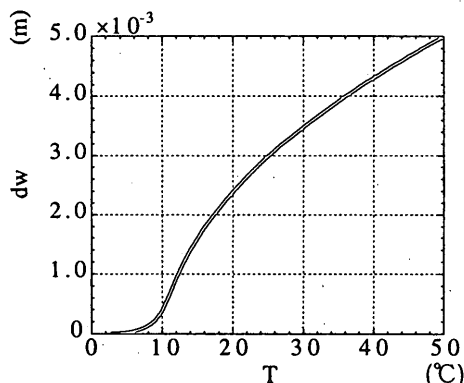


Fig.5 Difference of deflection at the center of the plates between upper and lower-layer

Suo と Hutchinson⁽¹⁾ は一般の負荷を受けている単位幅の積層はりのはく離のエネルギー解放率を与える公式を二次元弾性論に基づいて導いた. 彼らの結果に基づいて, エネルギー解放率を計算した例を図6に示す. b/a が小さいと G はほぼ一定であるが, b/a の値がある値になると G は減少する. すなわちある一定温度差でき裂が進展した場合, ある長さまでは進展速度一定でき裂は進展するが, それ以上では速度は低下, ついには進展停止することが予想される.

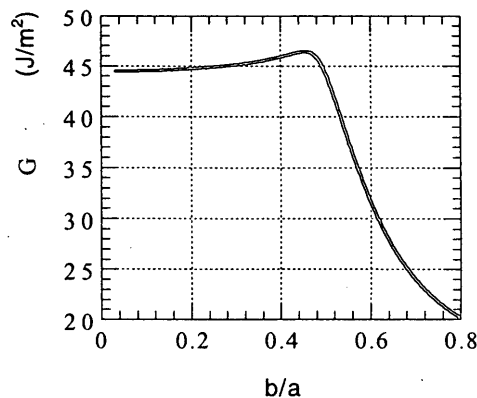


Fig.6 Variation of the energy release rate with crack radius at T=20°C

付録

式(2), (3)における定数は以下の通りである.

$$B_{12} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nu_1 E_1 h_1}{1-\nu_1^2} (h_1 - 2\eta) + \frac{\nu_2 E_2 h_2}{1-\nu_2^2} (h + h_1 - 2\eta) \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{3} \left[\frac{E_1}{1-\nu_1^2} \{ \eta^3 - (\eta - h_1)^3 \} \right. \\ & \left. + \frac{E_2}{1-\nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right] \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{12} = & \frac{1}{3} \left[\frac{\nu_1 E_1}{1-\nu_1^2} \{ \eta^3 - (\eta - h_1)^3 \} \right. \\ & \left. + \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2} \{ (h - \eta)^3 + (\eta - h_1)^3 \} \right] \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$Q = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha_1 E_1 h_1}{1-\nu_1} (h_1 - 2\eta) + \frac{\alpha_2 E_2 h_2}{1-\nu_2} (h + h_1 - 2\eta) \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

文献

(1) Suo, Z. and Hutchinson, J. W., Int. J. Fract., 43(1990), 1-18